

# Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

# Motivacija

Želimo poiskati preprosto  $C^1$ -ploskev, ki v danih točkah (iz  $\mathbb{R}^2$ ) interpolira predpisane vrednosti in parcialne odvode (npr. od neke funkcije).

Ideja: naredimo triangulacijo na točkah in definiramo lokalno shemo na vsakem trikotniku posebej, kjer poskrbimo za ustrezna ujemanja na presekih (stranicah) trikotnikov. Tu si bomo pomagali z Bézierjevimi krpami stopnje 3.

# Klasična Bézierjeva krpa stopnje 3

Spomnimo se, da je parametrizacija Bézierjeve krpe stopnje 3 na nekem trikotniku podana s točkami  $b_{ijk}$ ,  $i + j + k = 3$  kot:

$$\begin{aligned}P(u, v, w) &= \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} B_{ijk}^3(u, v, w) \\&= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\&\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\&\quad + w^3 b_{003} + 6uvw b_{111}\end{aligned}$$

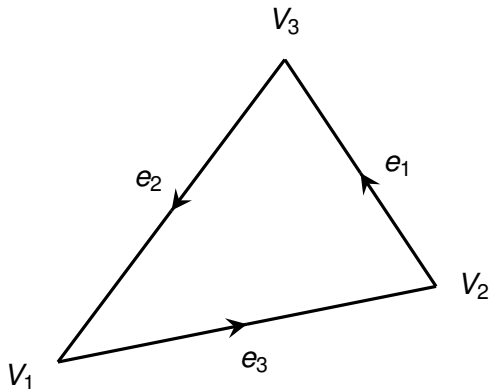
in njen odvod v smeri  $\mathbf{z} = (z_u, z_v, z_w)$  enak:

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial P}{\partial u} z_u + \frac{\partial P}{\partial v} z_v + \frac{\partial P}{\partial w} z_w = \langle \text{grad}(P), \mathbf{z} \rangle,$$

kjer  $u, v, w$  predstavljajo baricentrične koordinate v danem trikotniku.

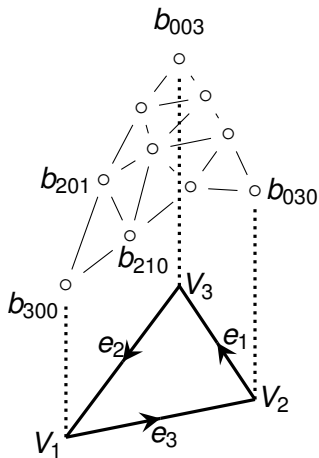
# Shema

Recimo, da triangulacijo že imamo, in vzemimo nek trikotnik v domeni:



# Shema

Določiti moramo točke kontrolne mreže  $b_{ijk}$  nad tem trikotnikom:



# Shema

Predpisane imamo vrednosti  $F(V_i)$  in parcialne odvode  $F_x(V_i), F_y(V_i)$  za  $V_i = (x_i, y_i)$   $i = 1, 2, 3$ . Od tod lahko dobimo smerne odvode v smeri stranic kot:

$$F_{e_i} = \frac{\partial F}{\partial e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1})F_x + (y_{i-1} - y_{i+1})F_y = \langle e_i, \text{grad}(F) \rangle$$

S pomočjo tega lahko definiramo točke “okoli” enega oglišča trikotnika:

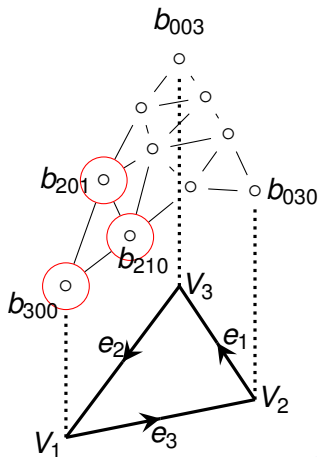
$$b_{300} = F(V_1)$$

$$b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}$$

$$b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$

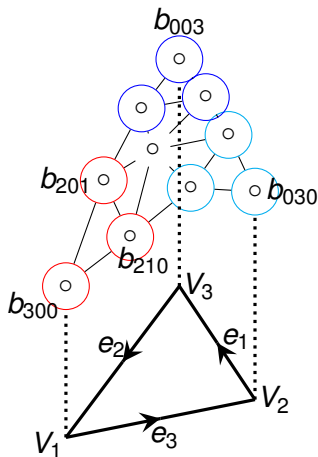
# Shema

$$b_{300} = F(V_1), b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}, b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$



# Shema

Na analogen način določimo še ostale “robne” točke:





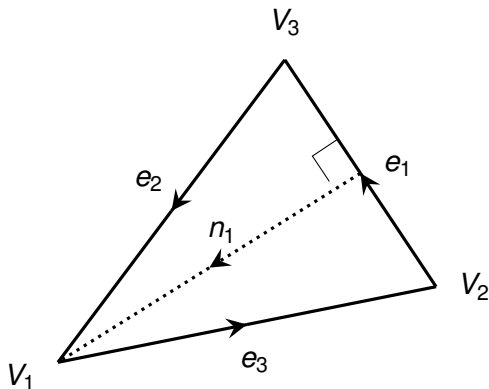
Določiti moramo še  $b_{111}$ . Tu bomo imeli 3 ločene izbire  $b_{111}^1$ ,  $b_{111}^2$ ,  $b_{111}^3$ , kjer bo  $b_{111}^m$  tak, da bo zagotavljal  $C^1$ -zveznost čez stranico  $e_m$ .

Poglejmo pogoje za stranico  $e_1$ , pri ostalih dveh pa potem naredimo simetrično.

# Lokalna shema

Poglejmo si notranjo normalo  $n_1$  na stranico  $e_1$ . Velja:

$$n_1 = -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \frac{e_1}{|e_1|}$$



# Lokalna shema

Če to enačbo razpišemo v baricentričnih koordinatah:

$$\begin{aligned}n_1 &= -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \cdot \frac{e_1}{|e_1|} \\&= -(-1, 1, 0) - h_1(0, -1, 1) \\&= (1, h_1 - 1, -h_1),\end{aligned}$$

kjer je

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}$$

Če označimo s  $P_1$  parametrizacijo B, ki jo dobimo iz prej določenih  $b_{ijk}$  in  $b_{111}^1$ , lahko iz formule poračunamo  $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$ .

# Lokalna shema

Odvod  $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$  se na stranici  $e_1$  (kjer je  $u = 0$ ) poenostavi v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3l_1 v^2 + 6l_2 vw + 3l_3 w^2,$$

kjer so:

$$l_1 = b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030})$$

$$l_2 = b_{111}^1 - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021})$$

$$l_3 = b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012})$$

# Lokalna shema

Z upoštevanjem  $w = 1 - v$ , lahko enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3 \left( (l_1 - 2l_2 + l_3)v^2 + 2(l_2 - l_3)v + l_3 \right)$$

Zdaj izberemo tak  $b_{111}^1$ , da bo ta normalni odvod linearen na stranici  $e_1$ , tj. linearen v parametru  $v$ . Dobimo torej enačbo:

$$l_1 - 2l_2 + l_3 = 0$$

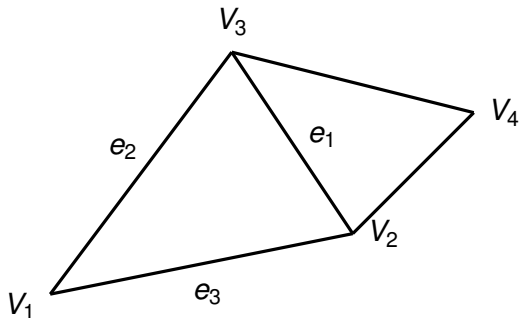
Od tod lahko izrazimo:

$$b_{111}^1 = \frac{1}{2} \left( b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) \right. \\ \left. + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{030} - b_{012}) \right)$$

# Lokalna shema

Zakaj je to dovolj za  $C^1$  zveznost čez stranico  $e_1$ ?

Postopek ponovimo na sosednjem trikotniku in dobimo linearen normalen odvod (v nasprotno smer), kar pomeni da je linearen tudi normalen odvod v smeri 1. trikotnika. Te dva odvoda se ujemata v ogliščih  $V_2$ ,  $V_3$  (shema tam interpolira odvode), torej povsod, ker sta linearna.



# Celotna shema

Parametrizacija na celotnem trikotniku bo konveksna kombinacija shem  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ :

$$\begin{aligned} P(u, v, w) &= \frac{v^2 w^2 P_1 + w^2 u^2 P_2 + u^2 v^2 P_3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \\ &= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\ &\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\ &\quad + w^3 b_{003} \\ &\quad + 6uvw \frac{v^2 w^2 b_{111}^1 + w^2 u^2 b_{111}^2 + u^2 v^2 b_{111}^3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \end{aligned}$$

# Aproksimacija parcialnih odvodov

Naš vhodni podatek so le točke v prostoru, ker pa smo v metodi predpostavili poznavanje parcialnih odvodov v vsaki od teh točk, moramo te oceniti. Recimo, da imamo dane točke

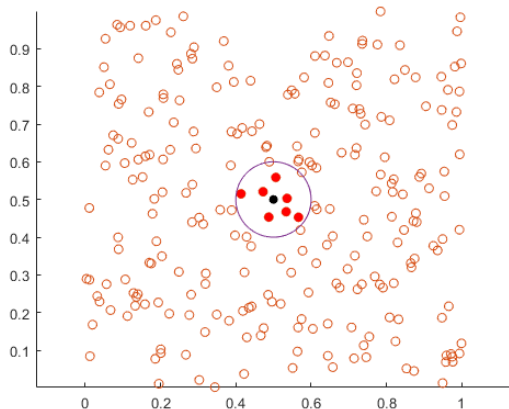
$$P = (p_i)_i = (x_i, y_i, z_i)_i$$

in ocenjujemo parcialna odvoda v testni točki  $p_k$ .



# 1. Korak

Odvoda v  $p_k$  bomo ocenili s pomočjo točk v neki njeni okolici. In sicer določimo radij  $r_k$  in obravnavajmo točke  $p_j \in P$  za katere  $d((x_j, y_j), (x_k, y_k)) = d_j^k < r_k$ . Recimo, da so indeksi teh  $1, \dots, n_k$ .



## 2. Korak

S formulo

$$w_j^k = \frac{r_k - d_j^k}{r_k \cdot d_j^k}$$

je definirana utež točke  $p_j$ , ki izraža njen vpliv na odvod testne točke  $p_k$ . Ideja je spet ta, da so točke bližje  $p_k$  bolj utežene, saj nam o odvodu povejo več.

### 3. Korak

Definiramo interpolacijski polinom za  $p_k$ , stopnje 2

$$p(x, y) = z_k + a \cdot (x - x_k)^2 + b \cdot (x - x_k) \cdot (y - y_k) \\ + c \cdot (y - y_k)^2 + d \cdot (x - x_k) + e \cdot (y - y_k),$$

kjer so  $a, b, c, d, e$ , nedoločeni členi in velja

$$p_x(x_k, y_k) = d \quad \text{in} \quad p_y(x_k, y_k) = e.$$

Te vrednosti bodo ocene za parcialna odvoda v točki  $p_k$ .

Neznane člene določimo s pogojem, da s polinomom želimo čim boljše aproksimirati vrednosti  $z_j$  v točkah  $(x_j, y_j)$  za  $j = 1, \dots, n_k$ .

### 3. Korak

Minimiziramo torej

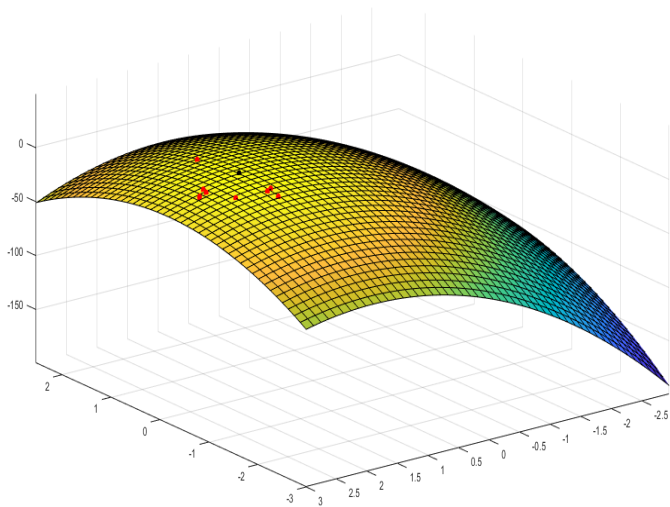
$$\sum_{j=1}^{n_k} (w_j^k \cdot (p(x_j, y_j) - z_j))^2 = \|W_k A u - W_k v\|^2,$$

kjer je  $u = [a, b, c, d, e]^T$  iskan vektor,  $A$  matrika

$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_k)^2 & (x_1 - x_k)(y_1 - y_k) & (y_1 - y_k)^2 & (x_1 - x_k) & (y_1 - y_k) \\ (x_2 - x_k)^2 & (x_2 - x_k)(y_2 - y_k) & (y_2 - y_k)^2 & (x_2 - x_k) & (y_2 - y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n_k} - x_k)^2 & (x_{n_k} - x_k)(y_{n_k} - y_k) & (y_{n_k} - y_k)^2 & (x_{n_k} - x_k) & (y_{n_k} - y_k) \end{vmatrix},$$

$W_k = \text{diag}(w_1^k, w_2^k, \dots, w_{n_k}^k)$  ter  $v = [z_1 - z_k, \dots, z_{n_k} - z_k]^T$ .

### 3. Korak



# Interpolacija razsevnih podatkov

Radi bi interpolirali neko množico točk  $P$  v prostoru s shemo, ki smo jo predstavili prej. Konstrukcija poteka v treh korakih

- 1 V vsaki točki  $p_k$  ocenimo parcialne odvode
- 2 Trianguliramo točke  $(x_i, y_i)_i$
- 3 Na vsakem trikotniku  $T$  konstruiramo lokalno shemo z metodo Goodman-Said in shranimo matriko

$$B_T = \begin{vmatrix} b_{300} & b_{210} & b_{120} & b_{030} \\ b_{201} & \square & b_{021} & \square \\ b_{102} & b_{012} & \square & b_{1112} \\ b_{003} & \square & b_{1113} & b_{1111} \end{vmatrix}$$

Matrike na vsakem trikotniku triangulacije podajo naš zlepek.

# Prednost uporabljene sheme

Uporabljena shema je koristna, ker zahteva le aproksimacijo prvih odvodov v danih točkah. Če primerjamo z Argyrisovim zlepkom, je njegova aproksimacija povprečno boljša, a zahteva poznavanje / oceno drugih parcialnih odvodov, kar pa ga za naš problem naredi manj primerne.