

Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

Aproksimacija parcialnih odvodov

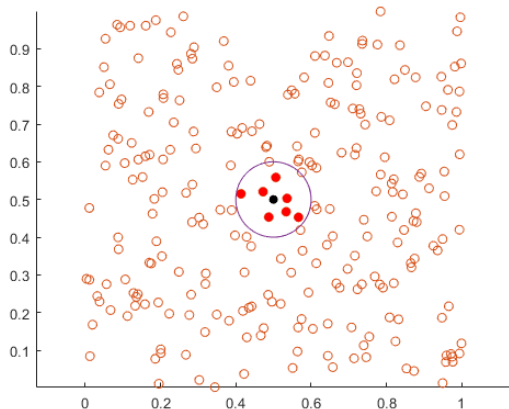
Naš vhodni podatek so le točke v prostoru, ker pa smo v metodi predpostavili poznavanje parcialnih odvodov v vsaki od teh točk, moramo te oceniti. Recimo, da imamo dane točke

$$P = (p_i)_i = (x_i, y_i, z_i)$$

in ocenjujemo parcialna odvoda v testni točki p_k .

1. Korak

Odvoda v p_k bomo ocenili s pomočjo točk v neki njeni okolici. In sicer določimo radij r_k in obravnavajmo točke $p_j \in P$ za katere $d((x_j, y_j), (x_k, y_k)) = d_j^k < r_k$. Recimo, da so indeksi teh $1, \dots, n_k$.



2. Korak

S formulo

$$w_j^k = (r_k - d_j^k) / (r_k \cdot d_j^k)$$

je definirana utež točke p_j , ki izraža njen vpliv na odvod testne točke p_k . Ideja je spet ta, da so točke bližje p_k bolj utežene, saj nam o odvodu povejo več.

3. Korak

Definiramo interpolacijski polinom za p_k , stopnje 2 in dveh spremenljivk

$$p(x, y) = z_k + a \cdot (x - x_k)^2 + b \cdot (x - x_k) \cdot (y - y_k) \\ + c \cdot (y - y_k)^2 + d \cdot (x - x_k) + e \cdot (y - y_k),$$

kjer so a, b, c, d, e , nedoločeni členi in velja

$$p_x(x_k, y_k) = d \quad \text{in} \quad p_y(x_k, y_k) = e.$$

3. Korak

Naravno si želimo, da bi ta polinom dobro aproksimiral vrednosti z_j za $j = 1, \dots, n_k$. Minimiziramo torej

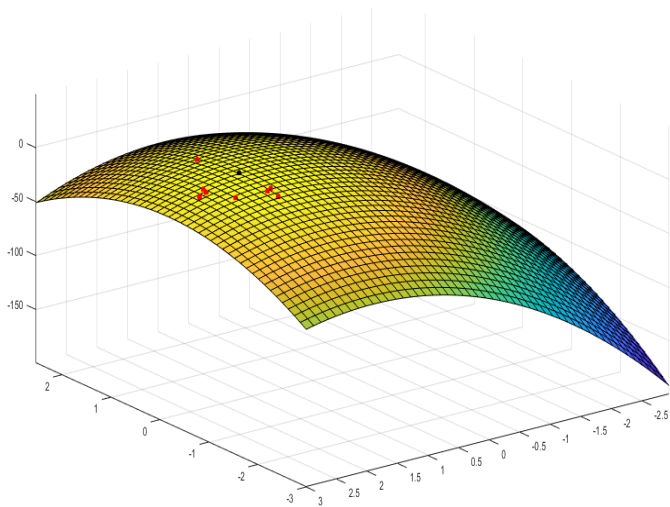
$$\sum_{j=1}^{n_k} (w_j^k \cdot (p(x_j, y_j) - z_j))^2 = \|W_k A u - W_k v\|^2,$$

kjer je $u = [a, b, c, d, e]^T$ iskan vektor, A matrika

$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_k)^2 & (x_1 - x_k)(y_1 - y_k) & (y_1 - y_k)^2 & (x_1 - x_k) & (y_1 - y_k) \\ (x_2 - x_k)^2 & (x_2 - x_k)(y_2 - y_k) & (y_2 - y_k)^2 & (x_2 - x_k) & (y_2 - y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n_k} - x_k)^2 & (x_{n_k} - x_k)(y_{n_k} - y_k) & (y_{n_k} - y_k)^2 & (x_{n_k} - x_k) & (y_{n_k} - y_k) \end{vmatrix},$$

$W_k = \text{diag}(w_1^k, w_2^k, \dots, w_{n_k}^k)$ ter $v = [z_1 - z_k, \dots, z_{n_k} - z_k]^T$.

3. Korak



Aproksimacija razsevnih podatkov

Radi bi aproksimirali neko množico točk P v prostoru s shemo, ki smo jo predstavili prej. Konstrukcija poteka v treh korakih

- 1 V vsaki točki p_k ocenimo parcialne odvode
- 2 Trianguliramo točke $(x_i, y_i)_i$
- 3 Na vsakem trikotniku T konstruiramo lokalno shemo z metodo Goodman-Said in shranimo matriko

$$B_T = \begin{vmatrix} b_{300} & b_{210} & b_{120} & b_{030} \\ b_{201} & \square & b_{021} & \square \\ b_{102} & b_{012} & \square & b_{1112} \\ b_{003} & \square & b_{1113} & b_{1111} \end{vmatrix}$$

Podatki na vseh trikotnikih podajo našo aproksimacijo.

Druge sheme

Uporabljena shema je koristna, ker zahteva le aproksimacijo drugih odvodov v danih točkah. Pripomnimo pa, da bi z oceno drugih odvodov lahko uporabili kar Argyrisov zlepek.