Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

Aproksimacija parcialnih odvodov

Naš vhodni podatek so le točke v prostoru, ker pa smo v metodi predpostavili poznavanje parcialnih odvodov v vsaki od teh točk, moramo te oceniti. Opomnimo, da bi z oceno drugih

odvodov lahko uporabili kar Argyrisov zlepek. Recimo, da

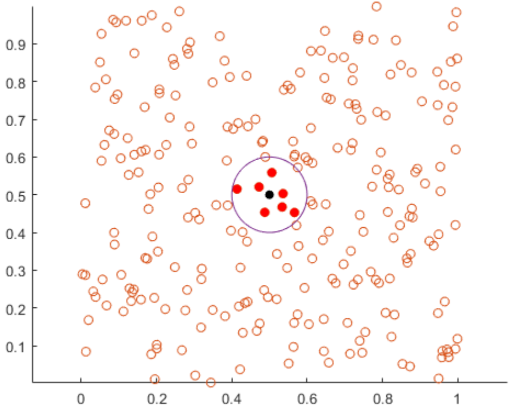
imamo dane točke

$$P = (p_i)_i = (x_i, y_i, z_i)$$

in ocenjujemo parcialna odvoda v testni točki p_k.

1. Korak

Odvoda v p_k bomo ocenili s pomočjo točk v neki njeni okolici. In sicer določimo radij r_k in obravnavajmo točke $p_j \in P$ za katere $d((x_j, y_j), (x_k, y_k)) = d_j^k < r_k$, ter indekse teh točk označimo z J_k.



2. Korak

S formulo

$$w_j^k = (r_k - d_j^k)/(r_k \cdot d_j^k)$$

je definirana utež točke p_j, ki izraža njen vpliv na odvod testne točke p_k. Ideja je spet ta, da so točke bližje p_k bolj utežene, saj nam o odvodu povejo več.

3. Korak

Definiramo interpolacijski polinom za p_k, stopnje 2 in dveh spremenljivk

$$\begin{aligned} p(x, y) = z_k + a \cdot (x - x_k)^2 + b \cdot (x - x_k) \cdot (y - y_k) \\ + c \cdot (y - y_k)^2 + d \cdot (x - x_k) + e \cdot (y - y_k), \end{aligned}$$

kjer so a, b, c, d, e, nedoločeni členi in velja

$$p_x(x_k, y_k) = d \quad \text{in} \quad p_y(x_k, y_k) = e.$$

3. Korak

Naravno si želimo, da bi ta polinom dobro aproksimiral vrednosti z_j za $j \in J_k$. To izrazimo z minimizacijskim problemom najmanjših kvadratov

$$\sum_{j \in J_k} (w_j^k \cdot (p(x_j, y_j) - z_j))^2 = ||W_k A u - W_k v||^2,$$

kjer je matrika A enaka

$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_k)^2 & (x_1 - x_k)(y_1 - y_k) & (y_1 - y_k)^2 & (x_1 - x_k) & (y_1 - y_k) \\ (x_2 - x_k)^2 & (x_2 - x_k)(y_2 - y_k) & (y_2 - y_k)^2 & (x_2 - x_k) & (y_2 - y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n_k} - x_k)^2 & (x_{n_k} - x_k)(y_{n_k} - y_k) & (y_{n_k} - y_k)^2 & (x_{n_k} - x_k) & (y_{n_k} - y_k), \end{vmatrix}$$

$W_k = \mathrm{diag}(w_1^k, w_2^k, \cdots, w_{n_k}^k)$ ter $v = [z_1 - z_k, \cdots, z_{n_k} - z_k]^T$.

3. Korak