Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

Motivacija

Želimo poiskati preprosto C^1-ploskev, ki v danih točkah (iz $\mathbb{R}^2$) interpolira predpisane vrednosti in parcialne odvode (npr. od neke funkcije).

Ideja: naredimo triangulacijo na točkah in definiramo lokalno shemo na vsakem trikotniku posebej, kjer poskrbimo za ustrezna ujemanja na presekih (stranicah) trikotnikov. Tu si bomo pomagali z Bézierjevimi krpami stopnje 3.

Klasična Bézierjeva krpa stopnje 3

Spomnimo se, da je parametrizacija Bézierjeve krpe stopnje 3 na nekem trikotniku podana s točkami $b_{ijk}, i+j+k=3$ kot:

$$
\begin{aligned}
P(u,v,w) = &\sum_{i+j+k=3} b_{ijk} B^3_{ijk}(u,v,w) \\
= &u^3 \; b_{300} + 3u^2 v \; b_{210} + 3u^2 w \; b_{201} + 3uv^2 \; b_{120} \\
&+ 3uw^2 \; b_{102} + v^3 \; b_{030} + 3v^2 w \; b_{021} + 3vw^2 \; b_{012} \\
&+ w^3 \; b_{003} + 6uvw \; b_{111}
\end{aligned}
$$

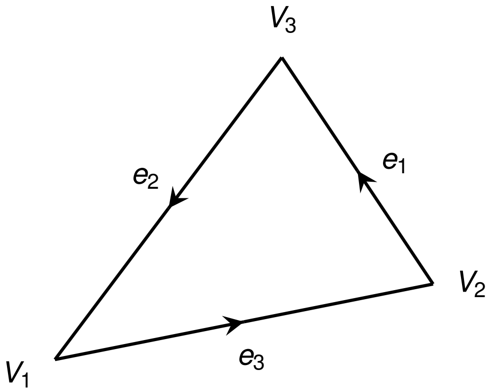
in njen odvod v smeri $\mathbf{z} = (z_u, z_v, z_w)$ enak:

$$
\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial P}{\partial u} z_u + \frac{\partial P}{\partial v} z_v + \frac{\partial P}{\partial w} z_w = < \mathrm{grad}(P), \mathbf{z} > ,
$$

kjer u, v, w predstavljajo baricentrične koordinate v danem trikotniku.

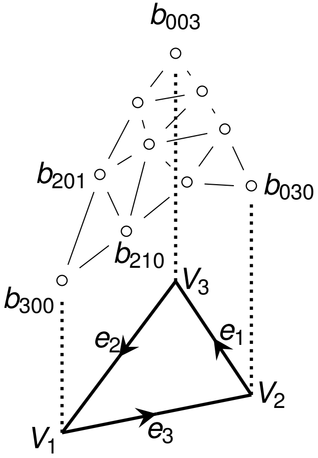
Shema

Recimo, da triangulacijo že imamo, in vzemimo nek trikotnik v domeni:



Shema

Določiti moramo točke kontrolne mreže b_{ijk} nad tem trikotnikom:



Shema

Predpisane imamo vrednosti $F(V_i)$ in parcialne odvode $F_x(V_i), F_y(V_i)$ za $V_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, 3$. Od tod lahko dobimo smerne odvode v smeri stranic kot:

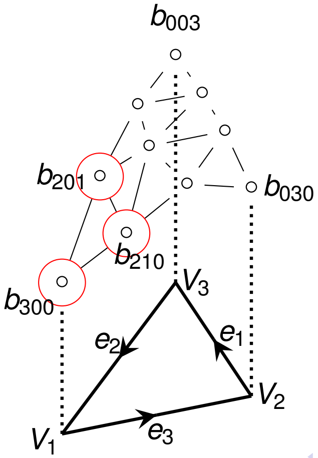
$$F_{e_i} = \frac{\partial F}{\partial e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1})F_x + (y_{i-1} - y_{i+1})F_y = < e_i, \mathrm{grad}(F) >$$

S pomočjo tega lahko definiramo točke “okoli” enega oglišča trikotnika:

$$\begin{aligned} b_{300} &= F(V_1) \\ b_{210} &= F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3} \\ b_{201} &= F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3} \end{aligned}$$

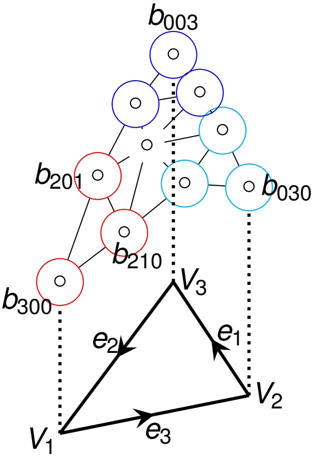
Shema

$$b_{300} = F(V_1), b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}, b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$



Shema

Na analogen način določimo še ostale “robne” točke:



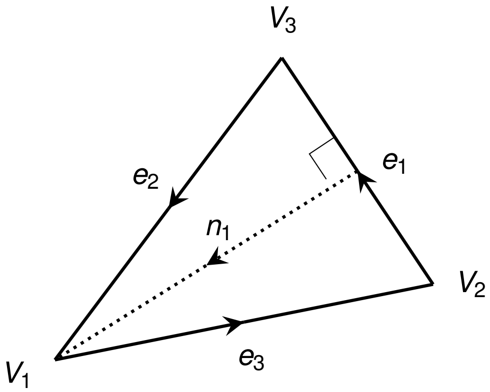
Shema

Določiti moramo še b_{111}. Tu bomo imeli 3 ločene izbire b^1_{111}, b^2_{111}, b^3_{111}, kjer bo b^m_{111} tak, da bo zagotavljal C^1-zveznost čez stranico e_m.
Poglejmo pogoje za stranico e_1, pri ostalih dveh pa potem naredimo simetrično.

Lokalna shema

Poglejmo si notranjo normalo n_1 na stranico e_1. Velja:

$$n_1 = -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \frac{e_1}{|e_1|}$$



Lokalna shema

Če to enačbo razpišemo v baricentričnih koordinatah:

$$\begin{aligned} n_1 =& -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \cdot \frac{e_1}{|e_1|} \\ =& -(-1,1,0) - h_1(0,-1,1) \\ =&(1, h_1 - 1, -h_1), \end{aligned}$$

kjer je

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}$$

Če označimo s P_1 parametrizacijo B, ki jo dobimo iz prej določenih b_{ijk} in b^1_{111}, lahko iz formule poračunamo $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$.

Lokalna shema

Odvod $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$ se na stranici e_1 (kjer je $u = 0$) poenostavi v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3 l_1 v^2 + 6 l_2 vw + 3 l_3 w^2,$$

kjer so:

$$\begin{aligned} l_1 &= b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030}) \\ l_2 &= b^1_{111} - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021}) \\ l_3 &= b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012}) \end{aligned}$$

Lokalna shema

Z upoštevanjem $w = 1 - v$, lahko enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3\left((l_1 - 2l_2 + l_3)v^2 + 2(l_2 - l_3)v + l_3\right)$$

Zdaj izberemo tak b^1_{111}, da bo ta normalni odvod linearen na stranici e_1, tj. linearen v parametru v. Dobimo torej enačbo:

$$l_1 - 2l_2 + l_3 = 0$$

Od tod lahko izrazimo:

$$b^1_{111} = \frac{1}{2}\Big(b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{030} - b_{012})\Big)$$

Lokalna shema

Zakaj je to dovolj za C^1 zveznost čez stranico e_1? Na sosednjem trikotniku bi naredili isti postopek in dobili linearen