Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

Motivacija

Želimo poiskati preprosto C^1-ploskev, ki v danih točkah (iz $\mathbb{R}^2$) interpolira predpisane vrednosti in parcialne odvode (npr. od neke funkcije).

Ideja: naredimo triangulacijo na točkah in definiramo lokalno shemo na vsakem trikotniku posebej, kjer poskrbimo za ustrezna ujemanja na presekih (stranicah) trikotnikov. Tu si bomo pomagali z Bézierjevimi krpami stopnje 3.

Klasična Bézierjeva krpa stopnje 3

Spomnimo se, da je parametrizacija Bézierjeve krpe stopnje 3 na nekem trikotniku podana s točkami $b_{ijk}, i+j+k=3$ kot:

$$
\begin{aligned}
P(u,v,w) = &\sum_{i+j+k=3} b_{ijk} B^3_{ijk}(u,v,w) \\
= &u^3\ b_{300} + 3u^2v\ b_{210} + 3u^2w\ b_{201} + 3uv^2\ b_{120} \\
&+ 3uw^2\ b_{102} + v^3\ b_{030} + 3v^2w\ b_{021} + 3vw^2\ b_{012} \\
&+ w^3\ b_{003} + 6uvw\ b_{111}
\end{aligned}
$$

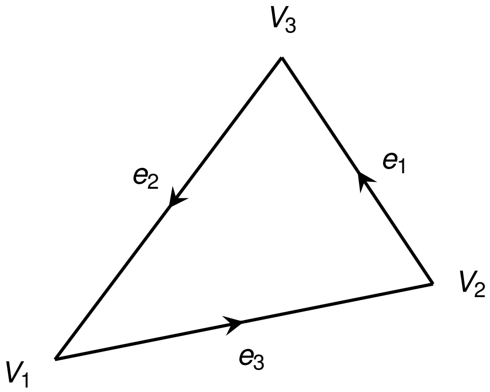
in njen odvod v smeri $\mathbf{z} = (z_u, z_v, z_w)$ enak:

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial P}{\partial u} z_u + \frac{\partial P}{\partial v} z_v + \frac{\partial P}{\partial w} z_w = \langle \mathrm{grad}(P), \mathbf{z} \rangle \,,$$

kjer u, v, w predstavljajo baricentrične koordinate v danem trikotniku.

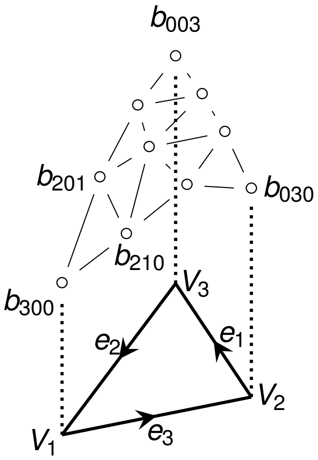
Shema

Recimo, da triangulacijo že imamo, in vzemimo nek trikotnik v domeni:



Shema

Določiti moramo točke kontrolne mreže b_{ijk} nad tem trikotnikom:



Shema

Predpisane imamo vrednosti $F(V_i)$ in parcialne odvode $F_x(V_i), F_y(V_i)$ za $V_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, 3$. Od tod lahko dobimo smerne odvode v smeri stranic kot:

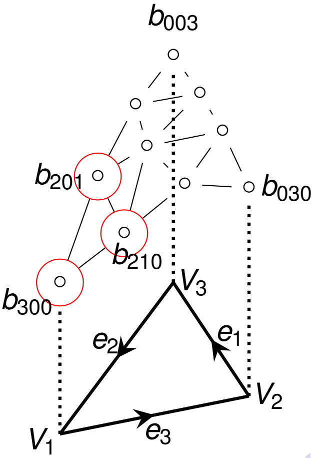
$$F_{e_i} = \frac{\partial F}{\partial e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1})F_x + (y_{i-1} - y_{i+1})F_y = \langle e_i, \mathrm{grad}(F)\rangle$$

S pomočjo tega lahko definiramo točke "okoli" enega oglišča trikotnika:

$$\begin{aligned} b_{300} &= F(V_1) \\ b_{210} &= F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3} \\ b_{201} &= F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3} \end{aligned}$$

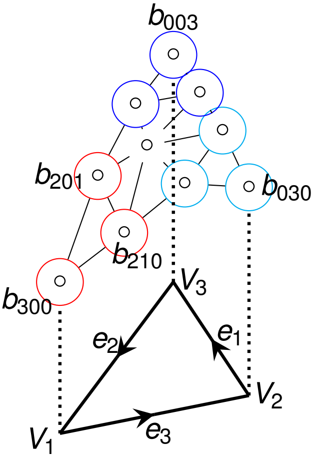
Shema

$$b_{300} = F(V_1), b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}, b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$



Shema

Na analogen način določimo še ostale "robne" točke:



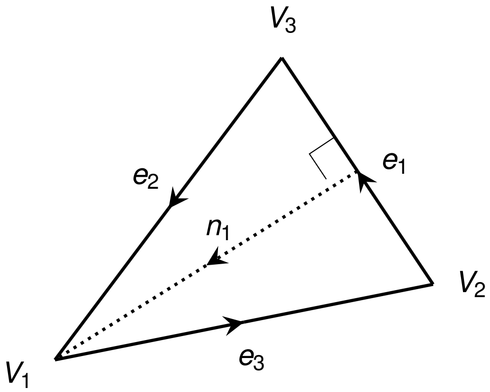
Shema

Določiti moramo še b_{111}. Tu bomo imeli 3 ločene izbire b_{111}^1, b_{111}^2, b_{111}^3, kjer bo b_{111}^m tak, da bo zagotavljal C^1-zveznost čez stranico e_m.
Poglejmo pogoje za stranico e_1, pri ostalih dveh pa potem naredimo simetrično.

Lokalna shema

Poglejmo si notranjo normalo n_1 na stranico e_1. Velja:

$$n_1 = -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \frac{e_1}{|e_1|}$$



Lokalna shema

Če to enačbo razpišemo v baricentričnih koordinatah:

$$\begin{aligned} n_1 =& -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \cdot \frac{e_1}{|e_1|} \\ =& -(-1,1,0) - h_1(0,-1,1) \\ =& (1, h_1 - 1, -h_1), \end{aligned}$$

kjer je

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}$$

Če označimo s P_1 parametrizacijo B, ki jo dobimo iz prej določenih b_{ijk} in b^1_{111}, lahko iz formule poračunamo $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$.

Lokalna shema

Odvod $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$ se na stranici e_1 (kjer je $u = 0$) poenostavi v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3 l_1 v^2 + 6 l_2 vw + 3 l_3 w^2,$$

kjer so:

$$\begin{aligned} l_1 &= b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030}) \\ l_2 &= b^1_{111} - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021}) \\ l_3 &= b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012}) \end{aligned}$$

Lokalna shema

Z upoštevanjem $w = 1 - v$, lahko enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3\left((l_1 - 2l_2 + l_3)v^2 + 2(l_2 - l_3)v + l_3\right)$$

Zdaj izberemo tak b^1_{111}, da bo ta normalni odvod linearen na stranici e_1, tj. linearen v parametru v. Dobimo torej enačbo:

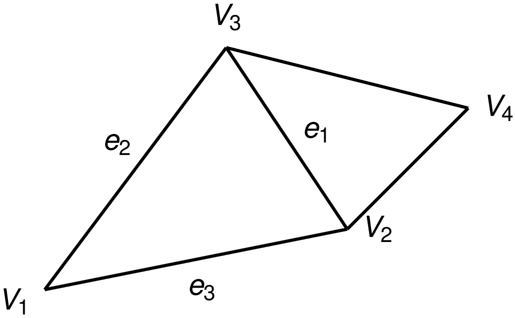
$$l_1 - 2l_2 + l_3 = 0$$

Od tod lahko izrazimo:

$$b^1_{111} = \frac{1}{2}\Big(b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{030} - b_{012})\Big)$$

Lokalna shema

Zakaj je to dovolj za C^1 zveznost čez stranico e_1?
Postopek ponovimo na sosednjem trikotniku in dobimo linearen normalen odvod (v nasprotno smer), kar pomeni da je linearen tudi normalen odvod v smeri 1. trikotnika. Te dva odvoda se ujemata v ogliščih V_2, V_3 (shema tam interpolira odvode), torej povsod, ker sta linearna.



Celotna shema

Parametrizacija na celotnem trikotniku bo konveksna kombinacija shem P_1, P_2, P_3:

$$
\begin{aligned}
P(u,v,w) =& \frac{v^2w^2P_1 + w^2u^2P_2 + u^2v^2P_3}{v^2w^2 + v^2u^2 + u^2w^2} \\
=& u^3\ b_{300} + 3u^2v\ b_{210} + 3u^2w\ b_{201} + 3uv^2\ b_{120} \\
& + 3uw^2\ b_{102} + v^3\ b_{030} + 3v^2w\ b_{021} + 3vw^2\ b_{012} \\
& + w^3\ b_{003} \\
& + 6uvw \frac{v^2w^2\ b_{111}^1 + w^2u^2\ b_{111}^2 + u^2v^2\ b_{111}^3}{v^2w^2 + v^2u^2 + u^2w^2}
\end{aligned}
$$

Aproksimacija parcialnih odvodov

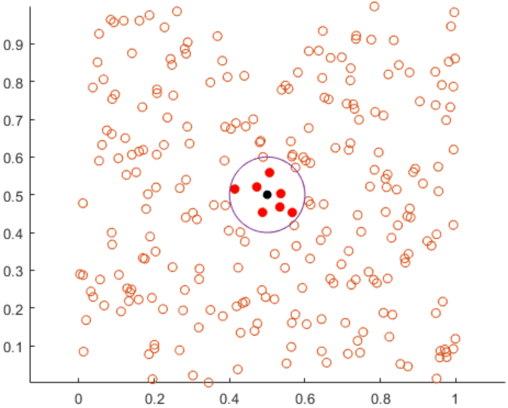
Naš vhodni podatek so le točke v prostoru, ker pa smo v metodi predpostavili poznavanje parcialnih odvodov v vsaki od teh točk, moramo te oceniti. Recimo, da imamo dane točke

$$P = (p_i)_i = (x_i, y_i, z_i)_i$$

in ocenjujemo parcialna odvoda v testni točki p_k.

1. Korak

Odvoda v p_k bomo ocenili s pomočjo točk v neki njeni okolici. In sicer določimo radij r_k in obravnavajmo točke $p_j \in P$ za katere $d((x_j, y_j), (x_k, y_k)) = d_j^k < r_k$. Recimo, da so indeksi teh $1, \dots, n_k$.



2. Korak

S formulo

$$w_j^k = \frac{r_k - d_j^k}{r_k \cdot d_j^k}$$

je definirana utež točke p_j, ki izraža njen vpliv na odvod testne točke p_k. Ideja je spet ta, da so točke bližje p_k bolj utežene, saj nam o odvodu povejo več.

3. Korak

Definiramo interpolacijski polinom za p_k, stopnje 2

$$
\begin{aligned}
p(x,y) = z_k &+ a\cdot(x-x_k)^2 + b\cdot(x-x_k)\cdot(y-y_k) \\
&+ c\cdot(y-y_k)^2 + d\cdot(x-x_k) + e\cdot(y-y_k),
\end{aligned}
$$

kjer so a, b, c, d, e, nedoločeni členi in velja

$$p_x(x_k, y_k) = d \quad \text{in} \quad p_y(x_k, y_k) = e.$$

Te vrednosti bodo ocene za parcialni odvod v točki p_k. Neznane člene določimo s pogojem, da s polinomom želimo čim bolje aproksimirati vrednosti z_j v točkah (x_j, y_j) za $j = 1, \ldots, n_k$.

3. Korak

Minimiziramo torej

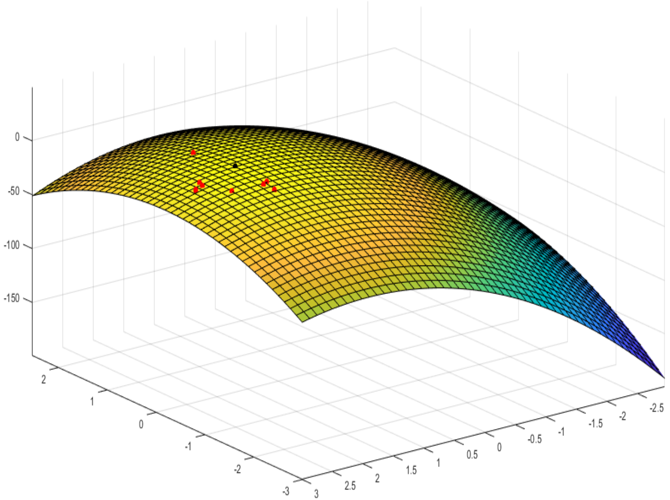
$$\sum_{j=1}^{n_k}(w_j^k \cdot (p(x_j, y_j) - z_j))^2 = \| W_k A u - W_k v \|^2,$$

kjer je $u = [a, b, c, d, e]^T$ iskan vektor, A matrika

$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_k)^2 & (x_1 - x_k)(y_1 - y_k) & (y_1 - y_k)^2 & (x_1 - x_k) & (y_1 - y_k) \\ (x_2 - x_k)^2 & (x_2 - x_k)(y_2 - y_k) & (y_2 - y_k)^2 & (x_2 - x_k) & (y_2 - y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n_k} - x_k)^2 & (x_{n_k} - x_k)(y_{n_k} - y_k) & (y_{n_k} - y_k)^2 & (x_{n_k} - x_k) & (y_{n_k} - y_k) \end{vmatrix},$$

$W_k = \mathrm{diag}(w_1^k, w_2^k, \cdots, w_{n_k}^k)$ ter $v = [z_1 - z_k, \cdots, z_{n_k} - z_k]^T$.

3. Korak



Interpolacija razsevnih podatkov

Radi bi interpolirali neko množico točk P v prostoru s shemo, ki smo jo predstavili prej. Konstrukcija poteka v treh korakih

1. V vsaki točki p_k ocenimo parcialne odvode
2. Trianguliramo točke $(x_i, y_i)_i$
3. Na vsakem trikotniku T konstruiramo lokalno shemo z metodo Goodman-Said in shranimo matriko

$$B_T = \begin{vmatrix} b_{300} & b_{210} & b_{120} & b_{030} \\ b_{201} & \square & b_{021} & \square \\ b_{102} & b_{012} & \square & b_{1112} \\ b_{003} & \square & b_{1113} & b_{1111} \end{vmatrix}$$

Matrike na vsakem trikotniku triangulacije podajo naš zlepek.

Prednost uporabljene sheme

Uporabljena shema je koristna, ker zahteva le aproksimacijo prvih odvodov v danih točkah. Če primerjamo z Argyrisovim zlepkom, je njegova aproksimacija povprečno boljša, a zahteva poznavanje / oceno drugih parcialnih odvodov, kar pa ga za naš problem naredi manj primernega.