

Spojena kubična Bezierjeva krpa

Matija Šteblaj, Nejc Ševerkar

14. 1. 2021

Motivacija

Želimo poiskati preprosto C^1 -ploskev, ki v danih točkah (iz \mathbb{R}^2) interpolira predpisane vrednosti in parcialne odvode (npr. od neke funkcije).

Ideja: naredimo triangulacijo na točkah in definiramo lokalno shemo na vsakem trikotniku posebej, kjer poskrbimo za ustrezna ujemanja na presekih (stranicah) trikotnikov. Tu si bomo pomagali z Bézierjevimi krpami stopnje 3.

Klasična Bézierjeva krpa stopnje 3

Spomnimo se, da je parametrizacija Bézierjeve krpe stopnje 3 na nekem trikotniku podana s točkami b_{ijk} , $i+j+k=3$ kot:

$$\begin{aligned}P(u, v, w) &= \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} B_{ijk}^3(u, v, w) \\&= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\&\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\&\quad + w^3 b_{003} + 6uvw b_{111}\end{aligned}$$

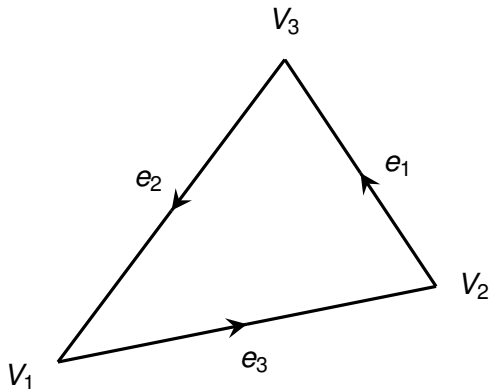
in njen odvod v smeri $\mathbf{z} = (z_u, z_v, z_w)$ enak:

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial P}{\partial u} z_u + \frac{\partial P}{\partial v} z_v + \frac{\partial P}{\partial w} z_w = \langle \text{grad}(P), \mathbf{z} \rangle ,$$

kjer u, v, w predstavljajo baricentrične koordinate v danem trikotniku.

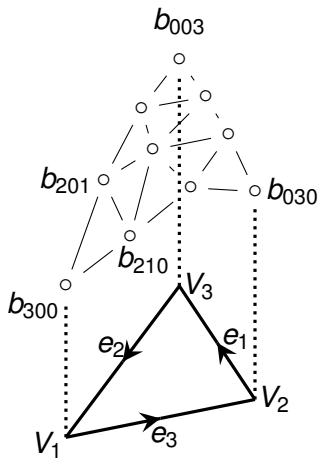
Shema

Recimo, da triangulacijo že imamo, in vzemimo nek trikotnik v domeni:



Shema

Določiti moramo točke kontrolne mreže b_{ijk} nad tem trikotnikom:



Shema

Predpisane imamo vrednosti $F(V_i)$ in parcialne odvode $F_x(V_i), F_y(V_i)$ za $V_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, 3$. Od tod lahko dobimo smerne odvode v smeri stranic kot:

$$F_{e_i} = \frac{\partial F}{\partial e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1})F_x + (y_{i-1} - y_{i+1})F_y = \langle e_i, \text{grad}(F) \rangle$$

S pomočjo tega lahko definiramo točke “okoli” enega oglišča trikotnika:

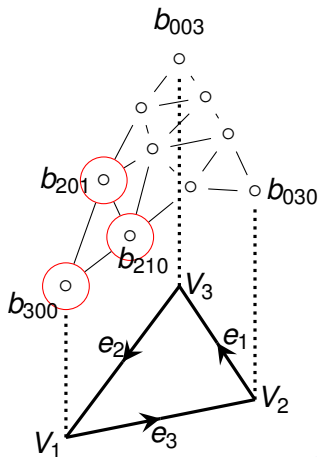
$$b_{300} = F(V_1)$$

$$b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}$$

$$b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$

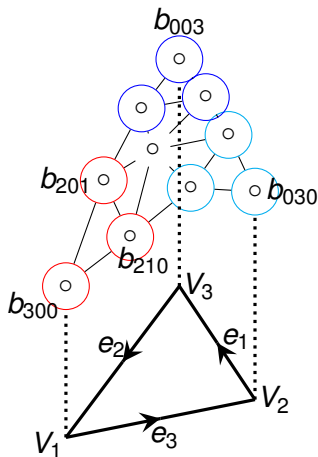
Shema

$$b_{300} = F(V_1), b_{210} = F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3}, b_{201} = F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3}$$



Shema

Na analogen način določimo še ostale “robne” točke:



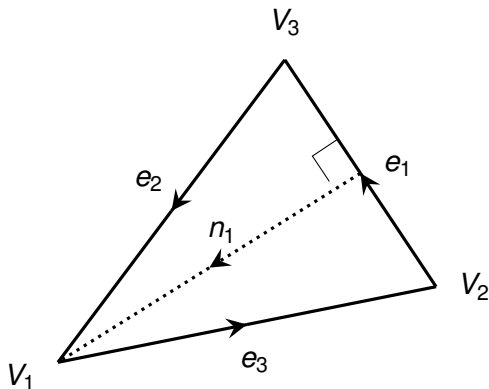
Določiti moramo še b_{111} . Tu bomo imeli 3 ločene izbire b_{111}^1 , b_{111}^2 , b_{111}^3 , kjer bo b_{111}^m tak, da bo zagotavljal C^1 -zveznost čez stranico e_m .

Poglejmo pogoje za stranico e_1 , pri ostalih dveh pa potem naredimo simetrično.

Lokalna shema

Poglejmo si notranjo normalo n_1 na stranico e_1 . Velja:

$$n_1 = -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \frac{e_1}{|e_1|}$$



Lokalna shema

Če to enačbo razpišemo v baricentričnih koordinatah:

$$\begin{aligned}n_1 &= -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \cdot \frac{e_1}{|e_1|} \\&= -(-1, 1, 0) - h_1(0, -1, 1) \\&= (1, h_1 - 1, -h_1),\end{aligned}$$

kjer je

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}$$

Če označimo s P_1 parametrizacijo B, ki jo dobimo iz prej določenih b_{ijk} in b_{111}^1 , lahko iz formule poračunamo $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$.

Lokalna shema

Odvod $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$ se na stranici e_1 (kjer je $u = 0$) poenostavi v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3l_1 v^2 + 6l_2 vw + 3l_3 w^2,$$

kjer so:

$$l_1 = b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030})$$

$$l_2 = b_{111}^1 - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021})$$

$$l_3 = b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012})$$

Lokalna shema

Z upoštevanjem $w = 1 - v$, lahko enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3 \left((l_1 - 2l_2 + l_3)v^2 + 2(l_2 - l_3)v + l_3 \right)$$

Zdaj izberemo tak b_{111}^1 , da bo ta normalni odvod linearen na stranici e_1 , tj. linearen v parametru v . Dobimo torej enačbo:

$$l_1 - 2l_2 + l_3 = 0$$

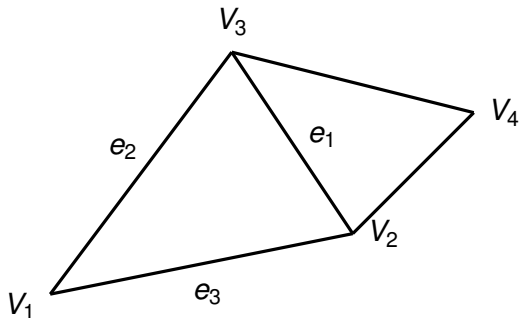
Od tod lahko izrazimo:

$$b_{111}^1 = \frac{1}{2} \left(b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) \right. \\ \left. + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{030} - b_{012}) \right)$$

Lokalna shema

Zakaj je to dovolj za C^1 zveznost čez stranico e_1 ?

Postopek ponovimo na sosednjem trikotniku in dobimo linearen normalen odvod (v nasprotno smer), kar pomeni da je linearen tudi normalen odvod v smeri 1. trikotnika. Te dva odvoda se ujemata v ogliščih V_2 , V_3 (shema tam interpolira odvode), torej povsod, ker sta linearna.



Celotna shema

Parametrizacija na celotnem trikotniku bo konveksna kombinacija shem P_1 , P_2 , P_3 :

$$\begin{aligned} P(u, v, w) &= \frac{v^2 w^2 P_1 + w^2 u^2 P_2 + u^2 v^2 P_3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \\ &= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\ &\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\ &\quad + w^3 b_{003} \\ &\quad + 6uvw \frac{v^2 w^2 b_{111}^1 + w^2 u^2 b_{111}^2 + u^2 v^2 b_{111}^3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \end{aligned}$$