

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Nejc Ševerkar, Matija Šteblaj  
**Spojena kubična Bezierjeva krpa**

Ljubljana, 2021

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Aproksimacijska shema</b>	<b>3</b>
1.1	Lokalna shema . . . . .	3
1.2	Celotna shema . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Interpolacija razsevnih podatkov v prostoru</b>	<b>6</b>
2.1	Aproksimacija parcialnih odvodov . . . . .	7
2.2	Postopek . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Rezultati implementacije</b>	<b>8</b>

# 1 Aproximacijska shema

Želimo poiskati preprosto  $C^1$ -ploskev, ki v danih točkah  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, n$  interpolira predpisane vrednosti in parcialne odvode (npr. od neke funkcije).

Problema se lotimo na sledeč način: naredimo triangulacijo domene na danih točkah in definiramo lokalno shemo na vsakem trikotniku posebej, kjer poskrbimo za ustrezna ujemanja na presekih (skupnih stranicah) trikotnikov. Pri tem si bomo pomagali z Bézierjevimi krpami stopnje 3.

## 1.1 Lokalna shema

Spomnimo se, da je parametrizacija Bézierjeve krpe stopnje 3 na nekem trikotniku podana s kontrolnimi točkami  $b_{ijk}$ ,  $i + j + k = 3$  kot:

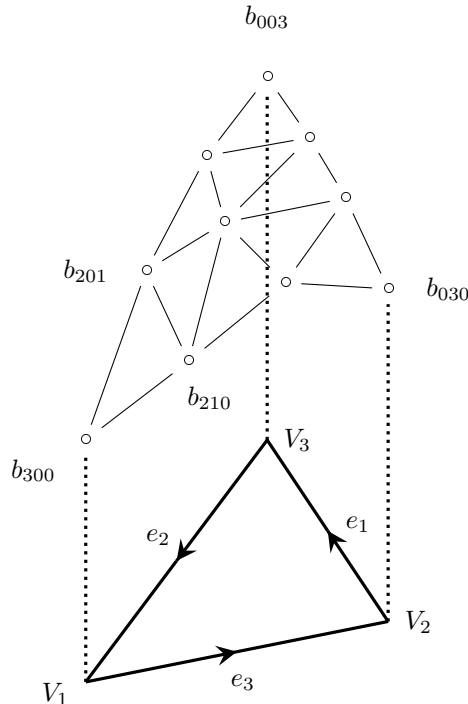
$$\begin{aligned} P(u, v, w) &= \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} B_{ijk}^3(u, v, w) \\ &= u^3 b_{300} + 3u^2v b_{210} + 3u^2w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\ &\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\ &\quad + w^3 b_{003} + 6uvw b_{111} \end{aligned} \quad (1)$$

in njen odvod v smeri  $\mathbf{z} = (z_u, z_v, z_w)$  enak:

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial P}{\partial u} z_u + \frac{\partial P}{\partial v} z_v + \frac{\partial P}{\partial w} z_w = \langle \text{grad}(P), \mathbf{z} \rangle, \quad (2)$$

kjer  $u, v, w$  predstavljajo baricentrične koordinate v danem trikotniku.

Recimo, da triangulacijo že imamo, in vzemimo nek trikotnik  $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$  v domeni. Določiti moramo točke kontrolne mreže  $b_{ijk}$  nad tem trikotnikom:



Predpisane imamo vrednosti  $F(V_i)$  in parcialne odvode  $F_x(V_i), F_y(V_i)$  za  $V_i = (x_i, y_i)$   $i = 1, 2, 3$ . Od tod lahko dobimo odvode v smeri stranic kot:

$$F_{e_i} = \frac{\partial F}{\partial e_i} = (x_{i-1} - x_{i+1})F_x + (y_{i-1} - y_{i+1})F_y = \langle e_i, \text{grad}(F) \rangle,$$

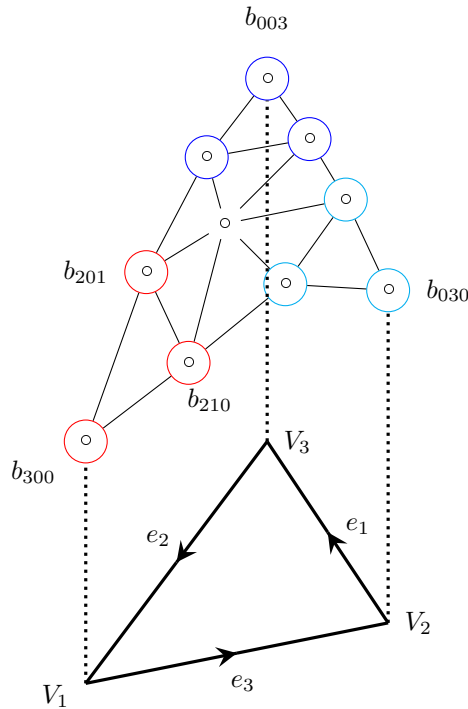
kjer razumemo  $0 \equiv 3$  in  $4 \equiv 1$  v indeksih.

S pomočjo teh odvodov lahko definiramo kontrolne točke “okoli” enega oglišča trikotnika:

$$\begin{aligned} b_{300} &= F(V_1) \\ b_{210} &= F(V_1) + \frac{F_{e_3}}{3} \\ b_{201} &= F(V_1) - \frac{F_{e_2}}{3} \end{aligned}$$

Opazimo, da s tako izbiro kontrolnih točk  $b_{210}$  in  $b_{201}$  interpoliramo smerna odvoda v dveh linearno neodvisnih smereh (smereh stranic) nad ogliščem. Sledi, da s tem interpoliramo prve odvode v vseh smereh (v oglišču).

Na analogen način določimo še ostale “robne” točke:

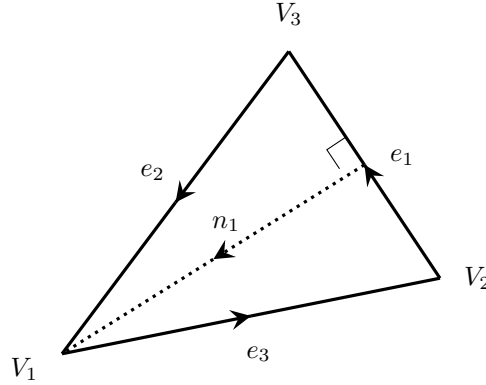


Ostane nam le še izbira notranje točke  $b_{111}$ .

Najprej določimo 3 točke:  $b_{111}^1, b_{111}^2, b_{111}^3$ , kjer bo  $b_{111}^i$  tak, da bo Bézierjeva krpa s to in prej določenimi kontrolnimi točkami zagotavljala  $C^1$ -zveznost čez stranico  $e_i$ . Poglejmo pogoje pri stranici  $e_1$ , za ostali dve pa naredimo simetrično.

Poglejmo si notranjo normalo  $n_1$  na stranico  $e_1$ . Velja:

$$n_1 = -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \frac{e_1}{|e_1|}$$



Če to enačbo razpišemo v baricentričnih koordinatah:

$$\begin{aligned} n_1 &= -e_3 + \frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|} \cdot \frac{e_1}{|e_1|} \\ &= -(-1, 1, 0) - h_1(0, -1, 1) \\ &= (1, h_1 - 1, -h_1), \end{aligned}$$

kjer je

$$h_1 = -\frac{e_3 \cdot e_1}{|e_1|^2}$$

Če označimo s  $P_1$  parametrizacijo Bézierjeve krpe, ki jo dobimo iz prej določenih  $b_{ijk}$  in  $b_{111}^1$ , lahko iz formul 1 in 2 izračunamo  $\frac{\partial P_1}{\partial n_1}$ . Ta odvod se na stranici  $e_1$  (kjer je  $u = 0$ ) poenostavi v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3I_1v^2 + 6I_2vw + 3I_3w^2,$$

kjer so:

$$\begin{aligned} I_1 &= b_{120} - b_{030} - h_1(b_{021} - b_{030}) \\ I_2 &= b_{111}^1 - b_{021} - h_1(b_{012} - b_{021}) \\ I_3 &= b_{102} - b_{012} - h_1(b_{003} - b_{012}) \end{aligned}$$

Z upoštevanjem  $w = 1 - v$  (saj je  $u + v + w = 1$ ,  $u = 0$ ), lahko enačbo preoblikujemo v:

$$\frac{\partial P_1}{\partial n_1} = 3 \left( (I_1 - 2I_2 + I_3)v^2 + 2(I_2 - I_3)v + I_3 \right)$$

Zdaj izberemo tak  $b_{111}^1$ , da bo ta normalni odvod linearen na stranici  $e_1$ , tj. linearen v parametru  $v$ . Dobimo torej enačbo:

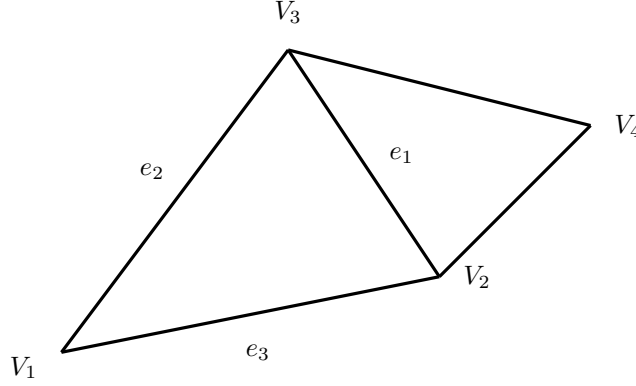
$$I_1 - 2I_2 + I_3 = 0$$

Od tod lahko izrazimo:

$$b_{111}^1 = \frac{1}{2} \left( b_{120} + b_{102} + h_1(2b_{012} - b_{021} - b_{003}) + (1 - h_1)(2b_{021} - b_{030} - b_{012}) \right)$$

Zakaj taka točka zagotavlja  $C^1$  zveznost čez stranico  $e_1$ ?

Postopek ponovimo na sosednjem trikotniku in dobimo linearen normalen odvod (v nasprotno smer), kar pomeni da je linearen tudi normalen odvod v smeri prvotnega trikotnika. Te dva odvoda se ujemata v ogliščih  $V_2, V_3$  (shema tam interpolira odvode), torej povsod, ker sta linearna.



## 1.2 Celotna shema

Parametrizacija na celotnem trikotniku bo konveksna kombinacija parametrizacij  $P_1, P_2, P_3$ :

$$\begin{aligned} P(u, v, w) &= \frac{v^2 w^2 P_1 + w^2 u^2 P_2 + u^2 v^2 P_3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \\ &= u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u^2 w b_{201} + 3uv^2 b_{120} \\ &\quad + 3uw^2 b_{102} + v^3 b_{030} + 3v^2 w b_{021} + 3vw^2 b_{012} \\ &\quad + w^3 b_{003} \\ &\quad + 6uvw \frac{v^2 w^2 b_{111}^1 + w^2 u^2 b_{111}^2 + u^2 v^2 b_{111}^3}{v^2 w^2 + v^2 u^2 + u^2 w^2} \end{aligned}$$

Tako definirana parametrizacija se na stranicah ujema z ustrezno lokalno parametrizacijo  $P_i$ , ki nam zagotavlja  $C^1$ -zveznost čez stranico  $e_i$ . Opazimo, da je razlika med našo parametrizacijo in običajno parametrizacijo Bézierjeve krpe le pri točki  $b_{111}$ , kjer namesto ene točke, ki bi bila fiksna za vse  $(u, v, w)$  vzamemo konveksno kombinacijo točk  $b_{111}^i$ , ki se spreminja z različnimi  $(u, v, w)$ . Intuitivno si torej lahko predstavljamo, da gre za Bézierjevo krpo, kjer se notranja točka spreminja z baricentričnimi koordinatami. Ta interpretacija nam tudi omogoča preprosto posplošitev De Casteljauevega algoritma za izračun točk na naši ploskvi – za dane parametre najprej izračunamo ustrezen  $b_{111}(u, v, w)$ , nato izvedemo običajni algoritem.

## 2 Interpolacija razsevnih podatkov v prostoru

Prejšnjo metodo želimo uporabiti na problemu interpolacije točk  $P = (p_i)_{i=1}^n$ , kjer je  $p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ . Mislimo si, da ti podatki ležijo na grafu neke zvezno odvedljive funkcije  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ki pa je seveda ne poznamo. Spomnimo se, da metoda Goodman-Said zahteva poleg vrednosti še poznavanje parcialnih odvodov prvega reda v točkah  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ . Ker teh nimamo, jih moramo oceniti.

## 2.1 Aproximacija parcialnih odvodov

Recimo, da ocenjujemo parcialna odvoda v testni točki  $p_k \in P$  (natančneje sta to parcialna odvoda  $f$  v  $(x_k, y_k)$ ). To bomo storili v treh korakih.

1. Za oceno odvoda v  $p_k$  bomo seveda potrebovali neke informacije o vrednostih  $f$  v točkah blizu  $(x_k, y_k)$ . Vse kar imamo na voljo so točke  $(x_i, y_i)$ , torej izmed njih izberemo tiste, ki so  $(x_k, y_k)$  dovolj blizu. To naredimo z izborom radija  $r_k$  in obravnavo točk  $p_j \in P$ , za katere velja

$$d((x_j, y_j), (x_k, y_k)) =: d_j^k \in (0, r_k].$$

Označimo množico indeksov teh z  $J_k$ .

2. Ker tudi med izbranimi točkami prioritiziramo tiste, ki so naši testni točki bližje, jih ustrezno utežimo. Za  $j \in J_k$  definiramo

$$w_j^k := \frac{r_k - d_j^k}{r_k \cdot d_j^k},$$

utež točke  $p_j$  glede na  $p_k$ .

3. Za  $p_k$  definirajmo interpolacijski polinom druge stopnje kot

$$p(x, y) := z_k + a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) \cdot (y - y_k) + c(y - y_k)^2 + d(x - x_k) + e(y - y_k),$$

kjer so  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  nedoločeni koeficienti in velja

$$p_x(x_k, y_k) = d \quad \text{in} \quad p_y(x_k, y_k) = e.$$

Ti vrednosti bosta oceni za parcialna odvoda v točki  $p_k$ . Da bo to smiselno, mora ta polinom v okolici  $(x_k, y_k)$  dobro aproksimirati vrednosti funkcije  $f$ , torej vrednosti  $z_j$  v točkah  $(x_j, y_j)$  za  $j \in J_k$ . Če upoštevamo še uteži posamezne točke, so vrednosti določene z minimizacijskim problemom

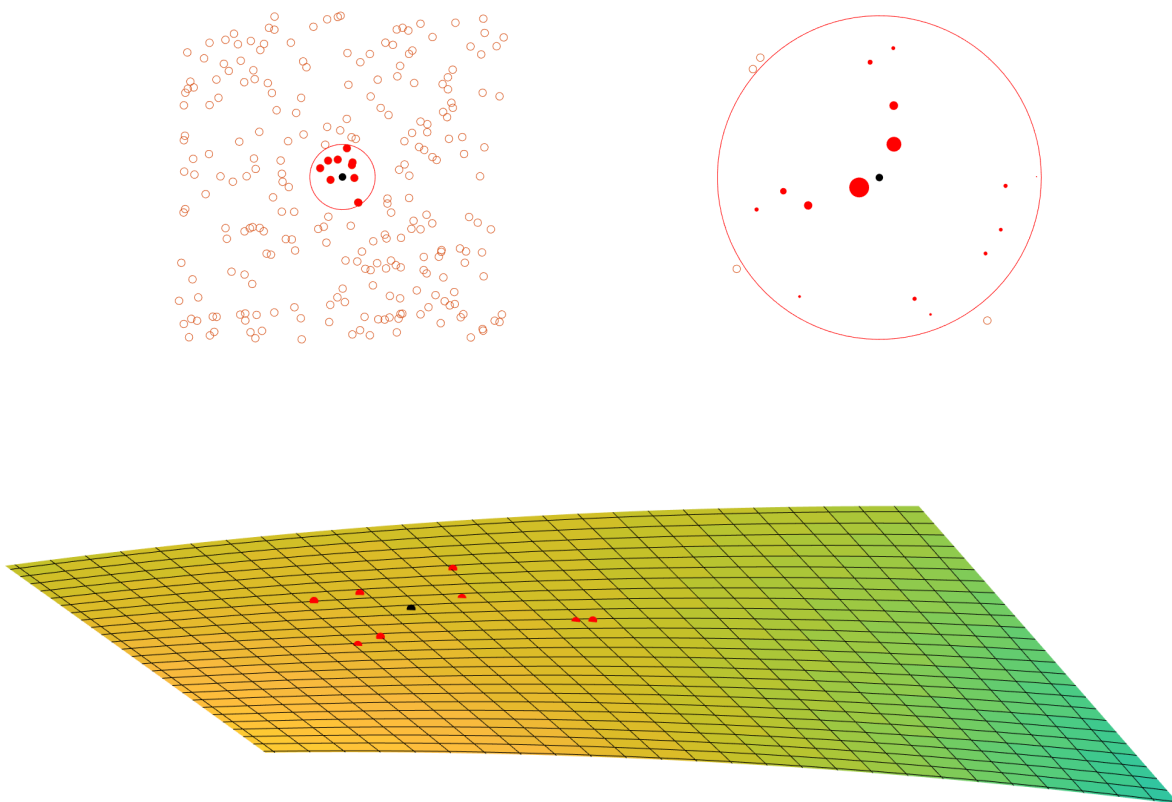
$$\sum_{j \in J_k} (w_j^k \cdot (p(x_j, y_j) - z_j))^2 = \|W_k A u - W_k v\|^2,$$

kjer so za  $J_k = \{j_1, j_2, \dots, j_{n_k}\}$

$$W_k = \begin{bmatrix} w_{j_1}^k & & & \\ & w_{j_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{j_{n_k}}^k \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} z_{j_1} - z_k \\ z_{j_2} - z_k \\ \vdots \\ z_{j_{n_k}} - z_k \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} \quad \text{in}$$

$$A = \begin{bmatrix} (x_{j_1} - x_k)^2 & (x_{j_1} - x_k) \cdot (y_{j_1} - y_k) & (y_{j_1} - y_k)^2 & (x_{j_1} - x_k) & (y_{j_1} - y_k) \\ (x_{j_2} - x_k)^2 & (x_{j_2} - x_k) \cdot (y_{j_2} - y_k) & (y_{j_2} - y_k)^2 & (x_{j_2} - x_k) & (y_{j_2} - y_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{j_{n_k}} - x_k)^2 & (x_{j_{n_k}} - x_k) \cdot (y_{j_{n_k}} - y_k) & (y_{j_{n_k}} - y_k)^2 & (x_{j_{n_k}} - x_k) & (y_{j_{n_k}} - y_k) \end{bmatrix}$$

Seveda to rešujemo z metodo najmanjših kvadratov, kjer pa moramo predpostaviti, da je točk znotraj radija dovolj, torej  $|J_k| \geq 5$  (to lahko zagotovimo z implicitno definicijo radija  $r_k$ , ki ga definiramo kot razdalja od  $n$ -te najbližje točke za  $n \geq 6$ ).



Slika 1: Trije koraki aproksimacije parcialnih odvodov.

## 2.2 Postopek

Sedaj lahko opišemo postopek interpolacije točk v  $P$ , ki poteka v treh korakih

1. V vsaki točki  $p_k \in P$  ocenimo parcialne odvode.
2. Trianguliramo točke  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$  z neko triangulacijsko metodo.
3. Na vsakem trikotniku  $T$  konstruiramo lokalno shemo z metodo Goodman-Said in shranimo matriko koeficientov, definiranih v prvem poglavju

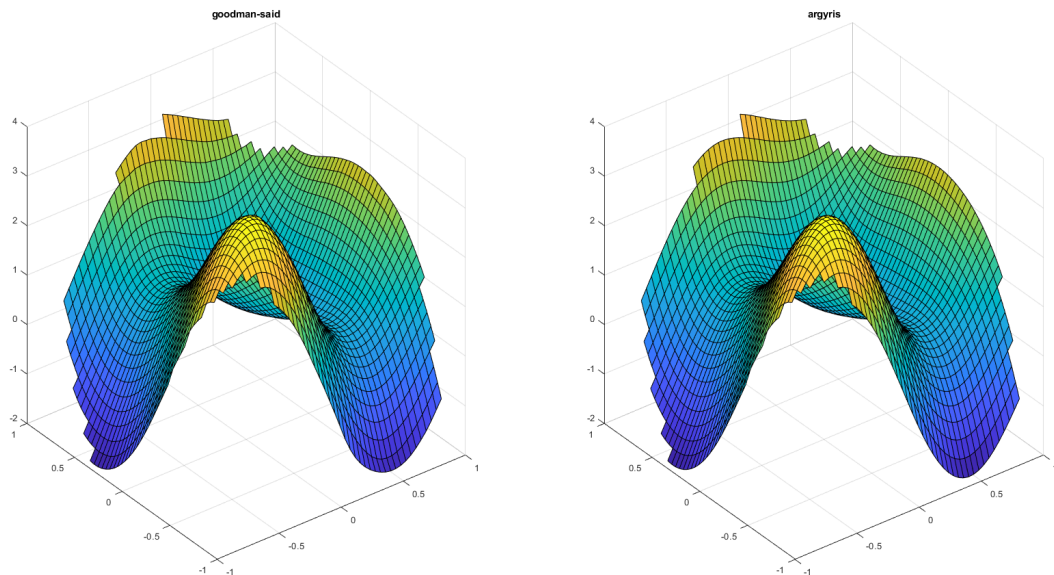
$$B_T = \begin{vmatrix} b_{300} & b_{210} & b_{120} & b_{030} \\ b_{201} & \square & b_{021} & \square \\ b_{102} & b_{012} & \square & b_{111}^2 \\ b_{003} & \square & b_{111}^3 & b_{111}^1 \end{vmatrix}$$

Seznam matrik  $B_T$  nad vsakem trikotniku  $T$  triangulacije, skupaj z njo definirajo naš zlepek.

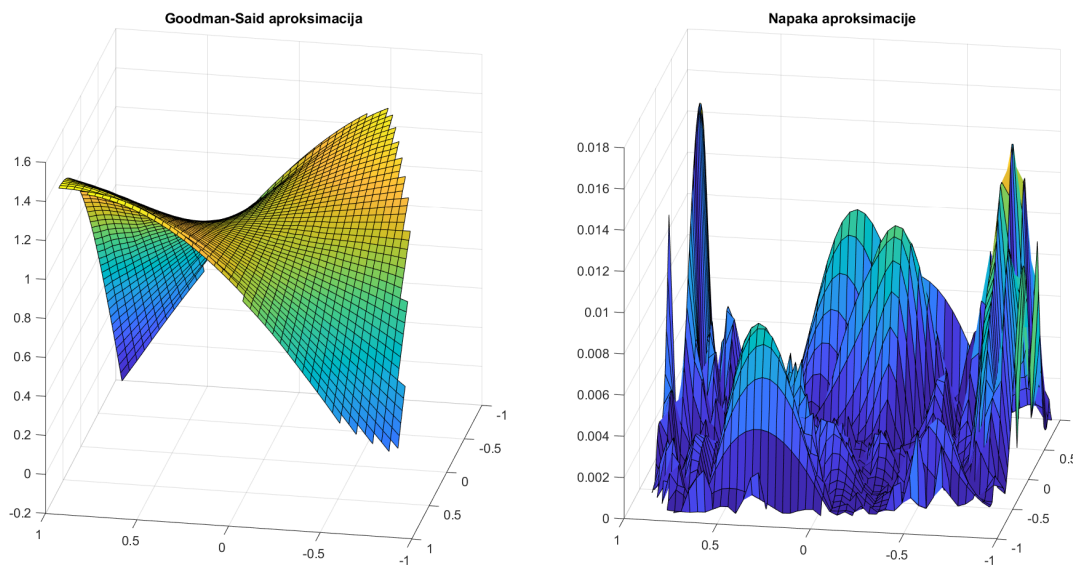
## 3 Rezultati implementacije

Smiselno se zdi primerjati našo shemo z Argyrisovo, saj imata podobne predpostavke (Argyris interpolira še druge odvode). Seveda se bo Argyrisov zlepek bolj tesno prilegal ocenjevani funkciji, vendar naša metoda iz bistveno manj podatkov doseže primerljiv rezultat:

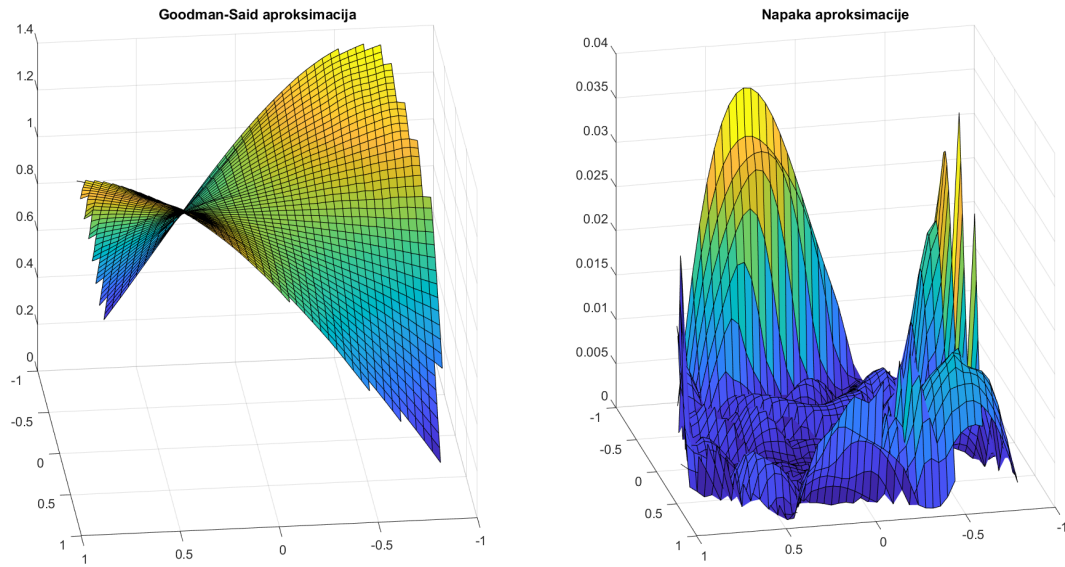




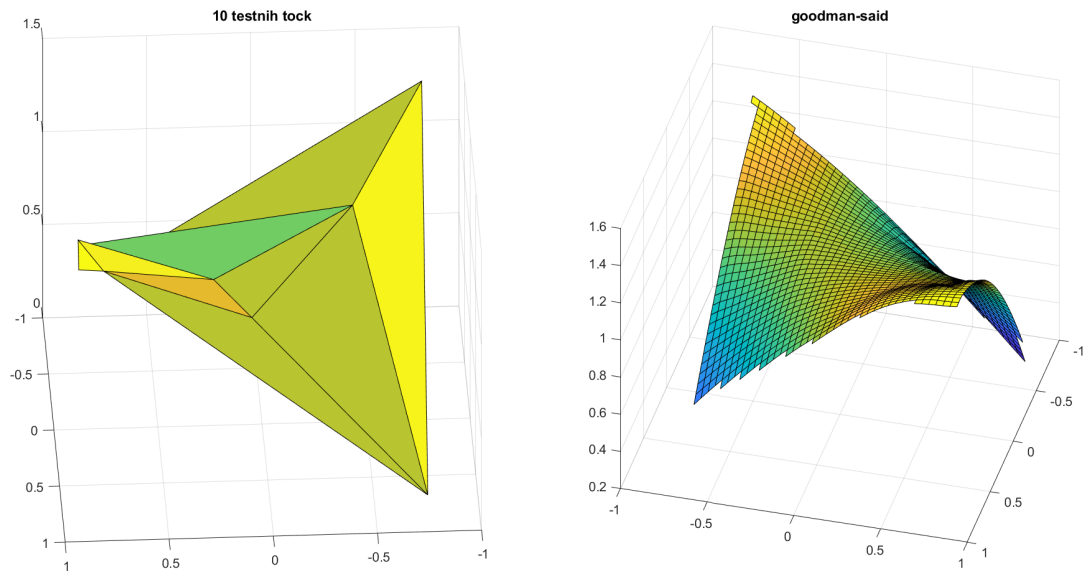
Slika 2: Primerjava aproksimacije funkcije s shemo Goodman-Said (na levi) in Argyris (na desni), pri znanih odvodih na 150-ih točkah.



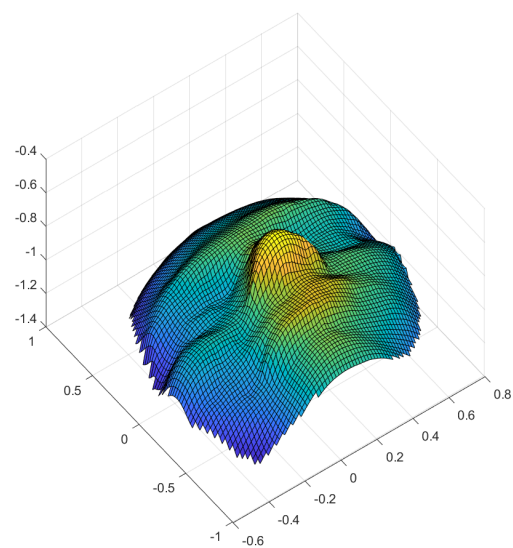
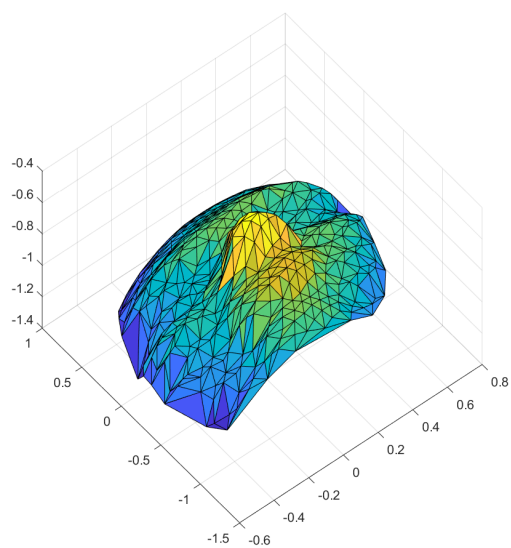
Slika 3: Primerjava interpolacije in njene napake funkcije  $(x, y) \mapsto \sin(x \cdot y) + \cos(x \cdot y)$ , pri znanih odvodih na 30-ih točkah.



Slika 4: Primerjava interpolacije in njene napake funkcije  $(x, y) \mapsto \sin(x \cdot y) + \cos(x \cdot y)$ , pri neznanih odvodih na 30-ih točkah.



Slika 5: Primerjava navadne triangulacije 10-ih testnih točk na grafu  $(x, y) \mapsto \sin(x \cdot y) + \cos(x \cdot y)$  z njihovo interpolacijo ob shemi Goodman-Said.



Slika 6: Interpolacija točk v prostoru s shemo Goodman-Said.