Seminar
Hermitovi polinomi in normalna porazdelitev

Nejc Ševerkar & Tjaša Renko
mentor Janez Bernik

25. oktober 2019

Povzetek

V tej nalogi bova predstavila povezavo med hermitovimi polinomi in standardno normalno porazdelitvijo.

Naloga

Hermitovi polinomi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dveh realnih spremenljivk so definirani preko relacije

$e_a(x,t) := e^{ax-\frac{a^2t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(x,t), \quad x,t\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{C}.$

Naj bosta $X \sim N(0,1)$ in $Y \sim N(0,1)$ neodvisni standardni normalni spremenljivki.

(i) Izračunaj $\mathbb{E}[e_a(X,1)e_b(X,1)]$ $(a,b\in\mathbb{C})$ in izpelji izraz za $\mathbb{E}[h_n(X,1)h_m(X,1)]$ $(m,n\in\mathbb{N})$.

Pri prvem delu moramo izračunati $\mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right)$, kjer smo označili $g\left(x\right) = e_a\left(x,1\right)e_b\left(x,1\right)$. Poenostavimo najprej $g(x)$, torej

$$g(x) = e_a(x,1)e_b(x,1) = e^{ax-\frac{a^2}{2}}e^{bx-\frac{b^2}{2}} = e^{-\frac{a^2+b^2}{2}}e^{x(a+b)}.$$

Vstavimo rezultat v začetni problem in upoštevamo izrek o matematičnem upanju transformacije slučajne spremenljivke

$$\mathbb{E}\left(e_a\left(X,t\right)e_b\left(X,t\right)\right) = \mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)f_X\left(x\right)dx = e^{-\frac{a^2+b^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x(a+b)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Sedaj del integranda v eksponentu e lahko dopolnimo do popolnega kvadrata z namenom preoblikovanja integranda v obliko, ki bo skladna z gostoto premaknjene normalne porazdelitve. Nadaljujemo račun:

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x(a+b))}dx\\
&= e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}((x-(a+b))^2-(a+b)^2)}dx\\
&= e^{\frac{1}{2}((a+b)^2-(a^2+b^2))}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-(a+b))^2}dx\\
&= e^{ab}\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(x)dx \qquad (Z\sim N(a+b,1))\\
&= e^{ab}.
\end{aligned}$$

Dobimo torej naslednji zvezi:

$$\mathbb{E}\left(e_a\left(X,1\right)e_b\left(X,1\right)\right) = e^{ab} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ab)^i}{i!},$$

$$\mathbb{E}\left(e_a\left(X,1\right)e_b\left(X,1\right)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^nb^m}{n!m!}h_n(x,1)h_m(x,1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^nb^m}{n!m!}\mathbb{E}\left(h_n(x,1)h_m(x,1)\right).$$

Vidimo, da enakost med vrstama velja, ko $\mathbb{E}\left(h_n\left(X,1\right)h_m\left(X,1\right)\right) = \begin{cases} n! & \text{za } m=n \\ 0 & \text{za } m\neq n \end{cases}.$

Med računom smo uporabili izrek o zamenjavi vrstnega reda pričakovane vrednosti in vrste slučajnih spremenljivk. Za naš primer lahko dokažemo, da velja

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(X,1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\mathbb{E}(h_n(X,1)),$$

kar je ekvivalentno

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)f_X(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}h_n(x,1)f_X(x)dx.$$

Poglejmo si razliko

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)f_X(x)dx-\sum_{n=0}^{M}\frac{a^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}h_n(x,1)f_X(x)dx\right|=\\
&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}-\sum_{n=0}^{M}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)\right)f_X(x)dx\right|\leq\\
&\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)-\sum_{n=0}^{M}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)\right|f_X(x)dx<\\
&<\int_{-\infty}^{\infty}\epsilon f_X(x)dx=\epsilon.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n(x,1)$ konvergira enakomerno na zaprtih intervalih $[-A,A]$, za poljuben $A>0$, torej lahko njegovo in limitno razliko omejimo z ϵ na poljubno velikem intervalu, posledično pa tudi v limiti, ki jo posplošeni integral zahteva. Iz tega sledi, da sta razliki za dovolj velik $M\in\mathbb{N}$ poljubno blizu.

(ii) Naj bo $a\in\mathbb{C}$ in $c\in\mathbb{R}$. Izrazi $\mathbb{E}\left(e^{a(X+cY)}|X\right)$ z e_a, X in c ter $\mathbb{E}\left((X+cY)^k\,|X\right)$ za $k\in\mathbb{N}_0$ z h_k, X, in c.

Najprej upoštevamo lastnosti pogojnega matematičnega upanja in uporabimo neodvisnost. Tako dobimo:

$$\mathbb{E}\left(e^{a(X+cY)}|X\right)=\mathbb{E}\left(e^{aX}e^{acY}|X\right)=e^{aX}\mathbb{E}\left(e^{acY}\right).$$

Posebej izračunajmo $\mathbb{E}\left(e^{acY}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{acY}\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{acy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-\left(y^2-2acy\right)}{2}}dy=\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-\left((y-ac)^2-(ac)^2\right)}{2}}dy=\\
&=e^{\frac{(ac)^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Torej dobimo:

$$\mathbb{E}\left(e^{a(X+cY)}|X\right)=e^{aX}e^{\frac{(ac)^2}{2}}=e^{aX+\frac{a^2c^2}{2}}=e_a\left(X,-c^2\right).$$

Za izračun $\mathbb{E}\left((X+cY)^k\,|X\right)$ uporabimo prejšnji račun in razvijemo $e^{a(X+cY)}$ v Taylorjevo vrsto:

$$\mathbb{E}\left(e^{a(X+cY)}|X\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\,(X+cY)^n}{n!}|X\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\mathbb{E}((X+cY)^n|X).$$

Po definiciji hermitovih polinomov pa velja še $\mathbb{E}\left(e^{a(X+cY)}|X\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}h_n\left(X,-c^2\right)$.
Dobimo torej $\mathbb{E}\left((X+cY)^n\,|X\right)=h_n\left(X,-c^2\right)$.