1 1

1.1

Če zapišemo gostote v eksponentni obliki, dobimo

$$f(x;a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-\langle (a+1,b),(\ln(x),1/x)\rangle} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

torej dobimo po Neuman-Fischerjevem faktorizacijskem izreku, da je

$$T(x) = (\ln(x), 1/x)$$

zadostna statistika za ta model.

1.2

Ker smo v parametričnem modelu z zvezno odvedljivimi gostotami, lahko iščemo stacionarne točke gostot z logaritmično enačbo verjetja. Računamo

$$l(a,b) := \ln(f(x;a,b)) = a\ln(b) - \ln(\Gamma(a)) - (a+1)\ln(x) - \frac{b}{x}$$
$$\frac{\partial l}{\partial a}(a,b) = \ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x)$$
$$\frac{\partial l}{\partial b}(a,b) = \frac{a}{b} - \frac{1}{x}.$$

Zapišemo lahko logaritemsko enačbo verjetja

$$\ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x) = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = 0,$$

iz česar takoj dobimo $b = ax$, za drugo enačbo pa potem sledi, da rešujemo

$$\Psi(a) := \ln(a) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = 0.$$

Po posledici Bernsteinovega izreka o monotonih funkcijah velja, da je za $x > 0$

$$\Psi(x) - \frac{1}{2x} > 0,$$

torej naša funkcija nima ničel in zato cenilka po metodi največjega verjetja ne obstaja (digamma wiki).

1.3

Za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$m_k := P_{(a,b)}[\mathrm{id}^k] = \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} e^{-b/x} x^k dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a-k)}{b^{a-k}} \int_0^\infty \frac{b^{a-k}}{\Gamma(a-k)} x^{-(a-k)-1} e^{-b/x} dx = b^k \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)}.$$

Označimo

$$\hat{b}(x_1,x_2,x_3) := \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_3}\right)^{-1}$$
$$\hat{a}(x_1,x_2,x_3) := \frac{\hat{b}(x_1,x_2,x_3)}{x_1} + 1$$

in opazimo, da je $\hat{b}(m_1,m_2,m_3) = b$ in $\hat{a}(m_1,m_2,m_3) = a$, torej dobimo zaporedje cenilk po metodi momentov

$$(\hat{a},\hat{b}) \circ (\hat{m_1^n}, \hat{m_2^n}, \hat{m_3^n}),$$

kjer je

$$\hat{m_k^n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Ker je $g = (\hat{a},\hat{b})$ zvezna na $\mathbb{R}^3_+$, je ta cenilka dosledna. Sicer pa g ni trivialna preslikava in zato ne moremo enostavno analizirati porazdelitve, niti nujno izračunati povprečne vrednosti.

1.4

Naj bodo torej $X_i \sim P_\vartheta$ NEP. Definirajmo NEP vektorje $Y_i := (X_i, X_i^2, X_i^3)$ in označimo

$$M_n := (\hat{m_1^n}, \hat{m_2^n}, \hat{m_3^n}) \quad \text{in} \quad \hat{\vartheta}_n := g \circ M_n.$$

Po centralnem limitnem izreku velja

$$\sqrt{n} \cdot (M_n(X_1, \dots, X_n) - \mu) = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu \right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0, \Sigma),$$

kjer je μ pričakovana vrednost, Σ pa variančno-kovariančna matrika vektorjev Y_i. Potem nam metoda delta skupaj s Cramer-Woldovim pravilom zagotovi

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) - \vartheta) = \sqrt{n} \cdot (g(M_n(X_1, \dots, X_n)) - g(\mu)) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0, \mathscr{J}_g(\mu)\Sigma\mathscr{J}_g(\mu)^T),$$

saj je očitno $\mu = [m_1, m_2, m_3]^T$.

1.5

Enostavno izračunamo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} m_2 - m_1^2 & m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_1 m_3 \\ m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_2^2 & m_5 - m_2 m_3 \\ m_4 - m_1 m_3 & m_5 - m_2 m_3 & m_6 - m_3^2 \end{bmatrix}$$

in označimo

$$A := \mathscr{J}_g(\mu)\Sigma\mathscr{J}_g(\mu)^T.$$

Definirajmo sedaj zaporedje cenilk $\hat{A}_n$ tako, da zamenjamo v A elemente m_i z $\hat{m_i^n}$. Potem uporabimo Sluckyjev izrek in zveznost korena ter inverza spd matrike, da dobimo

$$\pi_n(X_1, \dots, X_n, \vartheta) := \sqrt{n} \cdot \hat{A}_n^{-1/2} \left(\hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) - \vartheta \right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0, I).$$

Naj bo $B \subset \mathbb{R}^2$ neka množica, ki zadošča

$$P(\pi_n(X_1, \dots, X_n, \vartheta) \in B) \approx N(0, I)(B) = 1 - \alpha,$$

Sledi

$$P(\pi_n(X_1, \dots, X_n, \vartheta) \in B) = P(\hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) - \vartheta \in \hat{A}_n^{1/2}(B)/\sqrt{n}) = P(\vartheta \in \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) - \hat{A}_n^{1/2}(B)/\sqrt{n}),$$

torej je območje zaupanja za ϑ enako

$$\hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) - \hat{A}_n^{1/2}(B)/\sqrt{n}.$$

Vprašanje izbire množice B lahko rešimo s predpostavko, da je to zaprta krogla s središčem v 0 v neki normirani metriki, s čimer se verjetno da dokazati enoličnost njenega radija.

2 2

Naj bodo $X_i \sim P_\mu$ NEP. Po Rao-Blackwellevem izreku lahko najdemo NCEND kot pogojno upanje nepristranske cenilke $\mathbb{1}_{\{X_1 \leqslant 5\}}$ pogojno na kompletno in zadostno statistiko

$$\bar{X}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Označimo $Y = \bar{X}^n - \mu$ in definirajmo

$$\tilde{X} = X_1 - \zeta Y, \text{ kjer je } \zeta = P[X_1 Y]/\sigma(Y)^2.$$

Zanjo velja

$$P[\tilde{X}Y] = P[X_1Y] - \zeta P[Y^2] = 0,$$

torej sta $\tilde{X}$ in Y nekorelirani, ker pa sta normalni, sta tudi neodvisni. Sedaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned} P[\mathbb{1}_{\{X_1 \leqslant 5\}} \mid \bar{X}^n = t] &= P(X_1 \leqslant 5 \mid \bar{X}^n = t) = P(\tilde{X} + \zeta Y \leqslant 5 \mid Y + \mu = t) = P(\tilde{X} + \zeta(t-\mu) \leqslant 5) \\ &= P(X_1 - \zeta(\bar{X}^n - \mu) + \zeta(t-\mu) \leqslant 5) = P(X_1 - \zeta\bar{X}^n \leqslant 5 + \zeta t). \end{aligned}$$

Konkretno:

$$P[X_1Y] = P[(\sigma Z_1 + \mu)Y] = P[\sigma Z_1 Y] = P[\sigma Z_1 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma}{n} Z_i] = \frac{\sigma^2}{n} P[Z_1^2] = \frac{\sigma^2}{n},$$

torej skupaj z dejstvom $\sigma(Y) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dobimo $\zeta = 1$ in zaporedje cenilk

$$U_n(\bar{x}^n) = P(\sigma(1 + 1/\sqrt{n})Z \leqslant 5 + \bar{x}^n) = \Phi\left(\frac{5 + \bar{x}^n}{\sigma(1 + 1/\sqrt{n})}\right)$$

3 3

3.1

Ker je

$$f(k;\vartheta) = -\frac{\vartheta^k}{k\ln(1-\vartheta)} = -\frac{e^{k\ln(\vartheta)}}{k\ln(1-\vartheta)} \implies f(k_1,\ldots,k_n;\vartheta) = (-\ln(1-\vartheta))^{-n} \prod_{i=1}^n k_i^{-1} e^{\ln(\vartheta)\sum_{i=1}^n k_i}$$

in $\ln((0,1)) = (-\infty, 0) \in \mathscr{T}_{EVK} \setminus \{\varnothing\}$, je to eksponentni model s polnim rangom, torej je statistika

$$T_n(k_1,\ldots,k_n) = \sum_{i=1}^n k_i$$

kompletna zadostna.

3.2

Ker imamo eksponenten model s funkcijo $Q = \ln$, ki je strogo naraščajoča na $(0,1)$, lahko uporabimo Neuman-Pearsonovo lemo za konstrukcijo enakomerno najmočnejših randomiziranih preizkusov. Ker ima model druge momente si lahko pomagamo tudi z normalnimi aproksimacijami (ali asimptotično normalnostjo).

3.3

Poskušajmo postopati z Neuman-Pearsonovo lemo. Označimo torej $\vartheta_0 = 0.7$ in $\alpha = 0.05$. Potem imamo enakomerno najmočnejši randomiziran preizkus za $\vartheta \leqslant \vartheta_0$ proti alternativi $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ v obliki

$$\phi(k_1,\ldots,k_n) = \begin{cases} 1 \mid & T_n(k_1,\ldots,k_n) > C \\ \gamma \mid & T_n(k_1,\ldots,k_n) = C \\ 0 \mid & T_n(k_1,\ldots,k_n) < C \end{cases},$$

kjer določimo $C \in \mathbb{N}$ in $\gamma \in [0,1)$ enolično s pogojem

$$\beta(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}[\Phi] = P_{\vartheta_0}(T_n > C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T_n = C) = \alpha.$$

Idealno bi bilo imeti porazdelitev T_n, a ta vključuje izračun vsot, ki v splošnem nimajo zaključene oblike ($\sum_{k=1}^d \vartheta^k/k$). Če bi imeli dovolj majhen vzorec, to tudi ne bi bil problem, saj bi izračunali posamezne vrednosti gostote T_n z brute-force varianto. Ker pa je vzorec velikosti $n = 100$ relativno velik, tega ne moremo izvesti. Lahko pa zato T_n aproksimiramo z normalno porazdelitvijo (po CLI). Računamo

$$\begin{aligned} \mu_\vartheta &:= P_\vartheta[\mathrm{id}] = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \vartheta^k = -\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)} \frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \\ \sigma_\vartheta^2 &:= V_\vartheta[\mathrm{id}] = P_\vartheta[\mathrm{id}^2] - P_\vartheta[\mathrm{id}]^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k\in\mathbb{N}} k\vartheta^k - \mu_\vartheta^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} - \mu_\vartheta^2. \end{aligned}$$

Označimo NEP model

$$\tilde{P}_\vartheta := N(\mu_\vartheta, \sigma_\vartheta^2)^{\times n}.$$

Sedaj lahko ocenimo gostoto statistike T_n kot

$$P_\vartheta(T_n = k) \approx \tilde{P}_\vartheta(T_n \leqslant k) - \tilde{P}_\vartheta(T_n \leqslant k-1).$$

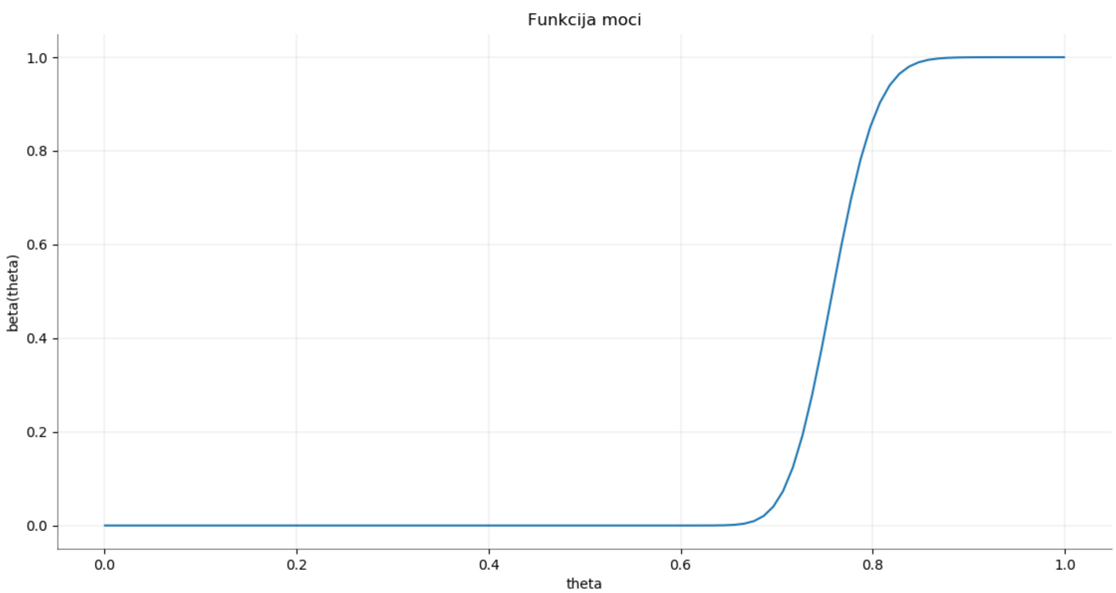
Aproksimirajmo:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 - P_{\vartheta_0}(T_n \leqslant C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T_n = C) \\
&\approx 1 - \tilde{P}_{\vartheta_0}(T_n \leqslant C) + \gamma \tilde{P}_{\vartheta_0}(T_n \in [C-1, C]) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) + \gamma\left(\Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Vzamemo prvi $C \in \mathbb{N}$, za katerega je

$$\gamma = \frac{\alpha + \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right)} \in [0, 1).$$

Dobimo $C = 221$ in $\gamma \approx 0.143$. Na spodnji sliki je funkcija moči, kjer so spet vse vrednosti aproksimirane z normalno porazdelitvijo.



Slika 1: Funkcija moči dobljenega testa.

4

4.1

Označimo spet

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Neuman-Pearsonov test za hipotezo $p = p_0$ proti alternativi ima obliko

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \mid T(x) \in (C_1(p_0), C_2(p_0)) \\ \gamma_j(p_0) & \mid T(x) = C_j(p_0) \\ 0 & \mid T(x) \notin [C_1(p_0), C_2(p_0)] \end{cases},$$

kjer so vrednosti $C_j(p_0)$, $\gamma_j(p_0)$ določene z zahtevo

$$P_{p_0}[\phi_{p_0}] = \alpha \quad \text{in} \quad \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] = 0.$$

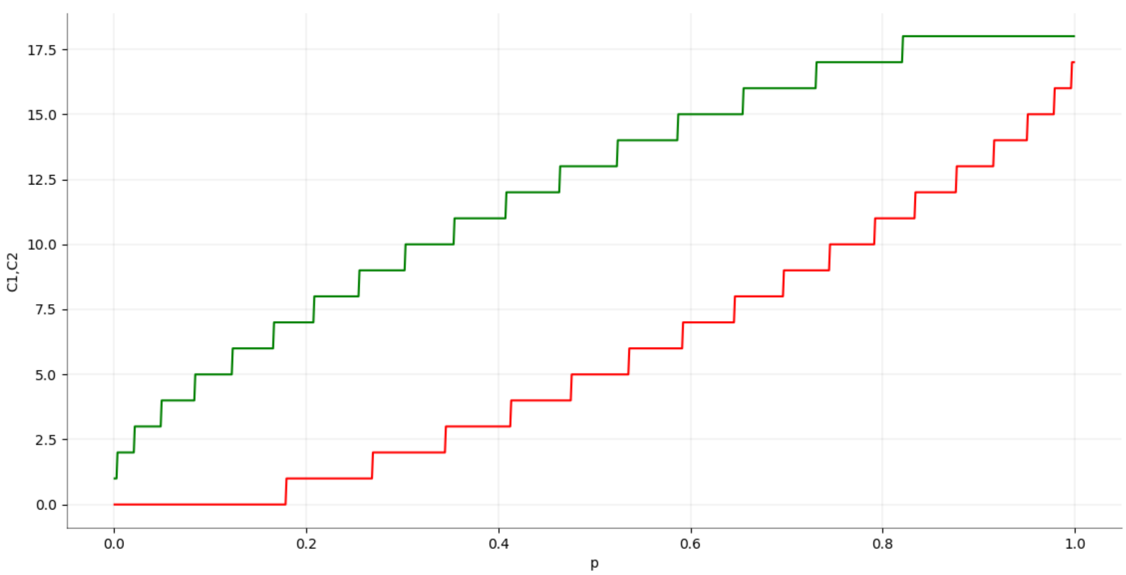
Izračunamo

$$\begin{aligned} P_{p_0}[\phi_{p_0}] &= P_{p_0}(T < C_1(p_0)) + P_{p_0}(T > C_2(p_0)) + \gamma_1(p_0) P_{p_0}(T = C_1(p_0)) + \gamma_2(p_0) P_{p_0}(T = C_2(p_0)) \\ &= 1 - \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} + \sum_{i \in \{1,2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} p_0^{C_i(p_0)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] = &- \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} \left(i p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i} - (n-i) p_0^i (1-p_0)^{n-i-1} \right) \\ &+ \sum_{i \in \{1,2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} \left(C_i(p_0) p_0^{C_i(p_0-1)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)} - (n - C_i(p_0)) p_0^{C_i(p_0-1)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)-1} \right). \end{aligned}$$

Če privzamemo, da so vse vrednosti razen $\gamma_i(p_0)$ konstantne, je to sistem dveh linearnih enačb za $\gamma_i(p_0)$. To, da so ostale stvari konstantne dosežemo tako, da testiramo vsak $C_1(p_0) \in \{0, \ldots, n-1\}$ in $C_2(p_0) \in \{C_1(p_0)+1, \ldots, n\}$ posebej. Vzamemo prve vrednosti, pri katerih velja $0 \leqslant \gamma_i(p_0) \leqslant 1$ za $i = 1, 2$.



Slika 2: $C_1(p)$ in $C_2(p)$ na diskretizaciji $(0,1)$ na 1000 točkah.

Za interval zaupanja definiramo

$$I(T(x)) := \{p \in (0,1) \mid \phi_p(x) < 1\} = \{p \in (0,1) \mid T(x) \in [C_1(p), C_2(p)]\}.$$

Za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$ bomo vzeli vse p na neki diskretizaciji $(0, 1)$, ki so v $I(k)$. Spodnja tabela prikazuje aproksimacijo $I \circ T$ pri delitvi intervala (0,1) na 1000 delov, z zaokrožitvijo krajišč intervala na 4 decimalna mesta.

k	I(k)
0	(0, 0.1798]
1	(0, 0.2697]
2	[0.004, 0.3457]
3	[0.022, 0.4136]
4	[0.0499, 0.4765]
5	[0.0849, 0.5365]
6	[0.1239, 0.5924]
7	[0.1668, 0.6464]
8	[0.2088, 0.6973]
9	[0.2557, 0.7453]
10	[0.3037, 0.7922]
11	[0.3546, 0.8342]
12	[0.4086, 0.8771]
13	[0.4645, 0.9161]
14	[0.5245, 0.951]
15	[0.5874, 0.979]
16	[0.6553, 0.997]
17	[0.7313, 1)
18	[0.8212, 1)

4.2

Zaokroženo na 4 decimalna mesta dobimo

$$\gamma_1(0.72) \approx 0.1787 \quad \text{in} \quad \gamma_2(0.72) \approx 0.6852.$$

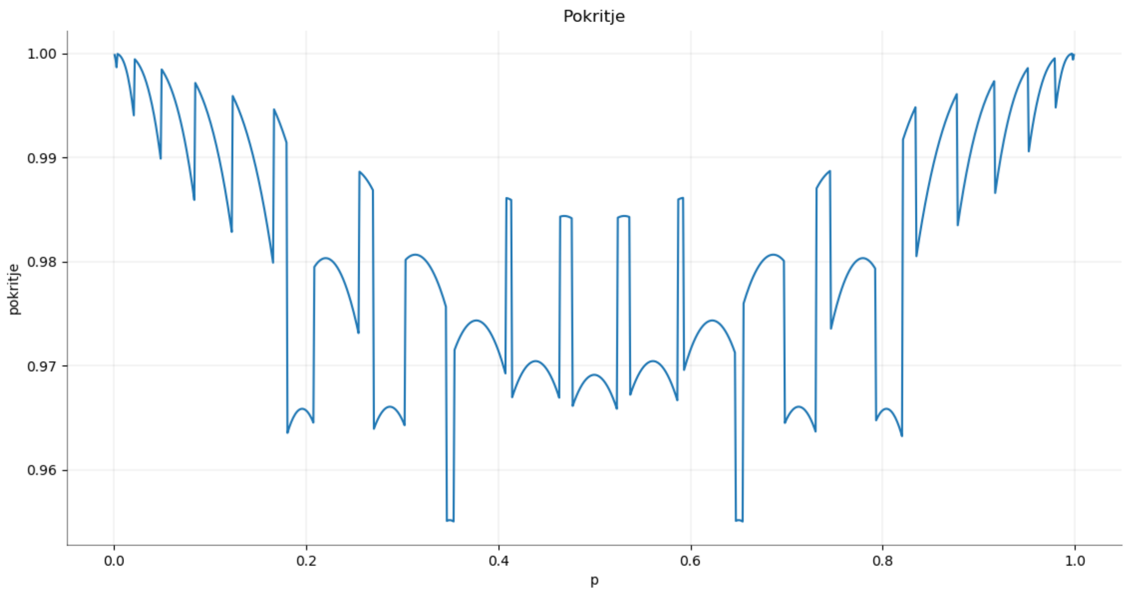
4.3

Ocena minimuma vrednosti na spodnjem grafu je 0.9550165005548836, kar je ocena za koeficient zaupanja.

4.4

Program nam vrne

$$\begin{aligned} C_1 &= 15 \quad \text{in} \quad C_2 = 24 \\ \gamma_1 &\approx 0.6922 \quad \text{in} \quad \gamma_2 \approx 0.0029 \end{aligned}$$


Pokritje
1.00
0.99
0.98
0.97
0.96
pokritje
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p