

# 1 1

## 1.1

Če zapišemo gostote v eksponentni obliki, dobimo

$$f(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \exp(-\langle (a+1, b), (\ln(x), 1/x) \rangle) \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x),$$

torej po Fisher-Neymanovem faktorizacijskem izreku dobimo, da je

$$T(x) = (\ln(x), 1/x)$$

zadostna statistika za ta model. Ker je to eksponenten model s polnim rangom, pa je  $T$  tudi kompletna.

## 1.2

Ker smo v parametričnem modelu z zvezno odvedljivimi gostotami, lahko iščemo stacionarne točke gostot z logaritmčno enačbo verjetja. Računamo

$$\begin{aligned} l(a, b) &:= \ln(f(x; a, b)) = a \ln(b) - \ln(\Gamma(a)) - (a+1) \ln(x) - \frac{b}{x} \\ \frac{\partial l}{\partial a}(a, b) &= \ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x) \\ \frac{\partial l}{\partial b}(a, b) &= \frac{a}{b} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Zapišemo lahko logaritemsko enačbo verjetja

$$\ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x) = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = 0,$$

iz česar takoj dobimo  $b = ax$ , za drugo enačbo pa potem sledi, da rešujemo

$$\Psi(a) := \ln(a) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = 0.$$

Po posledici Bernsteinovega izreka o monotonih funkcijah velja, da je za  $x > 0$

$$\Psi(x) - \frac{1}{2x} > 0,$$

torej naša funkcija nima ničel in zato cenilka po metodi največjega verjetja ne obstaja (digamma wiki).

## 1.3

Naj bo  $P_{(a,b)}$  mera, inducirana z gostoto  $f(\cdot; a, b)$ . Za  $k \in \mathbb{N}$  velja

$$m_k := P_{(a,b)}[\text{id}^k] = \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} e^{-b/x} x^k dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a-k)}{b^{a-k}} \int_0^\infty \frac{b^{a-k}}{\Gamma(a-k)} x^{-(a-k)-1} e^{-b/x} dx = b^k \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)}.$$

Označimo

$$\hat{b}(x_1, x_2, x_3) := \left( \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_3} \right)^{-1} \quad \text{in} \quad \hat{a}(x_1, x_2, x_3) := \frac{\hat{b}(x_1, x_2, x_3)}{x_1} + 1.$$

Opazimo, da je  $\hat{b}(m_1, m_2, m_3) = b$  in  $\hat{a}(m_1, m_2, m_3) = a$ , torej dobimo zaporedje cenilk po metodi momentov

$$(\hat{a}, \hat{b}) \circ (\hat{m}_1^n, \hat{m}_2^n, \hat{m}_3^n),$$

kjer je

$$\hat{m}_k^n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Ker je  $g = (\hat{a}, \hat{b})$  zvezna na  $\mathbb{R}_+^3$ , je ta cenilka dosledna. Sicer pa je  $g$  za analizo še kar zahtevna preslikava in zato je izračun konkretne porazdelitve ali katerega od momentov težek problem.

## 1.4

Označimo  $X^{(n)} := (X_1, \dots, X_n) \sim P_{(a,b)}^{\times n}$  in NEP vektorje  $Y_i := (X_i, X_i^2, X_i^3)$ . Dalje

$$M_n := (\hat{m}_1^n, \hat{m}_2^n, \hat{m}_3^n) \quad \text{in} \quad \hat{\vartheta}_n := g \circ M_n.$$

Po centralnem limitnem izreku velja

$$\sqrt{n} \cdot (M_n(X^{(n)}) - \mu) = \sqrt{n} \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \mu \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, \Sigma),$$

kjer je  $\mu$  pričakovana vrednost,  $\Sigma$  pa variančno-kovariančna matrika vektorjev  $Y_i$ . Potem nam metoda delta skupaj s Cramer-Woldovim pravilom zagotovi

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \vartheta) = \sqrt{n} \cdot (g(M_n(X^{(n)})) - g(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, \mathcal{J}_g(\mu) \Sigma \mathcal{J}_g(\mu)^T),$$

saj je očitno  $\mu = [m_1, m_2, m_3]^T$ .

## 1.5

Enostavno izračunamo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} m_2 - m_1^2 & m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_1 m_3 \\ m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_2^2 & m_5 - m_2 m_3 \\ m_4 - m_1 m_3 & m_5 - m_2 m_3 & m_6 - m_3^2 \end{bmatrix}$$

in označimo

$$A := \mathcal{J}_g(\mu) \Sigma \mathcal{J}_g(\mu)^T.$$

Definirajmo sedaj zaporedje cenilk  $\hat{A}_n$  tako, da zamenjamo v  $A$  elemente  $m_i$  z  $\hat{m}_i^n$ . Potem uporabimo Slutskyjev izrek, zveznost korena ter inverza (simetrične, pozitivno definitne) matrike in malo ocenimo

$$\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) := \sqrt{n} \cdot \hat{A}_n^{-1/2}(X^{(n)}) \left( \hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \vartheta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, I).$$

Naj bo  $B \subset \mathbb{R}^2$  neka množica, ki zadošča

$$P(\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) \in B) \approx N(0, I)(B) = 1 - \alpha.$$

Sledi

$$P(\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) \in B) = P_{\vartheta}^{\times n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta \in \hat{A}_n^{1/2}(B) / \sqrt{n}) = P_{\vartheta}^{\times n}(\vartheta \in \hat{\vartheta}_n - \hat{A}_n^{1/2}(B) / \sqrt{n}),$$

torej je območje zaupanja za  $\vartheta$  enako

$$\hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \hat{A}_n^{1/2}(X^{(n)})(B) / \sqrt{n}.$$

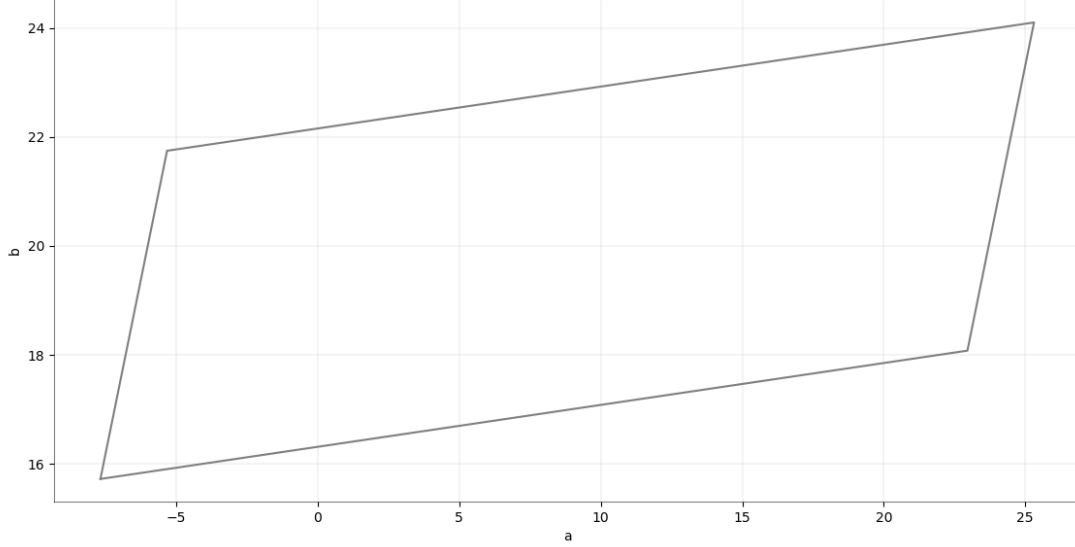
Vprašanje izbire množice  $B$  lahko rešimo s predpostavko, da je to zaprta krogla s središčem v 0 v neki normirani metriki, s čimer se verjetno da dokazati enoličnost njenega radija. Če vzamemo normo  $\|\cdot\|_2$ , dobimo, da je območje zaupanja enako elipsi

$$\hat{\vartheta}_n + Q_n \sqrt{\Lambda_n} B / \sqrt{n},$$

kjer je  $\hat{A}_n = Q_n \Lambda_n Q_n^T$  Schurova forma. Sicer pa je bolj priročno vzeti normo  $\|\cdot\|_{\infty}$ , saj lahko izrazimo

$$N(0, I)([-r, r]^2) = (N(0, 1)([-r, r]))^2 = 1 - \alpha$$

in dobimo, da je  $r$  enak zgornjemu  $((1 - \sqrt{1 - \alpha})/2)$ -percentilu porazdelitve  $N(0, 1)$ . Podobno kot pri elipsi, tu dobimo paralelogram. Spodaj je prikazana realizacija tega paralelograma glede na dane podatke.



## 2 2

Naj bo  $(X_i, \dots, X_n) \sim N(\mu, \sigma_0)^{\times n}$  za  $i = 1, \dots, n$  in  $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fiksna. Po Rao-Blackwellovem izreku lahko najdemo NCEND kot pogojno upanje nepristranske cenilke  $\mathbb{1}_{\{X_1 \leq 5\}}$  pogojno na kompletno in zadostno statistiko

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Označimo  $Y = \bar{X} - \mu$  in definirajmo

$$\tilde{X} = X_1 - \zeta Y, \text{ kjer je } \zeta = P[X_1 Y] / \sigma(Y)^2.$$

Zanjo velja

$$P[\tilde{X} Y] = P[X_1 Y] - \zeta P[Y^2] = 0,$$

torej sta  $\tilde{X}$  in  $Y$  nekorelirani, ker pa sta normalni, sta tudi neodvisni. Sedaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned} P[\mathbb{1}_{\{X_1 \leq 5\}} \mid \bar{X} = t] &= P(X_1 \leq 5 \mid \bar{X} = t) = P(\tilde{X} + \zeta Y \leq 5 \mid Y + \mu = t) = P(\tilde{X} + \zeta(t - \mu) \leq 5) \\ &= P(X_1 - \zeta(\bar{X} - \mu) + \zeta(t - \mu) \leq 5) = P(X_1 - \zeta \bar{X} \leq 5 - \zeta t). \end{aligned}$$

Konkretno:

$$P[X_1 Y] = P[(\sigma_0 Z_1 + \mu) Y] = P[\sigma_0 Z_1 Y] = P[\sigma_0 Z_1 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{n} Z_i] = \frac{\sigma_0^2}{n} P[Z_1^2] = \frac{\sigma^2}{n},$$

torej skupaj z dejstvom  $\sigma(Y) = \sigma_0 / \sqrt{n}$  dobimo  $\zeta = n$  in NCEND

$$U(\bar{x}) = P(\sigma_0(1 + 1/\sqrt{n})Z \leq 5 - \bar{x}) = \Phi\left(\frac{5 - \bar{x}}{\sigma_0(1 + 1/\sqrt{n})}\right)$$

## 3 3

### 3.1

Fiksirajmo  $n \in \mathbb{N}$  in označimo s  $P_\vartheta$   $n$ -razsežno produktno mero mere, inducirane z gostoto  $f(\cdot, \vartheta)$ . Ker je

$$f(k_1, \dots, k_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^n f(k_i; \vartheta) = (-\ln(1 - \vartheta))^{-n} \left( \prod_{i=1}^n k_i^{-1} \right) \exp\left(\ln(\vartheta) \sum_{i=1}^n k_i\right)$$

in  $\ln((0, 1)) = (-\infty, 0) \in \mathcal{T}_{EVK} \setminus \{\emptyset\}$ , je to eksponentni model s polnim rangom, torej dobimo kompletno zadostno statistiko

$$T(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i.$$

### 3.2

Ker imamo eksponenten model s funkcijo  $Q \equiv \ln$ , ki je strogo naraščajoča na  $(0, 1)$ , lahko uporabimo Neuman-Pearsonovo lemo za konstrukcijo enakomerno najmočnejših randomiziranih preizkusov. Ker ima model druge momente, si lahko pomagamo tudi z normalnimi aproksimacijami (asimptotično normalnostjo).

### 3.3

Poskušajmo postopati z Neuman-Pearsonovo lemo. Označimo torej  $\vartheta_0 = 0.7$  in  $\alpha = 0.05$ . Potem imamo enakomerno najmočnejši randomiziran preizkus za  $\vartheta \leq \vartheta_0$  proti alternativni  $\vartheta > \vartheta_0$  v obliki

$$\phi(k_1, \dots, k_n) = \begin{cases} 1 & | \quad T(k_1, \dots, k_n) > C \\ \gamma & | \quad T(k_1, \dots, k_n) = C, \\ 0 & | \quad T(k_1, \dots, k_n) < C \end{cases}$$

kjer določimo  $C \in \mathbb{N}$  in  $\gamma \in [0, 1)$  enolično s pogojem

$$\beta(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}[\Phi] = P_{\vartheta_0}(T > C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T = C) = \alpha.$$

Idealno bi bilo imeti porazdelitev  $T$ , a ta vključuje izračun vsot, ki v splošnem nimajo zaključene oblike ( $\sum_{k=1}^d \vartheta^k/k$ ). Če bi imeli dovolj majhen vzorec, to tudi ne bi bil problem, saj bi izračunali posamezne vrednosti gostote  $T$  z brute-force varianto. Ker pa je vzorec velikosti  $n = 50$  relativno velik, tega ne moremo izvesti. Lahko pa zato  $T$  aproksimiramo z normalno porazdelitvijo (po CLI). Računamo

$$\begin{aligned} \mu_{\vartheta} &:= P_{\vartheta}[\text{id}] = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \vartheta^k = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)} \\ \sigma_{\vartheta}^2 &:= V_{\vartheta}[\text{id}] = P_{\vartheta}[\text{id}^2] - P_{\vartheta}[\text{id}]^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k \in \mathbb{N}} k \vartheta^k - \mu_{\vartheta}^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} - \mu_{\vartheta}^2. \end{aligned}$$

Označimo produktno mero

$$\tilde{P}_{\vartheta} := N(\mu_{\vartheta}, \sigma_{\vartheta}^2)^{\times n}.$$

Sedaj lahko ocenimo gostoto statistike  $T$  kot

$$P_{\vartheta}(T = k) \approx \tilde{P}_{\vartheta}(T \leq k) - \tilde{P}_{\vartheta}(T \leq k-1).$$

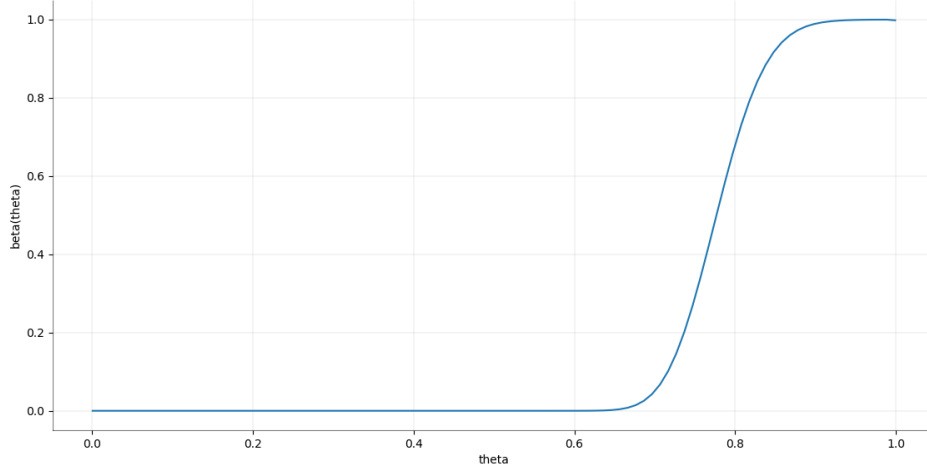
Aproksimirajmo:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - P_{\vartheta_0}(T \leq C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T = C) \\ &\approx 1 - \tilde{P}_{\vartheta_0}(T \leq C) + \gamma \tilde{P}_{\vartheta_0}(T \in [C-1, C]) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) + \gamma \left( \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) \right). \end{aligned}$$

Vzamemo prvi  $C \in \mathbb{N}$ , za katerega je

$$\gamma = \frac{\alpha + \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right)} \in [0, 1).$$

Dobimo  $C = 117$  in  $\gamma \approx 0.9705$ . Na spodnji sliki je prikazana funkcija moči dobljenega testa, kjer so vrednosti spet aproksimirane z normalno porazdelitvijo.



### 3.4

Najprej nas zanima, če je za dani  $x$  preslikava  $f(x, \vartheta)$  monotona v odvisnosti od  $\vartheta$ . Ker dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(k, \vartheta) = -\frac{\vartheta^k}{k \ln(1 - \vartheta)} \left( \frac{1}{(1 - \vartheta) \ln(1 - \vartheta)} + \frac{1}{\ln(\vartheta)} \right) < 0,$$

sledi, da je preslikava padajoča. Iz tega sledi, da je padajoča  $F_\vartheta$  in zato tudi  $F_{T; \vartheta}$ . Vzamemo  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$  in realiziramo interval  $[0.5215, 1)$ , kjer so bile vse vrednosti spet aproksimirane normalno.

## 4

### 4.1

Spet fiksirajmo  $n \in \mathbb{N}$  in označimo  $P_{p_0} = \text{Ber}(p_0)^{\times n}$  ter  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ . Neuman-Pearsonov test za hipotezo  $p = p_0$  proti alternativni ima obliko

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & | T(x) \in (C_1(p_0), C_2(p_0)) \\ \gamma_j(p_0) & | T(x) = C_j(p_0) \\ 0 & | T(x) \notin [C_1(p_0), C_2(p_0)] \end{cases},$$

kjer so vrednosti  $C_j(p_0)$ ,  $\gamma_j(p_0)$  določene z zahtevo

$$P_{p_0}[\phi_{p_0}] = \alpha \quad \text{in} \quad \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] = 0.$$

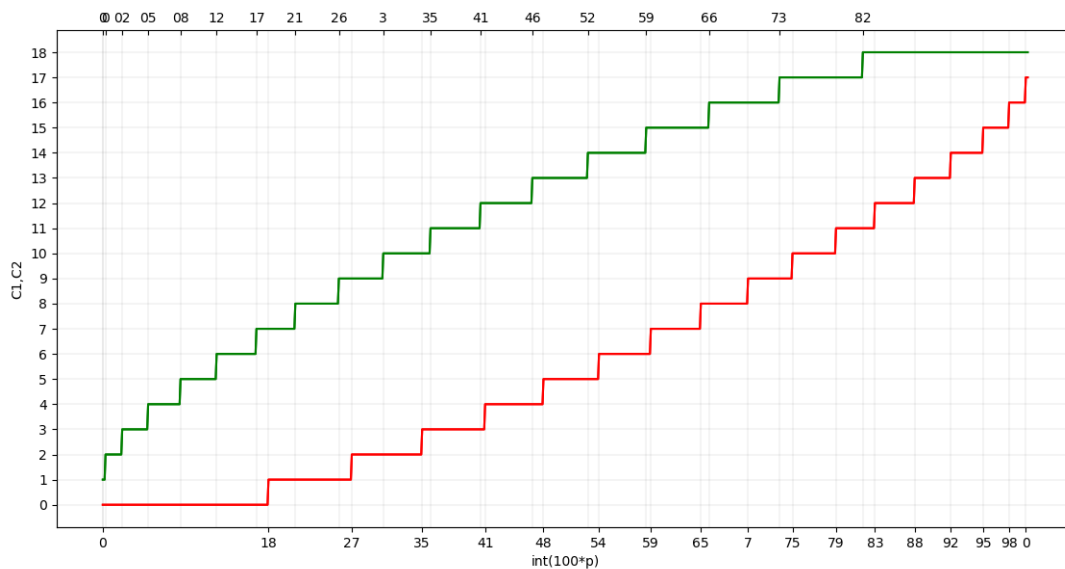
Izračunamo

$$\begin{aligned} P_{p_0}[\phi_{p_0}] &= P_{p_0}(T < C_1(p_0)) + P_{p_0}(T > C_2(p_0)) + \gamma_1(p_0)P_{p_0}(T = C_1(p_0)) + \gamma_2(p_0)P_{p_0}(T = C_2(p_0)) \\ &= 1 - \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i} + \sum_{i \in \{1, 2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} p_0^{C_i(p_0)} (1 - p_0)^{n-C_i(p_0)} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] &= - \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} (i p_0^{i-1} (1 - p_0)^{n-i} - (n - i) p_0^i (1 - p_0)^{n-i-1}) + \\ &+ \sum_{i \in \{1, 2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} (C_i(p_0) p_0^{C_i(p_0)-1} (1 - p_0)^{n-C_i(p_0)} - (n - C_i(p_0)) p_0^{C_i(p_0)} (1 - p_0)^{n-C_i(p_0)-1}). \end{aligned}$$

Testiramo vse  $0 \leq C_1(p_0) < n$  in  $C_1(p_0) < C_2(p_0) \leq n$  in na vsaki iteraciji rešimo sistem dveh linearnih enačb za  $\gamma_i(p_0)$ . Vrnemo prve vrednosti, pri katerih velja  $0 \leq \gamma_i(p_0) < 1$  za  $i = 1, 2$ .



Slika 1:  $C_1(p)$  in  $C_2(p)$  na diskretizaciji  $(0, 1)$  na 1000 točkah za  $n = 18$ .

Za interval zaupanja definiramo

$$I(T(x)) := \{p \in (0, 1) \mid \phi_p(x) < 1\} = \{p \in (0, 1) \mid T(x) \in [C_1(p), C_2(p)]\}.$$

Za vsak  $k = 0, 1, \dots, n$  bomo vzeli vse  $p$  na neki diskretizaciji  $(0, 1)$ , ki so v  $I(k)$ . Spodnja tabela prikazuje aproksimacijo  $I \circ T$  pri delitvi intervala  $(0, 1)$  na 1000 delov, z zaokrožitvijo krajišč intervala na 3 decimalna mesta.

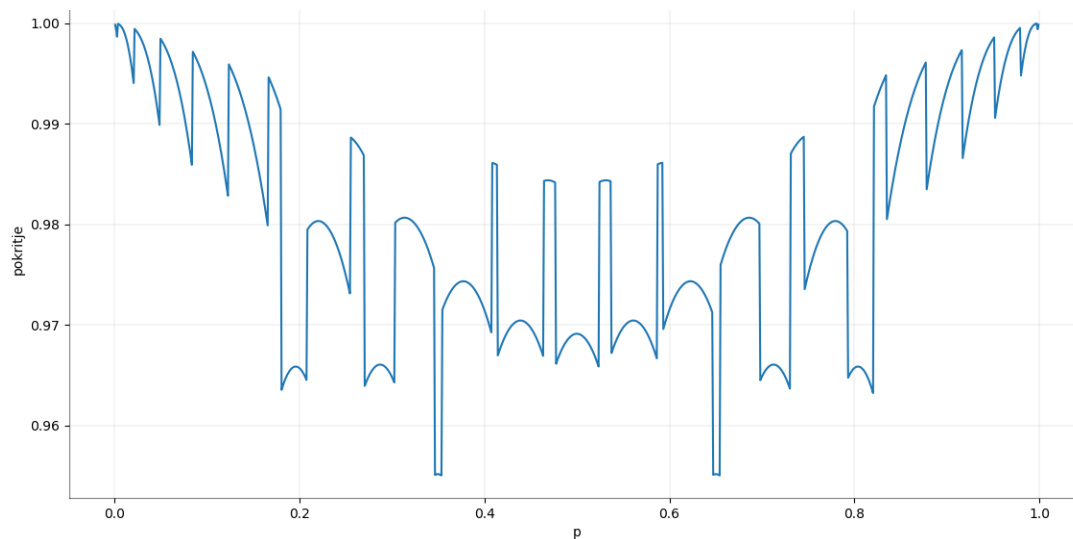
$k$	$I(k)$
0	$(0, 0.18]$
1	$(0, 0.27]$
2	$[0.004, 0.346]$
3	$[0.022, 0.414]$
4	$[0.05, 0.477]$
5	$[0.085, 0.536]$
6	$[0.124, 0.592]$
7	$[0.167, 0.646]$
8	$[0.209, 0.697]$
9	$[0.256, 0.745]$
10	$[0.304, 0.792]$
11	$[0.355, 0.834]$
12	$[0.409, 0.877]$
13	$[0.465, 0.916]$
14	$[0.524, 0.951]$
15	$[0.587, 0.979]$
16	$[0.655, 0.997]$
17	$[0.731, 1)$
18	$[0.821, 1)$

## 4.2

Zaokroženo na 4 decimalna mesta dobimo  $\gamma_1(0.72) \approx 0.1787$  in  $\gamma_2(0.72) \approx 0.6852$ .

## 4.3

Ocena minimuma vrednosti na zgornjem grafu je 0.95502, kar je naša ocena za koeficient zaupanja.

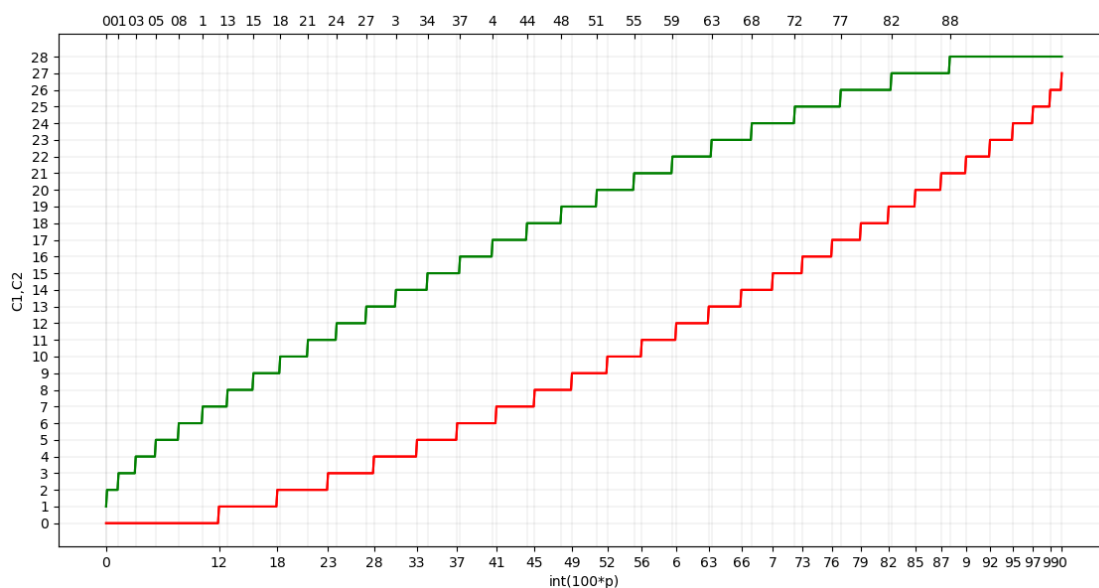


#### 4.4

Program nam vrne

$$C_1 = 15 \quad C_2 = 24 \quad \gamma_1 \approx 0.6922 \quad \gamma_2 \approx 0.0029$$

#### 4.5



Slika 2:  $C_1(p)$  in  $C_2(p)$  na diskretizaciji  $(0, 1)$  na 1000 točkah za  $n = 28$

### 5

Označimo  $p = (p_0, \dots, p_3)$  in

$$P_p = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Vemo, da za multinomsko porazdelitev  $M$  velja

$$T_i^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\xi_i\}}(x_j) \implies P_p^{\times n} \circ (T_0^n, T_1^n, T_2^n, T_3^n)^{-1} = M(p, n).$$

## 5.1

Računamo moč preizkusa hipoteze  $p = \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (3, 7, 9, 13)/32$ .

### 5.1.1

Test je oblike

$$\phi_n^1(x) = \begin{cases} 1 & | -2 \ln(\lambda_n(T^n x)) > \chi_{3;\alpha}^2 \\ 0 & | -2 \ln(\lambda_n(T^n x)) \leq \chi_{3;\alpha}^2 \end{cases} \quad \text{za} \quad \lambda_n(t) = \prod_{j=0}^3 \left( \frac{n\pi_j}{t_j} \right)^{t_j}.$$

Dobimo

$$\beta_n^1 := P_\pi^{\times n}[\phi_n^1] = M(\pi, n)(-2 \ln \circ \lambda_n > \chi_{3;\alpha}^2) = M(\pi, n)(\{t \mid t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = n \wedge -2 \ln(\lambda_n(t)) > \chi_{3;\alpha}^2\}).$$

Te množice računalniško ni zelo zahtevno parametrizirati. Ko to naredimo, dobimo spodnjo tabelo.

$n$	$\beta_n^1$
35	0.0630609253830682
65	0.05392789603324363
95	0.052181085317432305
125	0.051705991845782534

### 5.1.2

Test je oblike

$$\phi_n^2(x) = \begin{cases} 1 & | \tau_n(T^n x) > \chi_{3;\alpha}^2 \\ 0 & | \tau_n(T^n x) \leq \chi_{3;\alpha}^2 \end{cases} \quad \text{za} \quad \tau_n(t) = \sum_{j=0}^3 \frac{(t_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}.$$

Spet definiramo

$$\beta_n^2 := P_\pi^{\times n}[\phi_n^2]$$

in parametriziramo ter zmerimo ustrezno množico, da dobimo spodnjo tabelo.

$n$	$\beta_n^2$
35	0.048073432725070295
65	0.04815898454028488
95	0.049765599771549665
125	0.04915904981481392

## 5.2

### 5.2.1

Naj bo

$$H = \{(p_0, p_1, p_2, p_3) \mid p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = n \wedge p_1 + 2p_2 = 2/3\}.$$

Za dani  $x$  iščemo

$$\sup_{p \in H} P_p^{\times n}(\{x\}) = \sup_{p \in H} \prod_{i=0}^3 p_i^{T_i^n(x)},$$

torej maksimiziramo funkcijo

$$l(p) = t_0 \ln(p_0) + t_1 \ln(p_1) + t_2 \ln(p_2) + t_3 \ln(p_3) = t_0 \ln(1/3 + p_2 - p_3) + t_1 \ln(2/3 - 2p_2) + t_2 \ln(p_2) + t_3 \ln(p_3).$$



Po enačenju parcialnih odvodov z 0 dobimo ekstrem

$$\hat{p}_2(t) = \frac{(t_0 - t_1 + t_3) + \sqrt{(t_0 - t_1 + t_3)^2 + 4nt_2}}{6n} \quad \text{in} \quad \hat{p}_3(t) = \frac{t_3(p_2 + 1/3)}{t_0 + t_2}$$

in zaupamo, da je to maksimum. Podajmo test

$$\phi_n^3(x) = \begin{cases} 1 & | -2 \ln(\zeta_n(T^n x)) > \chi_{3;\alpha}^2 \\ 0 & | -2 \ln(\zeta_n(T^n x)) \leq \chi_{3;\alpha}^2 \end{cases} \quad \text{za} \quad \zeta_n(t) = \prod_{i=0}^3 \left( \frac{n\hat{p}_i(t)}{t_i} \right)^{t_i}.$$

Asimptotični izrek za hipotezo  $H$  velja, saj je  $p \mapsto p_1 + 2p_2 - 2/3$  gladka submerzija, drugi pogoji pa so na parametričnem prostoru in gostoti porazdelitve, ki v tem primeru niso spremenjeni.

## 5.2.2

Izbrali smo  $\pi = (2, 2, 1, 1)/6$  in dobili 65 primerov, ko test zavrne hipotezo, torej delež je  $65/9500 \approx 0.00684$ .

# 6

Fiksirajmo  $(m, n) = (3, 300)$  (dimenzije podatkov) in  $\alpha = 0.05$ .

## 6.1

### 6.1.1

Z reševanjem predločenega sistema  $X\hat{\beta} = y$ , kjer je  $X = [1 \text{ TCH HDL TRI}]$  in  $y = \text{LDL}$ , dobimo

$$\hat{\beta}_0 = 0.05993031, \quad \hat{\beta}_1 = 0.83909446, \quad \hat{\beta}_2 = -0.64999293, \quad \hat{\beta}_3 = -0.2240437.$$

V nadaljevanju uporabljamo  $\hat{y} = X\hat{\beta}$  in  $\bar{y}$  povprečje vektorja  $y$ .

### 6.1.2

Hipotezo  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  testiramo s Fisherjevo statistiko

$$F = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2/m}{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2/(n - m - 1)} \sim F_{m, n-m-1}.$$

Hipotezo zavrnemo, če je  $F > F_{m, n-m-1; \alpha} \approx 2.6351$ . Ker na našem vzorcu dobimo  $F \approx 298.0651$ , hipotezo zavrnemo.

### 6.1.3

Hipotezo  $\beta_0 = 0$  testiramo s Studentovo statistiko

$$T = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\|y - \hat{y}\|_2 \sqrt{((X^T X)^{-1})_{(1,1)} / (n - m - 1)}} \sim t_{n-m-1}.$$

Hipotezo zavrnemo, če je  $|T| > t_{n-m-1; \alpha/2} \approx 1.9680$ . Ker na našem vzorcu dobimo  $T \approx 0.3079$ , hipoteze ne moremo zavrniti.

## 6.2

### 6.2.1

Z reševanjem predločenega sistema  $X\hat{\beta} = y$ , kjer je  $X = [\text{TCH HDL TRI}]$  in  $y = \text{LDL}$ , dobimo

$$\hat{\beta}_1 = 0.84615208 \quad \hat{\beta}_2 = -0.6445336 \quad \hat{\beta}_3 = -0.2225561.$$

### 6.2.2

Hipotezo  $\beta = (1, -1, -0.54)$  testiramo s pomočjo območja zaupanja, konstruiranega v naslednji podpodnalogi. Zavrնemo jo s stopnjo značilnosti  $\alpha$ , če je

$$\left\| \sqrt{\Lambda} Q^T (\hat{\beta} - \beta) \right\|_2^2 > \frac{m \|y - \hat{y}\|_2^2 F_{m, n-m; \alpha}}{n - m}.$$

Na levi strani dobimo 33.667, na desni pa 3.0564 in zato zavrնemo. Hipotezo lahko testiramo tudi s kvadrom zaupanja iz naloge 6.2.4. in spet zavrնemo.

### 6.2.3

Imamo torej pivotno funkcijo

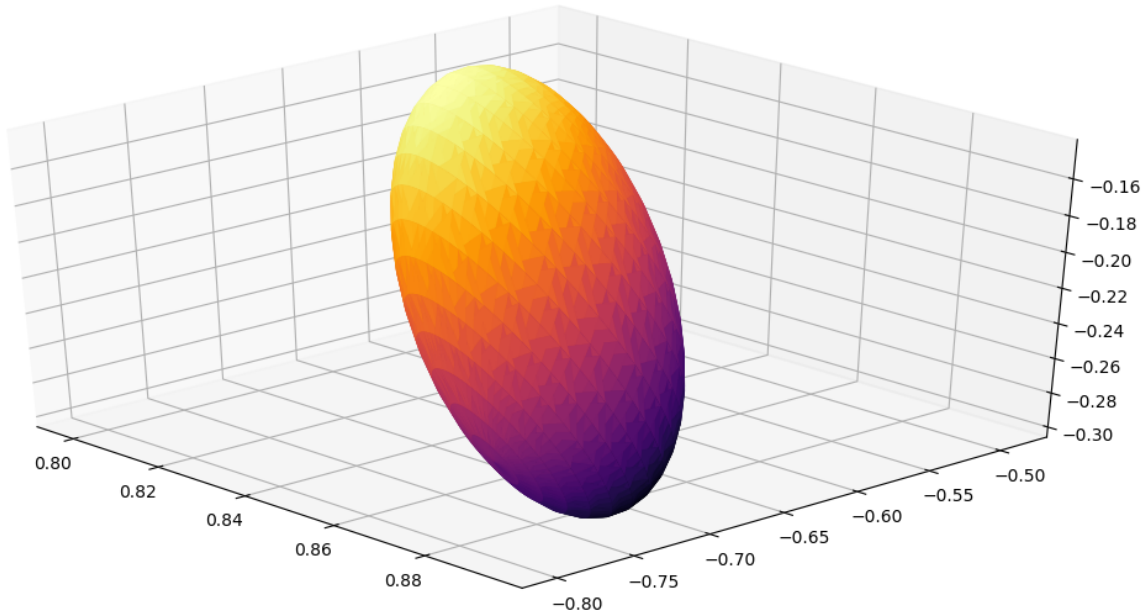
$$F(x, \beta) = \frac{\langle X^T X (\hat{\beta} - \beta), \hat{\beta} - \beta \rangle / m}{\|y - \hat{y}\|^2 / (n - m)} \sim F_{m, n-m}$$

s katero konstruiramo elipsoid zaupanja

$$E = \left\{ \hat{\beta} + Q \sqrt{\Lambda}^{-1} u \mid \|u\|_2^2 \leq \frac{m \|y - \hat{y}\|_2^2 F_{m, n-m; \alpha}}{n - m} \right\},$$

kjer je  $X^T X = Q \Lambda Q^T$  Schurov razcep. Če s  $S_1(0) \subset \mathbb{R}^3$  označimo enotsko kroglo s središčem v izhodišču, dobimo iz podatkov elipsoid

$$E \approx \begin{bmatrix} 0.84615 \\ -0.64453 \\ -0.22255 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.01289 & -0.02088 & 0.0411 \\ -0.00261 & -0.01985 & -0.1541 \\ -0.00431 & 0.07447 & -0.02955 \end{bmatrix} \cdot S_1(0).$$



Slika 3: Elipsoid zaupanja za  $\beta$ , realiziran na naših podatkih.

### 6.2.4

Za  $\beta_j$  imamo sedaj intervale zaupanja stopnje zaupanja  $1 - \alpha/m$  oblike

$$I_j := \left[ \hat{\beta}_j \mp t_{n-m;\alpha/(2m)} \|y - \hat{y}\|_2 \sqrt{((X^T X)^{-1})_{(j,j)/(n-m)}} \right].$$

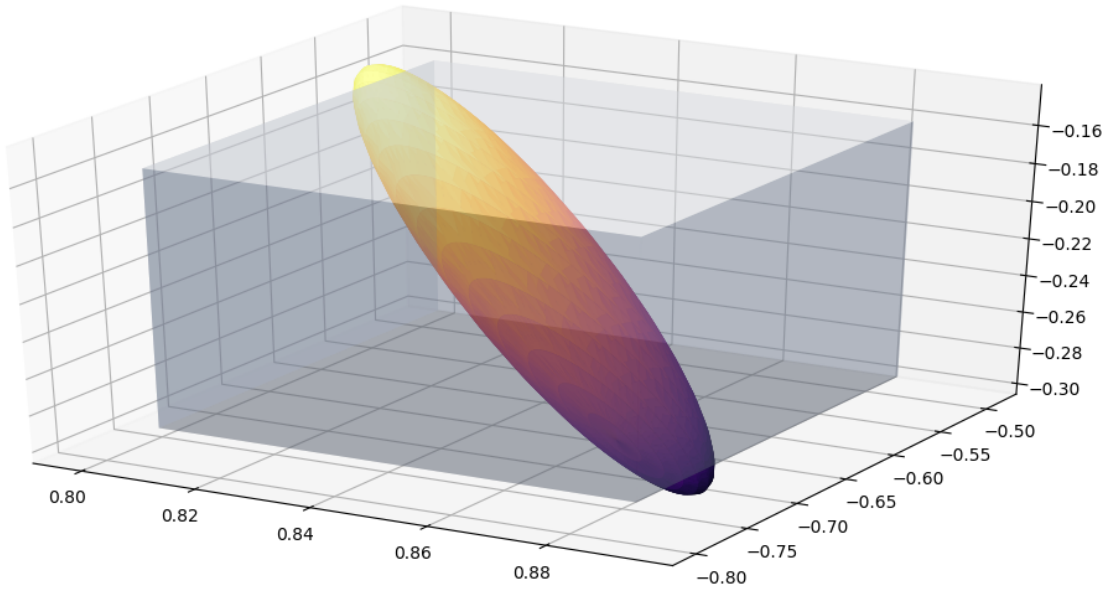
Z Bonferonijevim popravkom dobimo, da je

$$I := \bigtimes_{j=1}^m I_j$$

kvader zaupanja s stopnjo  $\alpha$ . Na našem vzorcu imamo

$$I = [0.805, 0.887] \times [-0.778, -0.511] \times [-0.291, -0.154].$$

Na sliki vidimo, da je volumen kvadra zaupanja veliko večji od elipsoida in da prvi skoraj vsebuje drugega.



Slika 4: Kvader zaupanja in elipsoid zaupanja za  $\beta$ , realizirana na naših podatkih.

## 7

### 7.1

Vemo, da ima slučajna spremenljivka  $Y$  Lebesgueovo gostoto natanko tedaj, ko obstaja Borelova funkcija  $f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja

$$P(Y \leq y) = \int_{(-\infty, y]} f_Y d\mathcal{L} = \int_{-\infty}^y f_Y(x) dx.$$

Upoštevamo izrek o popolni verjetnosti in Tonellijev izrek za zamenjavo vrstnega reda integracije, da dobimo

$$\begin{aligned} P(Y + Z \leq w) &= \sum_{z_k} P(Y \leq w - z_k) P(Z = z_k) = \sum_{z_k} \int_{-\infty}^{w - z_k} f_Y(y) P(Z = z_k) dy \\ &= \sum_{z_k} \int_{-\infty}^w f_Y(x - z_k) P(Z = z_k) dx = \int_{-\infty}^w \sum_{z_k} f_Y(x - z_k) P(Z = z_k) dx = \int_{-\infty}^w f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Ker je  $(x, z_k) \mapsto f_Y(x - z_k)P(Z = z_k)$  merljiva in vrsta konvergentna za vsak  $x \in \mathbb{R}$  (je dominirana z 1), je  $f_X \in B_{\mathbb{R}}/B_{\mathbb{R}}$  (po enem od izrekov teorije mere). Zato je  $f_X$  Lebesgueva gostota slučajne spremenljivke  $X = Y + Z$ .

## 7.2

Za  $x \geq 0$  dobimo

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \lambda^k}{c(\lambda)} \alpha (x - k)^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x - k) = \frac{\alpha c_{[x]}}{c(\lambda)} \lambda^{[x]} (x - [x])^{\alpha-1},$$

$$\ln(f_X(x)) = \ln(\alpha/c(\lambda)) + \ln(c_{[x]}) + [x] \ln(\lambda) + (\alpha - 1) \ln(x - [x]).$$

## 7.3

Izrazimo

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\alpha}{c(\lambda)} \right)^n \left( \prod_{i=1}^n c_{[x_i]} \right) \exp \left( \left\langle [\ln(\lambda), \alpha - 1], \left[ \sum_{i=1}^n [x_i], \sum_{i=1}^n \ln(x_i - [x_i]) \right] \right\rangle \right).$$

Po Fisher-Neymanovem izreku dobimo zadostnost statistike

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n ([x_i], \ln(x_i - [x_i])),$$

ker pa imamo eksponentni model s polnim rangom, sledi še, da je ta statistika tudi zadostna. Pripomnimo, da je verjetnost dogodka  $\{X_i = [X_i]\}$  enaka nič in da sta  $T$  in  $x \mapsto \prod_{i=1}^n c_{[x_i]}$  Borelovi, saj ju lahko zapišemo kot vrsto konstantno pomnoženih indikatorjev (po predpostavki pa je slednja še nenegativna).