1 1

1.1

Če zapišemo gostote v eksponentni obliki, dobimo

$$f(x;a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \exp(-\langle\, (a+1,b),(\ln(x),1/x)\,\rangle) \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

torej po Fisher-Neymanovem faktorizacijskem izreku dobimo, da je

$$T(x) = (\ln(x), 1/x)$$

zadostna statistika za ta model. Ker je to eksponenten model s polnim rangom, pa je T tudi kompletna.

1.2

Ker smo v parametričnem modelu z zvezno odvedljivimi gostotami, lahko iščemo stacionarne točke gostot z logaritmično enačbo verjetja. Računamo

$$\begin{aligned}
&l(a,b) := \ln(f(x;a,b)) = a\ln(b) - \ln(\Gamma(a)) - (a+1)\ln(x) - \frac{b}{x}\\
&\frac{\partial l}{\partial a}(a,b) = \ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x)\\
&\frac{\partial l}{\partial b}(a,b) = \frac{a}{b} - \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Zapišemo lahko logaritemsko enačbo verjetja

$$\ln(b) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \ln(x) = \frac{a}{b} - \frac{1}{x} = 0,$$

iz česar takoj dobimo $b = ax$, za drugo enačbo pa potem sledi, da rešujemo

$$\Psi(a) := \ln(a) - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = 0.$$

Po posledici Bernsteinovega izreka o monotonih funkcijah velja, da je za $x > 0$

$$\Psi(x) - \frac{1}{2x} > 0,$$

torej naša funkcija nima ničel in zato cenilka po metodi največjega verjetja ne obstaja.

1.3

Naj bo $P_{(a,b)}$ mera, inducirana z gostoto $f(\cdot;a,b)$. Za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$m_k := P_{(a,b)}[\mathrm{id}^k] = \int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} e^{-b/x} x^k dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a-k)}{b^{a-k}} \int_0^\infty \frac{b^{a-k}}{\Gamma(a-k)} x^{-(a-k)-1} e^{-b/x} dx = b^k \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)}.$$

Označimo

$$\hat{b}(x_1,x_2,x_3) := \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_3}\right)^{-1} \quad \text{in} \quad \hat{a}(x_1,x_2,x_3) := \frac{\hat{b}(x_1,x_2,x_3)}{x_1} + 1.$$

Opazimo, da je $\hat{b}(m_1,m_2,m_3) = b$ in $\hat{a}(m_1,m_2,m_3) = a$, torej dobimo zaporedje cenilk po metodi momentov

$$(\hat{a},\hat{b}) \circ (\hat{m_1^n}, \hat{m_2^n}, \hat{m_3^n}),$$

kjer je

$$\hat{m_k^n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Ker je $g = (\hat{a},\hat{b})$ zvezna na $\mathbb{R}^3_+$, je ta cenilka dosledna. Sicer pa je g za analizo še kar zahtevna preslikava in zato je izračun konkretne porazdelitve ali katerega od momentov težek problem.

1.4

Označimo $X^{(n)} := (X_1, \dots, X_n) \sim P_{(a,b)}^{\times n}$ in NEP vektorje $Y_i := (X_i, X_i^2, X_i^3)$. Dalje

$$M_n := (\hat{m_1^n}, \hat{m_2^n}, \hat{m_3^n}) \quad \text{in} \quad \hat{\vartheta}_n := g \circ M_n.$$

Po centralnem limitnem izreku velja

$$\sqrt{n} \cdot \left(M_n(X^{(n)}) - \mu \right) = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu \right) \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0, \Sigma),$$

kjer je μ pričakovana vrednost, Σ pa variančno-kovariančna matrika vektorjev Y_i. Potem nam metoda delta skupaj s Cramer-Woldovim pravilom zagotovi

$$\sqrt{n} \cdot (\hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \vartheta) = \sqrt{n} \cdot (g(M_n(X^{(n)})) - g(\mu)) \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0, \mathscr{J}_g(\mu) \Sigma \mathscr{J}_g(\mu)^T),$$

saj je očitno $\mu = [m_1, m_2, m_3]^T$.

1.5

Enostavno izračunamo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} m_2 - m_1^2 & m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_1 m_3 \\ m_3 - m_1 m_2 & m_4 - m_2^2 & m_5 - m_2 m_3 \\ m_4 - m_1 m_3 & m_5 - m_2 m_3 & m_6 - m_3^2 \end{bmatrix}$$

in označimo

$$A := \mathscr{J}_g(\mu) \Sigma \mathscr{J}_g(\mu)^T.$$

Definirajmo sedaj zaporedje cenilk $\hat{A}_n$ tako, da zamenjamo v A elemente m_i z $\hat{m_i^n}$. Potem uporabimo Sluckyjev izrek, zveznost korena ter inverza (simetrične, pozitivno definitne) matrike in malo ocenimo

$$\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) := \sqrt{n} \cdot \hat{A}_n^{-1/2}(X^{(n)}) \left(\hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \vartheta \right) \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0, I).$$

Naj bo $B \subset \mathbb{R}^2$ neka množica, ki zadošča

$$P(\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) \in B) \approx N(0, I)(B) = 1 - \alpha.$$

Sledi

$$P(\pi_n(X^{(n)}, \vartheta) \in B) = P_\vartheta^{\times n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta \in \hat{A}_n^{1/2}\,(B)\,/\sqrt{n}) = P_\vartheta^{\times n}(\vartheta \in \hat{\vartheta}_n - \hat{A}_n^{1/2}\,(B)\,/\sqrt{n}),$$

torej je območje zaupanja za ϑ enako

$$\hat{\vartheta}_n(X^{(n)}) - \hat{A}_n^{1/2}(X^{(n)})\,(B)\,/\sqrt{n}.$$

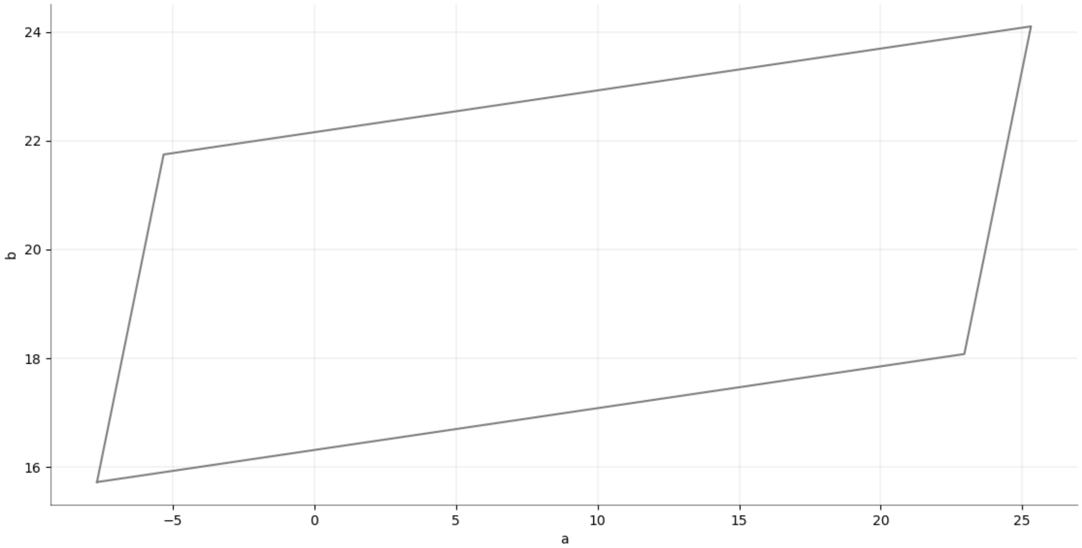
Vprašanje izbire množice B lahko rešimo s predpostavko, da je to zaprta krogla s središčem v 0 v neki normirani metriki, s čimer se verjetno da dokazati enoličnost njenega radija. Če vzamemo normo $\|.\|_2$, dobimo, da je območje zaupanja enako elipsi

$$\hat{\vartheta}_n + Q_n \sqrt{\Lambda_n} B / \sqrt{n},$$

kjer je $\hat{A}_n = Q_n \Lambda_n Q_n^T$ Schurova forma. Sicer pa je bolj priročno vzeti normo $\|.\|_\infty$, saj lahko izrazimo

$$N(0, I) \left([-r, r]^2 \right) = \left(N(0, 1)([-r, r]) \right)^2 = 1 - \alpha$$

in dobimo, da je r enak zgornjemu $((1 - \sqrt{1 - \alpha})/2)$-percentilu porazdelitve $N(0, 1)$. Podobno kot pri elipsi, tu dobimo paralelogram. Spodaj je prikazana realizacija tega paralelograma glede na dane podatke.



2 2

Naj bo $(X_1, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma_0)^{\times n}$ in $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ fiksna. Po Rao-Blackwellovem izreku lahko najdemo NCEND kot pogojno upanje nepristranske cenilke $\mathbb{1}_{\{X_1 \leqslant 5\}}$ pogojno na kompletno in zadostno statistiko

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Označimo $Y = \bar{X} - \mu$ in definirajmo

$$\tilde{X} = X_1 - \zeta Y, \text{ kjer je } \zeta = P[X_1 Y]/\sigma(Y)^2.$$

Zanjo velja

$$P[\tilde{X} Y] = P[X_1 Y] - \zeta P[Y^2] = 0,$$

torej sta $\tilde{X}$ in Y nekorelirani, ker pa sta normalni, sta tudi neodvisni. Sedaj lahko zapišemo

$$\begin{aligned} P[\mathbb{1}_{\{X_1 \leqslant 5\}} \mid \bar{X} = t] &= P(X_1 \leqslant 5 \mid \bar{X} = t) = P(\tilde{X} + \zeta Y \leqslant 5 \mid Y + \mu = t) = P(\tilde{X} + \zeta(t - \mu) \leqslant 5) \\ &= P(X_1 - \zeta(\bar{X} - \mu) + \zeta(t - \mu) \leqslant 5) = P(X_1 - \zeta \bar{X} \leqslant 5 - \zeta t). \end{aligned}$$

Konkretno:

$$P[X_1 Y] = P[(\sigma_0 Z_1 + \mu) Y] = P[\sigma_0 Z_1 Y] = P[\sigma_0 Z_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_0}{n} Z_i] = \frac{\sigma_0^2}{n} P[Z_1^2] = \frac{\sigma_0^2}{n},$$

torej skupaj z dejstvom $\sigma(Y) = \sigma_0/\sqrt{n}$ dobimo $\zeta = 1$ in NCEND

$$U(\bar{x}) = P(\sigma_0(1 + 1/\sqrt{n}) Z \leqslant 5 - \bar{x}) = \Phi\left(\frac{5 - \bar{x}}{\sigma_0(1 + 1/\sqrt{n})}\right)$$

3 3

3.1

Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ in označimo s P_ϑ n-razsežno produktno mero mere, inducirane z gostoto $f(\_, \vartheta)$. Ker je

$$f(k_1, \ldots, k_n; \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(k_i; \vartheta) = (-\ln(1 - \vartheta))^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} k_i^{-1}\right) \exp\left(\ln(\vartheta) \sum_{i=1}^{n} k_i\right)$$

in $\ln((0,1)) = (-\infty, 0) \in \mathscr{T}_{EVK} \setminus \{\varnothing\}$, je to eksponentni model s polnim rangom, torej dobimo kompletno zadostno statistiko

$$T(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

3.2

Ker imamo eksponenten model s funkcijo $Q \equiv \ln$, ki je strogo naraščajoča na $(0,1)$, lahko uporabimo Neuman-Pearsonovo lemo za konstrukcijo enakomerno najmočnejših randomiziranih preizkusov. Ker ima model druge momente, si lahko pomagamo tudi z normalnimi aproksimacijami (asimptotično normalnostjo).

3.3

Poskušajmo postopati z Neuman-Pearsonovo lemo. Označimo torej $\vartheta_0 = 0.7$ in $\alpha = 0.05$. Potem imamo enakomerno najmočnejši randomiziran preizkus za $\vartheta \leqslant \vartheta_0$ proti alternativi $\vartheta > \vartheta_0$ v obliki

$$\phi(k_1, \ldots, k_n) = \begin{cases} 1 \mid & T(k_1, \ldots, k_n) > C \\ \gamma \mid & T(k_1, \ldots, k_n) = C \\ 0 \mid & T(k_1, \ldots, k_n) < C \end{cases},$$

kjer določimo $C \in \mathbb{N}$ in $\gamma \in [0,1)$ enolično s pogojem

$$\beta(\vartheta_0) = P_{\vartheta_0}[\Phi] = P_{\vartheta_0}(T > C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T = C) = \alpha.$$

Idealno bi bilo imeti porazdelitev T, a ta vključuje izračun vsot, ki v splošnem nimajo zaključene oblike $(\sum_{k=1}^{d} \vartheta^k / k)$. Če bi imeli dovolj majhen vzorec, to tudi ne bi bil problem, saj bi izračunali posamezne vrednosti gostote T z brute-force varianto. Ker pa je vzorec velikosti $n = 50$ relativno velik, tega ne moremo izvesti. Lahko pa zato T aproksimiramo z normalno porazdelitvijo (po CLI). Računamo

$$\mu_\vartheta := P_\vartheta[\mathrm{id}] = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \vartheta^k = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)}$$
$$\sigma_\vartheta^2 := V_\vartheta[\mathrm{id}] = P_\vartheta[\mathrm{id}^2] - P_\vartheta[\mathrm{id}]^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\vartheta^k - \mu_\vartheta^2 = -\frac{1}{\ln(1-\vartheta)} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} - \mu_\vartheta^2.$$

Označimo produktno mero

$$\tilde{P}_\vartheta := N(\mu_\vartheta, \sigma_\vartheta^2)^{\times n}.$$

Sedaj lahko ocenimo gostoto statistike T kot

$$P_\vartheta(T = k) \approx \tilde{P}_\vartheta(T \leqslant k) - \tilde{P}_\vartheta(T \leqslant k-1).$$

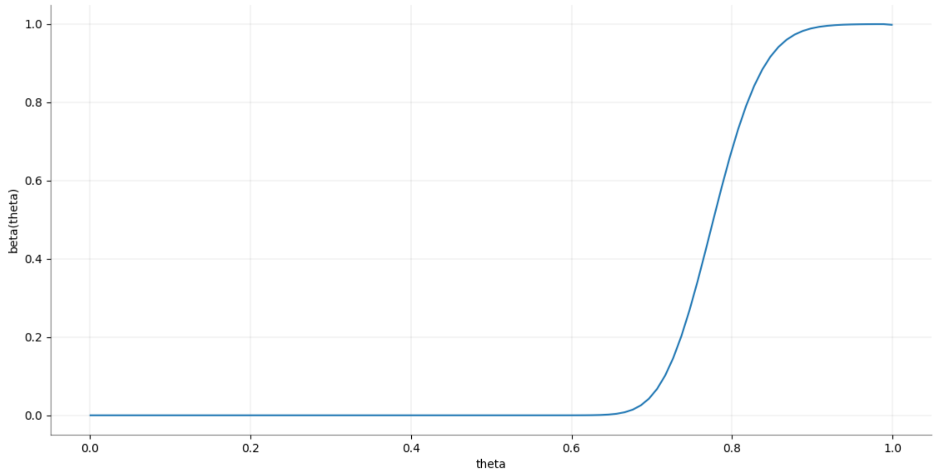
Aproksimirajmo:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - P_{\vartheta_0}(T \leqslant C) + \gamma P_{\vartheta_0}(T = C) \\ &\approx 1 - \tilde{P}_{\vartheta_0}(T \leqslant C) + \gamma \tilde{P}_{\vartheta_0}(T \in [C-1, C]) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) + \gamma\left(\Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Vzamemo prvi $C \in \mathbb{N}$, za katerega je

$$\gamma = \frac{\alpha + \Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{C/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{(C-1)/n - \mu_{\vartheta_0}}{\sigma_{\vartheta_0}/\sqrt{n}}\right)} \in [0,1).$$

Dobimo $C = 117$ in $\gamma \approx 0.9705$. Na spodnji sliki je prikazana funkcija moči dobljenega testa, kjer so vrednosti spet aproksimirane z normalno porazdelitvijo.



3.4

Najprej nas zanima, če je za dani k preslikava $f(k, \vartheta)$ monotona v odvisnosti od ϑ. Ker dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(k, \vartheta) = -\frac{\vartheta^k}{k \ln(1-\vartheta)} \left(\frac{1}{(1-\vartheta)\ln(1-\vartheta)} + \frac{1}{\ln(\vartheta)} \right) < 0,$$

sledi, da je preslikava padajoča. Iz tega sledi, da je padajoča F_ϑ in zato tudi $F_{T;\vartheta}$. Vzamemo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ in realiziramo interval $[0.5215, 1)$, kjer so bile vse vrednosti spet aproksimirane normalno.

4

4.1

Spet fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ in označimo $P_{p_0} = \mathrm{Ber}(p_0)^{\times n}$ ter $T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$. Neuman-Pearsonov test za hipotezo $p = p_0$ proti alternativi ima obliko

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \mid T(x) \in (C_1(p_0), C_2(p_0)) \\ \gamma_j(p_0) & \mid T(x) = C_j(p_0) \\ 0 & \mid T(x) \notin [C_1(p_0), C_2(p_0)] \end{cases},$$

kjer so vrednosti $C_j(p_0)$, $\gamma_j(p_0)$ določene z zahtevo

$$P_{p_0}[\phi_{p_0}] = \alpha \quad \text{in} \quad \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] = 0.$$

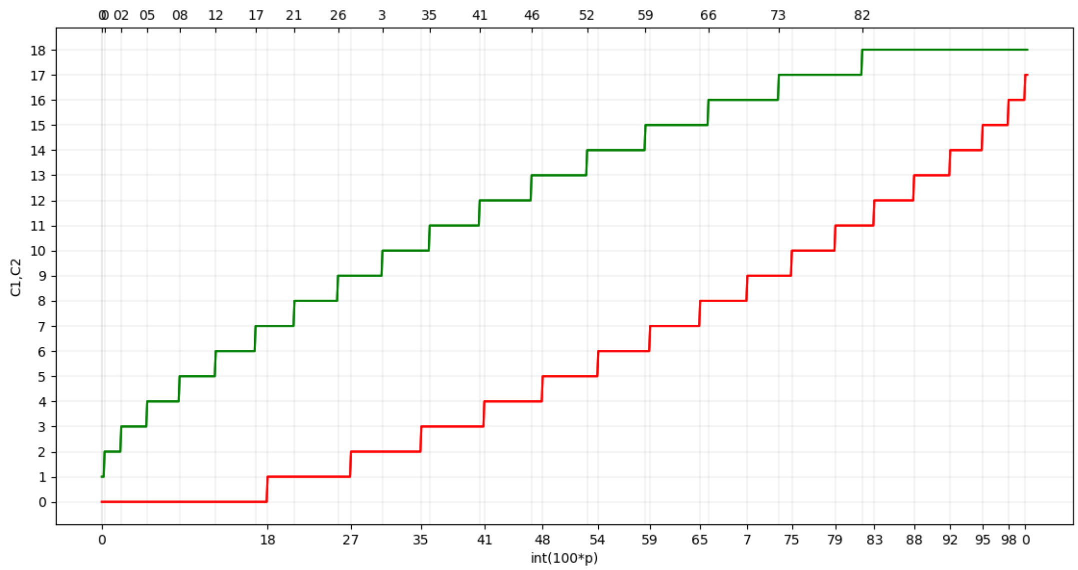
Izračunamo

$$\begin{aligned} P_{p_0}[\phi_{p_0}] &= P_{p_0}(T < C_1(p_0)) + P_{p_0}(T > C_2(p_0)) + \gamma_1(p_0) P_{p_0}(T = C_1(p_0)) + \gamma_2(p_0) P_{p_0}(T = C_2(p_0)) \\ &= 1 - \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} + \sum_{i \in \{1,2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} p_0^{C_i(p_0)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_0} P_{p_0}[\phi_{p_0}] = &- \sum_{i=C_1(p_0)}^{C_2(p_0)} \binom{n}{i} \left(i p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i} - (n-i) p_0^i (1-p_0)^{n-i-1} \right) + \\ &+ \sum_{i \in \{1,2\}} \gamma_i(p_0) \binom{n}{C_i(p_0)} \left(C_i(p_0) p_0^{C_i(p_0 - 1)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)} - (n - C_i(p_0)) p_0^{C_i(p_0-1)} (1-p_0)^{n-C_i(p_0)-1} \right). \end{aligned}$$

Testiramo vse $0 \leqslant C_1(p_0) < n$ in $C_1(p_0) < C_2(p_0) \leqslant n$ in na vsaki iteraciji rešimo sistem dveh linearnih enačb za $\gamma_i(p_0)$. Vrnemo prve vrednosti, pri katerih velja $0 \leqslant \gamma_i(p_0) < 1$ za $i = 1, 2$.



Slika 1: $C_1(p)$ in $C_2(p)$ na diskretizaciji $(0,1)$ na 1000 točkah za $n = 18$.

Za interval zaupanja definiramo

$$I(T(x)) := \{p \in (0,1) \mid \phi_p(x) < 1\} = \{p \in (0,1) \mid T(x) \in [C_1(p), C_2(p)]\}.$$

Za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$ bomo vzeli vse p na neki diskretizaciji $(0,1)$, ki so v $I(k)$. Spodnja tabela prikazuje aproksimacijo $I \circ T$ pri delitvi intervala (0,1) na 1000 delov, z zaokrožitvijo krajišč intervala na 3 decimalna mesta.

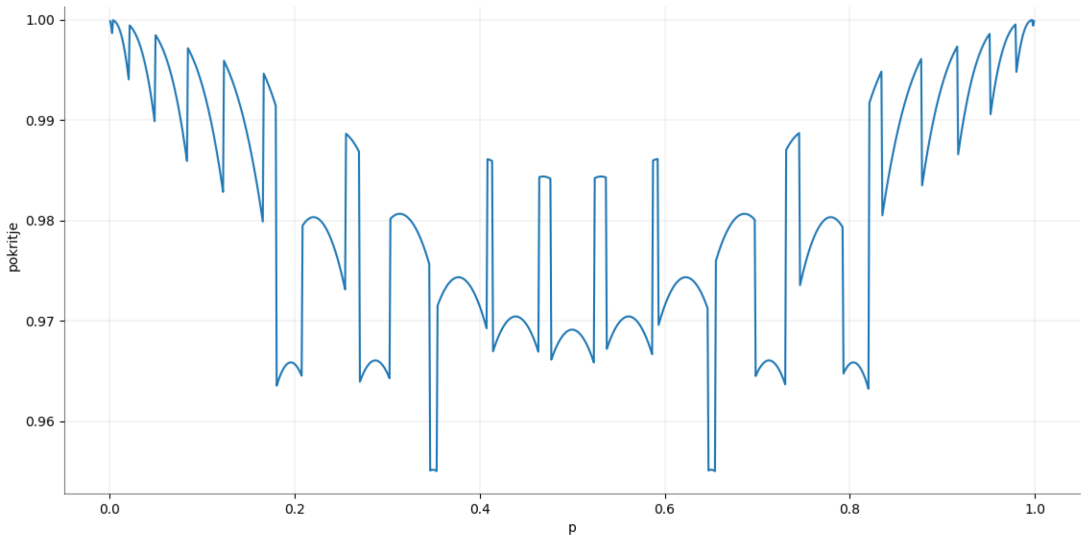
k	$I(k)$
0	$(0, 0.18]$
1	$(0, 0.27]$
2	$[0.004, 0.346]$
3	$[0.022, 0.414]$
4	$[0.05, 0.477]$
5	$[0.085, 0.536]$
6	$[0.124, 0.592]$
7	$[0.167, 0.646]$
8	$[0.209, 0.697]$
9	$[0.256, 0.745]$
10	$[0.304, 0.792]$
11	$[0.355, 0.834]$
12	$[0.409, 0.877]$
13	$[0.465, 0.916]$
14	$[0.524, 0.951]$
15	$[0.587, 0.979]$
16	$[0.655, 0.997]$
17	$[0.731, 1)$
18	$[0.821, 1)$

4.2

Zaokroženo na 4 decimalna mesta dobimo $\gamma_1(0.72) \approx 0.1787$ in $\gamma_2(0.72) \approx 0.6852$.

4.3

Ocena minimuma vrednosti na zgornjem grafu je 0.95502, kar je naša ocena za koeficient zaupanja.

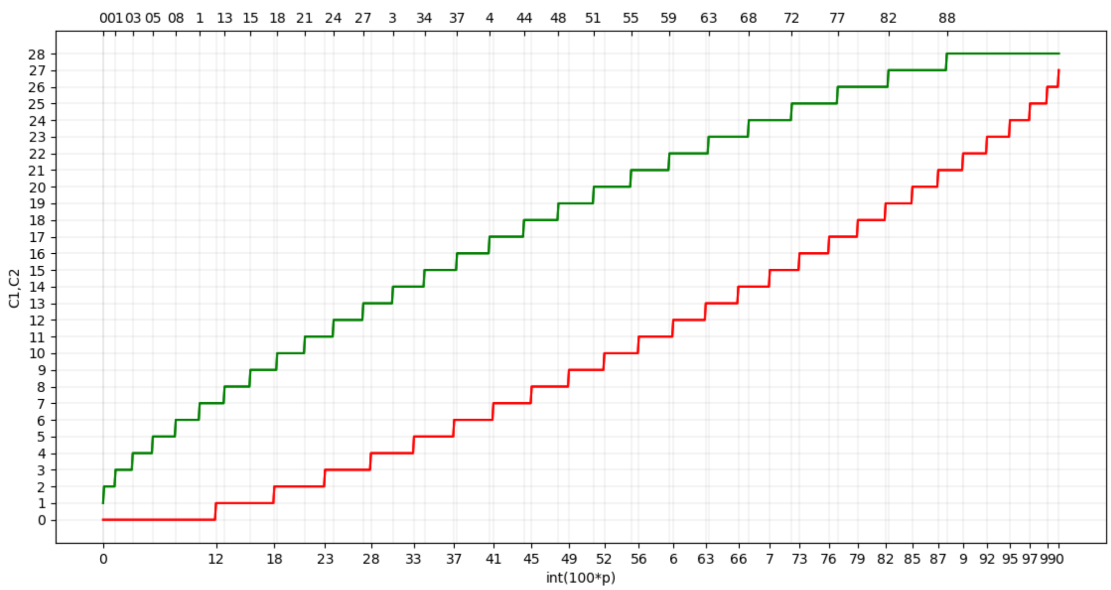


4.4

Program nam vrne

$$C_1 = 15, \quad C_2 = 24, \quad \gamma_1 \approx 0.6922, \quad \gamma_2 \approx 0.0029.$$

4.5



Slika 2: $C_1(p)$ in $C_2(p)$ na diskretizaciji $(0, 1)$ na 1000 točkah za $n = 28$

5

Označimo $p = (p_0, \ldots, p_3)$ in

$$P_p = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Vemo, da za multinomsko porazdelitev M velja

$$T_i^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\xi_i\}}(x_j) \implies P_p^{\times n} \circ (T_0^n, T_1^n, T_2^n, T_3^n)^{-1} = \mathrm{M}(p, n).$$

5.1

Računamo moč preizkusa hipoteze $p = \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (3, 7, 9, 13)/32$.

5.1.1

Test je oblike

$$\phi_n^1(x) = \begin{cases} 1 \mid -2\ln(\lambda_n(T^n x)) > \chi^2_{3;\alpha} \\ 0 \mid -2\ln(\lambda_b(T^n x)) \leqslant \chi^2_{3;\alpha} \end{cases} \quad \text{za} \quad \lambda_n(t) = \prod_{j=0}^{3} \left(\frac{n\pi_j}{t_j}\right)^{t_j}.$$

Dobimo

$$\beta_n^1 := P_\pi^{\times n}[\phi_n^1] = \mathrm{M}(\pi, n)(-2\ln \circ \lambda_n > \chi^2_{3;\alpha}) = \mathrm{M}(\pi, n)\left(\{t \mid t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = n \ \wedge \ -2\ln(\lambda_n(t)) > \chi^2_{3;\alpha}\}\right).$$

Te množice računalniško ni zelo zahtevno parametrizirati. Ko to naredimo, dobimo spodnjo tabelo.

n	β_n^1
35	0.0630609253830682
65	0.05392789603324363
95	0.052181085317432305
125	0.051705991845782534

5.1.2

Test je oblike

$$\phi_n^2(x) = \begin{cases} 1 \mid \tau_n(T^n x) > \chi^2_{3;\alpha} \\ 0 \mid \tau_n(T^n x) \leqslant \chi^2_{3;\alpha} \end{cases} \quad \text{za} \quad \tau_n(t) = \sum_{j=0}^{3} \frac{(t_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}.$$

Spet definiramo

$$\beta_n^2 := P_\pi^{\times n}[\phi_n^2]$$

in parametriziramo ter zmerimo ustrezno množico, da dobimo spodnjo tabelo.

n	β_n^2
35	0.048073432725070295
65	0.04815898454028488
95	0.049765599771549665
125	0.04915904981481392

5.2

5.2.1

Naj bo

$$H = \{(p_0, p_1, p_2, p_3) \mid p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = n \ \wedge \ p_1 + 2p_2 = 2/3\}.$$

Za dani x iščemo

$$\sup_{p \in H} P_p^{\times n}(\{x\}) = \sup_{p \in H} \prod_{i=0}^{3} p_i^{T_i^n(x)},$$

torej maksimiziramo funkcijo

$$l(p) = t_0 \ln(p_0) + t_1 \ln(p_1) + t_2 \ln(p_2) + t_3 \ln(p_3) = t_0 \ln(1/3 + p_2 - p_3) + t_1 \ln(2/3 - 2p_2) + t_2 \ln(p_2) + t_3 \ln(p_3).$$

Po enačenju parcialnih odvodov z 0 dobimo ekstrem

$$\hat{p}_2(t) = \frac{(t_0 - t_1 + t_3) + \sqrt{(t_0 - t_1 + t_3)^2 + 4nt_2}}{6n} \quad \text{in} \quad \hat{p}_3(t) = \frac{t_3(p_2 + 1/3)}{t_0 + t_2}$$

in zaupamo, da je to maksimum. Podajmo test

$$\phi_n^3(x) = \begin{cases} 1 \mid -2\ln(\zeta_n(T^n x)) > \chi^2_{3;\alpha} \\ 0 \mid -2\ln(\zeta_n(T^n x)) \leqslant \chi^2_{3;\alpha} \end{cases} \quad \text{za} \quad \zeta_n(t) = \prod_{i=0}^{3} \left(\frac{n\hat{p}_i(t)}{t_i}\right)^{t_i}.$$

Asimptotični izrek za hipotezo H velja, saj je $p \mapsto p_1 + 2p_2 - 2/3$ gladka submerzija, drugi pogoji pa so na parametričnem prostoru in gostoti porazdelitve, ki v tem primeru niso spremenjeni.

5.2.2

Izbrali smo $\pi = (2, 2, 1, 1)/6$ in dobili 65 primerov, ko test zavrne hipotezo, torej delež je $65/9500 \approx 0.00684$.

6

Fiksirajmo $(m, n) = (3, 300)$ (dimenzije podatkov) in $\alpha = 0.05$.

6.1

6.1.1

Z reševanjem predoločenega sistema $X\hat{\beta} = y$, kjer je $X = [1 \text{ TCH HDL TRI}]$ in $y = \text{LDL}$, dobimo

$$\hat{\beta}_0 = 0.05993031, \quad \hat{\beta}_1 = 0.83909446, \quad \hat{\beta}_2 = -0.64999293, \quad \hat{\beta}_3 = -0.2240437.$$

V nadaljevanju uporabljamo $\hat{y} = X\hat{\beta}$ in $\bar{y}$ povprečje vektorja y.

6.1.2

Hipotezo $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ testiramo s Fisherjevo statistiko

$$F = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2/m}{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2/(n - m - 1)} \sim F_{m,n-m-1}.$$

Hipotezo zavrnemo, če je $F > F_{m,n-m-1;\alpha} \approx 2.6351$. Ker na našem vzorcu dobimo $F \approx 298.0651$, hipotezo zavrnemo.

6.1.3

Hipotezo $\beta_0 = 0$ testiramo s Studentovo statistiko

$$T = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\|y - \hat{y}\|_2 \sqrt{((X^T X)^{-1})_{(1,1)} / (n - m - 1)}} \sim t_{n-m-1}.$$

Hipotezo zavrnemo, če je $|T| > t_{n-m-1;\alpha/2} \approx 1.9680$. Ker na našem vzorcu dobimo $T \approx 0.3079$, hipoteze ne moremo zavrniti.

6.2

6.2.1

Z reševanjem predoločenega sistema $X\hat{\beta} = y$, kjer je $X = [\text{TCH HDL TRI}]$ in $y = \text{LDL}$, dobimo

$$\hat{\beta}_1 = 0.84615208, \quad \hat{\beta}_2 = -0.6445336, \quad \hat{\beta}_3 = -0.2225561.$$

6.2.2

Hipotezo $\beta = (1, -1, -0.54)$ testiramo s pomočjo območja zaupanja, konstruiranega v naslednji podpodnalogi. Zavrnemo jo s stopnjo značilnosti α, če je

$$\left\| \sqrt{\Lambda} Q^T (\hat{\beta} - \beta) \right\|_2^2 > \frac{m \left\| y - \hat{y} \right\|_2^2 F_{m,n-m;\alpha}}{n - m}.$$

Na levi strani dobimo 33.667, na desni pa 3.0564 in zato zavrnemo. Hipotezo lahko testiramo tudi s kvadrom zaupanja iz naloge 6.2.4. in spet zavrnemo.

6.2.3

Imamo torej pivotno funkcijo

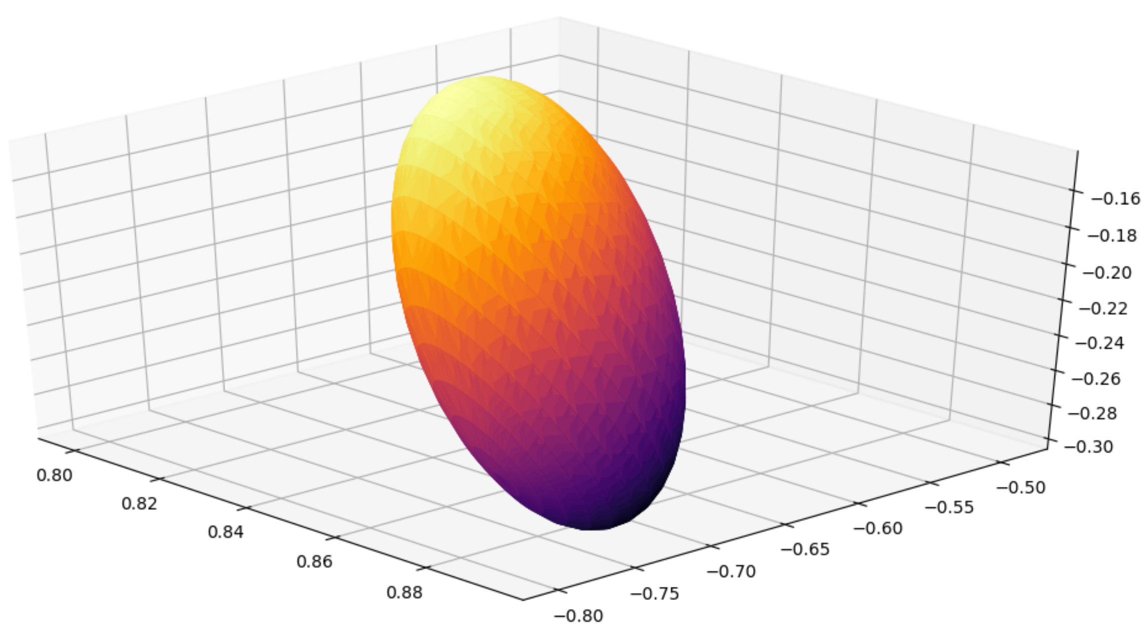
$$F(x, \beta) = \frac{\langle\, X^T X(\hat{\beta} - \beta), \hat{\beta} - \beta \,\rangle / m}{\left\| y - \hat{y} \right\|^2 / (n - m)} \sim F_{m,n-m}$$

s katero konstruiramo elipsoid zaupanja

$$E = \left\{ \hat{\beta} + Q \sqrt{\Lambda}^{-1} u \;\middle|\; \left\| u \right\|_2^2 \leqslant \frac{m \left\| y - \hat{y} \right\|_2^2 F_{m,n-m;\alpha}}{n - m} \right\},$$

kjer je $X^T X = Q \Lambda Q^T$ Schurov razcep. Če s $S_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ označimo enotsko kroglo s središčem v izhodišču, dobimo iz podatkov elipsoid

$$E \approx \begin{bmatrix} 0.84615 \\ -0.64453 \\ -0.22255 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.01289 & -0.02088 & 0.0411 \\ -0.00261 & -0.01985 & -0.1541 \\ -0.00431 & 0.07447 & -0.02955 \end{bmatrix} \cdot S_1(0).$$



Slika 3: Elipsoid zaupanja za β, realiziran na naših podatkih.

6.2.4

Za β_j imamo sedaj intervale zaupanja stopnje zaupanja $1 - \alpha/m$ oblike

$$I_j := \left[\hat{\beta}_j \mp t_{n-m;\alpha/(2m)} \left\|y - \hat{y}\right\|_2 \sqrt{((X^T X)^{-1})_{(j,j)}/(n-m)}\right].$$

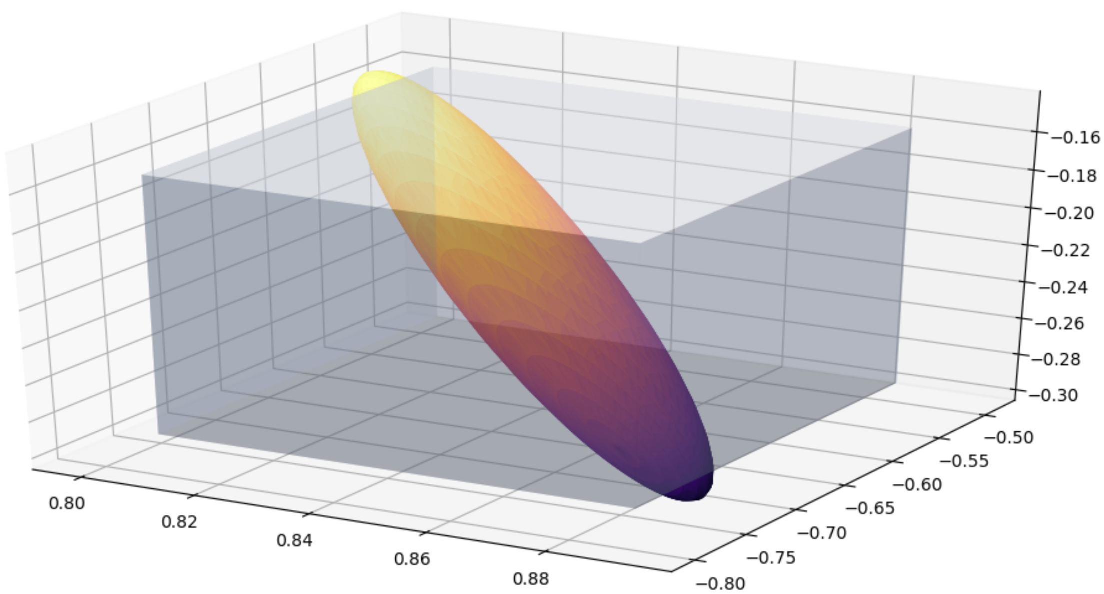
Z Bonferonijevim popravkom dobimo, da je

$$I := \bigtimes_{j=1}^{m} I_j$$

kvader zaupanja s stopnjo α. Na našem vzorcu imamo

$$I = [0.805, 0.887] \times [-0.778, -0.511] \times [-0.291, -0.154].$$

Na sliki vidimo, da je volumen kvadra zaupanja veliko večji od elipsoida in da prvi skoraj vsebuje drugega.



Slika 4: Kvader zaupanja in elipsoid zaupanja za β, realizirana na naših podatkih.

7

7.1

Vemo, da ima slučajna spremenljivka Y Lebesguevo gostoto natanko tedaj, ko obstaja Borelova funkcija $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja

$$P(Y \leqslant y) = \int_{(-\infty,y]} f_Y d\mathscr{L} = \int_{-\infty}^{y} f_Y(x)dx.$$

Upoštevamo izrek o popolni verjetnosti in Tonellijev izrek za zamenjavo vrstnega reda integracije, da dobimo

$$\begin{aligned} P(Y + Z \leqslant w) &= \sum_{z_k} P(Y \leqslant w - z_k)P(Z = z_k) = \sum_{z_k} \int_{-\infty}^{w-z_k} f_Y(y)P(Z = z_k)dy \\ &= \sum_{z_k} \int_{-\infty}^{w} f_Y(x - z_k)P(Z = z_k)dx = \int_{-\infty}^{w} \sum_{z_k} f_Y(x - z_k)P(Z = z_k)dx = \int_{-\infty}^{w} f_X(x)dx. \end{aligned}$$

Ker je $(x, z_k) \mapsto f_Y(x - z_k)P(Z = z_k)$ merljiva in vrsta konvergentna za vsak $x \in \mathbb{R}$ (je dominirana z 1), je $f_X \in B_{\mathbb{R}}/B_{\mathbb{R}}$ (po enem od izrekov teorije mere). Zato je f_X Lebesgueva gostota slučajne spremenljivke $X = Y + Z$.

7.2

Za $x \geqslant 0$ dobimo

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \lambda^k}{c(\lambda)} \alpha (x-k)^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x-k) = \frac{\alpha c_{\lfloor x \rfloor}}{c(\lambda)} \lambda^{\lfloor x \rfloor} (x - \lfloor x \rfloor)^{\alpha - 1}, \\ \ln(f_X(x)) &= \ln(\alpha / c(\lambda)) + \ln(c_{\lfloor x \rfloor}) + \lfloor x \rfloor \ln(\lambda) + (\alpha - 1) \ln(x - \lfloor x \rfloor). \end{aligned}$$

7.3

Izrazimo

$$f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{\alpha}{c(\lambda)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n c_{\lfloor x_i \rfloor}\right) \exp\left(\left\langle \, [\ln(\lambda), \alpha - 1] \, , \left[\sum_{i=1}^n \lfloor x_i \rfloor \, , \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \lfloor x_i \rfloor)\right] \right\rangle\right).$$

Po Fisher-Neymanovem izreku dobimo zadostnost statistike

$$T(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n (\lfloor x_i \rfloor \, , \ln(x_i - \lfloor x_i \rfloor)),$$

ker pa imamo eksponentni model s polnim rangom, sledi še, da je ta statistika tudi zadostna. Pripomnimo, da je verjetnost dogodka $\{X_i = \lfloor X_i \rfloor\}$ enaka nič in da sta T in $x \mapsto \prod_{i=1}^n c_{\lfloor x_i \rfloor}$ Borelovi, saj ju lahko zapišemo s pomočjo vrste indikatorjev (po predpostavki pa je slednja še nenegativna).