

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

А.В. Лебедева, А.Н. Пакулина

# Практикум по методам вычислений

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2021

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук, проф. Ю.К. Демьянович (С.-Петербургский гос. ун-т),

докт. физ.-мат. наук, проф. В.Б. Хазанов (С.-Петербургский гос. морской техн. ун-т).

*Рекомендовано к печати*

*Учебно-методической комиссией математико-механического факультета по УГСН*

*01.00.00 Математика и механика.*

*Протокол 05/2.1/01-03-5 от 14.04.2021*

Лебедева А.В. Пакулина А.Н.

Практикум по методам вычислений. Часть 1. СПб., СПбГУ, 2021. – 156 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения вычислительного практикума по курсу “Методы вычислений”, читаемому на математико-механическом факультете СПбГУ на 2, 3 курсах. Оно является исправленным и дополненным по сравнению с пособием, размещенным ранее. Добавлены разделы по равномерному приближению функций, многочленам Чебышева, ортогональным многочленам. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы учебного курса. Наличие ссылок делает удобной навигацию по всем рассматриваемым темам. В пособии размещены варианты заданий. Для решения задач приведены указания.

Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения. Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.

©А.В. Лебедева, А.Н. Пакулина

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>8</b>
<b>1. Приближённое решение нелинейных уравнений и нелинейных систем</b>	<b>9</b>
1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений . . . . .	9
1.1.1. Отделение корней . . . . .	9
1.1.2. Уточнение корней . . . . .	9
1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных) . . . . .	10
1.1.4. Метод секущих . . . . .	12
1.1.5. Метод хорд . . . . .	13
1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений) . .	14
1.1.7. Задание 1 . . . . .	16
1.1.8. Варианты задания 1 . . . . .	17
1.1.9. Задание 2 . . . . .	23
1.2. Метод Ньютона для решения нелинейной системы второго порядка . . . . .	25
1.2.1. Задание . . . . .	25
1.2.2. Варианты систем . . . . .	26
<b>2. Интерполирование по значениям функции</b>	<b>29</b>
2.1. Постановка задачи интерполирования . . . . .	29
2.2. Теорема о погрешности . . . . .	29
2.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . . . . .	30
2.4. Минимизация погрешности в точке интерполирования . . . . .	30
2.5. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Обратное интерполирование . . . . .	30
2.5.1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа . . . . .	30
2.5.2. Постановка задачи обратного интерполирования . . . . .	31
2.5.3. Задание 1 . . . . .	31
2.5.4. Задание 2 . . . . .	32
2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование . . . . .	32
<b>3. Интерполирование в случае равноотстоящих узлов. Конечные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона</b>	<b>33</b>
3.1. Постановка задачи интерполирования . . . . .	33
3.2. Конечные разности . . . . .	33
3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования . . . . .	34
3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы	34
3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы	36
3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы . . . . .	36
3.4. Упражнения . . . . .	37
3.5. Задание . . . . .	37
3.6. Варианты заданий . . . . .	38

<b>4. Равномерное приближение функций</b>	<b>39</b>
4.1. Полином наилучшего равномерного приближения . . . . .	39
4.2. Альтернанс. Теорема Чебышева . . . . .	42
4.3. Примеры применения Теоремы Чебышёва . . . . .	43
4.3.1. Пример 1, $n = 0$ . . . . .	43
4.3.2. Пример 2, $n = 1$ . . . . .	43
4.4. О нахождении $P_n^*$ . . . . .	44
4.5. Существование и единственность полинома наилучшего равномерного приближения (ПНРПр) . . . . .	44
4.6. Пример построения полинома наилучшего равномерного приближения . . .	45
4.7. Задание. Варианты заданий . . . . .	48
<b>5. Многочлены Чебышева первого рода</b>	<b>49</b>
5.1. Общие сведения . . . . .	49
5.2. Корни и точки экстремума многочленов Чебышева . . . . .	50
5.2.1. Геометрическая интерпретация корней $T_n(x)$ . . . . .	50
5.2.2. Геометрическая интерпретация точек экстремума $T_n(x)$ . . . . .	51
5.2.3. Построение графика $T_n(x)$ . . . . .	51
5.3. Различные формы записи многочленов Чебышева . . . . .	51
5.4. Свойство наименьшего уклонения от нуля . . . . .	53
5.5. Связь с задачей алгебраического интерполирования . . . . .	54
5.6. Задача построения полинома наилучшего равномерного приближения . . . .	57
5.7. Задания. Варианты заданий . . . . .	57
<b>6. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей</b>	<b>58</b>
6.1. Постановка задачи . . . . .	58
6.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона . . . . .	58
6.3. Разделенные разности . . . . .	58
6.4. Задание . . . . .	59
6.5. Образец выполнения задания . . . . .	59
6.6. Варианты заданий . . . . .	60
<b>7. Численное дифференцирование</b>	<b>62</b>
7.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически . . . . .	62
7.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах . . . . .	62
7.3. Теорема о погрешности численного дифференцирования . . . . .	63
7.4. Построение формул численного дифференцирования . . . . .	63
7.5. Задания . . . . .	66
7.5.1. Задание 1 . . . . .	66
7.5.2. Задание 2 . . . . .	66
7.5.3. Задание 3 . . . . .	67
7.6. Варианты заданий . . . . .	68
<b>8. Ортогональные многочлены</b>	<b>73</b>
8.1. Общие свойства ортогональных многочленов . . . . .	73
8.2. Классические ортогональные многочлены . . . . .	75
8.2.1. Уравнение Пирсона (Pearson) . . . . .	75

8.2.2. Теорема Родрига . . . . .	77
8.2.3. Классические весовые функции и ортогональные многочлены . . . . .	78
<b>9. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам</b>	<b>79</b>
9.1. Общие сведения . . . . .	79
9.2. Квадратурные формулы прямоугольников . . . . .	79
9.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников . . . . .	79
9.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников . . . . .	79
9.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников . . . . .	79
9.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников . . . . .	80
9.3. Квадратурная формула трапеций . . . . .	80
9.4. Квадратурная формула Симпсона . . . . .	80
9.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса . . . . .	81
9.6. Оценка погрешности квадратурных формул . . . . .	81
9.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону) . . . . .	81
9.8. Приближённое вычисление интеграла от функции, недостаточно гладкой на промежутке интегрирования . . . . .	82
9.9. Задание . . . . .	83
<b>10. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)</b>	<b>84</b>
10.1. Общие сведения. Теорема о формулах типа Гаусса. Теорема о погрешности .	84
10.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса . . . . .	85
10.3. Частные случаи формулы типа Гаусса . . . . .	86
10.3.1. Формула Гаусса . . . . .	86
10.3.2. Формулы Гаусса для $n = 1, 2, 3$ . . . . .	86
10.3.3. Погрешность формулы Гаусса . . . . .	87
10.3.4. Формула Мелера . . . . .	87
10.4. Варианты заданий . . . . .	88
10.5. Представление результатов . . . . .	94
<b>11. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка</b>	<b>95</b>
11.1. Постановка задачи . . . . .	95
11.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера . . . . .	95
11.2.1. Метод Эйлера . . . . .	95
11.2.2. Улучшенный метод Эйлера . . . . .	96
11.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка . . . . .	96
11.4. Правило Рунге (двойного пересчета) практической оценки погрешности. Экстраполяция по Ричардсону . . . . .	97
11.5. Методы Адамса . . . . .	97
11.5.1. Экстраполяционный метод Адамса . . . . .	97
11.5.2. Интерполяционный метод Адамса . . . . .	100
11.6. Образец задания и представления результатов . . . . .	101
11.7. Варианты заданий . . . . .	102

<b>12. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи</b>	<b>112</b>
12.1. Жесткие уравнения . . . . .	112
12.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения . . . . .	112
12.1.2. Метод Эйлера . . . . .	113
12.1.3. Обратный метод Эйлера . . . . .	113
12.1.4. Метод средней точки . . . . .	113
12.1.5. Методы Адамса . . . . .	114
12.1.6. Условия устойчивости методов Адамса . . . . .	115
12.2. Жесткие системы . . . . .	116
12.2.1. Постановка задачи . . . . .	116
12.2.2. Метод Эйлера . . . . .	116
12.2.3. Обратный метод Эйлера . . . . .	117
12.2.4. Методы Адамса . . . . .	117
12.2.5. Задание . . . . .	118
12.2.6. Варианты заданий . . . . .	118
<b>13. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы</b>	<b>121</b>
13.1. Векторные нормы . . . . .	121
13.2. Матричные нормы . . . . .	121
13.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы . . . . .	123
13.4. Задание . . . . .	124
13.5. Варианты матриц . . . . .	124
<b>14. Прямые методы решения линейных систем</b>	<b>125</b>
14.1. Схема Гаусса единственного деления . . . . .	125
14.2. Схема Жордана единственного деления . . . . .	126
14.3. Схемы с выбором главного элемента . . . . .	127
14.4. $LU$ -разложение . . . . .	127
14.5. Задание . . . . .	128
14.6. Варианты расширенных матриц . . . . .	129
<b>15. Итерационные методы решения линейных систем</b>	<b>132</b>
15.1. Постановка задачи . . . . .	132
15.2. Метод простой итерации . . . . .	132
15.2.1. Расчетная формула . . . . .	132
15.2.2. Условие сходимости . . . . .	132
15.2.3. Получение решения с заданной точностью . . . . .	132
15.2.4. Априорная оценка . . . . .	133
15.2.5. Апостериорная оценка . . . . .	133
15.3. Метод Зейделя . . . . .	133
15.4. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$ . . . . .	134
15.5. Метод верхней релаксации . . . . .	135
15.6. Итерационный метод с чебышевским набором параметров . . . . .	136
15.7. Метод Люстерника ускорения сходимости метода последовательных приближений . . . . .	137
15.8. Представление результатов . . . . .	137
15.9. Варианты заданий . . . . .	138

<b>16. Проблема собственных значений</b>	<b>145</b>
16.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы . . . . .	145
16.2. Апостериорная оценка погрешности собственного числа симметричных матриц	148
16.3. Частичная проблема собственных значений . . . . .	148
16.3.1. Общие сведения . . . . .	148
16.3.2. Степенной метод . . . . .	148
16.3.3. Метод скалярных произведений . . . . .	149
16.3.4. Нахождение противоположной границы спектра . . . . .	150
16.3.5. Метод Виландта уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций) . . . . .	150
16.3.6. Метод Эйткена уточнения собственного числа эрмитовой матрицы . .	151
16.4. Варианты заданий . . . . .	152
16.5. Представление результатов . . . . .	154
16.6. Варианты матриц . . . . .	155
<b>Список литературы</b>	<b>156</b>

## Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для проведения вычислительного практикума по курсу “Методы вычислений”, читаемому на математико-механическом факультете СПбГУ на 2, 3 курсах и соответствует образовательным программам по соответствующим направлениям подготовки. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы по следующим разделам численных методов:

- 1) Приближённое решение нелинейных уравнений и систем.
- 2) Приближение функций и многочлены Чебышева.
- 3) Численное дифференцирование.
- 4) Ортогональные многочлены.
- 5) Численное интегрирование.
- 6) Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 7) Исследование на устойчивость и решение жестких систем.
- 8) Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений.
- 9) Решение полной и частичной проблемы собственных значений.

В пособии размещены варианты заданий с удобной навигацией по всем темам учебного курса. Для решения задач приведены указания.

Обучающиеся должны освоить различные численные методы, программируя алгоритм решения задач на персональном компьютере.

Введена подробная нумерация формул для удобства ссылок на них во время презентации учебного материала на занятии в компьютерном классе.

Нумерация теорем, формул, замечаний, графиков в каждом разделе своя. Ссылки на формулы, теоремы из других разделов даются с указанием раздела.

Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения.

Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.



# 1. Приближённое решение нелинейных уравнений и нелинейных систем

## 1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале  $a < x < b$ .

Всякое значение  $x^*$  такое, что  $f(x^*) = 0$ , называется корнем уравнения (1) или нулем функции  $f(x)$ . Приближённое нахождение изолированных действительных корней уравнения складывается из двух этапов

- 1) Отделение корней, т. е. установление промежутков  $[\alpha, \beta]$ , в которых содержится один и только один корень уравнения (1). Использование этих промежутков для определения начальных приближений к корням.
- 2) Уточнение приближенных корней.

### 1.1.1. Отделение корней

Для отделения корней следует построить таблицу значений функции или график функции, найти промежутки, на концах которых функция  $f(x)$  имеет разные знаки.

Тогда внутри этих промежутков содержится по крайней мере один корень уравнения  $f(x) = 0$ .

Нужно тем или иным образом убедиться, что данный корень является единственным.

Для уменьшения длин промежутков может быть использован метод половинного деления (бисекции).

Полагаем  $[a_0, b_0] = [a, b]$ .

Пусть  $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ .

Далее строим последовательность промежутков  $\{[a_k, b_k]\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{если } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{если } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге длина промежутка уменьшается вдвое, так что

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

### 1.1.2. Уточнение корней

Для уточнения корней используются итерационные методы.

При решении задачи итерационными методами важно следующее:

- расчетная формула;
- условие сходимости;
- порядок сходимости (скорость сходимости):

число  $\alpha \geq 1$  называют порядком сходимости последовательности  $\{x_k\}$  к  $x^*$ , если  $x_k \rightarrow x^*$  и существует постоянная  $C$ , такая что при всех  $k$

$$|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x^*|^\alpha; \quad (2)$$

- получение решения с заданной точностью  $\varepsilon$ , т. е. критерий окончания.

Здесь имеется в виду нахождение  $x_k$  такого, что выполняется условие  $|x_k - x^*| < \varepsilon$ .

### Оценки погрешности

Существуют априорные и апостериорные оценки для фактической погрешности  $|x_k - x^*|$ . Априорные оценки часто бывают сильно завышены.

Легко показать, что для оценки точности приближения  $x_k$  любого итерационного метода в предположении, что  $f'(x) \neq 0$ , можно воспользоваться неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \quad (3)$$

где  $m_1 = \min |f'(x)|$  при  $a \leq x \leq b$ .

#### 1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Дано уравнение (1).

Пусть функция  $f(x)$  — вещественная и находим вещественный корень  $x^*$ .

Будем предполагать, что на отрезке  $[a, b]$  таком, что  $f(a)f(b) < 0$ ,  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема и  $f'(x), f''(x)$  знакопостоянны.

Выбираем  $x_0 \in [a, b]$ . Заменим уравнение в окрестности  $x_0$  приближённым уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

левая часть которого есть линейная часть разложения функции  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ . Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Действуя аналогично, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл:

$x_k$  есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции  $f(x)$ , построенной в точке  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ , с осью абсцисс. Это иллюстрируется на рис. 1. Здесь  $x_0 = 1$ ,

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 3) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12. \quad (5)$$

**Теорема 1** (о сходимости). *Если*

- 1)  $f(a)f(b) < 0$ ,
- 2)  $f'(x), f''(x)$  сохраняют определенные знаки при  $x \in [a, b]$ ,
- 3)  $f(x_0)f''(x_0) > 0, x_0 \in [a, b]$ ,

то  $x_k \rightarrow x^*$ , причем скорость сходимости определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^2. \quad (6)$$

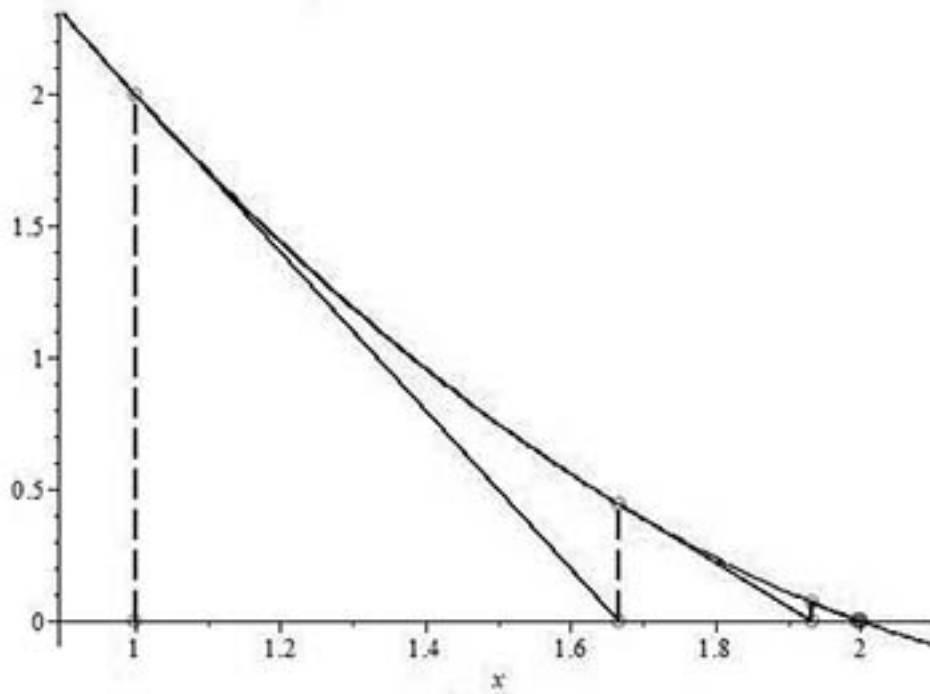


Рис. 1. Метод Ньютона

Здесь

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (7)$$

Если  $f(x_0) f''(x_0) < 0$ , то можно не прийти к  $x = x^*$ , если  $x_0$  не очень хорошее.

Иллюстрация этого случая для функции (5),  $x_0 = 2.6$  приведена на рис. 2. В данном случае, тем не менее, процесс сходится.

Так как метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, то чаще всего можно пользоваться следующим критерием оценки погрешности: если

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon,$$

то

$$|x_k - x^*| < \varepsilon.$$

В общем случае этим критерием можно пользоваться, начиная с некоторого  $k$ .

**Замечание 1.** Если  $f'(x^*) = 0$ , то квадратичной сходимости может и не быть.

Например, пусть  $f(x) = x^2$ , корень  $x^* = 0$  — корень второй кратности, расчетная формула имеет вид:  $x_{k+1} = x_k/2$  и сходимость линейная (если  $x_0 \neq 0$ ).

Второго порядка сходимости для корня кратности  $p$  можно достичь, применяя расчетную формулу вида

$$x_k = x_{k-1} - p \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Например, в случае выше рассмотренного уравнения

$$(x - 2)^2 (x - 3) = 0 \quad (9)$$

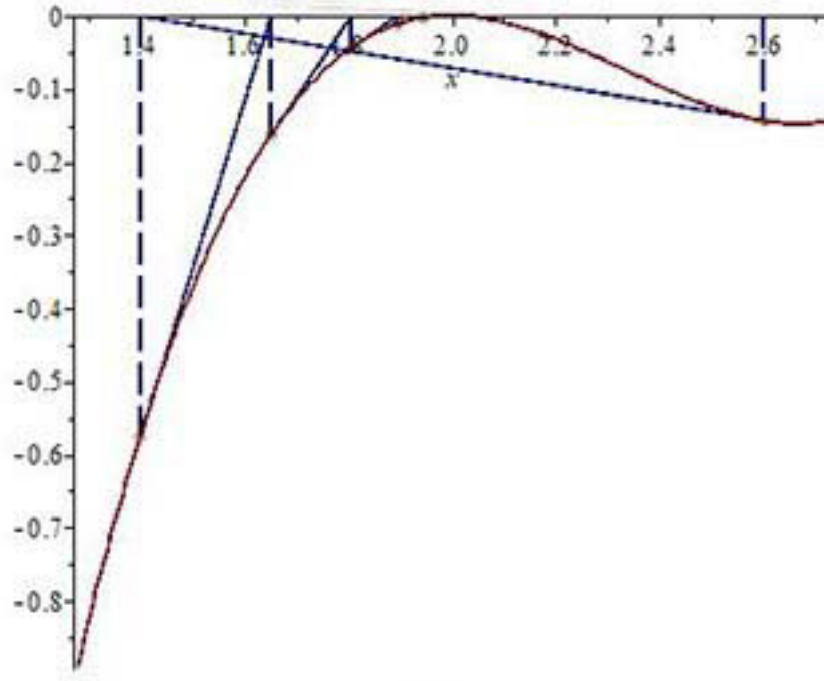


Рис. 2. Метод Ньютона,  $f(x_0)f''(x_0) < 0$

кратный корень  $x = 2$  находится при начальном  $x_0 = 1$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$  методом Ньютона без учета кратности по формуле (4) за 11 итераций, а с учетом кратности  $p = 2$  по формуле (8) за 4 итерации.

**Замечание 2.** Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона с расчетной формулой

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Скорость сходимости модифицированного метода значительно меньше скорости сходимости метода Ньютона.

**Замечание 3.** Приведем расчетную формулу метода третьего порядка сходимости:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1}) f''(x_{k-1})}{2 (f'(x_{k-1}))^3}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

#### 1.1.4. Метод секущих

Заменяя производную в расчетной формуле метода Ньютона её приближенным значением по формулам численного дифференцирования, получаем расчетную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Порядок сходимости и скорость метода секущих определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{k-1} - x^*)^\alpha, \quad (13)$$

где  $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618$ , а  $m_1$  и  $M_2$  имеют определенный в (7) смысл.

В методе секущих в общем случае нельзя пользоваться критерием:

если  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ , то  $|x_k - x^*| < \varepsilon$ .

Геометрическая интерпретация метода секущих приведена на рис. 3.

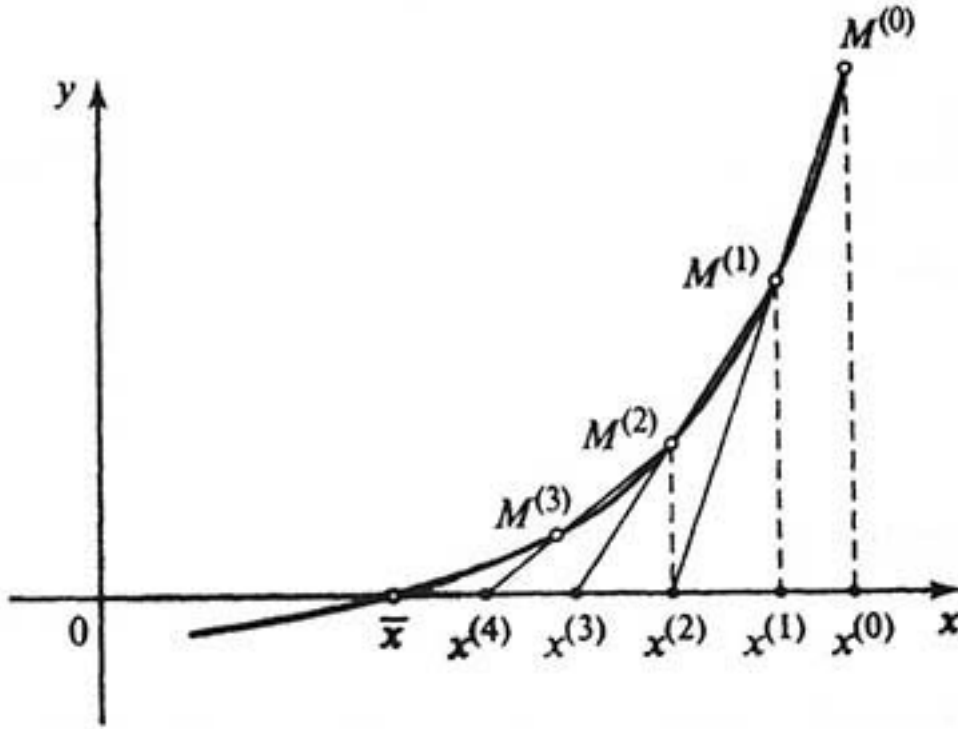


Рис. 3. Метод секущих

В случае корня кратности  $p$  аналогично методу Ньютона рекомендуется применять расчетную формулу вида

$$x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Например, в случае уравнения (9) кратный корень  $x = 2$  находится при начальных  $x_0 = 1.5$ ,  $x_1 = 1.9$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$  методом секущих без учета кратности по формуле (12) за 12 итераций, а с учетом кратности  $p = 2$  по формуле (14) за 7 итераций.

### 1.1.5. Метод хорд

Пусть известен промежуток  $[a, b]$ , такой что  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и  $f''(x) > 0$ . Рассмотрим два возможных случая.

- 1)  $f(a) < 0$ , соответственно  $f(b) > 0$ . В этом случае конец  $b$  неподвижен и последовательные приближения при  $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} (b - x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

образуют монотонно возрастающую последовательность, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x^* < b.$$

2)  $f(a) > 0$ , соответственно  $f(b) < 0$ . В этом случае конец  $a$  неподвижен и последовательные приближения при  $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

образуют монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0 = b.$$

Пределы этих последовательностей  $x^*$  существуют, так как они ограничены и монотонны. Для оценки точности можно воспользоваться уже известным неравенством (3)

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

и

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_k - x_{k-1}|, \quad (17)$$

где  $m_1 = \min |f'(x)|$ ,  $M_1 = \max |f'(x)|$  при  $a \leq x \leq b$ .

Геометрически метод эквивалентен замене кривой  $y = f(x)$  хордами, проходящими через точки  $(x_k, f(x_k))$ ,  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ ,  $k=0, 1, \dots$

Порядок метода — первый и нельзя пользоваться в качестве критерия модулем разности двух соседних приближений.

#### 1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение (1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x), \quad (18)$$

где  $\varphi(x)$  — непрерывна.

Расчетная формула метода

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Если эта последовательность сходящаяся, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ .

Геометрический смысл демонстрируется на рис. 4.

Кратко сформулируем условие сходимости.

Пусть в некоторой окрестности  $(a, b)$  корня  $x^*$  уравнения (18) производная  $\varphi'(x)$  сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (20)$$

Тогда, если производная  $\varphi'(x)$  положительна, то последовательные приближения (19) ( $x_0 \in (a, b)$ ) сходятся к корню  $x^*$  монотонно, если производная  $\varphi'(x)$  отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня  $x^*$ .

Геометрические интерпретации метода итераций в зависимости от функции  $\varphi(x)$  и от начального приближения  $x_0$  иллюстрируются на рис. 5.

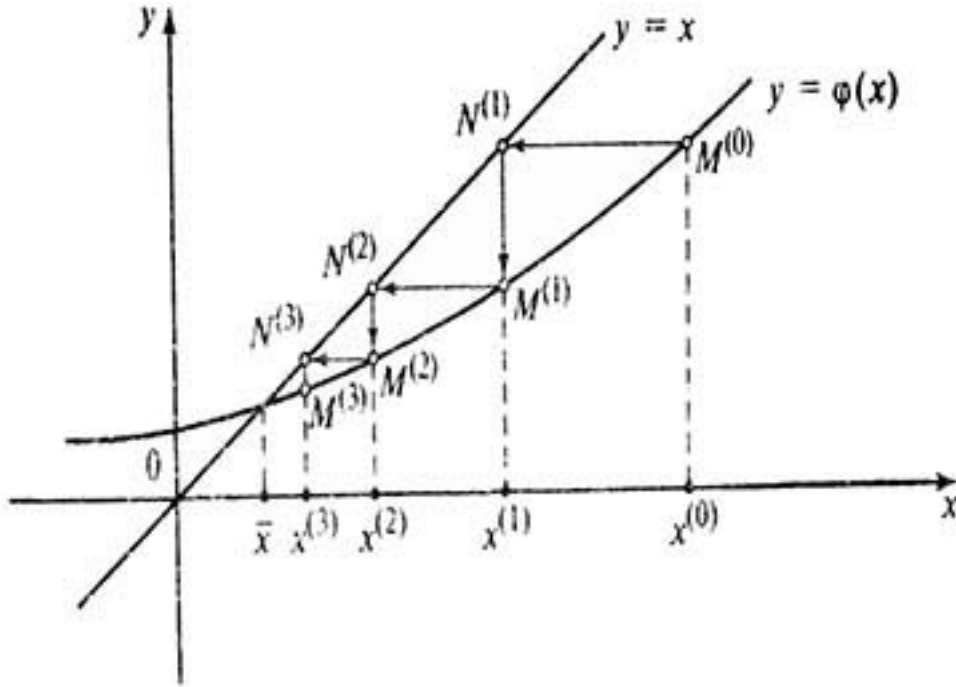


Рис. 4. Метод итераций

### Оценки погрешности

Априорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (21)$$

Апостериорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|. \quad (22)$$

**Замечание 4.** Как показывает оценка (22), ошибочно было бы пользоваться в качестве критерия получения решения с заданной точностью  $\varepsilon$  совпадения  $x_k$  и  $x_{k-1}$  с точностью  $\varepsilon$ .

**Замечание 5.** Напомним, что приводит уравнение вида (1) к виду (18) следует так, чтобы  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , причем, чем меньше число  $q$ , тем быстрее, вообще говоря, последовательные приближения сходятся к корню  $x^*$ .

Укажем один достаточно общий прием приведения. Пусть искомый корень  $x^*$  уравнения лежит на отрезке  $[a, b]$ , причем

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

при  $a \leq x \leq b$ . Заменяем уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0).$$

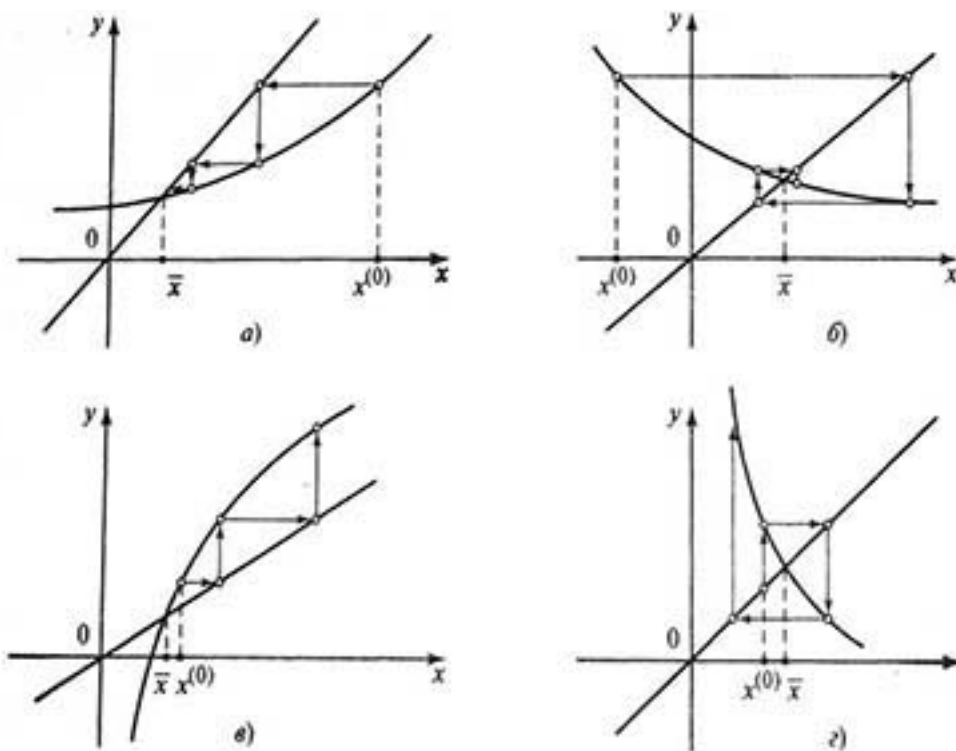


Рис. 5. Метод итераций

Из условия сходимости получаем, что можно взять  $\lambda = \frac{1}{M_1}$  и тогда

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1.$$

**Замечание 6.** Формулу (4) метода Ньютона можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения  $x = \varphi(x)$ , где

$$\varphi(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Легко проверить, что  $\varphi'(x^*) = 0$ .

Поэтому следует ожидать квадратичную сходимость метода.

### 1.1.7. Задание 1

Дано уравнение  $f(x) = 0$ .

Требуется

- 1) Отделить все корни или корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”, ранее и далее в таблице они обозначены  $x^*$ .



- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.001$  методом хорд. В качестве критерия использовать оценку (17). Сравнить с фактической погрешностью.
- 6) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 7) Сравнить результаты, количество итераций.

Для численной реализации методов должны быть созданы подпрограммы с параметрами:

- $x_0$  — нулевое приближение к корню (в методе Ньютона и в методе итераций);
- $\varepsilon$  — заданная точность;
- $k_{\max}$  — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо  $x_k$ , такое что  $|x_k - x^*| < \varepsilon$ , либо  $x_{k_{\max}}$ .

Результаты методов уточнения оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

$k$	$x_k$	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		—		
1				
...	...	...	...	...

### 1.1.8. Варианты задания 1

#### Вариант 1

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

## Вариант 2

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

## Вариант 3

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни на } [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.001$  методом итераций.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

## Вариант 4

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + \sqrt{1 - 0.2x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 5

$\operatorname{ctg}(x) - 2x^2 = 0$ . Найти первые три положительные корни.

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 6

$e^{-\frac{\pi}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0$ . Найти корни, принадлежащие промежутку  $[0, 3]$ .

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 7

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 8

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 9

$$e^{-\sqrt{x}} \cos(2\pi x) = 0.6.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями.

Сравнить с фактической погрешностью.

- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 10

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 11

$$\operatorname{tg}(x) + e^x = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 12

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , выбрав в качестве  $x_0$  то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 13

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все вещественные корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

### Вариант 14

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни, принадлежащие промежутку } [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью  $\varepsilon = 0.001$  методом итераций.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

### 1.1.9. Задание 2

Дано уравнение  $P_n(x) = 0$ , где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (23)$$

— многочлен Лежандра, корни которого являются узлами квадратурной формулы Гаусса. Требуется, используя метод Ньютона, вычислить указанный по номеру (по возрастанию) корень многочлена Лежандра с заданной точностью  $\varepsilon$ . Для реализации метода Ньютона должна быть создана подпрограмма с параметрами:

- $x_0$  — нулевое приближение к корню;
- $\varepsilon$  — заданная точность;
- $k_{\max}$  — максимальное количество итераций (для исключения заикливания);
- $x^*$  — “точное” значение корня<sup>1</sup>.

Подпрограмма должна возвращать либо  $x_k$  такое, что  $|x_k - x^*| < \varepsilon$ , либо  $x_{k_{\max}}$  и количество итераций.

Результаты оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

$k$	$x_k$	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$P_n(x_k)$
0		—		
1				
...	...	...	...	...

**Замечание 7.** Нулевое приближение к корню удобно вычислять по формуле

$$x_0(i) = -\cos\left(\frac{i - 1/4}{n + 1/2} \pi\right). \quad (24)$$

Здесь  $i$  — номер корня,  $n$  — степень многочлена Лежандра.

#### Свойства многочлена Лежандра

Многочлен Лежандра (23) является частным случаем многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  при  $\alpha = \beta = 0$ . Приведем необходимые сведения об этих многочленах.

Нам потребуется частный случай многочленов, когда  $\alpha = \beta = k$  — целое число.

1)  $P_0^{(k, k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k, k)}(x) = (k + 1)x.$

2) Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой:

$$P_{n+2}^{(k, k)}(x) = \frac{(n + k + 2)(2n + 2k + 3)x \cdot P_{n+1}^{(k, k)}(x) - (n + k + 2)(n + k + 1)P_n^{(k, k)}(x)}{(n + 2k + 2)(n + 2)},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

3) Правила дифференцирования многочленов Якоби:

$$\left[P_n^{(k, k)}(x)\right]' = \frac{n + 2k + 1}{2} P_{n-1}^{(k+1, k+1)}(x), \quad n \geq 1.$$

---

<sup>1</sup>“Точное” значение корня можно найти или встроенной функцией или методом Ньютона с  $\varepsilon = 10^{-15}$ .

Для вычисления значения многочлена и его производной в точке предпочтительнее использовать вышеприведенную рекуррентную формулу, так как счет многочлена через его коэффициенты неустойчив при больших значениях  $n$ .

Как видно, в данном случае понадобится вычислять не только  $P_n^{(0,0)}(x)$ , но и  $P_{n-1}^{(1,1)}(x)$ . В связи с этим для реализации метода потребуется создать подпрограмму с параметрами:

- $n$  — степень многочлена;
- $k$  — верхний индекс у многочлена Якоби;
- $x$  — точка, в которой вычисляется значение многочлена.

Эта программа на языке MATLAB может иметь, например, следующее содержание:

```
function tmp=Presx(n,k,x)
tmp0=1;
tmp1=(k+1)*x;
tmp=tmp1;
    for i=1:n-1
        tmp=((i+k+2)*(2*i+2*k+3)*x*tmp1-
            (i+k+2)*(i+k+1)*tmp0)/((i+2*k+2)*(i+2));
        tmp0=tmp1;
        tmp1=tmp;
    end
end

%Использование встроенных функций MATLAB
syms x;
n=3
num=3
%Используется встроенная функция для построения
%полинома Лежандра
P=vpa(collect(legendreP(n,x)))
%Используется встроенная функция для построения
%полинома Якоби
Pj=vpa(collect(jacobiP(n,k1,k2,x)
dP = diff(P) %дифференцирование полинома Лежандра
%Вычисление и сортировка по возрастанию
%всех корней полинома
Xsolve=sort(vpa(solve(P,x)))
%Извлечение корня по заданному порядковому номеру
hexact=Xsolve(num)
```



## 1.2. Метод Ньютона для решения нелинейной системы второго порядка

Дана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

где  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  достаточно гладкие функции.

В результате действий, аналогичных случаю одного уравнения, т. е. приближенно заменяя систему (25) линейной системой, получаем следующие расчетные формулы:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{d_x^{(k)}}{d^{(k)}}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{d_y^{(k)}}{d^{(k)}},$$

где

$$d^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix},$$
$$d_x^{(k)} = \begin{vmatrix} f(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}, \quad d_y^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g(x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

### 1.2.1. Задание

Требуется найти все решения системы уравнений или решения в заданной области с заданной точностью  $\varepsilon=0.00001$ .

Программа должна содержать подпрограмму для уточнения решения методом Ньютона с параметрами:

$x_0, y_0$  — нулевое приближение к корню;

$\varepsilon$  — заданная точность;

$k_{\max}$  — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо приближение  $(x_k, y_k)$  такое, что

$$||(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})|| < \varepsilon, \text{ либо } (x_{k_{\max}}, y_{k_{\max}}).$$

Здесь норма вектора  $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$  может быть вычислена, например, следующим образом:

$$||(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})|| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Отчет должен содержать

- 1) Графики функций  $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$  для выбора начального приближения, выполненные, например, в математическом пакете Maple.

Для этого следует объявить функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ , подключить пакет, содержащий функцию `implicitplot()` для построения графиков неявно заданных функций, и обратиться к ней.

Образец:

```
> f:=(x,y)->exp(y-0.1*x)-x*y-1.4;
> g:=(x,y)->x^2-2*y^2-4;

> with(plots):
> implicitplot({f(x,y)=0,g(x,y)=0},x=-4..4,y=-3..3);
```

- 2) Уточнение начального приближения до тех пор, пока  $\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| > \varepsilon$ , методом Ньютона.

Результаты оформить в виде таблицы 3.

Таблица 3

$k$	$x_k$	$y_k$	$\ ((x_k - x_{k-1}), (y_k - y_{k-1}))\ $	$f(x_k, y_k)$	$g(x_k, y_k)$
0			—		
1					
...					

### 1.2.2. Варианты систем

#### Вариант 1

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) - x + y^2 = 0, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.6. \end{cases}$$

#### Вариант 2

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + x^2 = 1. \end{cases}$$

#### Вариант 3

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{y-10}} - yx = 1.4, \\ x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

**Вариант 4**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

**Вариант 5**

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

**Вариант 6**

$$(y + 0.1)^2 + x^2 = 0.2,$$

$$\sin(x) - y^2 = 0.37731.$$

**Вариант 7**

$$\begin{cases} \sin(x - 0.4y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

**Вариант 8**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.8x) + 0.8xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

**Вариант 9**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.2x) + 0.2xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

**Вариант 10**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

**Вариант 11**

$$\begin{cases} e^{x+y} + y = x^2, \\ (x + 0.5)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

**Вариант 12**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

**Вариант 13**

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + 0.5x^2 = 1. \end{cases}$$

**Вариант 14**

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

**Вариант 15**

$$\begin{cases} \cos(x^2 + 0.6y) + x^2 + y^2 = 1.6, \\ 1.5(x + 0.1)^2 - (y - 0.1)^2 = 1.4. \end{cases}$$

**Вариант 16**

$$\begin{cases} \sin(x^2 + y) + y^2 = 2.1, \\ \frac{x^2}{2} - \cos(y^2) = 0.15269. \end{cases}$$

**Вариант 17**

$$\begin{cases} \frac{\sin(x)}{2} - \cos(y + x) = 0.75, \\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 3.58595. \end{cases}$$

## 2. Интерполирование по значениям функции

### 2.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке  $[a, b]$  задана таблица значений вещественной функции  $y = f(x)$ :

$x$	$f(x)$
$x_0$	$f(x_0)$
$x_1$	$f(x_1)$
$x_2$	$f(x_2)$
$\dots$	$\dots$
$x_n$	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными:

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j.$$

Требуется найти значение функции в точке  $x = \bar{x}$ , не совпадающей с узлами. Приближенное значение функции  $f(\bar{x})$  может быть найдено как значение интерполяционного многочлена:

$$f(\bar{x}) \approx P_n(\bar{x}),$$

где  $P_n(x)$  строится единственным образом из условий

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Погрешность интерполирования находится из теоремы

### 2.2. Теорема о погрешности

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечную непрерывную производную  $f^{(n+1)}(x)$  на наименьшем отрезке  $[c, d]$ , содержащем узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и точку интерполирования  $\bar{x}$ , так что  $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ ,  $d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ . Тогда существует такая точка  $\xi = \xi(\bar{x})$ ,  $c < \xi < d$ , что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (1)$$

Оценка погрешности вычисляется следующим образом:

$$|R_n(\bar{x})| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)|}{(n+1)!}, \quad (2)$$

где

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|, \quad x \in [c, d].$$

Часто практически строится многочлен  $P_m(x)$ , где  $m < n$ , по  $m+1$  узлу. Очевидно, что из  $n+1$  узла следует выбрать такие  $m+1$ , которые обеспечивают наименьшую погрешность, т. е. узлы, ближайšie к точке интерполирования  $\bar{x}$ . При построении интерполяционного многочлена в виде

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

коэффициенты  $a_i$  являются решением системы

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Определитель этой системы — определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, так как узлы попарно различны.

Удобнее строить многочлен в форме Ньютона или в форме Лагранжа.

### 2.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (3)$$

Преимуществом этой формы является простота нахождения коэффициентов:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ и т. д., а также тот факт, что}$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + A_k(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).$$

### 2.4. Минимизация погрешности в точке интерполирования

Если узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  выбраны в порядке близости к точке интерполирования  $\bar{x}$ , то можно утверждать, что многочлен любой степени

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$$

обеспечивает минимум погрешности

$$|f(\bar{x}) - P_i(\bar{x})|$$

среди всех многочленов данной степени, построенных по данной таблице узлов.

### 2.5. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Обратное интерполирование

#### 2.5.1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} f(x_k), \quad (4)$$

где

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (5)$$

### 2.5.2. Постановка задачи обратного интерполирования

Пусть на промежутке  $[a, b]$  задана таблица значений вещественной функции  $y = f(x)$

$x$	$f(x)$
$x_0$	$f(x_0)$
$x_1$	$f(x_1)$
$x_2$	$f(x_2)$
$\dots$	$\dots$
$x_n$	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j.$$

Требуется приближенно найти такое  $\bar{x}$ , что  $f(\bar{x}) \approx \bar{y}$ .

### 2.5.3. Задание 1

- 1) Дана функция  $y = f(x)$ , узлы, значение функции  $\bar{y}$ . Получить таблицу значений функции в узлах.

Требуется приближенно найти такое  $\bar{x}$ , что  $f(\bar{x}) \approx \bar{y}$  тремя способами:

- а) “точно”, используя аналитическое выражение обратной функции. Обозначим  $x^*$ .
- б) аппроксимацией функции  $f(x)$  интерполяционным многочленом  $P_n(x)$  в форме Лагранжа и приближенным решением уравнения  $P_n(x) = \bar{y}$  методом итераций или методом секущих. Обозначим решение уравнения  $P_n(x) = \bar{y}$  через  $x_n$ . Результаты привести в таблице вида

$n$	0	1	2	3	4	5
$x_n$						
$x_n - x^*$						

- в) если существует однозначная обратная функция  $f^{-1}(y)$ , то поменять ролями узлы и значения функции и приближенно заменить обратную функцию интерполяционным многочленом  $Q_m(y)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) в форме Лагранжа и вычислить  $x_m = Q_m(\bar{y})$ .

Результаты привести в таблице вида

$m$	0	1	2	3	4	5
$x_m$						
$x_m - x^*$						

Следует также привести таблицу используемых узлов для построения интерполяционных многочленов. Напомним, что в целях минимизации погрешности узлы следует выбирать ближайшими к точке интерполирования.

### 2.5.4. Задание 2

2\* Дана функция  $y = f(x)$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ .

Требуется построить при различных  $n$  интерполяционные многочлены  $P_n(x)$  в форме Лагранжа по равноотстоящим узлам и по узлам многочлена Чебышева. Сравнить на графике с функцией в одних осях координат.

*Указание*

Составить подпрограмму с параметрами:

- интерполируемая функция;
- степень многочлена;
- массив узлов.

Подпрограмма должна возвращать аналитическое выражение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа заданной степени по заданной таблице узлов для заданной функции.

Рассмотреть функции: а)  $\sin(x)$ ; б)  $|x|$ ; в)  $\frac{1}{1 + 25x^2}$ .

### 2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование

Номер варианта	Функция	Узлы	Точка интерполирования	Значение функции
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.4	-0.56
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	-0.4	0.8
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	4	1.3
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.3	-0.8
8	$e^x$	-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.2	0.8
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	4	2
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	7	2.5
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	0.6	0.8
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.4	0.56
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6



### 3. Интерполирование в случае равноотстоящих узлов. Конечные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

#### 3.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке  $[a, b]$  задана таблица значений вещественной функции  $y = f(x)$ .  
Здесь узлы равноотстоящие. Обозначим  $h = (b - a)/n$ .

$x$	$f(x)$
$a$	$f(a)$
$a + h$	$f(a + h)$
$a + 2h$	$f(a + 2h)$
$\dots$	$\dots$
$a + nh = b$	$f(a + nh)$

Требуется найти значение функции в точке  $x = \bar{x}$ , не совпадающей с узлами.

#### 3.2. Конечные разности

Обозначим  $x_i = a + ih$ ,  $f(x_i) = y_i$ .

При построении интерполяционного многочлена по равностоящим узлам могут быть использованы конечные разности, которые играют роль, подобную той, которую играют производные для функций с непрерывно изменяющимся аргументом.

Конечная разность первого порядка в точке  $x_i$  определяется следующим образом:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

— конечная разность  $k$ -ого порядка в точке  $x_i$ .

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функций

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k y_{i+n-k} + \dots + (-1)^n y_i = (S - 1)^n y_i. \quad (1)$$

Здесь  $S$  — оператор сдвига, так что

$$S^k y_i = y_{i+k}.$$

Обратим внимание на очевидное свойство конечной разности

$$\Delta^n P_n(x) \equiv \text{const}.$$

Конечные разности принято записывать в таблице вида *Таблицы 1*.

Пусть значения функции в узлах интерполирования заданы с точностью  $\varepsilon$  (например,  $\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$ ). Тогда конечные разности имеет смысл вычислять лишь до тех пор, пока они не будут “постоянными” с учётом ошибки округления  $\varepsilon$  в значениях функции, т. е. до тех пор, пока  $|\Delta^k y_j - \Delta^k y_i| \leq 2^{k+1} \varepsilon = 2^k \cdot 10^{-5}$  ( $2^k$  единиц младшего разряда).

Число  $k \leq n$  принимаем за степень искомого интерполяционного полинома.

Полином будет строиться по  $(k+1)$  узлу, которые следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить минимальную по абсолютной величине погрешность (разность между значением функции и значением полинома) в точке интерполяции  $\bar{x}$ .

Для этого в качестве  $x_0$  следует выбирать ближайший к  $\bar{x}$  узел. В качестве  $x_1$  выбирать ближайший из оставшихся и т. д.

Это следует из теоремы об остатке интерполирования.

В связи с этим рассматриваются три варианта расположения точки интерполирования  $\bar{x}$ . Приведем таблицу конечных разностей.

Таблица 1

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$a$	$y_0$			
		$\Delta y_0$		
$a + h$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$	
		$\Delta y_1$		$\Delta^3 y_0$
$a + 2h$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$	
		$\Delta y_2$		$\dots$
$a + 3h$	$y_3$		$\dots$	
		$\dots$		$\dots$
$\dots$	$\dots$		$\dots$	
		$\Delta y_{n-3}$		$\Delta^3 y_{n-4}$
$b - 2h$	$y_{n-2}$		$\Delta^2 y_{n-3}$	
		$\Delta y_{n-2}$		$\Delta^3 y_{n-3}$
$b - h$	$y_{n-1}$		$\Delta^2 y_{n-2}$	
		$\Delta y_{n-1}$		
$b = a + nh$	$y_n$			

### 3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования

#### 3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы

Пусть точка интерполирования  $\bar{x}_1$  удовлетворяет условию

$$a < \bar{x}_1 \leq a + h/2.$$

Узлы следует выбирать в следующем порядке:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots, \quad x_n = a + nh.$$

В этом случае из таблицы 1 используются значения  $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^n y_0$  — верхняя косая строка.

Обозначим  $t = (\bar{x}_1 - a)/h$ , тогда интерполяционный многочлен примет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_n(a + th) = & y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \\ & \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Представим  $P_n(t)$  в виде

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_0,$$

где  $\Delta^0 y_0 = y_0$ ,  $N_0 = 1$ ,  $N_1 = t$ , ...,  $N_k = \frac{N_{k-1} \cdot (t - k + 1)}{k}$ .

Вычисления рекомендуется оформить в виде *Таблицы 2*.

Таблица 2

$k$	0	1	2	3	4
$\Delta^k y_0$					
$N_k(t)$					
$N_k \cdot \Delta^k y_0$					
$P_k(\bar{x}_1)$					
$f(\bar{x}_1) - P_k(\bar{x}_1)$					
$ R_k(\bar{x}_1)  \leq$					

В ячейки таблицы следует записывать значения согласно обозначениям, помещённым в первом столбце.

В строке  $P_k(\bar{x}_1)$  должны быть приведены значения многочленов в точке интерполирования нулевой, первой, второй и т. д. степеней.

Как видно из формулы (2)

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) + N_k(t) \Delta^k y_0,$$

$P_k(t)$  для  $k > 0$  получается сложением значений, находящихся левее по строке и выше по столбцу.

Количество цифр после запятой должно быть согласовано с  $\varepsilon$ .

Часто в учебных целях рассматривается модельная задача, т. е. такая, в которой известно аналитическое выражение для интерполируемой функции.

В этом случае следует вычислить “точное” значение функции в точке  $\bar{x}_1$ , привести его рядом с таблицей, привести фактические погрешности, оценки для погрешностей, проанализировать результаты.

Напомним, что выражение для погрешности интерполирования определяется теоремой

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечную непрерывную производную  $f^{(n+1)}(x)$  на наименьшем отрезке  $[c, d]$ , содержащем узлы интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и точку интерполирования  $\bar{x}$ , так что  $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ ,  $d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ .

Тогда существует такая точка  $\xi = \xi(\bar{x})$ ,  $c < \xi < d$ , что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (3)$$

В данном случае, учитывая, что узлы равноотстоящие с шагом  $h$  и  $t = (\bar{x} - a)/h$ ,  $R_n(f, \bar{x})$  примет вид

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1) \cdot (t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi). \quad (4)$$

Оценка погрешности значения многочлена  $k$ -ой степени в нижней строке *Таблицы 2* вычисляется следующим образом:

$$|R_k(\bar{x})| \leq M_{k+1} \cdot |N_{k+1}| h^{k+1},$$

где

$$M_{k+1} = \max |f^{(k+1)}(x)|, \quad x \in [a, a + kh].$$

### 3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы

Пусть теперь требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке  $\bar{x}_2$  такой, что

$$b - h/2 \leq \bar{x}_2 < b.$$

Узлы следует выбирать в следующем порядке:  $b, b - h, b - 2h$  и т. д.

Соответственно, в этом случае из таблицы 1 используются значения  $y_n, \Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \Delta^3 y_{n-3}$  и т. д. — нижняя косая строка.

Обозначим  $t = (\bar{x}_2 - b)/h$ , тогда

$$\begin{aligned} P_n(b + th) = & y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \\ & + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Представим  $P_n(t)$  в виде

$$P_n(b + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_{n-k},$$

где  $\Delta^0 y_n = y_n$ ,  $N_0 = 1$ ,  $N_1 = t$ ,  $\dots$ ,  $N_k = \frac{N_{k-1}(t + k - 1)}{k}$ .

Вычисления рекомендуется оформить в виде таблицы, аналогичной *Таблице 2*.

### 3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы

Пусть  $a$  — узел в середине таблицы, т. е. в отличие от предыдущих случаев имеются узлы и левее и правее данного.

Приведем фрагмент таблицы конечных разностей *Таблицу 3*, где  $y_i = f(a + ih)$ .

Пусть требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке  $\bar{x}_3$ , такой что  $a < \bar{x}_3 \leq a + h/2$ . Узлы следует выбирать в следующем порядке:  $a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h$  и т. д.

Соответственно используются значения  $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}$  и т. д.

Таблица 3

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a - 3h$	$y_{-3}$				
		$\Delta y_{-3}$			
$a - 2h$	$y_{-2}$		$\Delta^2 y_{-3}$		
		$\Delta y_{-2}$		$\Delta^3 y_{-3}$	
$a - h$	$y_{-1}$		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		$\Delta y_{-1}$		$\Delta^3 y_{-2}$	
$a$	$y_0$		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		$\Delta y_0$		$\Delta^3 y_{-1}$	
$a + h$	$y_1$		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		$\Delta y_1$		$\Delta^3 y_0$	
$a + 2h$	$y_2$		$\Delta^2 y_1$		
		$\Delta y_2$			
$a + 3h$	$y_3$				

Обозначим  $t = (\bar{x}_3 - a)/h$ , тогда

$$\begin{aligned}
P_n(a + th) = & y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t - (-1)^n [\frac{n}{2}])}{n!} \Delta^n y_{-[\frac{n}{2}]}
\end{aligned} \tag{6}$$

Представим  $P_n(t)$  в виде

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_{-[\frac{k}{2}]},$$

где  $N_0 = 1$ ,  $N_1 = t$  и т. д.

Здесь выражение  $[\frac{k}{2}]$  означает целую часть от деления  $k$  на 2.

Вычисления следует оформить в виде таблицы, аналогичной *Таблице 2*.

### 3.4. Упражнения

- 1) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование назад).
- 2) Проиллюстрировать на примере применение формул для интерполяционных многочленов для случая экстраполирования а)  $\bar{x} < a$ ; б)  $\bar{x} > b$ .
- 3) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если  $a + h/2 < \bar{x} < a + h$ .
- 4) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если  $b - h < \bar{x} < b - h/2$ .

### 3.5. Задание

Дана функция  $f(x)$ , промежуток  $[a, b]$ , точки интерполирования. Требуется

- 1) Построить таблицу значений функции по равноотстоящим узлам с шагом  $h = 0.1$  на  $[a, b]$ , округлив значения функции до пятого знака после запятой ( $\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$ ).

- 2) Построить таблицу конечных разностей до четвертого порядка.
- 3) Вычислить значение функции в точках интерполирования, используя интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots, 4$ ) в форме Ньютона по заданным узлам.
- 4) Сравнить с точным значением функции.
- 5) Получить оценку погрешности.

Представить результаты в виде *Таблицы 2*.

### 3.6. Варианты заданий

- 1)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 0.55$ ,  $\bar{x}_3 = 1.05$ .
- 2)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 0.45$ ,  $\bar{x}_3 = 0.95$ .
- 3)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [-0.5, 0.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 0.45$ ,  $\bar{x}_3 = 0.05$ .
- 4)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 0.45$ ,  $\bar{x}_3 = 0.95$ .
- 5)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 1.55$ ,  $\bar{x}_3 = 1.05$ .
- 6)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [2.5, 3.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 2.55$ ,  $\bar{x}_3 = 3.15$ .
- 7)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [5, 6]$ ,  $\bar{x}_1 = 5.05$ ,  $\bar{x}_3 = 5.35$ .
- 8)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [-3.5, -2.5]$ ,  $\bar{x}_2 = -2.55$ ,  $\bar{x}_3 = -3.05$ .
- 9)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [5.5, 6.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 5.45$ ,  $\bar{x}_3 = 6.25$ .
- 10)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [-0.5, 0.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 0.45$ ,  $\bar{x}_3 = 0.05$ .
- 11)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [3.5, 4.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 3.45$ ,  $\bar{x}_3 = 3.95$ .
- 12)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 1.55$ ,  $\bar{x}_3 = 1.05$ .
- 13)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [-7.5, -6.5]$ ,  $\bar{x}_1 = -7.65$ ,  $\bar{x}_3 = -6.95$ .
- 14)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [2.5, 3.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 2.45$ ,  $\bar{x}_3 = 3.05$ .
- 15)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 0.55$ ,  $\bar{x}_3 = 1.05$ .
- 16)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [4.5, 5.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 4.45$ ,  $\bar{x}_3 = 5.95$ .
- 17)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [-0.5, 0.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 0.45$ ,  $\bar{x}_3 = 0.05$ .
- 18)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_1 = 0.35$ ,  $\bar{x}_3 = 1.35$ .
- 19)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [0.5, 1.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 1.55$ ,  $\bar{x}_3 = 1.05$ .
- 20)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $[a, b] = [-1.5, -0.5]$ ,  $\bar{x}_1 = -1.55$ ,  $\bar{x}_3 = -1.05$ .
- 21)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $[a, b] = [2.5, 3.5]$ ,  $\bar{x}_2 = 2.48$ ,  $\bar{x}_3 = 2.95$ .

## 4. Равномерное приближение функций

Рассмотрим конечный отрезок вещественной оси  $[a, b]$  и пространство непрерывных функций  $C[a, b]$  (линейное нормированное пространство с чебышёвской нормой  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ). Сходимость последовательности  $f_n$  к  $f$  в этой норме означает равномерную сходимость.

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Хотим приблизить ее алгебраическими полиномами степени не выше  $n$  с вещественными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad f(x) \approx P_n(x).$$

Докажем вспомогательное

### Утверждение 1

Пусть  $\phi, \psi$  – непрерывные функции. Тогда

$$\begin{aligned} \|\phi\| &= \|(\phi - \psi) + \psi\| \leq \|\phi - \psi\| + \|\psi\| \implies \\ \implies \|\phi\| - \|\psi\| &\leq \|\phi - \psi\| \\ \|\psi\| &= \|(\psi - \phi) + \phi\| \leq \|\psi - \phi\| + \|\phi\| \implies \\ \implies \|\psi\| - \|\phi\| &\leq \|\phi - \psi\|, \quad \text{откуда} \\ \left| \|\phi\| - \|\psi\| \right| &\leq \|\phi - \psi\|. \end{aligned} \tag{1}$$

### 4.1. Полином наилучшего равномерного приближения

#### Задача

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Найти  $E_n(f) = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{C[a, b]}$ .  $E_n(f)$  называется наилучшим равномерным приближением функции  $f$  алгебраическими полиномами степени не выше  $n$ . Если  $E_n(f) = \|f - P_n^*\|_{C[a, b]}$ , то такой  $P_n^*$  называется полиномом наилучшего равномерного приближения функции  $f$  (далее ПНРПр).

**Замечание 1.** Из постановки задачи о поиске  $E_n(f)$  не ясно, существует ли наилучшее равномерное приближение для произвольной непрерывной функции  $f$ , и, следовательно, вопрос существования (а также единственности) ПНРПр пока остается открытым.

**Теорема 1** (К. Вейерштрасс). Если функция  $f(x)$  непрерывна на конечном замкнутом отрезке  $[a, b]$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  и такой полином  $P_{n(\varepsilon)}(x)$ , что  $|f(x) - P_{n(\varepsilon)}(x)| \leq \varepsilon$  при всех  $x \in [a, b]$ , т. е.  $\|f - P_{n(\varepsilon)}\| \leq \varepsilon$ .

**Замечание 2.** Из теоремы Вейерштрасса о том, что любая непрерывная функция может быть сколь угодно хорошо приближена полиномом, следует сходимость к нулю последовательности  $E_n(f)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно, существует последовательность полиномов  $Q_{n_k}(x)$ , степени  $n_k$  каждый, такая что  $\|f - Q_{n_k}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Из определения наилучшего равномерного приближения  $E_{n_k}(f) \leq \|f - Q_{n_k}\|$ , и, следовательно, последовательность  $E_{n_k}(f) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так как очевидно  $E_{n+1}(f) \leq E_n(f)$ , то из сходимости  $E_{n_k}(f)$  к нулю вытекает сходимость к нулю  $E_n(f)$ . Замечание 2 доказано.

**Замечание 3.** Если  $P_n^*$  – ПНРПр функции  $f$ , то  $P_n^*$  сходится к  $f$  равномерно на  $[a, b]$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Докажем существование наилучшего равномерного приближения и ПНРПр.

**Лемма 1.** Пусть  $f \in C[a, b]$ . Пусть  $P_n(x) = P_n(A, x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , где  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Тогда функция  $F(A) = F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \|f - P_n(A, \cdot)\|$  есть непрерывная функция своих аргументов.

*Доказательство.* Положим  $c = \max\{|a|, |b|\}$ . Тогда  $|x| \leq c$  для  $x \in [a, b]$ .

Рассмотрим малое приращение  $\Delta A$  аргумента функции  $F$ , будем оценивать сверху следующий модуль разности, принимая во внимание Утверждение 1:

$$\begin{aligned} \left| F(A + \Delta A) - F(A) \right| &= \left| \|f - P_n(A + \Delta A, \cdot)\| - \|f - P_n(A, \cdot)\| \right| \leq \\ &\leq \|P_n(A + \Delta A) - P_n(A)\| = \left\| \sum_{k=0}^n \Delta a_k \cdot x^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n |\Delta a_k| \cdot c^k \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=0}^n (\Delta a_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n (c)^{2k}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Последний переход осуществили по неравенству Коши-Буняковского. Теперь устремим все  $\Delta a_k$  к нулю. Интересующий нас модуль разности сверху оценивается произведением бесконечно малой величины на ограниченную. Следовательно  $\left| F(A + \Delta A) - F(A) \right| \rightarrow 0$  при  $\Delta A \rightarrow 0$ . Таким образом,  $F(A + \Delta A) \rightarrow F(A)$ . Лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2** (без доказательства). Существует положительная постоянная  $m = m(n, [a, b])$ , такая что  $\forall P_n$ , где  $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , верно следующее неравенство:

$$\|P_n\| \geq m \sqrt{\sum_{k=0}^n (\Delta a_k)^2}. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Для любой  $f \in C[a, b]$  существует полином её наилучшего равномерного приближения  $P_n^*$ .

*Доказательство.* Требуется доказать, что непрерывная функция  $F(A)$ , определенная в Лемме 1, достигает своего наименьшего значения на  $R^{n+1}$ . Пусть  $m$  – число из Леммы 2, положим  $r = \frac{2\|f\|}{m}$ , ( $m > 0$ ). Рассмотрим шар

$$B_r = \{A = (a_0, a_1, \dots, a_n), \text{ такие что } \sum_{k=0}^n (a_k)^2 \leq r^2\}. \quad B_r \subset R^{n+1}.$$

$B_r$  – замкнутое ограниченное множество,  $F(A)$  – непрерывная функция,  $\Rightarrow \exists A^* \in B_r$ , что  $\forall A \in B_r \quad F(A) \geq F(A^*)$ . То есть в шаре  $F(A)$  достигает своего наименьшего значения в некоторой точке  $A^*$ . Рассмотрим теперь  $A \notin B_r$ , при этом  $\sum_{k=0}^n (a_k)^2 > r^2$ . Тогда учитывая это неравенство и утверждение Леммы 2, получим:

$$F(A) = \|f - P_n(A, \cdot)\| \geq \|P_n(A, \cdot)\| - \|f\| > \left| mr - \|f\| \right| = \|f\| = F(0). \quad (4)$$

Итак,  $F(A) > F(0)$ , но так как  $0 \in B_r$ , то  $F(0) \geq F(A^*) \Rightarrow F(A) > F(A^*)$ , т.е.  $A^*$  – точка глобального минимума  $F(A)$ . Теорема 2 доказана.  $\square$



Пусть  $f \in C[a, b]$  и  $P_n^*$  – её ПНРПр. Рассмотрим

$$r_n(f; x) = f(x) - P_n^*(x). \quad (5)$$

Из определения  $E_n(f)$  ясно, что  $-E_n(f) \leq r_n(f; x) \leq E_n(f)$ . Т.е. все значения  $r_n(f; x)$  лежат от  $-E_n(f)$  до  $E_n(f)$ . При этом раз  $P_n^*$  существует, то достигается максимальная по абсолютной величине разность, а значит, существует, по крайней мере, одна точка  $\xi \in [a, b] : |r_n(f; \xi)| = E_n(f)$ . На рис. 1 приведен вид разности  $r_n(f; x)$ .

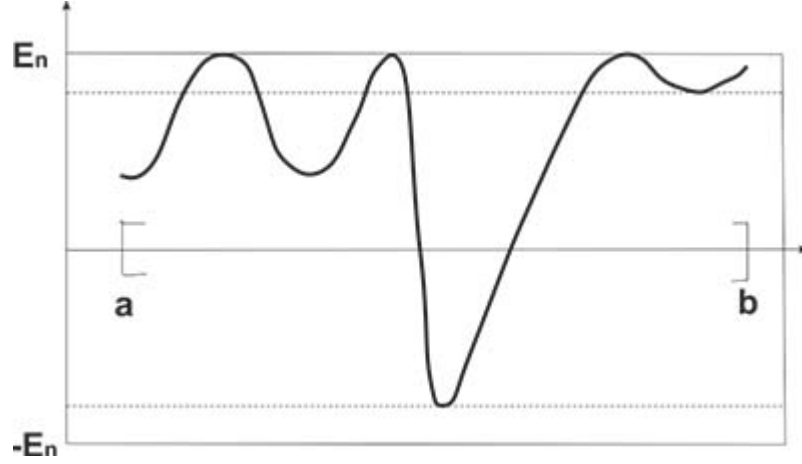


Рис. 1. График функции  $r_n(f; x)$

**Определение 1.** Назовем  $\xi$  – "плюс-точкой", если  $r_n(f; \xi) = +E_n(f)$ , назовем  $\xi$  – "минус-точкой", если  $r_n(f; \xi) = -E_n(f)$ .

**Замечание 4.** Непременно существуют "плюс" и "минус" точки. Действительно, если бы существовали, например, только "плюс" точки, то достаточно сместить график вниз на малую величину и этим уменьшить  $||r_n||$ , что невозможно по определению  $E_n(f)$  (см. рис. 2).

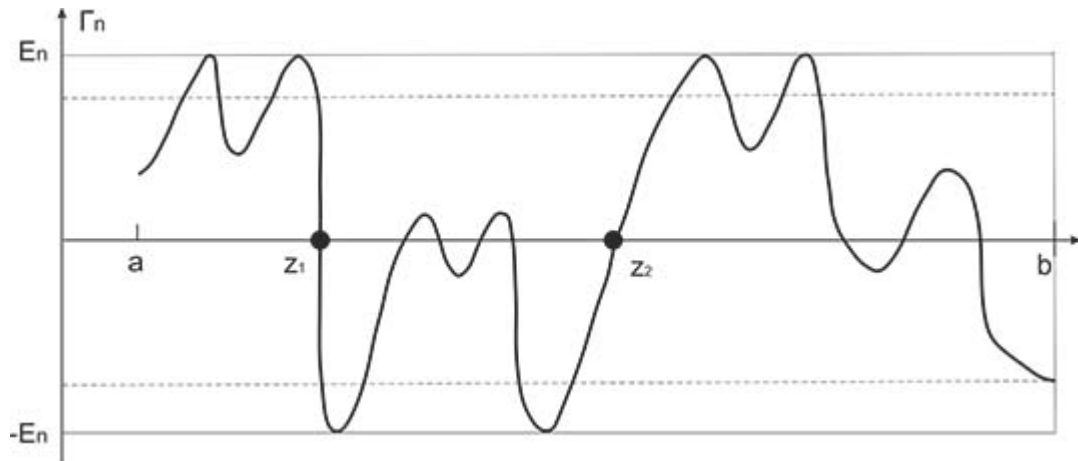


Рис. 2. Иллюстрация "плюс" и "минус" точек

**Замечание 5.** Рассмотрим на  $[a, b]$  точки  $z_j : r_n(f, z_j) = 0, j = 1, 2, \dots, m$ . В силу непрерывности  $f$ ,  $m$  – конечно. Считаем далее, что точки упорядочены по возрастанию. Таким образом, на  $[a, b]$  образовался  $(m + 1)$  отрезок:  $[a, b] = [a, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_m, b]$ .

На каждом из отрезков есть точки только одного знака. Не умаляя общности, можно считать, что на первом отрезке всегда "плюс-точки".

**Теорема 3.** Справедливо неравенство  $m + 1 \geq n + 2$  (число отрезков  $\geq n + 2$ ).

*Доказательство.* (От противного) Пусть  $m \leq n$ . Рассмотрим  $Q_m(x) = \varepsilon(x - z_1) \cdots (x - z_m)$ , здесь  $\varepsilon$  достаточно мало и таково, что на первом отрезке знаки  $Q_m$  и  $r_n$  совпадают. Теперь образуем  $\tilde{r}_n(x) = r_n(f; x) - Q_m(x) = f(x) - \underbrace{(P_n^* + Q_m)}_{\deg \leq n}$ . Многочлен  $Q_m$  имеет корни в точках  $z_j, j = 1, 2, \dots, m$  и на промежутках между ними сохраняет знак. Тогда

$$\|\tilde{r}_n\| = \max_{x \in [a, b]} |\tilde{r}_n(x)| < \max_{x \in [a, b]} |r_n(f, x)| = \|r_n\|. \quad (6)$$

Значит, мы построили полином, степени не выше  $n$ , а именно:  $(P_n^* + Q_m)$ , который приближает  $f$  лучше, чем  $P_n^*$ . Получили противоречие тому, что  $P_n^*$  – ПНРПр. Теорема 3 доказана.  $\square$

## 4.2. Альтернанс. Теорема Чебышева

**Определение 2.** Пусть  $f \in C[a, b]$ ,  $P_n^*$  – ПНРПр. Рассмотрим  $r_n(f, x) = f(x) - P_n^*(x)$ ,  $\|r_n\| = E_n(f)$ . Назовем  $\ell$ -точечным альтернансом набор  $\{t_i\}$ ,  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_\ell \leq b$ , такой что  $r_n(t_i) = \pm(-1)^i E_n(f)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ .

**Замечание 6.** В точках альтернанса разность  $r_n(f, x)$  достигает своего максимального значения с чередующимися знаками, т. е.  $r_n(f, t_i) = -r_n(f, t_{i+1})$ .

**Теорема 4** (П.Л. Чебышев). Для того, чтобы  $P_n^*$  был полиномом наилучшего равномерного приближения функции  $f$  на  $[a, b]$ , необходимо и достаточно существование  $(n + 2)$ -точечного альтернанса.

*Доказательство.* 1)  $\implies$  Пусть  $P_n^*$  – ПНРПр, возьмем на каждом отрезке по одной точке "плюс" и "минус" точке, их не меньше чем  $(n + 2)$ , и они образуют альтернанс. Необходимость доказана.

2)  $\Leftarrow$  Пусть  $t_1, \dots, t_{n+2}$  – альтернанс, тогда  $\|r_n\| = E_n(f)$ ,  $|r_n(f; t_i)| = E_n(f)$ , а знаки  $r_n(f; t_i)$  чередуются. Покажем, что  $P_n^*$  – это полином наилучшего приближения. От противного: пусть найдется  $Q_n(x) : \|f - Q_n\| = \max_x |f(x) - Q_n(x)| < E_n(f)$ . Тогда для  $\tilde{r} = f - Q_n$  верно:  $|\tilde{r}(t_i)| \leq \|\tilde{r}\| < E_n(f) \forall i = 1, 2, \dots, (n + 2)$ . Рассмотрим разность

$$Q_n(t_i) - P_n^*(t_i) = (f(t_i) - P_n^*(t_i)) + (Q_n(t_i) - f(t_i)), \quad \forall i = 1, 2, \dots, (n + 2). \quad (7)$$

Здесь первое слагаемое чередует знак, кроме того, модуль первого слагаемого равен  $E_n(f)$ , а модуль второго слагаемого меньше  $E_n(f)$ . Значит и числа  $Q_n(t_i) - P_n^*(t_i)$  знакопереваются; их  $n + 2$ . Числа  $t_i$  образуют  $n + 1$  отрезок, на концах каждого отрезка полином  $Q_n - P_n^*$  принимает значения разных знаков. Значит внутри каждого отрезка у него есть, по крайней мере, один корень нечетной кратности. Следовательно имеем: полином  $Q_n - P_n^*$  степени не выше  $n$  имеет, по крайней мере,  $n + 1$  корень, а значит, по основной теореме алгебры, он равен нулю тождественно. Т. е.  $Q_n \equiv P_n^*$ . Достаточность доказана. Теорема 4 доказана.  $\square$

### 4.3. Примеры применения Теоремы Чебышёва

#### 4.3.1. Пример 1, $n = 0$

Пусть  $f \in C[a, b]$ , требуется построить ПРНПр нулевой степени. Пусть  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$ ,  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2)$ . Положим  $P_0^* = \frac{M+m}{2}$ . Это требуемый ПРНПр, так как точки  $x_1$  и  $x_2$  – точки альтернанса.

Очевидно (см. рис. 3)  $E_0(f) = (M - m)/2$ ,

$$f(x_1) - P_0(x_1) = m - \frac{M+m}{2} = \frac{m-M}{2}, \quad f(x_2) - P_0(x_2) = M - \frac{M+m}{2} = \frac{M-m}{2}.$$

Значит, знаки чередуются.

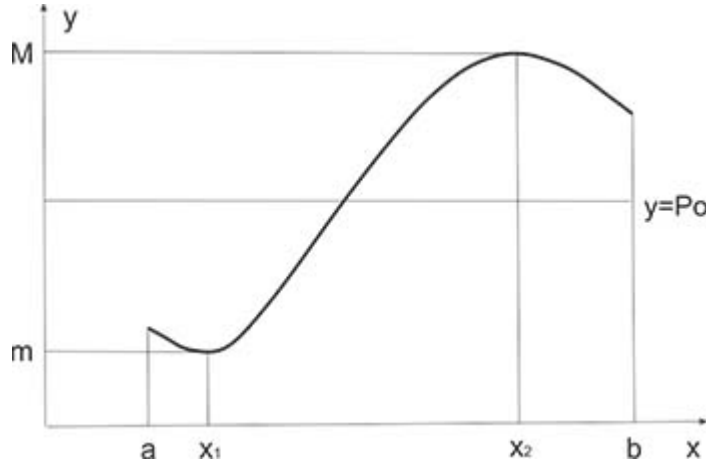


Рис. 3. Построение  $P_0^*$

#### 4.3.2. Пример 2, $n = 1$

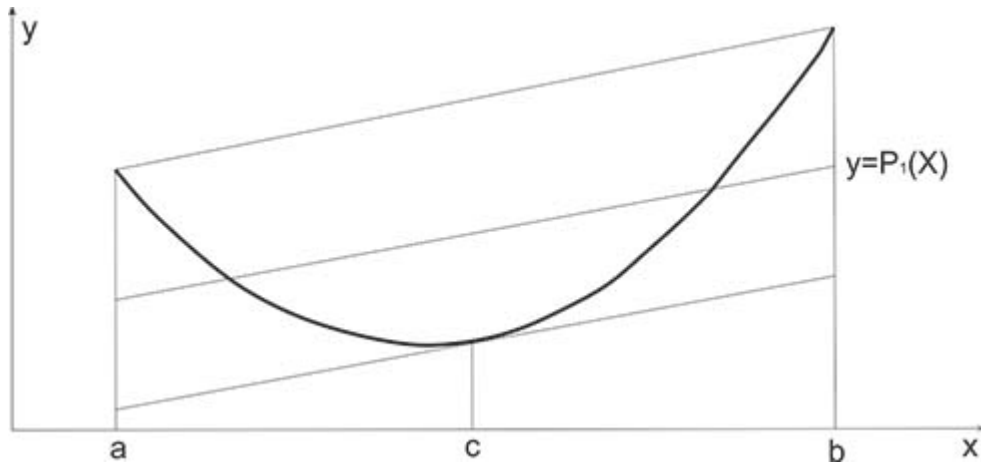


Рис. 4. Построение  $P_1^*$

Пусть  $f \in C^2[a, b]$ , а  $f''$  сохраняет знак на всем  $[a, b]$  (т. е. функция выпуклая или вогнутая). Требуется построить для нее ПРНПр первой степени. Пусть  $\ell_1(x)$  – прямая, проходящая через точки  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ . Из-за выпуклости/вогнутости существует единственная касательная  $\ell_2(x)$ , параллельная хорде  $\ell_1(x)$ . Пусть  $c \in [a, b]$  – абсцисса точки касания  $\ell_2$  к графику функции  $y = f(x)$ .

Положим  $P_1^*(x) = (\ell_1(x) + \ell_2(x))/2$ .

Это требуемый ПНРПр, так как точки  $a$ ,  $c$ ,  $b$  — точки альтернанса (см. рис. 4).

**Замечание 7.** В общем случае нахождение ПНРПр — довольно сложная задача (см. следующий раздел). Существуют приближенные методы построения таких полиномов, например, Метод Ремеза.

#### 4.4. О нахождении $P_n^*$

В задаче о нахождении ПНРПр  $P_n^*(x) = a_n^*x^n + \dots + a_0^*$ , кроме его коэффициентов, неизвестными будут точки альтернанса и наилучшее приближение  $E_n(f)$ :

$n + 1$  штука неизвестных  $a_0^*, \dots, a_n^*$ ,

$n + 2$  точек альтернанса  $t_1, \dots, t_{n+2}$ ,

наилучшее приближение  $E_n(f)$ .

Итого  $(2n + 4)$  неизвестных, столько же нужно уравнений для их нахождения.

Пусть  $f \in C^1([a, b])$ . Рассмотрим  $r_n(f; x) = f(x) - P_n^*(x)$ . Так как в точках альтернанса  $|r_n(f; t_i)| = E_n(f)$  и точки  $t_i$  для  $r_n$  являются точками экстремума, то возникает следующая нелинейная система для определения всех неизвестных:

Случай, когда все  $t_i \in (a, b)$ :

$$(E_n(f))^2 - (r_n(f, t_i))^2 = 0, \quad r'_n(f, t_i) = f'(t_i) - P_n^{*'}(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 2.$$

Если один из концов — точка альтернанса:  $t_1 = a$  (или  $t_{n+2} = b$ ). Тогда первые уравнения выполняются, но, поскольку на левом (правом) конце нельзя написать производную, уравнений будет на 1 меньше. Но и переменных уже на 1 меньше, так как  $t_1$  (или  $t_{n+2}$ ) уже фиксировано.

Если  $t_1 = a$  и  $t_{n+2} = b$ . Тогда первые уравнения выполняются, но, поскольку на левом и правом конце нельзя написать производную, уравнений будет на 2 меньше. Но и переменных уже на 2 меньше ( $t_1 = a$  и  $t_{n+2} = b$  уже известны).

#### 4.5. Существование и единственность полинома наилучшего равномерного приближения (ПНРПр)

**Теорема 5.** Существует единственный  $P_n^*$  для  $f \in C[a, b]$ .

*Доказательство.* Существование ПНРПр было доказано в Теореме 2, осталось доказать единственность. Докажем от противного. Пусть существует два ПНРПр, степени не выше  $n$ , одинаково приближающие функцию  $f$  (с равными  $E_n(f)$ ). Обозначим их  $P_{n1}^*$  и  $P_{n2}^*$ . Тогда

$$-E_n(f) \leq f(x) - P_{ni}^*(x) \leq E_n(f), \quad i = 1, 2, \quad E_n(f) = \|f - P_{ni}^*\|.$$

Сложим неравенства и разделим пополам, имеем:

$$-E_n(f) \leq f(x) - \frac{P_{n1}^*(x) + P_{n2}^*(x)}{2} \leq E_n(f), \quad (8)$$

а это означает, что  $\frac{P_{n1}^*(x) + P_{n2}^*(x)}{2}$  — еще один полином наилучшего приближения степени не выше  $n$ . Раз так, то для него по теореме Чебышёва существует  $(n+2)$  точечный альтернанс:

$$f(t_i) - \frac{P_{n1}^*(t_i) + P_{n2}^*(t_i)}{2} = \pm(-1)^i E_n(f), \quad i = 1, 2, \dots, n + 2, \quad (9)$$

$$\frac{f(t_i) - P_{n1}^*(t_i)}{2} + \frac{f(t_i) - P_{n2}^*(t_i)}{2} = \pm(-1)^i E_n(f), \quad i = 1, 2, \dots, n + 2. \quad (10)$$

Но модуль каждого слагаемого в левой части второго равенства не превосходит  $E_n(f)/2$ ; их сумма равна  $\pm(-1)^i E_n(f)$ . Поэтому эти слагаемые равны между собой, и, значит, равны

$$f(t_i) - P_{n1}^*(t_i) = f(t_i) - P_{n2}^*(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2,$$

откуда следует, что

$$P_{n1}^*(t_i) - P_{n2}^*(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

Имеем: алгебраический полином  $P_{n1}^* - P_{n2}^*$ , степени не выше  $n$  имеет, по крайней мере,  $(n+2)$  корня. Значит, по основной теореме алгебры, он равен нулю тождественно, следовательно,  $P_{n1}^* \equiv P_{n2}^*$ . Теорема 5 доказана.  $\square$

**Теорема 6.** Пусть  $f \in C[-a, a]$  и  $f(-x) = \pm f(x)$  ( $f$  – четная (нечетная)). Тогда ее ПНРПр  $P_n^*$  также чётен (нечётен).

*Доказательство.* 1) Пусть  $f$  четная функция на  $[-a, a]$ . По Теореме 5  $\exists ! P_n^*$  – ее ПНРПр, т.е.  $\|f - P_n^*\| = E_n(f)$  или  $\max_{-a \leq x \leq a} |f(x) - P_n^*(x)| = E_n(f)$ . Положим в последнем равенстве  $x := -x$ . Так как ввиду четности,  $f(-x) = f(x)$ , равенство приобретает вид:  $\max_{-a \leq x \leq a} |f(x) - P_n^*(-x)| = E_n(f)$ . Следовательно  $P_n^*(-x)$  – также полином наилучшего приближения для  $f$ . Из единственности получаем  $P_n^*(x) = P_n^*(-x)$ , т.е. ПНРПр четен.

2) Доказательство в случае, когда  $f$  нечетная функция на  $[-a, a]$  проводится аналогично. Теорема 6 доказана.  $\square$

**Замечание 8.** 1) Теорема Чебышёва об альтернансе позволяет установить, является ли заданный полином для заданной функции  $f$  ее ПНРПр. При этом существование  $(n+2)$ -точечного альтернанса для ПНРПр степени не выше  $n$  не означает, что точек альтернанса ровно  $(n+2)$ . Возможно, что их больше. Но для доказательства достаточно предъявить, по крайней мере,  $(n+2)$  точки, в которых разность  $(f - P_n^*)$  достигает своего наибольшего значения с чередующимся знаком. Это очень важный момент.

2) Важным является также то, что степень ПНРПр не обязательно равна  $n$ , она не выше  $n$ . Например, при построении ПНРПр для четной функции на симметричном отрезке, ввиду четности ее ПНРПр, построение  $P_5^*$  может привести к тому, что по факту  $P_5^*$  окажется полиномом 4, 2 или даже 0 степени.

3) С построением ПНРПр для четных/нечетных функций связана еще одна проблема, которую ниже поясним на примере.

Рассмотрим  $f(x) = |x|$  на  $[-1, 1]$ . Пусть поставлена задача нахождения для нее ПНРПр  $P_2^*$ , и  $E_2(f)$ . В общем случае для поиска  $P_n^*$  мы составляем систему из  $(2n+4)$  (см. п. 4.4) уравнений, считая неизвестными  $(n+2)$  точки альтернанса. Т.е. стандартно, для поиска  $P_2^*$  мы отыскивали бы 4 точки альтернанса. Однако, в этой задаче функция четная, поэтому (по Теореме 6) полином четный. Следовательно, ПНРПр для  $f$  степени не выше третьей  $P_3^*$  (по четности) по факту окажется полиномом, степени 2, т.е.  $P_3^* \equiv P_2^*$ . Однако, число точек альтернанса для  $P_3^*$ , по крайней мере,  $3+2 = 5$ . По этой причине точек альтернанса при построении  $P_2^*$  понадобится больше, не 4, а 5.

## 4.6. Пример построения полинома наилучшего равномерного приближения

### Задача

Построить  $P_n^*(x)$  – ПНРПр степени не выше первой для функции  $f(x) = e^x$  на  $[-1, 0]$ .

*Решение:*

Запишем искомый полином в виде  $P_1^*(x) = kx + b$ . Надлежит определить значения коэффициентов  $k$  и  $b$ . Очевидно, данная функция  $f(x) = e^x$  на  $[-1, 0]$  выпукла. Решим эту задачу, следуя указаниям Примера 2 применения Теоремы Чебышева об альтернансе.

Точками альтернанса служат концы отрезка и точка  $c$  – абсцисса точки касания касательной  $\ell_2(x)$ , параллельной хорде  $\ell_1(x)$ , соединяющей концы кривой (см. рис. 4). В точках альтернанса разность  $f - P_1^*$  достигает своего наибольшего значения ( $E_1(f)$ ) с чередующимся знаком. Далее обозначим  $E_1(f)$  за  $\varepsilon$ . Запишем условия, которые должны выполняться в точках альтернанса:

$$\begin{aligned} f(-1) - P_1^*(-1) &= f(-1) + k - b = \varepsilon, \\ f(c) - P_1^*(c) &= f(c) - kc - b = -\varepsilon, \\ f(0) - P_1^*(0) &= f(0) - b = \varepsilon, \\ f'(c) &= k. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$ , имеем следующую систему для нахождения  $c$ ,  $k$ ,  $b$  и  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} e^{-1} + k - b &= \varepsilon \\ e^c - kc - b &= -\varepsilon \\ 1 - b &= \varepsilon \\ e^c &= k. \end{aligned}$$

Система решается просто:

$$\begin{aligned} k &= 1 - e^{-1} \\ \varepsilon &= \frac{1 - e^c + kc}{2} \\ b &= 1 - \varepsilon \\ c &= \ln(k). \end{aligned}$$

Откуда последовательно находятся неизвестные (значения указаны с 4 знаками после запятой):

$$\begin{aligned} k &= 0.6321 \\ c &= -0.4587 \\ \varepsilon &= 0.0390 \\ b &= 0.9610. \end{aligned}$$

Задача решена, явный вид ПНРПр степени не выше первой найден:

$$P_1^*(x) = 0.6321x + 0.9610.$$

## Второй способ решения задачи

Рассмотрим другой способ решения этой задачи, в котором не потребуется решения системы.

Следуем указаниям Примера 2 применения Теоремы Чебышева об альтернансе.

- 1) Сначала получаем уравнение хорды  $\ell_1(x)$ , соединяющей концы кривой.

Очевидно,  $\ell_1(x) = kx + b_1$ , где  $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.6321$ ,  $b_1 = f(a) - ka = 1$ .

В итоге для данной задачи

$$\ell_1(x) = 0.63212x + 1.0.$$

- 2) Далее строим касательную  $\ell_2(x)$  параллельно хорде, следовательно,  $\ell_2(x) = kx + b_2$ .

Абсциссу точки касания  $c$  находим из уравнения:

$$f'(c) = k; \quad c = -0.4587, \quad b_2 = f(c) - kc = 0.9221.$$

В итоге

$$\ell_2(x) = 0.63212x + 0.92206.$$

- 3) Искомый многочлен наилучшего приближения не выше первой степени находим как полусумму хорды и касательной

$$P_1^*(x) = (\ell_2(x) + \ell_1(x))/2 = 0.6321x + 0.9610.$$

Приведенные ниже рис. 5 и таблица 1 подтверждают выполнение условий теоремы Чебышева. Искомый ПНРПр первой степени  $P_1^*(x) = 0.6321x + 0.9610$  обозначен на графике пунктиром. Результаты совпадают с приведенными выше.

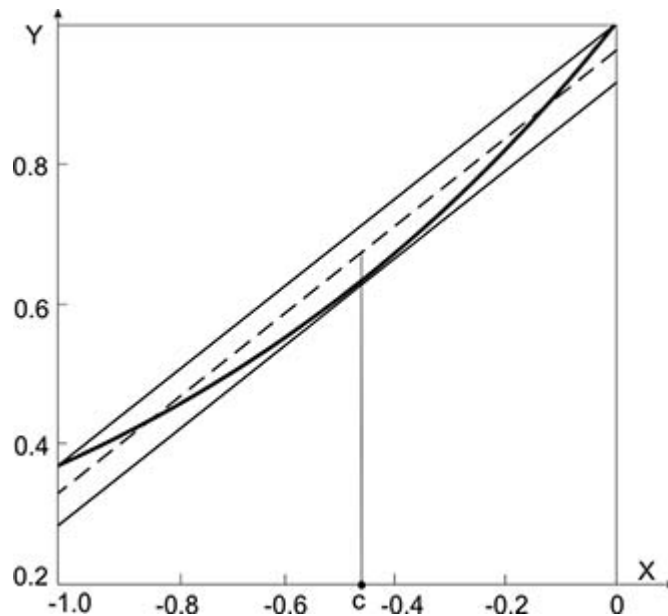


Рис. 5. Построение ПНРПр первой степени

Таблица 1

$x$	$P_1(x) - f(x)$
-1.00	-0.03897
-0.90	-0.01445
-0.80	0.00600
-0.70	0.02196
-0.60	0.03295
-0.50	0.03844
-0.40	0.03786
-0.30	0.03057
-0.20	0.01587
-0.10	-0.00702
0.00	-0.03897
c=-0.4587	0.03897

#### 4.7. Задание. Варианты заданий

Построить полином  $P_1(x) = ax + b$  наилучшего приближения в  $C_{[0,1]}$  для заданной функции  $f(x)$ . Найти наилучшее приближение. Напечатать таблицу значений  $f(x)$  и  $P_1(x)$  и их разностей.

Указать в таблице местонахождение точек альтернанса.

Варианты функций:

- 1)  $\sin(x)$ ,
- 2)  $\ln(1 + x)$ ,
- 3)  $\sqrt{1 + x}$ ,
- 4)  $\frac{1}{2 + x}$ ,
- 5)  $\arctan(x)$ ,
- 6)  $x + \sqrt{1 + x^2}$ ,
- 7)  $\cos(x)$ ,
- 8)  $\exp(-x)$ .



## 5. Многочлены Чебышева первого рода

### 5.1. Общие сведения

**Определение 1.** Многочленом Чебышёва первого рода называется функция

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1)$$

**Замечание 1.** Ясно, что  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ . Чтобы убедиться, что  $T_n(x)$  – многочлен степени  $n$  и для  $n \geq 2$ , получим рекуррентное соотношение, из которого это будет очевидно. Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

положим здесь

$$\alpha = k\theta, \quad \beta = (k-2)\theta,$$

а также сделаем замену  $\theta = \arccos x$  (тогда  $T_k(x) = \cos(k\theta)$ ). Имеем

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos k\theta}_{T_k(x)} + \underbrace{\cos((k-2)\theta)}_{T_{k-2}(x)} &= 2 \cos \left( \frac{k\theta + (k-2)\theta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{k\theta - (k-2)\theta}{2} \right) \\ &= \underbrace{2 \cos((k-1)\theta)}_{T_{k-1}(x)} \cdot \underbrace{\cos \theta}_x, \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Посчитаем несколько первых  $T_k(x)$ :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Из (2) ясно, что  $T_n(x)$  – алгебраический многочлен степени ровно  $n$ , содержащий одночлены  $x^k$  одинаковой с  $n$  четности. То есть в зависимости от четности  $n$ , является либо четной, либо нечетной функцией.

**Замечание 3.** Старший коэффициент при  $x^n$  у  $T_n(x)$  равен  $2^{n-1}$ , т. е.

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n - \dots \quad (3)$$

**Замечание 4.** Из Определения 1 очевидно, что  $T_n(1) = 1$ ,  $T_n(-1) = (-1)^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , а также неравенство  $|T_n(x)| \leq 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Замечание 5.** Из рекуррентного соотношения (2) понятно, что можно считать областью определения  $T_n(x)$  – всю комплексную плоскость, а не только отрезок  $[-1, 1]$ .

## 5.2. Корни и точки экстремума многочленов Чебышева

Изучим многочлены Чебышева более подробно. Найдем корни  $T_n(x)$ ,  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 0, \\ \cos(n \arccos x) &= 0, \\ n \arccos x &= \pm \frac{\pi}{2} + \pi k = (2k-1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Отсюда корни

$$x_k = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

### 5.2.1. Геометрическая интерпретация корней $T_n(x)$

Из формулы (4) для корней понятно, что  $x_k$  можно рассматривать как проекции на ось абсцисс точек единичной полуокружности. А именно: на полуокружности  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$  рассмотрим  $(2n+1)$  равноотстоящую точку (для этого разделим дугу длины  $\pi$  на  $2n$  частей), которые пронумеруем против часовой стрелки от 1 до  $(2n+1)$ . Проекции на ось  $Ox$  точек с четными номерами совпадают с корнями  $T_n(x)$  (см. рис. 1).

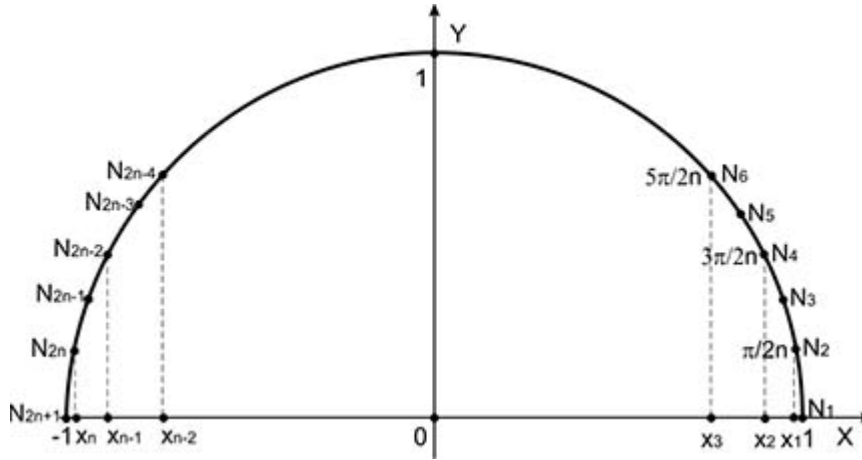


Рис. 1. Корни многочленов Чебышева

**Замечание 6.** Все корни  $x_k$  лежат внутри  $(-1, 1)$ , симметричны относительно нуля и при увеличении  $n$  сгущаются к  $-1$  и  $1$ .

Теперь найдем точки экстремума  $T_n(x)$ ,  $n \geq 1$ .

$$T'_n(x) = \frac{n \cdot \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как  $T_n(x)$  – многочлен степени  $n$ , то  $T'_n(x)$  – многочлен степени ровно  $n-1$ , следовательно, алгебраическое уравнение  $T'_n(x) = 0$  имеет не более  $n-1$  корней с учетом кратности.

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= 0 \\ \sin(n \arccos x) &= 0 \\ n \arccos x &= \pi k, \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Отсюда корни производной равны

$$x'_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

**Замечание 7.** Точки  $\pm 1$  не являются корнями уравнения  $T'_n(x) = 0$ .

Найдем значение  $T_n(x)$  в точках экстремума (5):

$$T_n(x'_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\frac{\pi k}{n}\right)\right) = \cos(\pi k) = (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Очевидно,  $|T_n(x)| \leq 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ , следовательно, все подозрительные на экстремум точки  $x'_k$  являются экстремальными. К ним нужно добавить и концы отрезка  $[-1, 1]$ . Таким образом, получили  $(n+1)$  точку на  $[-1, 1]$ , в которых  $T_n(x)$  принимает поочередно максимальные и минимальные значения. Запишем общую формулу для всех точек экстремума:

$$x'_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6)$$

### 5.2.2. Геометрическая интерпретация точек экстремума $T_n(x)$

Из формулы (6) понятно, что  $x'_k$  также можно рассматривать как проекции на ось абсцисс точек упомянутой ранее единичной полуокружности, разделенной на  $2n$  частей. Теперь проекции на ось  $Ox$  точек с нечетными номерами совпадут с точками экстремума  $T_n(x)$ .

### 5.2.3. Построение графика $T_n(x)$

График  $T_n(x)$  легко построить схематично, учитывая геометрическую интерпретацию его корней и экстремумов: разбить единичную полуокружность на  $2n$  равных частей, занумеровать точки деления против часовой стрелки (от точки  $(1, 0)$  до  $(-1, 0)$ ) номерами от 1 до  $(2n+1)$ , отметить корни (проекции точек с номерами  $2, 4, \dots, 2n$ ), наметить точки экстремума (проекции точек с номерами  $1, 3, \dots, 2n+1$ ). Отметить экстремальные значения  $+1$  или  $-1$  на левом/правом конце  $[-1, 1]$  и построить гладкую кривую, проходящую через корни и точки экстремума. На рис. 2 приведен график многочлена  $T_4(x)$ .

## 5.3. Различные формы записи многочленов Чебышева

В этом разделе рассмотрим несколько формул, при помощи которых можно строить многочлены Чебышева первого рода. Обсудим вопросы удобства использования и устойчивости вычислений по этим формулам.

### Форма 1

Была дана в Определении 1:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in [-1, 1]. \quad (7)$$

Возможно использовать только на  $[-1, 1]$ , хотя прежде было показано, что  $T_n(x)$  – многочлен степени  $n$ , который определен всюду на комплексной плоскости, т. е. никаких ограничений на  $x$  нет.

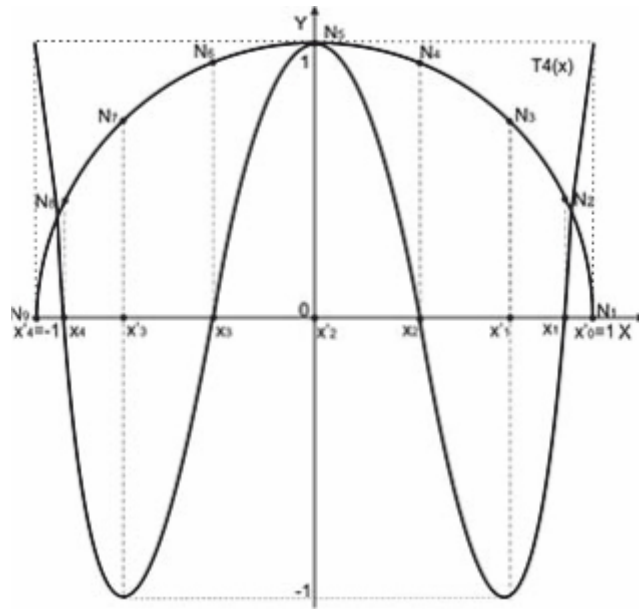


Рис. 2. График многочлена  $T_4(x)$

## Форма 2

Получается из трехчленного рекуррентного соотношения (2):

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (8)$$

Удобна в использовании. Устойчивый счет на  $[-1, 1]$ .

## Форма 3

Как уже было отмечено, многочлены Чебышева первого рода имеют ту же четность, что и  $n$ , при построении нескольких первых многочленов было видно, что знаки коэффициентов чередуются, следовательно, формально,  $T_n(x)$  можно записать в виде:

$$T_n(x) = a_n x^n - a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} - \dots, \quad \text{где } a_n = 2^{n-1}. \quad (9)$$

Чуть ниже в этом разделе мы покажем, что эта форма записи самая плохая.

## Форма 4

Так как старший коэффициент равен  $2^{n-1}$ , а корни задаются формулой (4), легко получить еще одно представление для  $T_n(x)$ :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left( x - \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right). \quad (10)$$

Эта формула хороша во всех отношениях.

## Форма 5

Получим еще одну формулу для  $T_n(x)$ .

$$T_n(x) = \cos(\underbrace{n \arccos x}_z) = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{(\cos nz + i \sin nz) + (\cos nz - i \sin nz)}{2} \quad (12)$$

$$= \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left( x + i\sqrt{1-x^2} \right)^n + \left( x - i\sqrt{1-x^2} \right)^n \right) \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left( x + \sqrt{x^2-1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2-1} \right)^n \right). \quad (15)$$

Форма 5 удобна, когда  $x \in R$ ,  $|x| \geq 1$ , так как тогда все вещественно.

Вернемся к Форме 3. Поясним, почему этим представлением пользоваться не стоит. В формулу  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n - a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} - \dots$  подставим  $x = i$ :

$$T_n(i) = 2^{n-1}i^n - a_{n-2}i^n i^{-2} + a_{n-4}i^n i^{-4} - \dots = i^n (2^{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4} + \dots). \quad (16)$$

Значит, так как все коэффициенты одного знака, то

$$|T_n(i)| = |i^n| \cdot |2^{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4} + \dots| = \sum |a_i|. \quad (17)$$

С другой стороны, так как для  $T_n(x)$  существует представление в Форме 5, то

$$\sum |a_i| = |T_n(i)| = \left| \frac{1}{2} \left( \left( i + \sqrt{i^2-1} \right)^n + \left( i - \sqrt{i^2-1} \right)^n \right) \right| \quad (18)$$

$$= \left| \frac{i^n}{2} \left( \left( 1 + \sqrt{2} \right)^n + \left( 1 - \sqrt{2} \right)^n \right) \right| \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left( 1 + \sqrt{2} \right)^n + \left( 1 - \sqrt{2} \right)^n \right). \quad (20)$$

$$(21)$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$   $|T_n(i)|$  эквивалентно  $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^n$ , что, в свою очередь, стремится к  $+\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Итак, сумма модулей коэффициентов в Форме 3 неограниченно растет с ростом  $n$ , при этом знаки коэффициентов чередуются. Счет по такой формуле будет неустойчив.

#### 5.4. Свойство наименьшего уклонения от нуля

Теперь поделим  $T_n(x)$  на старший коэффициент и рассмотрим приведенный многочлен Чебышева первого рода:

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x) = x^n + \dots \quad (22)$$

Можно доказать, что  $\tilde{T}_n(x)$  среди всех приведенных многочленов степени  $n$  имеет наименьшую норму в пространстве непрерывных функций  $C[-1,1]$ . Такой приведенный многочлен будем называть многочленом, наименее уклоняющимся от нуля.

Чему же равна эта минимальная норма?

Очевидно, так как  $\|T_n\|_{C[-1,1]} = 1$ , то

$$\|\tilde{T}_n(x)\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}\|T_n\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}.$$

Следовательно, верно

## Утверждение 2

Пусть  $P_n$  – произвольный приведенный полином степени  $n$ . Тогда

$$\|P_n\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \geq \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \|\tilde{T}_n\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}. \quad (23)$$

Так как старший коэффициент  $\tilde{T}_n(x)$  равен 1, а корни задаются формулой (4), легко получить представление для него:

$$\tilde{T}_n(x) = \prod_{k=1}^n \left( x - \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \right). \quad (24)$$

**Замечание 8.** Если требуется получить многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на конечном  $[a, b] \neq [-1, 1]$ , используют известную замену переменной, переводящую  $x \in [-1, 1]$  в  $z \in [a, b]$ :

$$z = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \quad \text{и обратно} \quad x = \frac{2z - (a+b)}{b-a}.$$

Тогда

$$\tilde{T}_n \left( \frac{2z - (a+b)}{b-a} \right) = \tilde{T}_n(x) = x^n + \dots = \left( \frac{2z - (a+b)}{b-a} \right)^n + \dots = \left( \frac{2}{b-a} \right)^n z^n + \dots \quad (25)$$

Следовательно, из (25) искомый приведенный многочлен получается делением  $\tilde{T}_n \left( \frac{2z - (a+b)}{b-a} \right)$  на коэффициент  $\left( \frac{2}{b-a} \right)^n$ :

$$\tilde{T}_n(x)^{[a;b]}(z) = \left( \frac{b-a}{2} \right)^n \tilde{T}_n \left( \frac{2z - (a+b)}{b-a} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{b-a}{2} \right)^n T_n \left( \frac{2z - (a+b)}{b-a} \right). \quad (26)$$

При этом, его норма в пространстве  $C[a, b]$  будет наименьшей среди всех приведенных многочленов степени  $n$ , т.е. он будет многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на  $[a, b]$ . Из (26) видно, что эта наименьшая норма равна

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{b-a}{2} \right)^n. \quad (27)$$

Очевидно, корнями многочлена (26) являются корни многочлена  $T_n(x)$ , задаваемые (4), линейно отображенные на  $[a, b]$ . И явный вид многочлена  $\tilde{T}_n(x)^{[a;b]}(z)$  по аналогии с представлением для  $\tilde{T}_n(x)$  теперь легко получить:

$$\tilde{T}_n(x)^{[a;b]}(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad \text{где} \quad z_k = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}. \quad (28)$$

## 5.5. Связь с задачей алгебраического интерполирования

В пункте 2.4 настоящего пособия было предложено решение задачи о минимизации погрешности алгебраического интерполирования для класса функций  $M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]$  в точке  $\bar{x}$ . Такая задача возникает, если приходится иметь дело с функцией, заданной таблицей своих значений. И выбор узлов интерполирования ограничен имеющимся

набором аргументов этой таблицы.

Предположим, что в задаче алгебраического интерполирования функция  $f \in M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]$  задана всюду на  $[a, b]$ . В этом случае при построении интерполяционного полинома  $P_n(x)$  у вычислителя имеется полная свобода в выборе узлов из  $[a, b]$ .

Рассмотрим функцию погрешности алгебраического интерполирования функции  $f$  полиномами степени не выше  $n$ :  $R_n(f, x) = f(x) - P_n(x)$ . Так как оценка 2 пункта 2.2 выполняется  $\forall x \in [a, b]$ , можно перейти к норме в пространстве  $C[a, b]$ . Следовательно, имеет место оценка

$$\|R_n(f, \cdot)\|_{C[a, b]} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|_{C[a, b]}, \quad f \in M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]. \quad (29)$$

Можно показать, что в неравенстве (29) знак равенства достигается для функции  $f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$ , которая, очевидно, принадлежит классу  $M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]$ . Значит

$$R(M_{n+1}C^{(n+1)}[-1, 1]) = \sup_{f \in M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]} \|R_n(f, \cdot)\|_{C[a, b]} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|_{C[a, b]}. \quad (30)$$

Указанная в (30) точная верхняя граница зависит только от узлов интерполирования  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — суть корней многочлена  $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ , которые в нашей задаче минимизации погрешности для класса функций на отрезке естественно выбрать так, чтобы эта граница была минимальной. Узлы, доставляющие этот минимум будем далее называть *оптимальными* для класса функций.

В правой части (30) от узлов зависит только множитель  $\|\omega_{n+1}\|_{C[a, b]}$ , который представляет собой норму в пространстве  $C[a, b]$  приведенного многочлена степени  $n+1$ . Мы хотим найти приведенный многочлен  $\omega_{n+1}(x)$ , который среди всех приведенных многочленов той же степени имеет наименьшую норму в  $C[a, b]$ . Эта задача известна как задача о поиске многочлена, наименее уклоняющегося от нуля. Решение этой задачи было рассмотрено в предыдущем пункте. Выводы оформим в виде Утверждений, приведенных ниже.

### Утверждение 3

*Корни многочлена Чебышева первого рода  $\tilde{T}_{n+1}(x)$*

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (31)$$

*если их взять в качестве узлов интерполяции для построения  $P_n$ , доставляют наименьшее значение норме погрешности алгебраического интерполирования, для класса функций  $M_{n+1}C^{(n+1)}[-1, 1]$ , другими словами, являются оптимальными для класса функций  $M_{n+1}C^{(n+1)}[-1, 1]$ .*

*Так как  $\|\tilde{T}_{n+1}\|_{C[-1, 1]} = 2^{-n}$ , то при выборе оптимальных узлов*

$$R(M_{n+1}C^{(n+1)}[-1, 1]) = \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}. \quad (32)$$

То есть для любой функции  $f \in M_{n+1}C^{(n+1)}[-1, 1]$  погрешность интерполирования по оптимальным узлам (31) удовлетворяет неравенству

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}, \quad x \in [-1, 1].$$

### Пример

Для примера рассмотрим функцию Рунге  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ .

На рис. 3 приведены графики функции  $f(x)$ , интерполяционного полинома, построенного по равноотстоящим узлам — Phom, интерполяционного полинома, построенного по узлам многочлена Чебышева — PCheb. Количество узлов — 15.

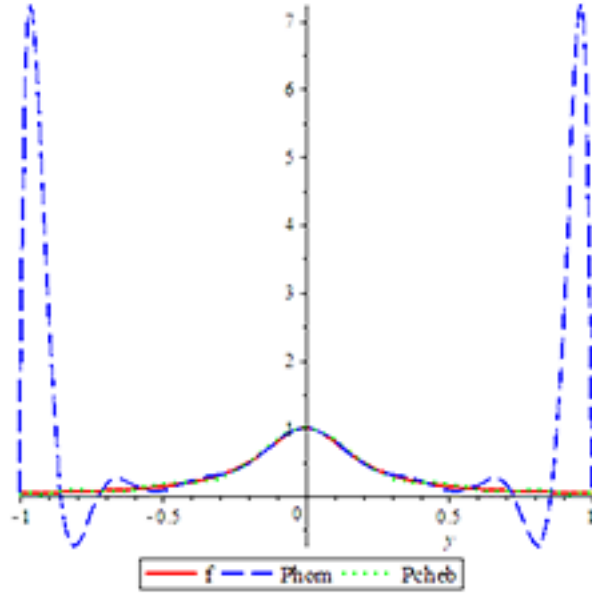


Рис. 3. Интерполирование функции Рунге

На рис. 3 видно, что интерполяционный полином, построенный по узлам многочлена Чебышева (PCheb) хорошо приближает функцию Рунге (графики практически совпадают), а интерполяционный полином, построенный по равноотстоящим узлам, хорошо приближает функцию Рунге на отрезке  $[-\beta, \beta]$ , где  $\beta \approx 0.726$  и плохо во всех остальных точках отрезка  $[-1, 1]$ . График этого полинома (Phom) отмечен на рисунке пунктиром. Поясним этот эффект.

Функция  $\frac{1}{1+25x^2}$  имеет производные всех порядков для вещественных значений  $x$ , является аналитической функцией, регулярной на плоскости комплексного переменного всюду, кроме точек  $\pm 0.2i$ . Эти точки находятся близко к отрезку  $[-1, 1]$  и принадлежат минимальной области регулярности из теоремы о сходимости ([4]).

#### Утверждение 4

Корни многочлена Чебышева первого рода  $\tilde{T}_{n+1}(x)$ , заданные формулой (31), линейно отображенные на  $[a, b] \neq [-1, 1]$

$$z_k = \frac{(b-a)}{2}x_k + \frac{(b+a)}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (33)$$

взятые в качестве узлов интерполяции для построения  $P_n$ , являются оптимальными для класса функций  $M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]$ .

Так как  $\|\tilde{T}_{n+1}^{[a,b]}\|_{C[a,b]} = 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$ , то при выборе оптимальных узлов

$$R(M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]) = \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \quad (34)$$

Т.е. для любой функции  $f \in M_{n+1}C^{(n+1)}[a, b]$  погрешность интерполирования по оптимальным узлам (33) удовлетворяет неравенству



$$|R_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}, \quad x \in [a, b]. \quad (35)$$

## 5.6. Задача построения полинома наилучшего равномерного приближения

Построить  $P_{n-1}^*(x)$  – ПНРПр степени не выше первой для функции  $f(x) = x^n$  на  $[-1, 1]$ .

*Решение:*

Если  $P_{n-1}^*(x)$  – ПНРПр степени не выше первой для функции  $f(x) = x^n$  на  $[-1, 1]$ , то по определению ПНРПр, разность  $f - P_{n-1}^*$  имеет наименьшую норму в  $C[-1, 1]$  среди всех разностей подобного вида. Для нашей задачи это условие эквивалентно тому, что приведенный многочлен степени  $n$   $Q_n(x) = f(x) - P_{n-1}^*(x) = x^n - P_{n-1}^*(x)$ , среди всех приведенных многочленов той же степени имеет наименьшую норму в  $C[-1, 1]$ . Следовательно,  $Q_n(x)$  – многочлен наименее уклоняющийся от нуля, и  $Q_n(x) = \tilde{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ . Воспользовавшись какой-нибудь формой записи многочлена Чебышева первого рода (например, трехчленным рекуррентным соотношением), возможно получить формулу для  $T_n(x)$ , а затем, для  $\tilde{T}_n(x)$ .

Ответ задачи, очевидно, находится по формуле

$$P_{n-1}^*(x) = x^n - Q_n(x) = x^n - 2^{1-n}T_n(x). \quad (36)$$

## 5.7. Задания. Варианты заданий

1. Найти полином наилучшего приближения  $P_{n-1}(x)$  для  $f(x) = x^n$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Привести таблицу значений  $x^n$ ,  $P_{n-1}(x)$ , их разностей. Указать в таблице местонахождение точек альтернанса.

Варианты:  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$ ,  $n = 7$ ,  $n = 8$ .

2. Построить график полинома Чебышева  $T_n(x)$ , вычислив предварительно значения корней и точек экстремума. Выписать  $T_n(x)$  через коэффициенты, применяя рекуррентные формулы.

Варианты:  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$ ,  $n = 7$ ,  $n = 8$ .

## 6. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей

### 6.1. Постановка задачи

Дан  $m + 1$  узел, каждый узел  $x_i$  имеет кратность  $r_i$ , т.е. в нём задано значение функции и значения производных до  $(r_i - 1)$ -ого порядка.

Исходные данные приведем в виде таблицы

$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_m$
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_m)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\dots$	$f'(x_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f^{(r_0-1)}(x_0)$	$f^{(r_1-1)}(x_1)$	$\dots$	$f^{(r_m-1)}(x_m)$

Предполагаем, что  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Пусть  $r_0 + r_1 + \dots + r_m = r$ .

Существует единственный многочлен  $H_{r-1}(x)$ , удовлетворяющий условиям

$$H_{(r-1)}^{(\alpha_j)}(x_j) = f^{(\alpha_j)}(x_j), j = 0, 1, \dots, m, \alpha_j = 0, \dots, r_j - 1.$$

Частные случаи

1.  $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 1$  — обычное интерполирование по значениям функции.
2.  $m = 0$ , тогда  $H_{r_0-1}(x)$  — отрезок ряда Тейлора

$$H_{r_0-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(r_0-1)}(x_0)}{(r_0 - 1)!}(x - x_0)^{r_0-1}. \quad (1)$$

Далее будет рассмотрено построение многочлена Эрмита в виде интерполяционного многочлена Ньютона с использованием разделенных разностей.

### 6.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Напомним, что интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2)$$

Коэффициенты здесь можно вычислять через разделенные разности.

### 6.3. Разделенные разности

Разделенные разности (р.р.) по некрatным узлам вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \text{р.р. 1-ого пор. } f(x_i, x_{i+1}) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \\ \text{р.р. 2-ого пор. } f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) &= \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \\ &\dots\dots\dots \\ \text{р.р. } n\text{-ого пор. } f(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно доказать, что для некоторого  $\xi \in (a, b)$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

где

$$a = \min(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad b = \max(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно

$$P_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \equiv \text{const.}$$

Коэффициенты  $A_i$  в интерполяционном многочлене в форме Ньютона являются разделенными разностями  $i$ -ого порядка  $A_i = f(x_0, x_1, \dots, x_i)$ .

Учитывая кратность узла  $x_0$ , равную  $r_0$ , полагаем в (2)

$$x_1 = x_0, x_2 = x_0, \dots, x_{n-1} = x_0.$$

Сравнивая формулы (1), (2), заключаем, что разделенные разности по кратным узлам вычисляются следующим образом:

$$f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k+1}) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (4)$$

## 6.4. Задание

Дана таблица попарно различных узлов, в которых заданы значения функции и значения производных до некоторого порядка.

Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного полинома Эрмита по данной таблице, используя интерполяционный многочлен в форме Ньютона и таблицу разделенных разностей.

Проверить, что построенный полином удовлетворяет заданным условиям.

## 6.5. Образец выполнения задания

Пусть дана таблица

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

- 1) Строим таблицу разделенных разностей, повторяя узлы столько раз, какова их кратность. Разделенные разности по некрatным узлам вычисляем обычным образом по формуле (3), а разделенные разности  $k$ -ого порядка по кратному узлу  $x_i$  вычисляем по формуле (4).

$x$	$f(x)$	р.р. 1 пор	р.р. 2 пор	р.р. 3 пор	р.р. 4 пор	р.р. 5 пор
-1	-17					
		33				
-1	-17		-20			
		13		10		
0	-4		-10		-4	
		3		6		1
0	-4		-4		-1	
		3		3		
0	-4		2			
		7				
2	10					

2) Выпишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона по верхней строке

$$P_5(x) = -17 + 33(x+1) - 20(x+1)^2 + 10(x+1)^2x - 4(x+1)^2x^2 + (x+1)^2x^3. \quad (5)$$

3) Проверка интерполяционности многочлена

$x$	$P_5(x)$	$P'_5(x)$	$P''_5(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

## 6.6. Варианты заданий

### Вариант 1

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	3	6
0	-2	3	-8

### Вариант 2

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	24	39	-42
1	12		

### Вариант 3

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	12	21	30
0	2	3	

### Вариант 4

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	6	
0	-2	4	12

### Вариант 5

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	-4		
0	-8	2	-16
1	-8		
2	-148	-278	

### Вариант 6

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	-7	10
1	-4	-13	
2	-61	-127	
3	-862		

### Вариант 7

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6		
1	-2	-2	
2	-14	-18	-24
3	-30		

### Вариант 8

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	7		
1	-11	5	-22
2	-5	-1	
3	43		

## 7. Численное дифференцирование

### 7.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически

Предполагается, что функция  $f(x)$  достаточно гладкая. Справедливы соотношения (формулы, равенства)

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h), \quad (1)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ — разность вперед.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x), \quad (2)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ — разность назад.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h), \quad (3)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ — симметричная разность.}$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+2h). \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-2h, x). \quad (5)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h). \quad (6)$$

### 7.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах

Пусть узлы  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  — равноотстоящие, т. е.  $x_{i+1} - x_i = h$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), и пусть для функции  $y = f(x)$  известны значения  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Формулы (1) - (6) перепишем в следующем виде:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (10)$$

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 2, \dots, n. \quad (11)$$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (12)$$

### 7.3. Теорема о погрешности численного дифференцирования

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет конечную производную порядка  $n+1$  на  $[a, b]$ , где  $a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ ,  $b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$ .

Тогда справедливо представление

$$R_n^{(m)} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \omega_{n+1}^{(m)}(\bar{x}), \quad \eta \in (a, b),$$

если выполняется одно из условий

1)  $\bar{x} \notin (\alpha, \beta)$ , где  $\alpha = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\beta = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,

2)  $m = 1$  и точка  $\bar{x}$  совпадает с одним из узлов  $\bar{x} = x_k$ .

При выполнении условий 1 и 2  $\omega_{n+1}^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$ .

### 7.4. Построение формул численного дифференцирования

Пусть дана таблица значений функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  с шагом  $h$  точка  $\bar{x}$ , которая находится в начале таблицы.

Получим некоторые формулы для приближенного вычисления производной функции дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

Так как точка  $\bar{x}$  находится в начале таблицы, используем интерполяционный многочлен вида:

$$P_n(a+th) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (13)$$

где  $t = (\bar{x} - a)/h$ .

Обозначим  $\alpha_k = t - k$ . Дифференцируем интерполяционный многочлен (13), (ограничиваясь для краткости тремя слагаемыми)

$$h P'_n(a+th) = \Delta y_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_0)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_0 \cdot \alpha_2 + \alpha_0 \cdot \alpha_1)}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \dots$$

Представим  $P'_n(a+th)$  в виде:  $P'_n(a+th) = \sum_{k=1}^n \frac{N'_k}{h} \cdot \Delta^k y_0$ , где

$$N'_1 = 1, \quad N'_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_0)}{2}, \quad N'_3 = \frac{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_0 \cdot \alpha_2 + \alpha_0 \cdot \alpha_1)}{6}, \dots$$

При выполнении условий теоремы о погрешности численного дифференцирования

$$R'_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(\bar{x}), \quad \eta \in (a, b).$$

Заметим, что в нашем случае  $\omega'_{n+1}(\bar{x}) = [t(t-1) \cdots (t-n)]' h^n = \left( \prod_{k=0}^n \alpha_k \right)' h^n$ .

Построим несколько формул численного дифференцирования.

Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования для приближенного вычисления производной  $m$ -ого порядка с порядком аппроксимации  $p$ .

Понятно, что степень интерполяционного полинома следует вычислять исходя из того, что  $p = n + 1 - m$ , т. е.  $n = p + m - 1$ .

- 1) Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования для приближенного вычисления первой производной с первым порядком аппроксимации в точке  $\bar{x} = a$ .

Получаем  $n = p + m - 1 = 1$ .

Согласно обозначениям  $t = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ .

Тогда  $h P'_1(a) = \Delta y_0$  и

$$f'(a) \approx P'_1(a) = \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (14)$$

Выражение (14) для численной производной функции  $f(x)$  в точке  $x = a$  называется разностью „вперед“.

Определим выражение для погрешности формулы (14).

Согласно теореме

$$R'_1(a) = \frac{f''(\eta)}{2!} \omega'_2(a) = \frac{f''(\eta)}{2!} (\alpha_0 + \alpha_1) h = -\frac{1}{2} h f''(\eta), \quad \eta \in (a, a + h). \quad (15)$$

Что совпадает с формулой (1).

- 2) Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования для приближенного вычисления первой производной со вторым порядком аппроксимации в точке  $\bar{x} = a$ .

Получаем  $n = p + m - 1 = 2$ .

$t = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ .

$$h P'_2(a) = \Delta y_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_0)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 = y_1 - y_0 - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2},$$

$$f'(a) \approx P'_2(a) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}. \quad (16)$$

Определим выражение для погрешности формулы (16).

$$R'_2(a) = \frac{f'''(\eta)}{3!} \omega'_3(a) = \frac{f'''(\eta)}{3!} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_0) h^2 = -\frac{1}{3} h^2 f'''(\eta),$$

$$\eta \in (a, a + 2h). \quad (17)$$

Что совпадает с формулой (4).



- 3) Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования для приближенного вычисления первой производной со вторым порядком аппроксимации в точке  $\bar{x} = a + h$ .

Получаем  $n = p + m - 1 = 2$ .

Используемые узлы  $a, a + h, a + 2h$ , так что  $t = 1, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1$ .

$$h P'_2(a) = \Delta y_0 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_0)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 = y_1 - y_0 + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2},$$

$$f'(a) \approx P'_2(a + h) = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \quad (18)$$

Определим выражение для погрешности формулы (18).

$$R'_2(a) = \frac{f'''(\eta)}{3!} \omega'_3(a + h) = \frac{f'''(\eta)}{3!} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2) h^2 = -\frac{1}{6} h^2 f'''(\eta),$$

$$\eta \in (a, a + 2h). \quad (19)$$

Что совпадает с формулой (3).

- 4) Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования для приближенного вычисления первой производной с первым порядком аппроксимации в точке  $\bar{x} = a - h/2$ .

Получаем  $n = p + m - 1 = 1$ .

Используемые узлы  $a, a + h$ .

Согласно обозначениям  $t = -\frac{1}{2}, \alpha_0 = -\frac{1}{2}, \alpha_1 = -\frac{3}{2}$ .

Тогда  $h P'_1(a) = \Delta y_0$  и

$$f'(a - h/2) \approx P'_1(a - h/2) = \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (20)$$

Определим выражение для погрешности формулы (20). Согласно теореме 1

$$R'_1(a - h/2) = \frac{f''(\eta)}{2!} \omega'_2(a - h/2) = \frac{f''(\eta)}{2!} (\alpha_0 + \alpha_1) h = -h f''(\eta),$$

$$\eta \in (a, a + h). \quad (21)$$

- 5) Формулу (18), а также численное значение  $f''(a+h)$  через значения функции в точках  $a, a+h, a+2h$  и их погрешности легко получить, используя разложение в ряд Тейлора  $f(a+h), f(a-h)$  в окрестности точки  $x = a$  с остаточными членами, содержащими  $h^3$  и  $h^4$  соответственно, и комбинируя эти выражения должным образом.

## 7.5. Задания

### 7.5.1. Задание 1

Вычислить приближенно значения

а) первой производной функции  $y = f(x)$  с порядком погрешности

$O(h)$  (обозначим  $\widetilde{f}'$ ) при  $i = 0, 1, \dots, n$ .

$O(h^2)$  (обозначим  $\widetilde{\widetilde{f}'}$ ) при  $i = 0, 1, \dots, n$ .

б) второй производной функции  $y = f(x)$  с порядком погрешности

$O(h^2)$  (обозначим  $\widetilde{f}''$ ) при  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Напечатать (см. образец)

- таблицу значений узлов;
- значений функции в узлах;
- “точных” значений производных в узлах;
- приближенных значений производных;
- их разностей (фактические погрешности).

Проверить результаты на многочленах соответствующих степеней.

Объяснить полученные результаты.

Образец выполнения задания для функции  $f(x) = x + 3$  представлен в таблице 1.

Таблица 1

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$\widetilde{f}'$ $O(h)$	погр. $O(h)$	$\widetilde{\widetilde{f}'}$ $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$	$f''(x)$	$\widetilde{f}''$ $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$
0	3	1	1	0	1	0	0		
0,1	3,1	1	1	0	1	0	0	0	0
0,2	3,2	1	1	0	1	0	0	0	0
0,3	3,3	1	1	0	1	0	0	0	0
0,4	3,4	1	1	0	1	0	0	0	0
0,5	3,5	1	1	0	1	0	0	0	0
0,6	3,6	1	1	0	1	0	0	0	0
0,7	3,7	1	1	0	1	0	0	0	0
0,8	3,8	1	1	0	1	0	0	0	0
0,9	3,9	1	1	0	1	0	0	0	0
1	4	1	1	0	1	0	0		

### 7.5.2. Задание 2

Пользуясь одной из формул (1) - (6) в заданной точке  $x$  вычислить разностную производную первого или второго порядка, последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

### Пример

При использовании формулы (4) в результате ошибок, допускаемых в каждом значении функции и не превосходящих по модулю  $\varepsilon$ , оценка для суммарной погрешности будет выглядеть следующим образом:

$$|R_\varepsilon(x, h, f)| \leq \frac{8\varepsilon}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3, \quad M_3 = \max |f'''(\xi)|, \quad \xi \in [x, x + 2h].$$

Оптимальный шаг, т.е. такой, при котором обеспечивается минимальная суммарная погрешность, находится обычным образом, как решение задачи на экстремум.

В данном случае для оптимального шага получаем следующую формулу:  $h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \varepsilon}{M_3}}$ .

Следовательно, в итоге получаем, что оценка для суммарной погрешности является величиной порядка  $\sqrt[3]{\varepsilon^2}$ .

Напечатать

- таблицу значений  $h$ ;
- “точных” значений производной в точке  $x$ ;
- приближённых значений производной;
- их разностей (фактические погрешности).

Образец выполнения задания для функции  $f(x) = e^{2x}$  представлен в *таблице 2*.  
Здесь  $x = 1$ , начальный шаг  $h = 0.1$ , “точное” значение производной  $f'(1) = 14.778112$ .  
Значения функции округляются до пятого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

Таблица 2

$h$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
$\tilde{f}'(x)$ пор. $O(h^2)$	14.5484	14.7249	14.765	14.774	14.7768	14.7744
погр.	0.22971	0.05321	0.01311	0.0037	0.0013122	0.003712

Из таблицы видно, что оптимальным экспериментально является шаг 0.00625, теоретически  $h_{opt} \approx 0.0069$ .

### 7.5.3. Задание 3

Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближённого значения указанной производной с указанным порядком аппроксимации в заданном узле  $x$ .

Получить выражение для погрешности.

Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## 7.6. Варианты заданий

### Вариант 1

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_0$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 2

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{3x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_1$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 3

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке  $x = 2$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_2$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

#### Вариант 4

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке  $x = 1$  вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_n$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

#### Вариант 5

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке  $x = 1$  вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{3x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке  $x = x_0$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 6

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{4x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке  $x = x_n$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 7

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{5x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_0$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 8

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке  $x = 2$  вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_1$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 9

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_0$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 10

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке  $x = 1$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{3x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_i, i = 0, \dots, n$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_1$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 11

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке  $x = 2$  вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_2$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 12

- 1) Выполнить задание 1.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке  $x = 1$  вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции  $e^{2x}$ , последовательно уменьшая шаг  $h$  (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить  $h$  оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т.е.  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ .
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке  $x = x_3$ . Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.



## 8. Ортогональные многочлены

Пусть  $\rho(x)$  — произвольная неотрицательная и отличная от нуля функция, интегрируемая на интервале  $(a, b)$ . Пусть, кроме того, произведение функции  $\rho(x)$  и любого полинома интегрируемо на  $(a, b)$ , т. е.  $\forall k \in 0, 1, 2, \dots \exists \mu_k = \int_a^b \rho(x)x^k dx$  и  $\mu_0 > 0$ .

Любой вес с этими свойствами порождает семейство ортогональных многочленов  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  таких, что

$$\int_a^b \rho(x) P_k(x) P_j(x) dx = 0, \quad k \neq j, \quad (1)$$

определяющихся однозначно с точностью до постоянного сомножителя, отличного от нуля. Как правило, используются следующие нормировки и обозначения:

- 1)  $\tilde{P}(x) = x^k + \dots$  — *приведенный* ортогональный многочлен;
- 2)  $\hat{P}_k(x) : \int_a^b \rho(x) \hat{P}_k^2(x) dx = 1 \quad \forall k$ ;
- 3)  $P_k(x)$  таковы, что  $P_k(1) = 1, P_k(-1) = (-1)^k$ .

### 8.1. Общие свойства ортогональных многочленов

Семейство ортогональных многочленов  $\{P_k\}$  с весом  $\rho$  на отрезке  $[a, b]$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\forall Q_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j \tilde{P}_j(x)$  однозначно (и очевидно).  $c_n$  — старший коэффициент  $Q_n(x)$ .
- 2)  $P_n \perp \forall Q_{n-1}$  ( $\int_a^b \rho(x) P_n(x) Q_{n-1}(x) dx = 0$ ).  
Очевидно из первого свойства, т. к.  $P_n \perp \tilde{P}_j, \quad j < n$ .
- 3) Все корни  $x : P_n(x) = 0, \quad (n \geq 1)$  — простые, вещественные и лежат внутри отрезка интегрирования.

*Доказательство.*

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) dx = \int_a^b \rho(x) P_n(x) \cdot 1 dx = 0, \quad (2)$$

потому что  $P_n \perp 1$ .

Многочлен меняет знак, значит существует хотя бы один вещественный корень внутри  $[a, b]$  нечетной кратности.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  — все попарно различные корни  $P_n$  нечетной кратности в  $(a, b)$ . Они есть по доказанному,  $m \geq 1$ . Положим  $Q_m(x) = \prod_{i=1}^m (x - \xi_i)$ , тогда многочлен  $P_n(x) Q_m(x)$  знакопостоянен на  $(a, b)$ , поэтому интеграл

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) Q_m(x) dx \quad (3)$$

не равен нулю. Пусть  $m < n$ , тогда  $P_n \perp Q_m$  по второму свойству. Противоречие, поэтому  $m \geq n$ , но больше не бывает, поэтому  $m = n$ . Значит, все корни простые и внутри отрезка.  $\square$

- 4) Ортогональные многочлены удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению вида

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\tilde{P}_n(x) - \beta_n\tilde{P}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \beta_n > 0, \quad (4)$$

$$\tilde{P}_0(x) = 1, \quad (5)$$

$$\tilde{P}_1(x) = x - \alpha, \quad \alpha \in (a, b). \quad (6)$$

*Доказательство.*

$$x\tilde{P}_n(x) = \tilde{Q}_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \tilde{P}_j(x), \quad c_{n+1} = 1. \quad (7)$$

Возьмем

$$(x\tilde{P}_n(x), \tilde{P}_i(x)) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j (\tilde{P}_j, \tilde{P}_i) = c_i (\tilde{P}_i, \tilde{P}_i) = (\tilde{P}_k(x), x\tilde{P}_i(x)) \quad (8)$$

и пусть  $1 + i < n$ . Тогда

$$(\tilde{P}_k(x), x\tilde{P}_i(x)) = 0. \quad (9)$$

Поэтому при  $i = 0, 1, \dots, n-2$   $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-2} = 0$ . Фактически,

$$x\tilde{P}_n(x) = \sum_{j=n-1}^{n+1} c_j \tilde{P}_j(x). \quad (10)$$

Возьмем  $i = n-1$ . Имеем

$$\begin{aligned} (x\tilde{P}_n(x), \tilde{P}_{n-1}(x)) &= (\tilde{P}_n(x), x\tilde{P}_{n-1}(x)) = (\tilde{P}_n(x), \tilde{P}_n(x) + \dots) = \\ &= (\tilde{P}_n, \tilde{P}_n) = c_{n-1} (\tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

причем  $c_{n-1} > 0$ .

$$x\tilde{P}_n(x) = c_{n-1}\tilde{P}_{n-1} + c_n\tilde{P}_n(x) + \tilde{P}_{n+1}(x) \quad (12)$$

и

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\tilde{P}_n(x) - c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x). \quad (13)$$

□

**Замечание 1.** Это очень удобный способ вычисления соседних многочленов в точке.

- 5) Два соседних ортогональных многочлена не имеют общих корней.

*Доказательство.* От противного, пусть  $\bar{x} : \tilde{P}_n(\bar{x}) = \tilde{P}_{n+1}(\bar{x}) = 0 = \tilde{P}_{n-1}(\bar{x}) = 0$  и т.д. (по свойству 4). В конце же  $\tilde{P}_0(\bar{x}) = 0$ , но это неверно. □

- 6) Пусть  $\tilde{P}_n(\bar{x}) = 0$ , тогда

$$\tilde{P}_{n-1}(\bar{x}) \cdot \tilde{P}_{n+1}(\bar{x}) < 0. \quad (14)$$

*Доказательство.* Используем рекуррентное соотношение. □

7) Корни  $P_n$  и  $P_{n+1}$  перемежаются:  $x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < \dots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)}$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

8)

$$\min_{\{\tilde{Q}_n(x)=x^n+\dots\}} \int_a^b \rho(x) \tilde{Q}_n^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) \tilde{P}_n^2(x) dx. \quad (15)$$

9) Пусть отрезок ортогональности  $[-a, a]$  симметричен и вес — четная функция. Тогда  $P_n(x)$  либо четный, либо нечетный. То же самое, что корни  $P_n(x)$  расположены симметрично относительно нуля на отрезке:  $x_k = -x_{n+1-k}$ ,  $k \in 1 : n$ .

*Доказательство.*  $P_n : \int_{-a}^a \rho(x) \tilde{P}_n(x) x^k dx = 0$ ,  $k \in 0 : n-1$ . Замена  $x := -x$ . Пределы те же,  $\int_{-a}^a \rho(x) \tilde{P}_n(-x) x^k dx = 0$ . Но  $\tilde{P}_n(-x) = (-1)^n x^n + \dots = (-1)^n \tilde{P}_n(x)$ . Но этим условием ортогональности многочлен определяется однозначно. □

## 8.2. Классические ортогональные многочлены

### 8.2.1. Уравнение Пирсона (Pearson)

Рассмотрим ОДУ

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (16)$$

где  $p_i, q_j$  — вещественные числа.

Требуется найти решения уравнения, которые на всей области определения обладают свойствами веса. Разбираем случаи

1)  $B(x) \neq 0$ . Если корней нет, то  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_0 \neq 0$ . Имеем уравнение вида

$$\frac{y'}{y} = -2\beta x. \quad (17)$$

$$\int \frac{y'}{y} = \int -2\beta x, \quad (18)$$

$$\ln y = -\beta x^2 + \ln C. \quad (19)$$

$y(x) > 0$ , а еще нужны моменты.

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\beta x^2} dx, \quad k \in 0, 1, \dots \quad (20)$$

Этот интеграл существует, если  $\beta > 0$ . Замена  $x_1 = x/\sqrt{\beta}$  приводит к весу  $\rho(x) = e^{-x^2}$ . Он породит  $\{H_n(x)\}_0^\infty$  — *многочлены Эрмита*.

2)  $B(x) = 0$  — один корень, когда  $q_2 = 0$ , т. е.

$$\frac{y'}{y} = \alpha/x + \beta, \quad (21)$$

$$\int \frac{y'}{y} = \int (\alpha/x + \beta), \quad (22)$$

$$\ln y = \alpha \ln x + \beta x + \ln C. \quad (23)$$

Функция знакопостоянна, больше нуля. Моменты:

$$\mu_k = \int_0^\infty x^{\alpha+k} e^{\beta x} dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (24)$$

сходится, если  $\beta < 0$ ,  $\alpha > -1$ .  $\beta x = -(-\beta x) = -x_1$  и  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ ,  $\alpha > -1$  на полуоси  $(0, \infty)$  — это вес, порождающий  $L_n(x; a) — Laguerre$ .

3)  $B(x) = 0$  — два различных вещественных корня  $a < b$ ,  $B(a) = B(b) = 0$ .

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x-a} - \frac{\beta}{b-x}, \quad (25)$$

$$\ln y = \alpha \ln(x-a) + \beta \ln(b-x) + \ln C. \quad (26)$$

Моменты при  $\alpha, \beta > -1$

$$\mu_k = \int_a^b x^k (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx. \quad (27)$$

и вес  $\rho(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$  — вес Якоби, порождающий  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .

4)  $B(x) = 0$  — один вещественный, но двукратный корень.

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}, \quad (28)$$

$$\ln x = \alpha \ln x - \beta/x + \ln C, \quad (29)$$

$$y = C x^\alpha e^{-\beta/x}, \quad x \in (0, \infty). \quad (30)$$

Моменты

$$\mu_k = \int_0^\infty x^{\alpha+k} e^{-\beta/x} dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (31)$$

Но это не вес на полуоси, потому что интеграл расходится. Но вес на отрезке.

5) Комплексно-сопряженные корни.

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + a^2}. \quad (32)$$

Вес не получается.

Итак, вес удовлетворяет уравнению

$$\rho'/\rho = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2}. \quad (33)$$

**Определение 1.** *Выполнены предельные условия, если  $\rho$  — решение уравнения Пирсона и*

$$\lim_{x \rightarrow a, x \rightarrow b} \rho(x) B(x) = 0. \quad (34)$$

Классические случаи:

$\rho$	$B$	$\rho B$	$[a, b]$
$e^{-x^2}$	1	$e^{-x^2}$	$(-\infty, \infty)$
$x^\alpha e^{-x}$	$x$	$x^{\alpha+1} e^{-x}$	$(0, \infty)$
$(x-a)^\alpha (b-x)^\beta$	$(x-a)(b-x)$	$(x-a)^{\alpha+1} (b-x)^{\beta+1}$	$(a, b)$

**Определение 2.** Веса, удовлетворяющие предельным условиям, назовем классическими, как и соответствующие им ортогональные многочлены.

### 8.2.2. Теорема Родрига

**Теорема** (Формула Родрига (Rodrigues)). Для классических ортогональных многочленов справедлива формула

$$P_n(x) = C_n \cdot \frac{(\rho(x)B^n(x))^{(n)}}{\rho(x)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (35)$$

где  $C_n$  — произвольный нормирующий множитель.

*Доказательство.* Введем функции

$$F_k(x) = (\rho(x)B^n(x))^{(k)}, \quad k \in 0 : n. \quad (36)$$

Все эти функции не тождественны 0 для всех классических весов. Кстати,  $A\rho = B\rho'$ ,

$$F_0(x) = \rho(x)B^n(x), \quad (37)$$

$$F_1(x) = (\rho B^n)' = \rho' B^n + n\rho B^{n-1} B' = A\rho B^{n-1} + n\rho B^{n-1} B' = \quad (38)$$

$$= \rho B^{n-1} (A + nB') = \rho B^{n-1} R_1(x). \quad (39)$$

По индукции,

$$F_k(x) = \rho B^{n-k} R_k(x), \quad (40)$$

где  $R_k$  — это многочлен, степени не выше  $k$ . Если  $0 \leq k \leq n-1$ , всегда присутствует  $(\rho B)$ , обнуляющееся в силу предельных условий, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a, x \rightarrow b} F_k(x) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (41)$$

$$\frac{C_n}{\rho(x)} (\rho B^n)^{(n)} = \frac{C_n}{\rho(x)} F_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \rho(x) R_n(x) = C_n R_n(x) = P_n(x), \quad (42)$$

так что это многочлен не выше  $n$ -й степени, тождественно не равный нулю.

Покажем, что это искомый многочлен. Рассмотрим

$$I_k = \int_a^b \rho(x) x^k P_n(x) dx, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (43)$$

Если все  $I_k$  нули, то  $P_n$  ортогонален всем многочленам степени ниже его самого, плюс он единственен.

$$\begin{aligned} I_k &= C_n \int_a^b x^k F_n(x) dx = C_n \int_a^b x^k dF_{n-1}(x) = \\ &= C_n \left( x^k F_{n-1}(x) \Big|_a^b - \int_a^b F_{n-1}(x) k x^{k-1} dx \right) = -C_n k \int_a^b x^{k-1} dF_{n-2}(x) - \dots = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Значит, это и есть искомый многочлен.  $\square$

Пусть для некоторых многочленов, ортогональных с весом  $\rho$  справедлива формула

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} (\rho(x)B^n(x))^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (45)$$

где  $B(x)$  — некоторый многочлен, тогда это один из трех классических многочленов. Классические ортогональные многочлены удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))y'(x) - n(p_1 + (n+1)q_2)y(x) = 0, \quad (46)$$

где  $p$  и  $q$  из уравнения Пирсона для соответствующих ортогональных многочленов.

### 8.2.3. Классические весовые функции и ортогональные многочлены

1)  $\rho(x) = e^{-x^2}$  — вес Эрмита:

$$H_n(x) = C_n \cdot e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (47)$$

2)  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ ,  $(0, \infty)$ ,  $\alpha > -1$  — вес Лагерра:

$$L_n(x; a) = C_n x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+n} e^{-x})^{(n)} = \quad (48)$$

$$= C_n x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-x})^{(k)} (x^{\alpha+n})^{(n-k)} \quad (49)$$

$$= C_n x^{-\alpha} e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} (\alpha+n)(\alpha+n-1) \cdots (k+\alpha+1) x^{k+\alpha}. \quad (50)$$

3)  $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$  — вес Якоби:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = C_n ((1-x)(1+x))^{-1} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n})^{(n)} = \dots \quad (51)$$

Важные частные случаи:

- $\alpha = \beta = 0$ ,  $\rho \equiv 1$ ; тогда

$$P_n(x) = C_n ((1-x^2)^n)^{(n)} = \dots \quad (52)$$

— многочлены *Лежандра*. Эти многочлены, опять же, либо четны, либо нечетны.

- $\alpha = \beta = -1/2$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ ,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (53)$$

С этим весом ортогональны многочлены *Чебышева первого рода*  $T_n(x)$ . Вес симметричен, поэтому они тоже либо четны, либо нечетны.

- $\alpha = \beta = 1/2$ ,

$$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}. \quad (54)$$

Многочлены *Чебышева второго рода*  $U_n(x)$ .

- $\alpha = \beta$ . *Ультрасферические* многочлены. Они широко применяются в астрономии.

## 9. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам

### 9.1. Общие сведения

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где  $A_k$  — коэффициенты,  $x_k$  — узлы квадратурной формулы, они попарно различны, т.е.  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ .

В дальнейшем предполагается, что  $x_k \in [a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . В общем случае узлы не обязательно из  $[a, b]$ .

Сумма в правой части формулы (1) называется квадратурной суммой.

Квадратурная формула называется интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} dx, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (2)$$

Важной характеристикой квадратурной формулы является ее алгебраическая степень точности.

**Определение 1.** *Целое неотрицательное число  $d$  называется алгебраической степенью точности квадратурной формулы, если эта формула точна для всех многочленов степени не выше  $d$  и не точна для  $x^{d+1}$ .*

**Теорема 1.** *Для того чтобы квадратурная формула с  $n$  попарно различными узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы  $d \geq n - 1$ .*

### 9.2. Квадратурные формулы прямоугольников

#### 9.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(a). \quad (3)$$

Очевидно, что ее алгебраическая степень точности  $d = 0$  и формула является интерполяционной.

#### 9.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(b). \quad (4)$$

Алгебраическая степень точности  $d = 0$  и формула является интерполяционной.

#### 9.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \quad (5)$$

Алгебраическая степень точности  $d = 1$  и формула является интерполяционной.

#### 9.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников

Разбиваем промежуток интегрирования  $[a, b]$  на  $N$  равных частей,

$h = \frac{b-a}{N}$  — длина частичного разбиения.

Составные квадратурные формулы прямоугольников напишем в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=1}^N f(\alpha + (k-1)h), \quad (6)$$

где при

- $\alpha = a$  получаем формулу левых прямоугольников,
- $\alpha = a + h/2$  — средних прямоугольников,
- $\alpha = a + h$  — правых прямоугольников.

Обратим внимание, что алгебраические степени точности формул остаются прежними и составные квадратурные формулы не являются интерполяционными.

#### 9.3. Квадратурная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \quad (7)$$

Обозначим

$$x_k = a + kh, \quad f_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

где  $h = \frac{b-a}{N}$  — длина частичного разбиения.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{N-1}) + f_N). \quad (8)$$

Алгебраическая степень точности формулы трапеций  $d = 1$ .

#### 9.4. Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (9)$$

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы  $d = 3$ .

Для построения составной формулы разбиваем промежуток интегрирования  $[a, b]$  на  $N$  равных частей.

Пусть  $h = \frac{b-a}{2N}$  — половина длины частичного разбиения. Обозначим

$$x_k = a + kh, \quad f_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N} & (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + \\ & + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N}). \end{aligned} \quad (10)$$



Количество узлов составной формулы Симпсона (10) равно  $2N + 1$  — оно нечетно. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы  $d = 3$ .

Заметим, что формула Симпсона (9) получается из формулы (10) при  $N = 1$ .

Приведем составную квадратурную формулу Симпсона для  $N + 1$  узла,  $N$  — четно.

Разбиваем промежуток интегрирования  $[a, b]$  на  $N$  равных частей.

Пусть  $h = \frac{b-a}{N}$  — длина частичного разбиения. Обозначим

$$x_k = a + kh, \quad f_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3N} (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1}) + \\ + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + f_N). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что формула Симпсона (9) получается из формулы (11) при  $N = 2$ .

## 9.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Интерполяционные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами на  $[a, b]$  (концы отрезка  $[a, b]$  являются узлами) называются формулами Ньютона-Котеса.

Заметим, что рассмотренные выше формула трапеций (7) и формула Симпсона (9) (не составные), относятся к семейству квадратурных формул Ньютона-Котеса. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса равна количеству узлов при нечетном их числе (например, формула Симпсона) и на единицу меньше — при четном (например, формула трапеций).

Следует отметить, что с ростом числа узлов сумма модулей коэффициентов растёт, т. е. процесс вычисления квадратурной суммы неустойчив.

## 9.6. Оценка погрешности квадратурных формул

Если функция  $f(x)$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную  $(d + 1)$ -ого порядка, то для оценки погрешности рассмотренных выше составных квадратурных формул, имеющих алгебраическую степень точности  $d$ , справедливо неравенство

$$|R_N(f)| \leq C(b-a) \left( \frac{b-a}{N} \right)^{d+1} M_{d+1}, \quad M_{d+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(d+1)}(\xi)|. \quad (12)$$

$$\text{Здесь } C = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{в формуле левых и правых прямоугольников;} \\ \frac{1}{24} & \text{в формуле средних прямоугольников;} \\ \frac{1}{12} & \text{в формуле трапеций,} \\ \frac{1}{2880} & \text{в формуле Симпсона (10),} \\ \frac{1}{180} & \text{в формуле Симпсона (11).} \end{cases}$$

## 9.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)

Будем предполагать, что  $f(x)$  имеет непрерывные на  $[a, b]$  производные требуемого порядка.

Пусть

$S_N$  — квадратурная сумма с  $N$  разбиениями,

$S_{2N}$  — квадратурная сумма с  $2N$  разбиениями,

$I$  — точное значение интеграла.

Можно показать, что главный член погрешности может быть вычислен следующим образом:

$$R_{main}^{(N)} = \frac{S_{2N} - S_N}{2^{d+1} - 1}. \quad (13)$$

Экстраполяция по Ричардсону выполняется по следующей формуле:

$$I_{adjusted} = S_{2N} + R_{main}^N. \quad (14)$$

Часто последний результат является более точным. Заметим, что в результате экстраполяции по Ричардсону получаются квадратурные формулы с более высокой алгебраической степенью точности, а именно:

- из формулы левых и правых прямоугольников  $\Rightarrow$  формула средних прямоугольников;
- из формулы трапеций  $\Rightarrow$  формула Симпсона;
- из формулы Симпсона  $\Rightarrow$  квадратурная формула с алгебраической степенью точности  $d=5$ .

Для достаточно гладких функций при достаточно больших  $N$  можно пользоваться следующим критерием:

если  $|R_{main}^{(N)}| < \varepsilon$ , то  $|S_{2N} - I| < \varepsilon$ .

## 9.8. Приближённое вычисление интеграла от функции, недостаточно гладкой на промежутке интегрирования

Требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx,$$

где подынтегральная функция может не быть достаточно гладкой на промежутке интегрирования, но представима в виде

$$\varphi(x) = \rho(x)f(x).$$

Здесь  $\rho(x)$  содержит особенности функции  $\varphi(x)$ , а  $f(x)$  является достаточно гладкой функцией. Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (15)$$

где

$x_k$  — узлы квадратурной формулы,

$A_k$  — коэффициенты,

$\rho(x)$  — весовая функция и должна удовлетворять следующему условию: существуют моменты весовой функции, т. е.

$$\mu_k = \left| \int_a^b \rho(x) x^k dx \right| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k) \omega'_n(x_k)} dx, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (16)$$

Можно доказать, что при любом выборе попарно различных узлов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  интерполяционная квадратурная формула (15) будет иметь алгебраическую степень точности  $d \geq n - 1$ .

*Примеры*

$$\int_0^1 x^\alpha \cos x \, dx, \quad \int_0^1 (1 - x)^\alpha e^x \, dx \quad (\alpha > -1).$$

## 9.9. Задание

Для заданной функции  $f(x)$  вычислить  $\int_0^1 f(x) dx$  приближённо по составным квадратурным формулам

- а) левых прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) Симпсона.

Результаты оформить в следующем виде (для, например,  $N = 2$ ):

Метод	$S_N$	$I - S_N$	$R_N$	$S_{2N}$	$I - S_{2N}$	$R_{2N}$	$R_{main}$	$I_{ad}$	$I - I_{ad}$
Лев. пр.									
Трап.									
Симп.									

- 1) Протестировать квадратурные формулы на многочленах различных степеней, в зависимости от алгебраической степени точности формулы.

- 2) Вычислить  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + c} dx$ , где  $c > 0$  определяется вариантом задания.

Заметим, что для оценки модуля производной  $k$ -ого порядка подынтегральной функции при  $x \in [0, 1]$  может быть использовано неравенство  $\left| \left( \frac{1}{x^2 + c} \right)^{(k)} \right| \leq \frac{k!}{(\sqrt{c})^{k+2}}$ .

## 10. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)

### 10.1. Общие сведения. Теорема о формулах типа Гаусса. Теорема о погрешности

Требуется вычислить интеграл, где подынтегральная функция может не быть достаточно гладкой на промежутке интегрирования, но представима в виде  $\rho(x)f(x)$ . Здесь  $\rho(x)$  содержит особенности подынтегральной функции, а  $f(x)$  является достаточно гладкой функцией. Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где

$x_k$  — узлы квадратурной формулы,

$A_k$  — коэффициенты,

$\rho(x)$  — весовая функция, она должна быть знакопостоянна при  $x \in [a, b]$  и удовлетворять следующему условию: существуют моменты весовой функции, т. е.

$$\mu_k = \left| \int_a^b \rho(x)x^k dx \right| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu_0 > 0.$$

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)} dx, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (2)$$

*Примеры*

$$\int_0^1 x^\alpha \cos x dx, \quad \int_0^1 (1-x)^\alpha e^x dx \quad (\alpha > -1).$$

**Теорема 1.** Для того чтобы квадратурная формула (1) была точна для любого многочлена степени не выше  $2n - 1$ , необходимо и достаточно, чтобы:

- узлы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являлись корнями ортогонального относительно веса  $\rho(x)$  и отрезка  $[a, b]$  многочлена  $\omega_n(x)$ ;
- формула (1) была интерполяционной.

**Теорема 2** (О погрешности). Пусть отрезок интегрирования  $[a, b]$  конечен. Если функция  $f(x)$  имеет непрерывную на  $[a, b]$  производную порядка  $2n$ , то существует точка  $\eta \in [a, b]$ , такая что погрешность квадратурной формулы (1) гауссова типа имеет представление

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx. \quad (3)$$

## 10.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса

Узлы находим из первого условия теоремы

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) \omega_i(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Очевидно, что достаточно потребовать ортогональности многочлена  $\omega_n(x)$  относительно веса  $\rho(x)$  и отрезка  $[a, b]$  одночленам  $x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Таким образом, коэффициенты искомого многочлена  $\omega_n(x)$  являются решением системы

$$\int_a^b \rho(x) (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n) x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Учитывая обозначения

$$\mu_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx,$$

получим следующую систему линейных уравнений относительно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$\begin{cases} a_1 \mu_{n-1} + a_2 \mu_{n-2} + \dots + a_n \mu_0 = -\mu_n, \\ a_1 \mu_n + a_2 \mu_{n-1} + \dots + a_n \mu_1 = -\mu_{n+1}, \\ \dots\dots\dots \\ a_1 \mu_{2n-2} + a_2 \mu_{2n-3} + \dots + a_n \mu_{n-1} = -\mu_{2n-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Система имеет единственное решение. Узлы — решения уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (7)$$

вещественны, различны и лежат внутри отрезка  $[a, b]$ .

Коэффициенты  $A_k$  находятся по формуле (2). Известно, что  $A_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Алгебраическая степень точности формулы  $d = 2n - 1$ , формула точно интегрирует многочлены нулевой степени, следовательно  $\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx = \mu_0$ .

Приведем алгоритм построения формулы типа Гаусса для  $n = 2$ .

1) Вычислить моменты  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ .

2) Построить систему

$$\begin{cases} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_0 = -\mu_2, \\ a_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 = -\mu_3. \end{cases}$$

3) Вычислить  $a_1, a_2$ , например, по правилу Крамера

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_2 & \mu_0 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_0 \mu_3 - \mu_2 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0},$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0}.$$

4) Решить уравнение  $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ .

Узлы должны быть вещественны, различны и должны принадлежать  $(a, b)$ .

5) Вычислить коэффициенты квадратурной формулы:

$$A_1 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (\mu_1 - x_2 \mu_0),$$
$$A_2 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} (\mu_1 - x_1 \mu_0).$$

Коэффициенты должны быть положительны и  $A_1 + A_2 = \mu_0$ .

Таким образом, построена формула

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^2 A_k f(x_k),$$

которая должна быть точна для  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ .

### 10.3. Частные случаи формулы типа Гаусса

#### 10.3.1. Формула Гаусса

$\rho(x) \equiv 1, [a, b] = [-1, 1]$ .

Узлы — корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (8)$$

а коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_k)]^2}. \quad (9)$$

#### 10.3.2. Формулы Гаусса для $n = 1, 2, 3$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0), \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \quad (12)$$

**Замечание 1.** Узлы формулы типа Гаусса в случае, если весовая функция  $\rho(x)$  — четная, располагаются симметрично относительно середины промежутка интегрирования и симметричным узлам соответствуют одинаковые коэффициенты.

Подтверждение этому и наблюдается в выше приведенных формулах.

### 10.3.3. Погрешность формулы Гаусса

Погрешность формулы Гаусса имеет оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} = C_n M_{2n}, \quad (13)$$

где  $M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ .

Отметим, что коэффициенты  $C_n$  быстро убывают

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{135}, \quad C_3 = \frac{1}{15750}, \quad C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

**Замечание 2.** При вычислении интеграла по промежутку  $[a, b]$  следует выполнить замену переменной

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt,$$

так что

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2}\right). \quad (14)$$

Здесь  $t_k$ ,  $A_k$  — соответственно узлы и коэффициенты формулы Гаусса для  $[-1, 1]$ .

**Замечание 3.** Для погрешности формулы Гаусса на промежутке  $[a, b]$  имеем оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{b-a}{2} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n} M_{2n} = C_n^{[a,b]} M_{2n}, \quad (15)$$

$$\text{где } C_n^{[a,b]} = C_n \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}, \quad M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|, \quad \xi \in [a, b].$$

**Замечание 4.** Для составной формулы Гаусса с  $m$  разбиениями погрешность

$$|R_{nm}(f)| \leq C_n^{[a,b]} (b-a) \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n} M_{2n}, \quad (16)$$

т. е. при уменьшении длины частичного промежутка вдвое погрешность уменьшается в  $2^{2n}$  раз.

### 10.3.4. Формула Мелера

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

Узлы — корни многочлена Чебышева  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right). \quad (17)$$

## 10.4. Варианты заданий

### Вариант 1

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt{x} \, dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами .
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt{x}$  по узлам  $x_1=0, x_2=1/2, x_3=1$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 2

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \, dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt{x}$  по узлам  $x_1 = 1/4, x_2 = 3/4$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.



### Вариант 3

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[4]{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt[4]{x}$  по узлам  $x_1=1/4$ ,  $x_2=3/4$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с тремя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с тремя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 4

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt[3]{x}$  по узлам  $x_1=1/6$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=5/6$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 5

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt[3]{x}$  по узлам  $x_1=1/4$ ,  $x_2=3/4$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с тремя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с тремя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 6

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt[4]{1-x}$  по узлам  $x_1=1/6$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=5/6$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 7

Требуется вычислить

$$\int_0^1 e^x \sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt{1-x}$  по узлам  $x_1=0$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=1$  и вычислить по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 8

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.

2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt{1-x}$  по узлам  $x_1=1/6$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=5/6$  и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 9

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[3]{1-x} dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.

2) По формуле Симпсона с тремя узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt[3]{1-x}$  по узлам  $x_1=0$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=1$  и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## Вариант 10

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \sin(x) \sqrt[4]{(1-x)^3} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt[4]{(1-x)^3}$  по узлам  $x_1=1/4$ ,  $x_2=3/4$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## Вариант 11

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$  по узлам  $x_1 = \frac{1}{6}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{5}{6}$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## Вариант 12

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt{1-x}$  по узлам  $x_1=0$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=1$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## Вариант 13

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[4]{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt[4]{x}$  по узлам  $x_1=1/4$ ,  $x_2=3/4$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## Вариант 14

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $1/\sqrt{x}$  по узлам  $x_1=1/6$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=5/6$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

### Вариант 15

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x)\sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом  $\sqrt{1-x}$  по узлам  $x_1=0$ ,  $x_2=1/2$ ,  $x_3=1$  и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

## 10.5. Представление результатов

Результаты представить в виде таблицы

Метод	Количество узлов	Погрешность

## 11. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

### 11.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Будем считать, что эта задача имеет единственное решение на промежутке  $[x_0, b]$ .

Запишем (1) в интегральном виде

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2)$$

Методы численного решения этого уравнения заключаются в приближенном вычислении значений гипотетического решения  $y(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_N \in [x_0, b]$ .

Для простоты мы далее будем считать точки (узлы)  $x_1, \dots, x_N$  равноотстоящими, т.е.  $x_k = x_0 + kh$ , где  $h = (b - x_0)/N$ .

Во всех рассмотренных методах решения задачи (1) значения в узлах будут строиться последовательно, т.е. будем считать, что значения  $y_1 \approx y(x_1), \dots, y_m \approx y(x_m)$  уже известны, построим  $y_{m+1} \approx y(x_{m+1})$ .

### 11.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера

Наиболее простой способ получить численное решение уравнения (2) — вычислить интеграл в правой части при помощи какой-либо квадратурной формулы.

При этом для вычисления  $y_{m+1}$  можно использовать только значение  $y_m$ .

Отметим, что такие методы решения дифференциального уравнения дают такую же погрешность, как и соответствующие квадратурные формулы.

#### 11.2.1. Метод Эйлера

Применим формулу левых прямоугольников

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt = y_m + hf(x_m, y_m) + O(h^2),$$

т.е. расчетная формула метода Эйлера

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

на одном шаге имеет погрешность  $O(h^2)$  (в предположении, что все используемые данные точны).

На промежутке  $[x_0, b]$  погрешность метода не лучше, чем  $O(h)$ , но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании.

### 11.2.2. Улучшенный метод Эйлера

Применим для вычисления интеграла в правой части (2) формулу средних прямоугольников.

Для этого введем дополнительную точку посередине между  $x_m$  и  $x_{m+1}$ .

Обозначим её  $x_{m+\frac{1}{2}} = x_m + \frac{h}{2}$ .

В ней вычислим значение решения уравнения по обычному методу Эйлера, т.е. при помощи формулы левых прямоугольников

$$y_{m+\frac{1}{2}} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m).$$

Теперь значение в точке  $x_{m+1}$  вычислим по формуле средних прямоугольников

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + hf\left(x_{m+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Обычный метод Эйлера можно уточнить и другим способом.

Предположим, что значение  $y_{m+1}$  вычислено по формуле левых прямоугольников, т.е. как в формуле (3), далее вычислим соответствующий интеграл по формуле трапеций.

Итак, пусть

$$\tilde{y}_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m).$$

Тогда

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + \frac{h}{2} (f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, \tilde{y}_{m+1})). \quad (5)$$

В заключение отметим, что оба предложенных изменения метода Эйлера дают погрешность не лучше, чем  $O(h^2)$ , но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании, так же как и в п. 11.2.1.

### 11.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Расчетные формулы метода

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_m, y_m), \\ k_2 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_m + h, y_m + k_3), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Оказывается, если  $y_m = y(x_m)$  (равенство точное), то  $y_{m+1} - y(x_{m+1}) = O(h^5)$ .

На всей интегральной кривой метод дает погрешность не лучше, чем  $O(h^4)$  по причинам, указанным в п. 11.2.1.

Если уравнение имеет вид  $y' = f(x)$ , то  $k_2 = k_3$  и видно, что расчетная формула метода Рунге-Кутты получается в результате применения формулы Симпсона, иначе — обобщенной формулы Симпсона.



**Замечание 1.** Все рассмотренные выше методы одношаговые, т. е. для получения решения в следующей точке используется решение лишь в одной предыдущей точке. В одношаговых методах шаг может быть переменным.

## 11.4. Правило Рунге (двойного пересчета) практической оценки погрешности. Экстраполяция по Ричардсону

Предположим, что метод вычисления значений решения задачи (1) фиксирован и имеет порядок точности  $s$ .

Это означает, что  $y(x_i) - y_i = O(h^s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Здесь используются принятые ранее обозначения.

Вычислим значение в точке  $x_m$  с шагом  $h$  и  $h/2$ .

Полученные значения обозначим через  $y_m^{(h)}$  и  $y_m^{(h/2)}$  соответственно.

Тогда главный член погрешности находится по формуле

$$R_m^{(h)} = \frac{y_m^{(h/2)} - y_m^{(h)}}{2^s - 1}.$$

Для достаточно малых  $h$  можно утверждать, что, если  $|R_m^{(h)}| < \varepsilon$ , то  $|y(x_m) - y_m^{(h/2)}| < \varepsilon$ .

Экстраполяция по Ричардсону заключается в уточнении значения в точке  $x_m$  по формуле

$$\hat{y}_m = y_m^{(h/2)} + R_m^{(h)}. \quad (8)$$

Заметим, что в результате уточнения по формуле (8) строится метод с более высоким порядком погрешности, чем исходный.

## 11.5. Методы Адамса

Ранее мы отмечали, что узлы  $x_1, \dots, x_N$  мы считаем равноотстоящими для удобства. И во всех рассмотренных выше методах это действительно не более чем удобство, поскольку все эти методы являлись одношаговыми, т. е. значение  $y_{m+1}$  строилось исключительно по  $y_m$ .

В частности, все рассмотренные методы допускают переменный шаг аргумента ( $x_{m+1} - x_m = h_m$ ).

Теперь мы зафиксируем шаг  $h = (b - x_0)/N$  и все узлы  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  будем считать равноотстоящими.

При построении  $y_{m+1}$  будут использоваться значения решения в  $k + 1$  предыдущих узлах  $y_{m-k}, \dots, y_m$ .

Предположим, что известны приближенные значения  $y(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_m$ ,  $y_i \approx y(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $k \leq m < N$  (они могут быть найдены одним из рассмотренных выше методов), в дальнейшем  $m \geq k$ .

### 11.5.1. Экстраполяционный метод Адамса

Начинаем, как обычно, с формулы (2)

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx.$$

Подынтегральную функцию  $f(x, y(x))$  заменим на интерполяционный многочлен, построенный по узлам  $x_{m-k}, \dots, x_m$ .

Поскольку приближённое решение  $y_{m+1}$  находится в точке, лежащей вне промежутка, на котором лежат все узлы интерполирования, метод и получил название экстраполяционного.

В зависимости от формы многочлена, получаются разные формулы метода.

Сначала предположим, что функцию  $f(x, y(x))$  заменили на многочлен в форме Ньютона для конца таблицы.

Напомним, что значения  $y_{m-k}, \dots, y_m$  мы считаем известными.

Положим  $q_j = h f(x_j, y_j)$ .

Многочлен имеет вид

$$P_k(x_m + th) = q_m + t\Delta q_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k q_{m-k}, \quad (9)$$

где конечные разности вычисляются по правилу

$$\Delta^j q_s = \Delta^{j-1} q_{s+1} - \Delta^{j-1} q_s. \quad (10)$$

Тогда

$$\int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx \approx \int_0^1 \sum_{j=0}^k \frac{t(t+1)\dots(t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j} dt. \quad (11)$$

Для упрощения формулы удобно ввести обозначение

$$a_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1)\dots(t+j-1) dt. \quad (12)$$

Тогда получаем расчетную формулу

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j \Delta^j q_{m-j}. \quad (13)$$

Формулу (13) можно применять, начиная с  $m = k$  для  $m = k, k+1, \dots, N-1$ .

Если решение  $y(x)$  — многочлен степени не выше  $k+1$ , то экстраполяционный метод Адамса дает точное значение решения (в предположении, что все вычисления осуществляются точно).

На шаге погрешность метода  $O(h^{k+2})$ , на всем промежутке — не лучше  $O(h^{k+1})$  (см. п. 11.2.1).

При  $k = 4$  получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_m + \frac{1}{2} \Delta q_{m-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{m-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{m-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{m-4}. \quad (14)$$

Для вычислений рекомендуется использовать таблицу, фрагмент которой представлен таблицей 1.

Таблица 1

$x$	$y$	$q$	$\Delta q$	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$\Delta^4 q$
$x_0$	$y_0$	$q_0$				
			$\Delta q_0$			
$x_1$	$y_1$	$q_1$		$\Delta^2 q_0$		
			$\Delta q_1$		$\Delta^3 q_0$	
$x_2$	$y_2$	$q_2$		$\Delta^2 q_1$		$\Delta^4 q_0$
			$\Delta q_2$		$\Delta^3 q_1$	
$x_3$	$y_3$	$q_3$		$\Delta^2 q_2$		$\Delta^4 q_1$
			$\Delta q_3$		$\Delta^3 q_2$	
$x_4$	$y_4$	$q_4$		$\Delta^2 q_3$		
			$\Delta q_4$			
$x_5$	$y_5$	$q_5$				
$x_6$	$y_6$					

Начало таблицы — часть таблицы, значения в ячейках которой должны быть известны для применения экстраполяционного метода Адамса.

Значения решения в точках начала таблицы следует вычислять соответствующим по порядку методом.

Преимущества метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты

- экономичность;
- наглядный контроль — по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

Недостатком метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или заменяя конечные разности в (14) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу экстраполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} \approx y_m + \sum_{j=0}^k b_{kj} q_{m-j}, \quad (15)$$

$$b_{kj} = \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \int_0^1 \frac{t(t+1) \cdots (t+k)}{t+j} dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (16)$$

Числа  $b_{kj}$  не зависят от  $m$  и от  $h$ , но зависят от порядка метода.

Расчетные формулы безразностного экстраполяционного метода Адамса различных порядков приведены ниже в таблице 2.

Заметим, что алгоритм вычисления решения по безразностной формуле реализуется проще, чем по разностной формуле, но наглядный контроль здесь отсутствует.

Напомним, что методы имеют порядок  $k+1$ .

Таблица 2

$k$	Экстраполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_m$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(3q_m - q_{m-1})$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(23q_m - 16q_{m-1} + 5q_{m-2})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(55q_m - 59q_{m-1} + 37q_{m-2} - 9q_{m-3})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(1901q_m - 2774q_{m-1} + 2616q_{m-2} - 1274q_{m-3} + 251q_{m-4})$

### 11.5.2. Интерполяционный метод Адамса

Пусть  $h = (b - x_0)/N$  и  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Предположим, что известны приближенные значения  $y(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_m$ ,  $y(x_i) \approx y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $k \leq m < N$ .

Обозначим  $q_i = hf(x_i, y_i)$ .

Заменяя приближенно функцию  $f(x, y(x))$  в выражении

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) dx$$

интерполяционным многочленом  $k$ -ой степени в форме Ньютона для конца таблицы по узлам  $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m+1-k}$  и интегрируя, получим расчетную формулу метода

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j^* \Delta^j q_{m+1-j}, \quad (17)$$

где

$$a_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt. \quad (18)$$

Как видно, в правой части формулы (17) присутствует  $q_{m+1} = hf(x_{m+1}, y_{m+1})$ , т.е. формула (17) является уравнением относительно  $y_{m+1}$ .

Интерполяционный метод Адамса является неявным методом.

Уравнение (17) рекомендуется решать методом итераций.

В качестве нулевого приближения можно взять  $y_{m+1}$ , найденное экстраполяционным методом, обозначим его  $y_{m+1}^{(0)}$ .

Вычислим

$$q_{m+1}^{(0)} = hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}), \quad \Delta q_m^{(0)} = q_{m+1}^{(0)} - q_m^{(0)}, \quad \Delta^2 q_{m-1}^{(0)}, \dots, \Delta^k q_{m+1-k}^{(0)}.$$

Используя эти значения, вычисляем,  $y_{m+1}^{(1)}$  по расчетной формуле (17).

Сравниваем  $|y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность<sup>2</sup>.

Если условие не выполняется, то делаем перерасчет до тех пор, пока не будет выполнено условие.

<sup>2</sup>Заметим, что все решения в предыдущих точках должны быть вычислены с этой точностью.

Формулу (17) можно применять для  $m = k, k + 1, \dots, N - 1$ .

Если решение  $y(x)$  — многочлен степени не выше  $k+1$ , то интерполяционный метод Адамса дает точное значение решения.

На шаге погрешность метода  $O(h^{k+2})$ , на всем промежутке — не лучше  $O(h^{k+1})$  (см. п. 11.2.1).

При  $k = 4$  получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_{m+1} - \frac{1}{2} \Delta q_m - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{m-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{m-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 q_{m-3}. \quad (19)$$

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, или заменяя конечные разности в (19) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу интерполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{kj}^* q_{m-j}, \quad (20)$$

$$b_{kj}^* = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(k-1-j)!} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\dots(t+k-1)}{t+j} dt, \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots, k-1. \quad (21)$$

Числа  $b_{kj}^*$  не зависят от  $m$  и от  $h$ .

Приведем расчетные формулы безразностного интерполяционного метода Адамса при  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  в таблице 3.

Таблица 3

$k$	Интерполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_{m+1}$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(q_{m+1} + q_m)$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(5q_{m+1} + 8q_m - q_{m-1})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(9q_{m+1} + 19q_m - 5q_{m-1} + q_{m-2})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(251q_{m+1} + 646q_m - 264q_{m-1} + 106q_{m-2} - 19q_{m-3})$

## 11.6. Образец задания и представления результатов

Указания

- 1) После знака “—” приведены обозначения для полученного решения.
- 2) Протестировать полученные результаты на уравнениях вида  $y' = P_{s-1}(x)$ , где  $P_{s-1}(x)$  — полином степени  $s-1$ ,  $s$  — порядок метода.

Пусть дана задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$ .

- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - с) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .

Результаты оформить в виде таблицы 4.

Таблица 4

$x$	$y_{math}$	$y^h$	$y^{h/2}$	$y_{rev}$	$y_{rev} - y_{math}$
0					
0.1					
...	...	...	...	...	...
0.5					

- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить, например, методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$ . Результаты оформить в виде таблицы 5.

Таблица 5

$x$	$y_{math}$	$y_{math} - y_{RK}$	$y_{math} - y_{Ad_{ex}}$	$y_{math} - y_{Ad_{in}}$
0.5				
0.6				
...	...	...	...	...
1				

## 11.7. Варианты заданий

### Вариант 1

$$y' = \cos(1.75x + y) + 1.25(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .

- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - с) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$ .

## Вариант 2

$$y' = \cos(2x + y) + 1.5(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - с) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.000001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .

- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

### Вариант 3

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - a) с шагом  $h = y^h$ ;
  - b) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - c) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}$ ,  $y^h$ ,  $y^{h/2}$ ,  $y_{rev}$ ,  $y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 1]$  —  $y_{Ad\_ex}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 1]$  —  $y_{Ad\_in}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

### Вариант 4

$$y' = \frac{\cos(y)}{1+x} - 0.5y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - a) с шагом  $h = y^h$ ;
  - b) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - c) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .



- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.000001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$ .

### Вариант 5

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула трап.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h - y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 - y^{h/2}$ ;
  - с) уточнить решение по Ричардсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$ .

## Вариант 6

$$y' = 1 + (0.5 - x) \sin(y) - (1 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y\_RK$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y\_Ad\_ex$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y\_Ad\_in$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y\_math$  и погрешностей  $y\_math - y\_RK, y\_math - y\_Ad\_ex, y\_math - y\_Ad\_in$ .

## Вариант 7

$$y' = 1 + (0.75 - x) \sin(y) - (1.25 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.

- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$ ,  $y_{math} - y_{Ad_{in}}$ .

### Вариант 8

$$y' = 1 + (1 - x) \sin(y) - (1.5 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула трап.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}$ ,  $y^h$ ,  $y^{h/2}$ ,  $y_{rev}$ ,  $y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[3h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{ex}}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[3h, 0.5]$  —  $y_{Ad_{in}}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$ ,  $y_{math} - y_{Ad_{in}}$ .

## Вариант 9

$$y' = 1 + (1.25 - x) \sin(y) - (1.75 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y\_RK$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y\_Ad\_ex$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y\_Ad\_in$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y\_math$  и погрешностей  $y\_math - y\_RK, y\_math - y\_Ad\_ex, y\_math - y\_Ad\_in$ .

## Вариант 10

$$y' = 1 + (1.5 - x) \sin(y) - (2 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.

- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.000001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad\_ex}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y_{Ad\_in}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

### Вариант 11

$$y' = (0.6 - y^2) \cos(x) + 0.2y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1]$  —  $y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad\_ex}$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1]$  —  $y_{Ad\_in}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

## Вариант 12

$$y' = (0.7 - y^2) \cos(x) + 0.3y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 0.5]$  —  $y\_RK$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y\_Ad\_ex$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[4h, 0.5]$  —  $y\_Ad\_in$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y\_math$  и погрешностей  $y\_math - y\_RK, y\_math - y\_Ad\_ex, y\_math - y\_Ad\_in$ .

## Вариант 13

$$y' = \cos(1.75x + y) + 1.25(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.1$  на  $[0, 1]$ , используя функции математического пакета —  $y\_math$
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h = y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 = y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y\_rev$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y\_math, y^h, y^{h/2}, y\_rev, y\_rev - y\_math$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.

- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 1] — y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[5h, 1] — y_{Ad\_ex}$ . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[5h, 1] — y_{Ad\_in}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

### Вариант 14

$$y' = 1 + (1 - x) \cos(y) - (2.5 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом  $h = 0.05$  на  $[0, 0.5]$ , используя функции математического пакета —  $y_{math}$ .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула трап.) получить таблицу решения на  $[0, 0.5]$ 
  - а) с шагом  $h — y^h$ ;
  - б) с шагом  $h/2 — y^{h/2}$ ;
  - в) уточнить решение по Рундсону —  $y_{rev}$ .
- 3) Напечатать таблицу значений  $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$  в точках с шагом  $h$ .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью  $\varepsilon=0.00001$  на  $[0, 0.5] — y_{RK}$ .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке  $[3h, 0.5] — y_{Ad\_ex}$ . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом  $h$  на промежутке  $[3h, 0.5] — y_{Ad\_in}$ .
- 8) Напечатать таблицу значений решения  $y_{math}$  и погрешностей  $y_{math} - y_{RK}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_ex}$ ,  $y_{math} - y_{Ad\_in}$ .

## 12. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи

### 12.1. Жесткие уравнения

#### 12.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения

Рассмотрим задачу

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Разложим правую часть  $f(t, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t = t_0$ , ограничиваясь линейными членами.

Получим

$$f(t, y) \approx f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) + f'_y(t_0, y_0)(y - y_0) = ay + g(t), \quad (2)$$

где

$$a = f'_y(t_0, y_0), \quad g(t) = f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) - f'_y(t_0, y_0)y_0. \quad (3)$$

Решение задачи  $y' = g(t)$ ,  $y(t_0) = 0$  может быть легко найдено, а решение задачи

$$y' = ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (4)$$

где  $|a|$  — велико, представляет интерес с точки зрения вопросов устойчивости.

В дальнейшем будем рассматривать модельную задачу (4).

Точное решение задачи (4) имеет вид

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}. \quad (5)$$

Если реально решаем задачу с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 + \Delta y_0, \quad (6)$$

то её решение имеет вид

$$\tilde{y}(t) = (y_0 + \Delta y_0) e^{a(t-t_0)} \quad (7)$$

и

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = |\Delta y_0| e^{a(t-t_0)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \text{ при } a > 0, \quad (8)$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ при } a < 0. \quad (9)$$

Следовательно, уравнение (4) будет устойчиво при  $a < 0$ , и далее будем рассматривать приближённые методы решения лишь таких уравнений.

Заметим, что точное решение  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Задача (4) при  $a < 0$ , где  $|a|$  — велико, называется жесткой.

Решение строится в виде таблицы значений с шагом  $h$  в точках

$$t_i = t_0 + i h, \quad i = 0, 1, \dots$$

Обозначим  $y_i \approx y(t_i)$ .



### 12.1.2. Метод Эйлера

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (4) в точке  $t_i$  разностью “вперед”, получаем расчетную формулу метода

$$y_{i+1} = y_i + h a y_i = (1 + a h) y_i = R(a h) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (10)$$

где  $R(a h) = 1 + a h$ .

*Пример*

Рассмотрим задачу

$$y' = -11y, \quad y(0) = 1.$$

Приближённое решение, полученное методом Эйлера, имеет вид

$$y_{i+1} = y_i - 11h y_i = (1 - 11h) y_i, \quad R(a h) = 1 - 11h.$$

Пусть  $h = 0.2$ , тогда  $R(a h) = -1.2$ ,  $y_{i+1} = (-1.2)^i \rightarrow \infty$ , что противоречит поведению точного решения.

Пусть  $h = 0.1$ , тогда  $R(a h) = -0.1$ ,  $y_{i+1} = (-0.1)^i \rightarrow 0$ .

Очевидно, процесс будет устойчив, если

$$|R(a h)| < 1.$$

Обозначим  $H = -a h$ .

Тогда множество таких  $H$ , что  $H \in (0, 2)$  образуют область абсолютной устойчивости метода Эйлера.

Таким образом, метод Эйлера условно устойчив при  $h < -2/a$ .

### 12.1.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула метода получается из аппроксимации производной в левой части уравнения (4) в точке  $t_{i+1}$  разностью “назад” и имеет вид

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - a h} = R(a h) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (11)$$

Здесь  $R(a h) = 1/(1 - a h) < 1$  при любых  $h$ , так как  $a < 0$ . Следовательно, обратный метод Эйлера устойчив при любых  $h$ .

### 12.1.4. Метод средней точки

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (4) в точке  $t_i$  симметричной разностью

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = a y_i, \quad (12)$$

получаем разностное уравнение второго порядка

$$y_{i+1} - 2a h y_i - y_{i-1} = 0. \quad (13)$$

Для исследования метода на устойчивость подставляем в разностное уравнение частное решение  $y_i = \mu^i$ .

В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы. Составляем характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 2ah\mu - 1 = 0. \quad (14)$$

Его корни

$$\mu_{1,2} = ah \pm \sqrt{a^2 h^2 + 1}.$$

Видно, что один из корней  $|\mu_2| > 1$  при  $a < 0$ , что показывает неустойчивость процесса при любых значениях  $ah$ .

Следовательно, множество абсолютной устойчивости в данном случае пусто.

### 12.1.5. Методы Адамса

Расчетные формулы экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса  $(k+1)$ -ого порядка соответственно имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^k b_{jk} q_{i-j}, \quad (15)$$

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{jk}^* q_{i-j}, \quad (16)$$

$i = k, k+1, \dots$

Коэффициенты  $b_{kj}$ ,  $b_{kj}^*$  — известны, а  $q_k$  в случае уравнения (4) имеет вид  $q_k = hay_k$ .

Приведем расчетные формулы методов небольших порядков погрешности.

а) экстраполяционный метод Адамса первого порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_i = (1 + ha)y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (17)$$

б) интерполяционный метод Адамса первого порядка (неявный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_{i+1}, \quad y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - ha}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (18)$$

в) экстраполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(3y_i - y_{i-1}) = \left(1 + \frac{3ha}{2}\right)y_i - \frac{ha}{2}y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (19)$$

г) интерполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(y_{i+1} + y_i), \quad (20)$$

откуда

$$y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{ha}{2}\right)}{\left(1 - \frac{ha}{2}\right)} y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (21)$$

д) интерполяционный метод Адамса третьего порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{12} (5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1}), \quad (22)$$

следовательно

$$y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{2ha}{3}\right)}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)} y_i - \frac{\frac{ha}{12}}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (23)$$

### 12.1.6. Условия устойчивости методов Адамса

Расчетные формулы методов приводят к следующим разностным уравнениям и условиям устойчивости:

а) экстраполяционный метод Адамса первого порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} - (1 + ha)y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{2}{a}.$$

б) интерполяционный метод Адамса первого порядка (неявный метод Эйлера)

$$(1 - ha)y_{i+1} - y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

в) экстраполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} - \left(1 + \frac{3ha}{2}\right)y_i + \frac{ha}{2}y_{i-1} = 0,$$

$$\text{метод устойчив при } h < -\frac{1}{a}.$$

г) интерполяционный метод Адамса второго порядка

$$\left(1 - \frac{ha}{2}\right)y_{i+1} - \left(1 + \frac{ha}{2}\right)y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

д) интерполяционный метод Адамса третьего порядка

$$\left(1 - \frac{ha}{12}\right)y_{i+1} - \left(1 + \frac{8ha}{12}\right)y_i + \frac{ha}{12}y_{i-1} = 0,$$

$$\text{метод устойчив при } h < -\frac{6}{a}.$$

Для исследования метода на устойчивость, как и ранее, подставляем в разностное уравнение частное решение  $y_i = \mu^i$ .

В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы. Заметим, что методы а), б), г) являются одношаговыми и приходится решать линейное уравнение, методы в) и д) — двухшаговые и характеристическое уравнение, соответственно, квадратичное.

## 12.2. Жесткие системы

### 12.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = AY, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad Y = Y(t), \quad (24)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$  и они различны,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  — собственные векторы, так что  $AU_i = \lambda_i U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
Общее решение системы в данном случае имеет вид

$$Y(t) = C_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n U_n e^{\lambda_n t}, \quad (26)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — определяются из начального условия.

**Определение 1.** Если  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $\max(-\operatorname{Re}(\lambda_i)) / \min(-\operatorname{Re}(\lambda_i))$  — велико, то система называется жесткой.

Для исследования исходной системы сделаем замену переменных

$$Y(t) = GZ(t), \quad G^{-1}AG = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Тогда получим тестовую систему вида  $z'_i = \lambda_i z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Таким образом, условие  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  аналогично условию  $a < 0$  в случае уравнения и обеспечивает устойчивость системы.

Далее будем предполагать, что собственные числа матрицы  $A$  вещественны.

Расчетные формулы методов и разностные уравнения записываются аналогично случаю одного уравнения, но здесь вместо параметра  $a$  следует подставлять матрицу  $A$  или  $\lambda_i(A)$  соответственно.

Для устойчивости процесса получения приближённого решения достаточно, чтобы все характеристические числа разностных уравнений, составленных для различных  $\lambda_i(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , были по модулю меньше единицы.

Таким образом, в условии устойчивости также вместо параметра  $a$  следует подставлять  $\min(\lambda_i(A))$ .

Рассмотрим некоторые методы.

### 12.2.2. Метод Эйлера

Расчетная формула этого метода получается аналогично случаю решения уравнения и имеет вид

$$Y_{i+1} = (E + Ah)Y_i. \quad (27)$$

Обозначим  $W = E + Ah$ . В данном случае для устойчивости метода требуется, чтобы все собственные числа матрицы перехода  $W$  были по модулю меньше единицы.

$\lambda(W) = 1 + h\lambda(A)$  и для выполнения условия устойчивости  $h$  следует выбирать удовлетворяющим условию  $h < 2 / \max |\lambda_i(A)|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 12.2.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула имеет вид

$$Y_{i+1} = (E - Ah)^{-1}Y_i. \quad (28)$$

Обозначим  $W = (E - Ah)^{-1}$ , следовательно

$$\lambda_i(W) = \frac{1}{(1 - h\lambda_i(A))},$$

$|\lambda_i(W)| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. при любых  $h$  метод устойчив.

### 12.2.4. Методы Адамса

Расчетные формулы и условия устойчивости методов Адамса для систем выписываются аналогично расчетным формулам и условиям для уравнений.

Для примера выпишем расчетную формулу интерполяционного метода Адамса третьего порядка

$$Y_{i+1} = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right) Y_i - \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right) Y_{i-1}. \quad (29)$$

Обозначим

$$W_1 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right), \quad (30)$$

$$W_2 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right), \quad (31)$$

тогда

$$\lambda_k(W_1) = \frac{1 + \frac{2h\lambda_k(A)}{3}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}, \quad \lambda_k(W_2) = \frac{\frac{h\lambda_k(A)}{12}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}.$$

Характеристические уравнения примут вид

$$(\mu^{(k)})^2 - \lambda_k(W_1)\mu^{(k)} + \lambda_k(W_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что для устойчивости метода требуется, чтобы оба корня всех характеристических уравнений были по модулю меньше единицы, и для интерполяционного метода Адамса третьего порядка условие устойчивости принимает вид

$$h < 6 / \max |\lambda_i(A)|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Замечание 1.** В двухшаговых методах недостающее решение при  $t = h$  можно построить обратным методом Эйлера или интерполяционным методом Адамса второго порядка (они оба устойчивы при любом  $h$ ) с достаточно малым шагом в зависимости от порядков используемых методов.

### 12.2.5. Задание

Для задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

выполнить следующее:

- 1) Построить на промежутке  $[0, 0.5]$  точное решение в точках  $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, 5, h = 0.1$ .
- 2) Построить на промежутке  $[0, 0.5]$  приближённое решение в тех же точках с шагом  $h = 0.05$ 
  - а) явным методом Эйлера;
  - б) неявным методом Эйлера;
  - в) одним из методов Адамса, указанным в варианте задания.
- 3) Исследовать на устойчивость эти методы.
- 4) Повторить п. 2 для  $h = 0.001$ .

Проанализировать результаты.

Результаты представить в двух таблицах вида

$$h =$$

Метод		Характерист. числа		$t$					
				0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Точное	$y_1^*$	$\lambda_1()$	$\lambda_2()$						
	$y_2^*$	—	—						
М. Эйлера	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
Обр. м. Э.	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
М. Адамса	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								

### 12.2.6. Варианты заданий

#### Вариант 1

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.05 y_2, \\ y_2' = 123.05 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

#### Вариант 2

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.1 y_2, \\ y_2' = 123.1 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 3

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.15 y_2, \\ y_2' = 123.15 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

### Вариант 4

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.2 y_2, \\ y_2' = 123.2 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 5

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.25 y_2, \\ y_2' = 123.25 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 6

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.3 y_2, \\ y_2' = 123.3 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 7

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.35 y_2, \\ y_2' = 123.35 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Усовершенствованный метод Эйлера.

### Вариант 8

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.4 y_2, \\ y_2' = 123.4 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 9

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.45 y_2, \\ y_2' = 123.45 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

### Вариант 10

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.5 y_2, \\ y_2' = 123.5 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 11

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.55 y_2, \\ y_2' = 123.55 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

### Вариант 12

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.6 y_2, \\ y_2' = 123.6 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Усовершенствованный метод Эйлера.

### Вариант 13

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.65 y_2, \\ y_2' = 123.65 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 14

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.70 y_2, \\ y_2' = 123.70 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

### Вариант 15

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.75 y_2, \\ y_2' = 123.75 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.



## 13. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

### 13.1. Векторные нормы

Вектору  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in C^n$  сопоставим вещественное число

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Это число называется нормой Гельдера и удовлетворяет всем свойствам нормы

$$\begin{aligned} \|x\|_p &\geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \|\alpha x\|_p &= |\alpha| \|x\|_p, \quad \alpha \in C. \\ \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

На практике используются следующие частные случаи нормы Гельдера:

$$\begin{aligned} p = 1: \quad \|x\|_1 &= \sum_{j=1}^n |x_j|. \\ p = 2: \quad \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}. \\ p = \infty: \quad \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \end{aligned}$$

Упражнение 1.  $\|(1, -5, 3)\| = ?$

### 13.2. Матричные нормы

Обозначим через  $M_n(C)$  множество квадратных матриц порядка  $n$ , элементами которых являются комплексные числа. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in C.$$

Для матриц используется эвклидова норма Гельдера с показателем  $p = 2$

$$N_2(A) = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Эта норма называется нормой Фробениуса.

**Определение 1.** Говорят, что матричная норма  $\|\cdot\|$  согласована с векторной  $\|\cdot\|$ , если выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \tag{1}$$

для любых  $x \in C^n$ ,  $A \in M_n(C)$ .

Естественнее пользоваться операторной нормой матрицы.

**Определение 2.** *Операторной нормой матрицы, порожденной векторной нормой  $\|x\|$ , называется число*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (2)$$

Операторная норма матрицы, порожденная некоторой векторной нормой, является минимальной среди всех матричных норм, согласованных с этой векторной нормой.

Операторную норму называют также нормой матрицы, подчиненной заданной векторной норме.

**Определение 3.** *Спектральным радиусом матрицы  $A$  называется число*

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

где  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы  $A$ .

Можно показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (3)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (4)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}. \quad (5)$$

Если  $A = A^*$ , то  $\|A\|_2 = \rho(A)$ .

*Упражнение 2.* Вычислить все нормы единичной матрицы.

*Упражнение 3.* Вычислить нормы Фробениуса,  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_\infty$  матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

**Определение 4.** *Матричная норма называется мультипликативной, если*

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad A, B \in M_n(C).$$

Операторная матричная норма и норма Фробениуса мультипликативны.

**Теорема 1.**  $\rho(A) \leq \|A\|$ , где  $\|A\|$  согласована с векторной нормой.

Можно показать, что

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|.$$

Это неравенство позволяет найти оценки модуля собственных чисел матрицы.

### 13.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

Вычислительные задачи, в которых малым изменениям параметров отвечают большие изменения в решениях, называются плохо обусловленными.

Рассмотрим вопрос обусловленности задачи решения линейной алгебраической системы  $Ax = b$ .

Пусть решением системы является вектор  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)'$ .

Для относительной погрешности решения системы уравнений  $\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|}$

$$(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b, \text{ в предположении, что } \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1,$$

справедлива оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right). \quad (6)$$

Здесь  $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$  — число обусловленности матрицы<sup>3</sup>. Очевидно, что

$$\text{cond}(A) \geq 1, \quad \text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A).$$

Если  $A = A^*$ , то  $\text{cond}_2(A) = |\lambda_1|/|\lambda_n|$ , где

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

( $\lambda_i$  — собственные числа матрицы  $A$ ).

#### Упражнение 4

Линейная алгебраическая система  $Ax = b$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix},$$

имеет решение  $x^* = (1, 1)'$ .

Округлим правые части системы до целых, оставив элементы матрицы без изменений.

Система

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

где

$$\Delta b = (0.01, 0.03)'$$

имеет решение

$$x + \Delta x = (200, -200)'.$$

Вычислить число обусловленности матрицы, фактическую относительную погрешность решения и получить для неё оценку.

---

<sup>3</sup>Число обусловленности матрицы зависит от выбранной нормы.

### 13.4. Задание

Для заданной матрицы  $A$

а) решить систему  $Ax = b$ , где

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ -600 \end{pmatrix},$$

б) решить систему с измененной правой частью  $A\bar{x} = \bar{b}$ , где

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 199 \\ -601 \end{pmatrix},$$

в) найти число обусловленности  $\text{cond}(A)$ ,

г) фактическую относительную погрешность  $\delta x = ||\bar{x} - x||/||x||$  и оценку для этой погрешности.

### 13.5. Варианты матриц

1	2	3	4
-400.60    199.80	-401.52    200.16	-401.43    200.19	-401.98    200.34
1198.80   -600.40	1200.96   -601.68	1201.14   -601.62	1202.04   -602.32
5	6	7	8
-401.46    200.18	-402.50    200.50	-402.90    200.70	-402.94    200.02
1201.08   -601.64	1203.00   -603.00	1204.20   -603.60	1200.12   -600.96
9	10	11	12
-401.64    200.12	-403.15    200.95	-401.00    200.00	-400.94    200.02
1200.72   -601.76	1205.70   -604.10	1200.00   -601.00	1200.12   -600.96



Для этого используется следующий прием<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
 tmp &= a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k, k+1, \dots, n+1. \\
 tmp &= a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} tmp, \\
 i &= k+1, k+2, \dots, n, \quad j = k, k+1, \dots, n+1. \\
 k &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

- 3) При вычислении решения (обратный ход) используются лишь элементы матрицы выше главной диагонали, поэтому можно не вычислять диагональные элементы и элементы ниже диагонали, что приведет к экономии времени.

В этом случае можно действовать по формулам

$$\begin{aligned}
 tmp &= a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k+1, \dots, n+1. \\
 tmp &= a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} tmp, \\
 i &= k+1, k+2, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n+1. \\
 k &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

- 4) Весь процесс решения требует порядка  $\frac{2}{3}n^3$  арифметических операций.
- 5) Для построения обратной матрицы требуется решить  $n$  систем, правыми частями которых будут являться столбцы единичной матрицы. При этом следует учесть, что сама матрица системы должна преобразовываться один раз, а столбцов правой части в этом случае не один, а  $n$ , поэтому в формулах (3)  $j = k, k+1, \dots, 2n$ , а в формулах обратного хода (4) результатом будет являться обратная матрица, столбцы которой будут определяться столбцами правой части.

## 14.2. Схема Жордана единственного деления

Схема Жордана приводит матрицу системы к единичной, так что решением системы является ее правая часть.

Алгоритм схемы Жордана отличается от схемы Гаусса тем, что обнуляются элементы не только ниже главной диагонали, но и выше.

Соответственно формулы таковы

$$\begin{aligned}
 tmp &= a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k, k+1, \dots, n+1. \\
 tmp &= a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} tmp, \\
 i &= 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, n, \quad j = k, k+1, \dots, n+1. \\
 k &= 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{7}$$

---

<sup>4</sup>Для экономии времени присваивать элементы массива переменной при использовании их в дальнейшем в цикле полезно и в предыдущем случае.

### 14.3. Схемы с выбором главного элемента

Во избежание деления на малый ведущий элемент рекомендуется осуществлять выбор наибольшего по модулю элемента и считать его ведущим.

Различают три варианта.

1) Выбор главного элемента по столбцу

Пусть

$$|a_{pk}| \geq |a_{ik}|, \quad i = k, k+1, \dots, n.$$

Тогда следует поменять местами элементы  $p$ -ой и  $k$ -ой строк матрицы, т.е.  $a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$ .

2) Выбор главного элемента по строке

Пусть  $|a_{kq}| \geq |a_{kj}|$ ,  $j = k, k+1, \dots, n$ .

Тогда следует поменять местами элементы  $q$ -ого и  $k$ -ого столбцов матрицы, т.е.  $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Кроме того, при перестановке столбцов меняется порядок неизвестных, поэтому в этом случае надо запомнить новый порядок неизвестных. Для этого надо сформировать массив с элементами, соответствующими порядку неизвестных. Сначала там должен быть обеспечен порядок неизвестных от 1 до  $n$ . По мере перестановки столбцов элементы этого массива с индексами  $q$  и  $k$  тоже надо поменять местами. При обратном ходе вместо индекса массива неизвестных надо использовать элемент этого массива, например,  $x[ordx[i]]$ .

3) Выбор главного элемента по строке и по столбцу

Пусть  $|a_{pq}| \geq |a_{ij}|$ ,  $i = k, k+1, \dots, n$ ;  $j = k, \dots, n$ . Тогда следует поменять местами элементы  $q$ -ого и  $k$ -ого столбцов матрицы,  $p$ -ой и  $k$ -ой строк матрицы, т.е.  $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$ .

Также следует запомнить порядок неизвестных.

### 14.4. $LU$ -разложение

$LU$ -разложение — представление матрицы  $A$  в виде  $LU$ , где  $L$  — нижнетреугольная матрица, а  $U$  — верхнетреугольная с единичной главной диагональю

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить матрицы  $L$  и  $U$  можно по следующему алгоритму:

Для  $i = 1, \dots, n$  выполнять поочередно пункты 1 и 2

1)

$$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}, \quad j = i, \dots, n; \quad (8)$$

2)

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i, \dots, n. \quad (9)$$

$LU$ -разложение можно использовать для решения следующих задач:

- 1) Решение системы линейных уравнений  $Ax = b$ , приведенной к виду  $LUx = b$  в два шага. На первом шаге решается система  $Ly = b$ , на втором система  $Ux = y$ .

Промежуточное решение  $y$  выгодно вычислять вместе с коэффициентами  $u_{ij}$ , взяв в качестве матрицы  $A$  расширенную матрицу со столбцом свободных членов, а  $U$  должна быть расширенной матрицей для столбца вектора  $y$ . Тогда цикл по  $j$  для вычисления элементов  $u_{ij}$  следует выполнять до  $n + 1$ .

- 2) Вычисление определителя матрицы  $A$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(L) = \prod_{i=1}^n l_{ii}.$$

- 3) Нахождение обратной матрицы  $A^{-1}$ . Для этого следует решить  $n$  систем с матрицей  $LU$ , а правыми частями будут столбцы единичной матрицы.

## 14.5. Задание

Для матрицы  $A$ , выбранной самостоятельно, найти обратную матрицу  $A^{-1}$ , число обусловленности и решение системы  $Ax = b$  по схеме Гаусса и  $LU$ -разложения, используя программу на алгоритмическом языке.

Программа должна содержать

- 1) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса единственного деления с выдачей диагностики в случае слишком малого ведущего элемента.
- 2) Подпрограмму решения системы, используя  $LU$ -разложение.
- 3) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса с выбором главного элемента (вариант выбора указывается преподавателем).
- 4) Подпрограмму нахождения обратной матрицы.

Параметрами подпрограмм должны являться порядок системы, расширенная матрица системы или матрица системы при нахождении обратной матрицы.

На печать рекомендуется выводить матрицу системы, решение, компоненты вектора невязки  $R = b - Ax$ . Отладка программы должна содержать следующие пункты:

- решение системы  $Ax = b$  по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента. О качестве результата судим по невязке;
- решение системы  $Cx = b$  по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента, где матрица  $C$  отличается от матрицы  $A$ , например, **лишь** одним элементом  $c_{11} = 10^{-8}a_{11}$ .

Проанализировать результаты.



## 14.6. Варианты расширенных матриц

### Вариант 1

3.278164	1.046583	-1.378574	-0.527466
1.046583	2.975937	0.934251	2.526877
-1.378574	0.934251	4.836173	5.165441

### Вариант 2

7.35272	0.88255	-2.270052	1
0.88255	5.58351	0.528167	0
-2.27005	0.528167	4.430329	0

### Вариант 3

8.29381	0.995516	-0.560617	0.766522
0.995516	6.298198	0.595772	3.844422
-0.560617	0.595772	4.997407	5.239231

### Вариант 4

8.29381	0.995516	-0.560617	1
0.995516	6.298198	0.595772	0
-0.560617	0.595772	4.997407	0

### Вариант 5

8.673134	1.041039	-2.677712	-1.289879
1.041039	6.586211	0.623016	4.020225
-2.677712	0.623016	5.225935	5.269671

### Вариант 6

9.016024	1.082197	-2.783575	-1.340873
1.082197	6.846595	0.647647	4.179164
-2.783575	0.647647	5.432541	5.478007

### Вариант 7

9.331343	1.120045	-2.880925	7.570463
1.120045	7.086042	0.670297	8.876384
-2.880925	0.670297	5.622534	3.411906

### Вариант 8

9.62483	1.15527	-2.97153	8.71670
1.15527	7.30891	0.69138	5.15541
-2.97153	0.69138	5.79937	0.27384

### Вариант 9

12.785723	1.534675	-3.947418	9.60565
1.534675	9.709232	0.918435	7.30777
-3.947418	0.918435	7.703946	4.21575

### Вариант 10

12.44310	1.493550	-3.841638	5.047556
1.493550	9.449050	0.893829	5.918212
-3.841638	0.893829	7.49750	2.274843

### Вариант 11

6.687233	0.80267	-2.06459	0
0.80267	5.07816	0.48037	1
-2.06459	0.48037	4.02934	0

**Вариант 12**

12.951443	1.554567	-3.998582	4.03171
1.554567	9.835076	0.930339	11.5427
-3.998582	0.930339	7.80380	6.73485

**Вариант 13**

5.673134	1.041039	-2.677712	0
1.041039	2.586211	0.623016	1
-2.677712	0.623016	4.225935	0

**Вариант 14**

9.017524	1.082197	-2.783575	-1.340873
1.082197	8.846595	0.647647	4.179164
-2.783575	0.647647	4.432541	5.478007

**Вариант 15**

9.331343	1.120045	-2.880925	7.570463
1.120045	7.086042	0.670297	8.876384
-2.880925	0.670297	5.622534	3.411906

**Вариант 16**

10.62483	1.15527	-2.97153	8.71670
1.15527	9.30891	0.69138	5.15541
-2.97153	0.69138	4.79937	0.27384

## 15. Итерационные методы решения линейных систем

### 15.1. Постановка задачи

Пусть требуется решить линейную систему  $n$ -ого порядка

$$Ax = b. \quad (1)$$

Для решения линейной системы итерационными методами ее необходимо привести эквивалентно к виду

$$x = Hx + g. \quad (2)$$

Выбираем начальное приближение  $x^{(0)}$  (например, вектор с нулевыми компонентами).

### 15.2. Метод простой итерации

#### 15.2.1. Расчетная формула

Расчетная формула метода имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (3)$$

или покомпонентно

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n h_{ij}x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

#### 15.2.2. Условие сходимости

Необходимое и достаточное условие сходимости

$$\rho(H) < 1,$$

где  $\rho(H)$  — спектральный радиус матрицы  $H$ .

Достаточное условие сходимости

$$\|H\| < 1,$$

где матричная норма мультипликативна.

#### 15.2.3. Получение решения с заданной точностью

Пусть  $x^*$  — точное решение системы,

$x^{(k)}$  — решение, полученное на  $k$ -ой итерации.

Из расчетной формулы (3) легко получить оценку

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|H\| \|x^{(k)} - x^*\|, \quad (5)$$

но скорость сходимости метода простой итерации определяется не нормой  $\|H\|$ , а спектральным радиусом  $\rho(H)$ .

Пусть требуется найти такое  $x^{(k)}$ , чтобы  $\|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$  (фактическая погрешность  $x^{(k)}$ ).

Для обеспечения заданной точности может быть использована априорная оценка или апостериорная.

#### 15.2.4. Априорная оценка

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|H\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|H\|^k}{1 - \|H\|} \|g\|. \quad (6)$$

Априорная оценка часто бывает завышена.

#### 15.2.5. Апостериорная оценка

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \quad (7)$$

Очевидно, что если

$$\|H\| \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon.$$

В противном случае близость двух соседних приближений может говорить лишь о медленной сходимости метода.

### 15.3. Метод Зейделя

Расчетная формула покомпонентно имеет следующий вид:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n h_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Представим эту формулу в векторном виде.

Матрицу  $H$  представим в виде  $H = H_L + H_R$ , где

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad H_R = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда

$$x^{(k+1)} = H_L x^{(k+1)} + H_R x^{(k)} + g. \quad (10)$$

Следовательно, расчетная формула метода Зейделя в векторном виде такова

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g. \quad (11)$$

Метод Зейделя для системы  $x = Hx + g$  совпадает с методом итерации для системы

$$x = H_{seid} x + g_{seid}, \quad \text{где } H_{seid} = (E - H_L)^{-1} H_R, \quad g_{seid} = (E - H_L)^{-1} g. \quad (12)$$

Достаточное условие сходимости

$$\|H\|_{\infty} < 1$$

или

$$\|H\|_1 < 1.$$

Области сходимости методов итерации и Зейделя различны.

Заметим, что для получения решения методом Зейделя экономичнее пользоваться расчетной формулой (8), а строить матрицу  $H_{seid}$  полезно лишь для исследования скорости сходимости метода.

## 15.4. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$

Рассмотрим частные случаи.

1) Пусть матрица  $A$  имеет диагональное преобладание, т. е.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Тогда  $H = E - D^{-1}A$ ,  $g = D^{-1}b$ , где  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы  $A$ .

В этом случае элементы матрицы  $H$  и столбца свободных членов  $g$  вычисляются по следующим формулам:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \end{cases} \quad g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (14)$$

Очевидно, что достаточное условие сходимости метода простой итерации, который в этом случае называется методом Якоби, будет выполнено.

Посмотрим, какой вид в этом случае будут иметь  $H_{seid}$  и  $g_{seid}$ .

Обозначим

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Тогда  $A = L + D + R$ , так что в прежних обозначениях  $H_L = -D^{-1}L$ ,  $H_R = -D^{-1}R$ ,

$$\begin{aligned} H_{seid} &= (E - H_L)^{-1}H_R = -(E + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}R = \\ &= -(D + L)^{-1}R, \quad g_{seid} = (D + L)^{-1}b. \end{aligned} \quad (17)$$

Известно, что если матрица  $A$  положительно определена, то метод Зейделя, называемый в этом случае методом Некрасова, для системы  $Ax = b$  сходится.

В данном случае для метода Зейделя справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H_R\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad (18)$$

где  $H_R$ ,  $H$  определяются формулами (9), (14).

Заметим, что в данном случае диагональные элементы матриц  $H$  и  $H_R$  — нулевые.

2) Пусть  $A$  самосопряженная ( $A = A^*$ ) и положительно определенная матрица,

$$0 < m \leq \lambda(A) \leq M, \quad \alpha = 2/(m + M),$$

тогда матрицу  $H$  и столбец свободных членов  $g$  можно строить следующим образом:

$$H = E - \alpha A, \quad g = \alpha b. \quad (19)$$

Параметр  $\alpha$  называется оптимальным параметром, метод итерации в этом случае называется методом с оптимальным параметром,  $\rho(H) = \frac{M - m}{M + m}$ .

Оценки  $m$ ,  $M$  для собственных чисел матрицы  $A$  можно найти, используя теорему о кругах Гершгорина.

Кругами Гершгорина матрицы  $A$  называются круги на комплексной плоскости

$$\Lambda_k = \{ \lambda \mid |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = S_k \}.$$

**Теорема 1.** Все собственные числа матрицы  $A$  содержатся в объединении ее кругов Гершгорина.

Когда собственные значения вещественны, тогда круги Гершгорина это просто интервалы и  $m$ ,  $M$  можно найти следующим образом:

$$m = \min_{1 \leq k \leq n} (a_{kk} - S_k), \quad M = \max_{1 \leq k \leq n} \{a_{kk} + S_k\}.$$

## 15.5. Метод верхней релаксации

Расчетная формула метода для системы  $Ax = b$  имеет вид

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \frac{b_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k-1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k-1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Метод будет сходиться, если матрица самосопряженная, положительно-определенная и кроме того  $0 < q < 2$ .

Для системы  $x = Hx + g$ , где  $H$  и  $g$  строятся по формулам (14), расчетная формула, очевидно, примет следующий вид:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \left( \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij}x_j^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} + g_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы

$$S_q = (D + qL)^{-1}(D - qD - qR), \quad (22)$$

где  $D$ ,  $L$  и  $R$  диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы  $A$ .

Оптимальное значение  $q$  вычисляется по формуле

$$q_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}, \quad (23)$$

здесь  $\rho(H)$  — спектральный радиус матрицы  $H$ .

Если же  $\rho(H)$  неизвестно, его определяют экспериментально при решении системы методом простой итерации.

Если наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $H$  отделено от остальных собственных значений, то оно может быть определено из отношений одноименных компонент векторов  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  и  $x^{(k)} - x^{(k-1)}$ . Действительно,  $x^{(k+1)} - x^{(k)} = H^k(x^{(1)} - x^{(0)})$ ,  $x^{(k)} - x^{(k-1)} = H^{k-1}(x^{(1)} - x^{(0)})$ .

В качестве приближения к  $\rho(H)$  можно взять отношение норм векторов  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  и  $x^{(k)} - x^{(k-1)}$  при достаточно больших значениях  $k$ .

Заметим, что спектральный радиус матрицы перехода в методе верхней релаксации, от которого зависит скорость сходимости метода, определяется следующим образом:

$$\rho(S_q) = q_{opt} - 1. \quad (24)$$

В численных результатах следует привести значение  $q_{opt}$  и убедиться, что оно является оптимальным, то есть реализовать алгоритм, например, с  $q_1 = q_{opt} - 0.1$  и  $q_2 = q_{opt} + 0.1$ . Сравнить результаты.

Метод верхней релаксации совпадает с методом Зейделя при  $q = 1$ .

## 15.6. Итерационный метод с чебышевским набором параметров

Пусть  $0 < m \leq \lambda(A) \leq M$ .

Расчетная формула метода

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tau_k(b - Ax^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, p, \quad (25)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{M + m - (M - m) \cos \frac{2k - 1}{2p} \pi}. \quad (26)$$

Этот метод может быть применен, если матрица  $A$  симметрическая и положительно-определенная.

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел  $\theta_p = \{\theta_p(1), \theta_p(2), \dots, \theta_p(p)\}$ , таких, что  $1 \leq \theta_p(i) \leq 2p - 1$ , и параметры  $\tau_k$  вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{M + m - (M - m)t_k}, \quad t_k = \cos \frac{\theta_p(k)}{2p} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (27)$$

Рассмотрим способ упорядочения  $\theta_p$  для случая, когда  $p$  есть степень двойки:  $p = 2^l$ ,  $l > 0$ . Считая, что  $\theta_1 = \{1\}$ , поэтапно вычисляются  $\theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2^p}$  следующим образом:

$$\theta_{2l}(2i - 1) = \theta_l(i), \quad \theta_{2l}(2i) = 4l - \theta_{2l}(2i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{p-1},$$



так что

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \{1, 3\}, \\ \theta_4 &= \{1, 7, 3, 5\}, \\ \theta_8 &= \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}, \\ \theta_{16} &= \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}.\end{aligned}$$

Заметим, что при численной реализации этого метода следует выполнить именно  $p$  итераций.

Если этого оказалось недостаточно для достижения заданной точности, то надо выполнить еще  $p$  итераций и т. д., т. е. процесс следует повторять число раз кратное  $p$ .

Число итераций для достижения заданной точности  $\varepsilon$  определяется по формуле

$$n(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}} \ln \frac{2}{\varepsilon}. \quad (28)$$

При  $p = 1$  метод совпадает с методом итераций с оптимальным параметром.

### 15.7. Метод Люстерника ускорения сходимости метода последовательных приближений

Метод Люстерника ускорения сходимости может быть применен, если максимальное по модулю собственное число матрицы перехода  $H$ , имеющей полную систему собственных векторов, единственно, т. е.  $1 > \rho(H) = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Зная  $\rho(H)$ , можно уточнить приближённое решение по построенным ранее приближениям  $x^{(k-1)}$  и  $x^{(k)}$  по формуле

$$x_{lust}^k = x^{(k-1)} + \frac{1}{1 - \rho(H)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}). \quad (29)$$

Метод особенно эффективен, если  $|\lambda_1|$  существенно больше, чем  $|\lambda_2|$ .

**Замечание 1.** Следует иметь в виду, что здесь  $H$  — матрица перехода в методе простой итерации, т. е. для метода Зейделя в формуле (29) следует использовать спектральный радиус матрицы  $H_{seid}$ .

### 15.8. Представление результатов

Результаты привести в виде таблицы 1.

Таблица 1

метод	$\ H\ $	$\rho(H)$	apr	apost	$\ x^k - x^*\ $	$\ x^k - x_{lust}^k\ $
Метод итераций						
Метод Зейделя						
Метод релаксаций						

**Замечание 2.** В таблице 1 предполагается сравнение погрешностей в различных методах при выполнении одного и того же количества итераций, указанного в варианте задания.

В вариантах, в которых задается получение решения с заданной точностью, следует привести в таблице количество итераций, требуемых различными методами.

**Замечание 3.** Характеристики, получение которых не предполагается в задании, могут быть получены с помощью встроенных функций или опущены.

## 15.9. Варианты заданий

### Вариант 1

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности  $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$ .
- 4) Вычислить приближение  $x^{(7)}$  методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(7)}$  к решению системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить приближение  $x^{(7)}$  методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(7)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 2

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие  $m$  и  $M$ , что  $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$ , вычислить оптимальный параметр  $\alpha = 2/(m + M)$ .
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_\alpha x + g_\alpha$ , где  $H_\alpha = E - \alpha A$ ,  $g_\alpha = \alpha b$ . Вычислить  $\|H_\alpha\|_\infty$ .
- 4) Вычислить априорную оценку погрешности  $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$ . Вычислить  $x^{(9)}$  методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(9)}$  к решению системы  $x = H_\alpha x + g_\alpha$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.

7) Вычислить приближение  $x^{(9)}$  методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(9)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 3

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Найти априорную оценку того  $k$ , при котором  $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением  $k$ . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0.001$ .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы  $Ax = b$  методом верхней релаксации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

### Вариант 4

Дана линейная система  $Ax = f$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие  $m$  и  $M$ , что  $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$ , вычислить оптимальный параметр  $\alpha = 2/(m + M)$ .
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_\alpha x + g_\alpha$ , где  $H_\alpha = E - \alpha A$ ,  $g_\alpha = \alpha f$ . Вычислить  $\|H_\alpha\|_\infty$ .
- 4) Вычислить  $x^{(8)}$  методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности  $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$ . Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(8)}$  к решению системы  $x = H_\alpha x + g_\alpha$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.

- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить  $x^{(8)}$  методом верхней релаксации.
- 8) \*Получить решение системы  $Ax = b$  методом с чебышевским набором параметров с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(8)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 5

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Найти априорную оценку того  $k$ , при котором  $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.00001$ .
- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ , сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением  $k$ . Вывести фактическую погрешность  $x^k$ , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ . Сравнить требуемое количество итераций с количеством итераций, требуемым в методе простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы  $Ax = b$  методом верхней релаксации с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 8) \*Получить решение системы  $Ax = b$  методом с чебышевским набором параметров с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ .

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

### Вариант 6

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.

- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Вычислить  $x^{(10)}$  методом простой итерации.
- 4) Вычислить апостериорную оценку погрешности  $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ . Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(10)}$  к решению системы  $x = Hx + g$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить  $x^{(10)}$  методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(10)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 7

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности  $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$ .
- 4) Вычислить  $x^{(7)}$  методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(7)}$  к решению системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить  $x^{(7)}$  методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(7)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 8

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие  $m$  и  $M$ , что  $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$ , вычислить оптимальный параметр  $\alpha = 2/(m + M)$ .
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_\alpha x + g_\alpha$ , где  $H_\alpha = E - \alpha A$ ,  $g_\alpha = \alpha b$ . Вычислить  $\|H_\alpha\|_\infty$ .
- 4) Вычислить априорную оценку погрешности  $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$ . Вычислить  $x^{(9)}$  методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(9)}$  к решению системы  $x = H_\alpha x + g_\alpha$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить  $x^{(9)}$  методом верхней релаксации. Вывести его фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(9)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 9

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Найти априорную оценку того  $k$ , при котором  $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением  $k$ . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0.001$ .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы  $Ax = b$  методом верхней релаксации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

### Вариант 10

Дана линейная система  $Ax = f$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие  $m$  и  $M$ , что  $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$ , вычислить оптимальный параметр  $\alpha = 2/(m + M)$ .
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_\alpha x + g_\alpha$ , где  $H_\alpha = E - \alpha A$ ,  $g_\alpha = \alpha f$ . Вычислить  $\|H_\alpha\|_\infty$ .
- 4) Вычислить  $x^{(8)}$  методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности  $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$ . Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение  $x^{(8)}$  к решению системы  $x = H_\alpha x + g_\alpha$  методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить  $x^{(8)}$  методом верхней релаксации.
- 8) \*Получить решение системы  $Ax = b$  методом с чебышевским набором параметров с точностью  $\varepsilon = 0.00001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности  $x^{(8)}$ , полученного различными методами.

### Вариант 11

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Найти априорную оценку того  $k$ , при котором  $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.0001$ .
- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью  $\varepsilon$ , сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением  $k$ . Вывести фактическую погрешность  $x^k$ , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.

- 5) Вычислить решение системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя с точностью  $\varepsilon$ .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы  $Ax = b$  методом верхней релаксации с точностью  $\varepsilon$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 8) \*Получить решение системы  $Ax = b$  методом с чебышевским набором параметров с точностью  $\varepsilon = 0.0001$ .

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

### Вариант 12

Дана линейная система  $Ax = b$ .

- 1) Найти решение  $x^*$  методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида  $x = H_D x + g_D$ , где  $H_D = E - D^{-1}A$ ,  $g_D = D^{-1}b$ . Здесь  $D$  - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы  $A$ . Вычислить  $\|H_D\|_\infty$ .
- 3) Найти априорную оценку того  $k$ , при котором  $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением  $k$ . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы  $x = H_D x + g_D$  методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0.001$ .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы  $Ax = b$  методом верхней релаксации с точностью  $\varepsilon = 0.001$ . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.



## 16. Проблема собственных значений

Требуется найти собственные значения  $\lambda$  матрицы  $A$  и соответствующие этим собственным значениям собственные векторы  $x$ , так что

$$Ax = \lambda x. \quad (1)$$

### 16.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы

**Теорема 1.** Если  $A$  — эрмитова матрица, то существует такая унитарная матрица  $V$ , что преобразование подобия с этой матрицей приводит  $A$  к диагональному виду, т. е.

$$V^{-1}AV = \Lambda, \quad (2)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица из собственных значений матрицы  $A$ .

Для унитарной матрицы

$$V^{-1} = V^*.$$

Частным случаем унитарной матрицы является ортогональная матрица, для которой выполнено следующее:

$$\sum_{i=1}^n V_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n V_{il}V_{ij} = 0, \quad j \neq l.$$

Обозначим через  $V^T$  транспонированную матрицу. Так как  $V^T V = E$ , то  $V^{-1} = V^T$  и преобразование подобия принимает вид

$$V^T A V = \Lambda. \quad (4)$$

Задачу нахождения такой матрицы  $V$  решают последовательно. Пусть  $A$  — вещественная симметричная матрица.

Для такой матрицы метод вращений заключается в построении последовательности матриц  $A^{(0)} = A, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}, \dots$ , так чтобы  $A^{(k)} \rightarrow \Lambda$ .

Здесь каждая последующая матрица получается из предыдущей при помощи элементарного шага, состоящего в преобразовании подобия предыдущей матрицы посредством некоторой ортогональной матрицы вращения

$$A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k) A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k). \quad (5)$$

У матрицы  $V_{i_k j_k}(\varphi_k)$  на диагонали стоят единицы всюду, кроме  $i_k$ -ой и  $j_k$ -ой строк ( $i_k < j_k$ ) и нули выше и ниже главной диагонали, кроме двух элементов, так что элементы матрицы  $V$  описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{ii} &= 1, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \\ v_{i_k i_k} &= c, \quad v_{j_k j_k} = c, \quad c = \cos(\varphi_k), \\ v_{ij} &= 0, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \quad j \neq i_k, \quad j \neq j_k, \\ v_{i_k j_k} &= -s, \quad v_{j_k i_k} = s, \quad s = \sin(\varphi_k). \end{aligned} \quad (6)$$

При  $n = 3$ ,  $i_k = 1$ ,  $j_k = 3$  матрица будет иметь вид

$$V_{13}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -\sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица  $A^{(k+1)}$  строится из  $A^{(k)}$  так, чтобы  $t^2(A^{(k+1)}) < t^2(A^{(k)})$ , где

$$t^2(A^{(k)}) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \left(a_{ij}^{(k)}\right)^2. \quad (8)$$

Можно показать, что при определенном выборе  $i_k$ ,  $j_k$ ,  $\varphi_k$

$$t^2(A^{(k+1)}) \leq t^2(A^{(k)}) \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \quad (9)$$

и следовательно

$$t^2(A^{(k)}) \rightarrow 0.$$

Для этого  $i_k$ ,  $j_k$  выбираются как индексы максимального по модулю из наддиагональных элементов матрицы, т. е.

$$|a_{i_k j_k}^{(k)}| = \max_{\substack{i,j=1..n \\ i < j}} |a_{ij}^{(k)}|,$$

а угол  $\varphi_k$  выбирается так, чтобы

$$a_{i_k j_k}^{(k+1)} = \frac{a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}}{2} \sin(2\varphi_k) + a_{i_k j_k}^{(k)} \cos(2\varphi_k) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}(2\varphi_k) = \frac{2a_{i_k j_k}^{(k)}}{a_{i_k i_k}^{(k)} - a_{j_k j_k}^{(k)}}, \quad |\varphi_k| < \frac{\pi}{4}. \quad (10)$$

Если в (10) знаменатель нулевой, то

$$|\varphi_k| = \frac{\pi}{4}.$$

Значения  $c = \cos(\varphi_k)$  и  $s = \sin(\varphi_k)$  можно вычислить и следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ s &= \operatorname{sign}(a_{i_k j_k} (a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ \text{где } d &= \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})^2 + 4a_{i_k j_k}^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что если собственные числа простые ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $i \neq j$ ) и

$$|a_{ij}^{(k)}| < \varepsilon, \quad i \neq j,$$

то

$$\lambda_i = a_{ii}^{(k)} + O(\varepsilon^2).$$

Собственные числа можно уточнить по следующей формуле:

$$\lambda_i^{(k)} = a_{ii}^{(k)} + \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad (12)$$

тогда

$$\lambda_i = \lambda_i^{(k)} + O(\varepsilon^3).$$

Рассмотрим формулы для элементов матрицы  $A^{(k+1)}$ .

Обозначим

$$B^{(k)} = A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k),$$

тогда очевидно, что у матрицы  $B^{(k)}$  изменятся только  $i_k$  и  $j_k$  столбцы, а у матрицы  $A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k) B^{(k)}$  изменятся только  $i_k$  и  $j_k$  строки, так что в итоге пересчитываем элементы только двух строк или двух столбцов<sup>5</sup> матрицы по формулам:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} \quad i \neq i_k, i \neq j_k, j \neq i_k, j \neq j_k. \\ a_{ii_k}^{(k+1)} &= a_{ii_k}^{(k+1)} = c a_{ii_k}^{(k)} + s a_{ij_k}^{(k)}, \quad i \neq i_k, i \neq j_k, \\ a_{ij_k}^{(k+1)} &= a_{ij_k}^{(k+1)} = -s a_{ii_k}^{(k)} + c a_{ij_k}^{(k)}, \quad i \neq i_k, i \neq j_k. \\ a_{i_k i_k}^{(k+1)} &= c^2 a_{i_k i_k}^{(k)} + 2cs a_{i_k j_k}^{(k)} + s^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\ a_{j_k j_k}^{(k+1)} &= s^2 a_{i_k i_k}^{(k)} - 2cs a_{i_k j_k}^{(k)} + c^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\ a_{i_k j_k}^{(k+1)} &= a_{j_k i_k}^{(k+1)} = (c^2 - s^2) a_{i_k j_k}^{(k)} + cs(a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что собственные векторы будут столбцами матрицы

$$X = V_{i_0 j_0} V_{i_1 j_1} \dots V_{i_k j_k}. \quad (14)$$

Итак, для решения задачи следует выполнить следующие действия:

- 1) Подготовить единичную матрицу для собственных векторов ( $X = E$ ).
- 2) В матрице  $A^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) выбрать среди всех наддиагональных элементов максимальный по абсолютной величине элемент  $a_{i_k j_k}^{(k)}$ ,  $i_k < j_k$  и запомнить его индексы.
- 3) Проверить условие  $|a_{i_k j_k}^{(k)}| < \varepsilon$ .  
Если условие не выполнено — перейти к п. 4, если выполнено, завершить процесс.
- 4) Найти  $c = \cos(\varphi_k)$ ,  $s = \sin(\varphi_k)$ .
- 5) Пересчитать элементы матрицы  $A^{(k+1)}$  по формулам (13), пересчитать элементы матрицы  $X$ <sup>6</sup>.
- 6) Перейти к п.2.

---

<sup>5</sup>По этой причине нерационально строить матрицу  $A^{(k+1)}$  по формуле (5), используя матричные умножения.

<sup>6</sup>Очевидно, что и для пересчета элементов матрицы  $X$  не требуется построение матрицы  $V$  и выполнение матричного умножения, так как при умножении на ортогональную матрицу меняются лишь элементы двух столбцов матрицы  $X$ .

## 16.2. Апостериорная оценка погрешности собственного числа симметричных матриц

Пусть  $\tilde{\lambda}$  — приближенное собственное число матрицы  $A$ ,  $\tilde{Y}$  — ненулевой вектор, рассматриваемый как приближение к собственному вектору  $Y$ , который отвечает собственному числу  $\lambda$ .

В [1] приведена апостериорная оценка погрешности  $\tilde{\lambda}$

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|A\tilde{Y} - \tilde{\lambda}\tilde{Y}\|_2}{\|\tilde{Y}\|_2}. \quad (15)$$

## 16.3. Частичная проблема собственных значений

### 16.3.1. Общие сведения

Пусть наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $\lambda_1$  вещественное, простое и

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (16)$$

Для нахождения  $\lambda_1$  выберем  $Y^{(0)}$  — начальный вектор.  $Y^{(0)}$  следует выбирать так, чтобы коэффициент  $\alpha_1$  в разложении

$$Y^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (17)$$

не был бы слишком мал.

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — собственные векторы, так что  $Ax_i = \lambda_i x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$Y^{(0)}$  выбирается опытным путем.

Далее строится последовательность векторов  $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$  по формуле

$$Y^{(k+1)} = AY^{(k)},$$

$$Y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})'.$$

### 16.3.2. Степенной метод

Обозначим

$$(\lambda_1^{(k,i)})_{pow} = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad (18)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k,i)})_{pow}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$
$$\lambda_1 = (\lambda_1^{(k,i)})_{pow} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k.$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков в отношении

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$$

для нескольких компонент может служить признаком для прекращения итераций.

Вектор  $Y^{(k)}$  можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

Для обеспечения заданной точности рекомендуется использовать апостериорную оценку погрешности (15).

### 16.3.3. Метод скалярных произведений

Расчетные формулы метода выпишем в предположении, что матрица симметрическая. Обозначим

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})}, \quad (20)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k)})_{scal}, \quad (21)$$

$$\lambda_1 = (\lambda_1^{(k)})_{scal} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}. \quad (22)$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков  $(\lambda_1^{(k)})_{scal}$ ,  $(\lambda_1^{(k+1)})_{scal}$  может служить признаком для прекращения итераций (если только  $\lambda_2/\lambda_1$  не слишком близко к единице и, соответственно, сходимость будет очень медленной).

Признаком для прекращения итераций может служить также апостериорная оценка погрешности (15).

Для метода скалярных произведений она часто бывает завышенной.

Вектор  $Y^{(k)}$  можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

**Замечание 1.** Заметим, что при  $|\lambda_1| > 1$  компоненты вектора  $Y^{(k)}$  быстро растут с возрастанием  $k$ , а при  $|\lambda_1| < 1$  быстро убывают.

Чтобы устранить это нежелательное при вычислениях явление, векторы  $Y^{(k)}$  нормируют.

Пусть

$$|y_p^{(0)}| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(0)}|, \quad (23)$$

Тогда нормируем вектор  $Y^{(k)}$ , например, следующим образом:

$$Y_{norm}^{(k)} = \frac{Y^{(k)}}{y_p^{(k)}}, \quad (24)$$

так что

$$(y_{norm}^{(k)})_p = 1.$$

В этом случае расчетная формула в степенном методе примет вид

$$(\lambda_1^{(k,p)})_{pow} = y_p^{(k+1)} \quad (25)$$

и для достижения требуемой точности в случае  $\lambda_2/\lambda_1 \leq 1/2$  можно следить за совпадением требуемого числа знаков у соседних приближений к собственному числу  $y_p^{(k)}$  и  $y_p^{(k+1)}$ .

В общем случае для обеспечения заданной точности рекомендуется использовать апостериорную оценку погрешности (15).

Аналогично в методе скалярных произведений расчетная формула примет вид:

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(AY_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}{(Y_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}. \quad (26)$$

**Замечание 2.** Как ранее указывалось, сходимость методов зависит от выбора начального вектора  $Y^{(0)}$  и отношения  $\lambda_2/\lambda_1$ .

#### 16.3.4. Нахождение противоположной границы спектра

Пусть  $\lambda_1(A)$  найдено. Таким образом, найдена одна граница спектра, либо максимальное собственное число, либо минимальное в зависимости от знака  $\lambda_1(A)$ .

Здесь предполагается найти другую (противоположную) границу спектра, соответственно, либо минимальное собственное число, либо максимальное в зависимости от знака  $\lambda_1(A)$ .

Обозначим искомое собственное число  $\bar{\lambda}(A)$ .

Построим матрицу  $B = A - \lambda_1(A)E$ , так что  $\lambda(B) = \lambda(A) - \lambda_1(A)$ .

Рассмотрим 2 случая.

а)  $\lambda_1(A) > 0$ , значит  $\lambda_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A)$  и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A). \quad (27)$$

В этом случае  $\lambda(B) \leq 0$  и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B) \quad (28)$$

и далее находим искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A). \quad (29)$$

б)  $\lambda_1(A) < 0$ , значит  $\lambda_1(A) = \min \lambda(A)$  и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A).$$

В этом случае  $\lambda(B) \geq 0$  и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B)$$

и далее находим искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A).$$

**Замечание 3.** Если известно, что  $\lambda_1(A) > 0$  и в задаче речь сразу идет о нахождении минимального собственного числа, то матрицу  $B$  строят следующим образом:  $B = A - \|A\|E$ .

#### Упражнение

Проверить аналитически, что собственный вектор матрицы  $B$ , соответствующий собственному числу  $\bar{\lambda}(B)$  является собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующий собственному числу  $\bar{\lambda}(A)$

#### 16.3.5. Метод Виландта уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций)

Пусть известно  $\lambda^{(0)}(A)$  — приближение к искомому собственному числу матрицы  $A$ .

Тогда “сдвинутая” матрица

$$W = A - \lambda^{(0)}(A)E$$

будет иметь одно собственное число значительно меньшее по модулю, чем остальные и итерации матрицей

$$W^{-1} = (A - \lambda^{(0)}E)^{-1}$$

дадут быстро сходящийся процесс.

Применяя степенной метод или метод скалярных произведений, находим с заданной точностью собственное число  $\lambda(W^{-1})$  и учитывая что  $\lambda(W^{-1}) = 1/(\lambda(A) - \lambda^{(0)}(A))$ , находим

$$\lambda(A) = 1/\lambda(W^{-1}) + \lambda^{(0)}(A).$$

**Замечание 4.** Процесс будет сходиться тем быстрее, чем точнее подобрано  $\lambda^{(0)}(A)$ .

**Замечание 5.** При построении последовательности векторов  $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(k)}$  вместо  $Y^{(k+1)} = W^{-1}Y^{(k)}$  экономичнее решать систему  $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$ .

**Замечание 6.** Для ускорения процесса рекомендуется применять метод Виландта с параметром, то есть с матрицей  $W^{-1}$  предполагается выполнять лишь одну итерацию и полученное приближение к собственному числу использовать сразу для уточнения приближения к собственному числу матрицы  $A$ , т. е. на каждом шаге выполнять следующие действия:

- 1) Построить матрицу  $W$  по формуле  $W = A - \lambda^{(k)}E$  (начинать с  $k = 0$ ).
- 2) Найти  $Y^{(k+1)}$  из системы  $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$ .
- 3) Вычислить, например, методом скалярных произведений  $\mu_k$  — приближение к собственному числу матрицы  $W^{-1}$

$$\mu_k = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})}. \quad (30)$$

- 4) Найти  $\lambda^{(k+1)}(A) = 1/\mu_k + \lambda^{(k)}(A)$  повторять, начиная с пункта 1.

Итерации следует выполнять до совпадения требуемого количества знаков  $\lambda^{(k)}(A)$  и  $\lambda^{(k+1)}(A)$ .

### 16.3.6. Метод Эйткена уточнения собственного числа эрмитовой матрицы

Метод Эйткена может быть применен при условии  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ .

Пусть  $\lambda^{(k-2)}, \lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}$  — вычисленные ранее приближения к собственному числу  $\lambda_1$  матрицы, тогда уточнение производится по следующей формуле:

$$\lambda_{Aitk}^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)} \lambda^{(k-2)} - (\lambda^{(k-1)})^2}{\lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k-1)} + \lambda^{(k-2)}}. \quad (31)$$

Метод Эйткена применим также и к уточнению собственных векторов, тогда речь идет о покомпонентном применении этого метода.

## 16.4. Варианты заданий

### Вариант 1

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью  $\varepsilon=0.000001$ . Собственные векторы должны иметь единичную длину.  
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.  
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность. Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с заданной точностью  $\varepsilon$  максимальное по модулю собственное число  $\lambda_1$  матрицы  $A$  и соответствующий ему собственный вектор  $x^{(1)}$ , так чтобы  $\|x^{(1)}\|_2 = 1$ .
- 3) Найти методом скалярных произведений с заданной точностью  $\varepsilon^2$  максимальное по модулю собственное число матрицы  $\lambda_1$ . Сравнить требуемое количество итераций с п. 2.
- 4) Найти степенным методом с заданной точностью  $\varepsilon$  противоположную к  $\lambda_1$  границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ( $\|\cdot\|_2=1$ ).
- 5) Найти собственное число  $\lambda_1$  с заданной точностью  $\varepsilon$  и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Применить уточнение по Эйткену.

### Вариант 2

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Собственные векторы должны иметь единичную длину.  
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.  
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.  
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью  $\varepsilon = 0.001$  максимальное по модулю собственное число  $\lambda_1$  матрицы  $A$  и соответствующий ему собственный вектор  $x^{(1)}$ , так чтобы  $\|x^{(1)}\|_2 = 1$ .
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью  $\varepsilon^2 = 0.000001$  максимальное по модулю собственное число матрицы  $\lambda_1$ . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью  $\varepsilon = 0.001$  противоположную к  $\lambda_1$  границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ( $\|\cdot\|_2 = 1$ ).



- 5) Найти собственное число  $\lambda_2$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$  и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Применить уточнение по Эйткену.

### Вариант 3

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью  $\varepsilon=0.000001$ . Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью  $\varepsilon=0.001$  максимальное по модулю собственное число  $\lambda_1$  матрицы  $A$  и соответствующий ему собственный вектор  $x^{(1)}$ , так чтобы  $\|x^{(1)}\|_2 = 1$ .

- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью  $\varepsilon^2 = 0.000001$  максимальное по модулю собственное число матрицы  $\lambda_1$ . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.

- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью  $\varepsilon = 0.001$  противоположную к  $\lambda_1$  границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ( $\|\cdot\|_2 = 1$ ).

- 5) Найти собственное число  $\lambda_1$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$  и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Применить уточнение по Эйткену.

### Вариант 4

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью  $\varepsilon = 0.000001$ . Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью  $\varepsilon = 0.001$  максимальное по модулю собственное число  $\lambda_1$  матрицы  $A$  и соответствующий ему собственный вектор  $x^{(1)}$ , так чтобы  $\|x^{(1)}\|_2 = 1$ .

- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью  $\varepsilon^2 = 0.000001$  максимальное по модулю собственное число матрицы  $\lambda_1$ . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью  $\varepsilon = 0.001$  противоположную к  $\lambda_1$  границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ( $\|\cdot\|_2 = 1$ ).
- 5) Найти собственное число  $\lambda_2$  с точностью  $\varepsilon = 0.001$  и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Применить уточнение по Эйткену.

## 16.5. Представление результатов

При применении степенного метода, метода скалярных произведений и метода Виландта на печать должны быть выведены следующие данные:

- 1) Номер варианта.
- 2) Исходная матрица.
- 3) Собственные числа, собственные векторы, найденные методом вращений.
- 4)  $\lambda_1^*$  — максимальное по модулю собственное число.
- 5)  $\lambda_2^*/\lambda_1^*$ .
- 6) Название метода.
- 7) Матрица, собственные числа и собственные векторы которой находятся данным методом.
- 8) Собственные числа, собственные векторы, найденные встроенной функцией.
- 9)  $\lambda_1^*$  матрицы, собственные числа и собственные векторы которой находятся данным методом.
- 10)  $\lambda_2^*/\lambda_1^*$  матрицы, собственные числа и собственные векторы которой находятся данным методом.
- 11)  $\varepsilon$ .
- 12)  $Y^0$ .
- 13) Результаты вычислений оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

$k$	$\lambda_1^k$	$\lambda_1^k - \lambda_1^{k-1}$	$\lambda_1^k - \lambda_1^*$	$\ Ax_1^k - \lambda_1^k x_1^k\ $	errap	$\lambda_A^k$	$\lambda_A^k - \lambda_1^*$
3							
4							
...	...	...	...	...	...	...	...

Здесь errap — апостериорная оценка погрешности, см. (15),

$\lambda_A^k$  — уточнение по Эйткену.

## 16.6. Варианты матриц

матрица 1	-0.81417	-0.01937	0.41372	матрица 2	-0.82005	-0.13542	0.26948
	-0.01937	0.54414	0.00590		-0.13542	0.51486	0.02706
	0.41372	0.00590	-0.81445		0.26948	0.02706	-0.83365
матрица 3	-1.48213	-0.03916	1.08254	матрица 4	-1.53698	-0.19907	0.95855
	-0.03916	1.13958	0.01617		-0.19907	1.17742	0.06992
	1.08254	0.01617	-1.48271		0.95855	0.06992	-1.55151
матрица 5	-1.14896	-0.53716	0.78959	матрица 6	-0.95121	-0.09779	0.35843
	-0.53716	0.88917	0.19536		-0.09779	0.61545	0.02229
	0.78959	0.19536	-1.28186		0.35843	0.02229	-0.95729
матрица 7	-1.00449	-0.38726	0.59047	матрица 8	-1.47887	-0.09357	0.91259
	-0.38726	0.73999	0.12519		-0.09357	1.10664	0.03298
	0.59047	0.12519	-1.08660		0.91259	0.03298	-1.48225
матрица 9	-0.90701	-0.27716	0.44570	матрица 10	-0.88192	-0.04644	0.33422
	-0.27716	0.63372	0.07774		-0.04644	0.56023	0.01075
	0.44570	0.07774	-0.95535		0.33422	0.01075	-0.88342
матрица 11	-0.93016	-0.25770	0.45255	матрица 12	-1.71126	-0.07170	1.23615
	-0.25770	0.65022	0.07193		-0.07170	1.34019	0.02903
	0.45255	0.07193	-0.97112		1.23615	0.02903	-1.71295
матрица 13	-1.00449	-0.38726	0.59047	матрица 14	-1.47887	-0.09357	0.91259
	-0.38726	0.73999	0.12519		-0.09357	1.10664	0.03298
	0.59047	0.12519	-1.08660		0.91259	0.03298	-1.48225
матрица 15	-1.48213	-0.05316	1.08254	матрица 16	-1.51898	-0.19907	0.95855
	-0.05316	1.13958	0.01617		-0.19907	1.17742	0.06992
	1.08254	0.01617	-1.48271		0.95855	0.06992	-1.57151

## Список литературы

- [1] Амосов А.А. Вычислительные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 672 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/42190>.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — 6-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
- [3] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. I, II. М., 1977.
- [4] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб., 1998.
- [5] Сегё Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962. 500 с.
- [6] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. Наука, М., 1976. 328 с.
- [7] Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 736 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/400>
- [8] Практикум по численным методам. Воронкова А.И., Даугавет И.К., Марданов А.А. и др. СПб., 2003.