Задание №1

Решение нелинейных уравнений

Решение уравнения $f(x) = 0$ часто встречающаяся проблема. На первый взгляд она выглядит довольно простой, но точное ее решение возможно, только если $f(x)$ есть полином степени не выше 4. (Здесь под точным решением понимается некоторая процедура вычисления корня/корней через параметры уравнения).

Каждая нелинейная задача имеет свои особенности (нюансы), потому численной решение произвольного уравнения вида $f(x) = 0$ невозможно без предварительного анализа функции $f(x)$.

Например, дополнительный трудности возникают, если функция имеет кратные корни. В частности, корни четной кратности. Тогда график функции касается оси Ox, но не пересекает ее, это делает поиск таких корней затруднительным.

Будем говорить, что корень x^* уравнения $f(x) = 0$ имеет кратность p, если существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что
1) $g(x^*) \neq 0$;
2) для всех x $f(x) = (x - x^*)^p\, g(x)$.

То есть $p-$кратный корень является не только корнем функции f, но и корнем всех ее производных до порядка $(p - 1)$ включительно. Если $p = 1$, x^* — простой корень уравнения $f(x) = 0$.

Можно выделить такие ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ:

1. Определиться, какие корни нужно найти (например, все или только вещественные; положительные или принадлежащие конкретному отрезку $[A, B]$ или некоторой области комплексной плоскости).
2. Выделить отрезки/области, содержащие по одному корню уравнения (*процедура отделения корней* или *локализация корня*). Далее работают с каждой областью единственного корня отдельно.
3. Применить выбранный вычислительный алгоритм (метод) и найти корень с требуемой точностью.
4. Проверить результаты.

Ниже мы поговорим о процедуре отделения корней и рассмотрим несколько простейших методов решения нелинейного уравнения. Сейчас обсудим пункт 4. Проверка результатов. Пусть в результате решения задачи мы получили приближенное значение $\tilde{x}$. То есть вообще говоря $\tilde{x} \approx x^*$.

КОНТРОЛЬ:
1) Очевидно, найденное с хорошей точностью приближение к корню должно лежать в искомых пределах (например, быть положительным или $\in [A, B]$). Иначе, надо увеличивать точность.
2) О "точности"нахождения корня можно судить по модулю *невязки*: $|f(\tilde{x})|$. На точном решении x^* модуль невязки равен 0. Для $\tilde{x}$ он может быть близок к нулю. Если, например, $|f(\tilde{x})|$ есть величина порядка 10^{-s}, мы не можем утверждать, что $\tilde{x}$ — это приближение к x^* с точностью 10^{-s}. Однако, если Вы отыскиваете решение с хорошей точностью, а модуль невязки большой, следует проанализировать, почему это произошло и искать ошибку.

Итак, пусть дано нелинейное уравнение вида $f(x) = 0$. Пусть требуется найти корни этого уравнения, принадлежащие заданному отрезку $[A, B]$ (поиск комплексных корней уравнения мы не рассматриваем).

ПРОЦЕДУРА ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Можно отделять корни графически, работая с графиком функции $y = f(x)$ (наметить/искать точки пересечения графика и оси Ox) или, преобразовав исходное уравнение к эквивалентному виду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, искать абсциссы точек пересечения графиков $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, если построение графиков этих функций представляется более простым.

Очевидно, что процедура графического отделения корней не является универсальной. Потому при реализации нашего Задания 1 мы проведем этот этап при помощи табуляции отрезка $[A, B]$. А именно: рассмотрим натуральное N и определим шаг $h = \frac{B-A}{N}$. Далее, продвигаясь из точки A в точку B на каждом частичном отрезке длины h будем смотреть на произведение значений функции $f(x)$ на концах. Если на каком-либо частичном отрезке функция меняет знак (произведение < 0), то (если это непрерывная функция) внутри этого отрезка есть по крайней мере один корень нечетной кратности. Этот отрезок мы будем выводить на печать. Также стоит учитывать отрезок, если произведение значений на концах $= 0$. В этом случае, очевидно, по крайней мере один из концов отрезка может быть корнем. Также могут быть корни внутри.

Таким образом, у нас есть ДВЕ ПРОБЛЕМЫ:
1. Этот способ не позволит нам выделить отрезки, содержащие по одному корню четной кратности.
2. Как можно утверждать, что в выделенном отрезке только один корень нечетной кратности?

ПУТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ:
1. Это не проблема, если поставить задачу отыскания корней только нечетной кратности (далее, в тексте Задания 1 решается задача отыскания всех корней нечетной кратности уравнения $f(x) = 0$, принадлежащие заданному отрезку $[A, B]$).
2. Будем выбирать N достаточно большим (h маленьким, например, 10^{-2}). Для обычных функций этого достаточно. Если же есть подозрение на осциллирующую функцию, можно еще уменьшить h в 10 или 100 раз. Можно завести в программе счетчик количества отрезков перемены знака. Тогда, если для $h = 10^{-2}$ и для $h = 10^{-3}$ счетчик имеет одинаковые значения, то можно остановиться и считать, что процедура отделения корней завершена, все отрезки перемены знака найдены и содержат ровно по одному корню нечетной кратности.

Простейшая блок-схема процедуры отделения корней находится в отдельном файле.

Далее считаем, что определены промежутки существования и единственности корня вида $[a_j, b_j]$, каждый длины h. Теперь будем считать, что работаем с одним отрезком из этого списка. Опустим индексы. Итак, на отрезке $[a, b]$ длины h есть корень x^*. Хотим его найти с точностью ε. Очевидно, что середина такого отрезка от любой точки этого отрезка (а значит и от искомого корня) находится на расстоянии не более $h/2$ (смотри белую доску). Если нам недостаточно такой точности, будем уточнять корень на $[a, b]$, привлекая известные методы решения нелинейных уравнений.

Каждый такой метод представляет собой некоторую итерационную процедуру, которая по одному или нескольким начальным приближениям (в зависимости от расчетной формулы метода) строит числовую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ приближений к искомому решению x^*.
Важно, чтобы $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Существование предела последовательности приближений означает сходимость итерационного процесса (сходимость метода). Некоторые методы сходятся при любом начальном приближении, другие требуют специального выбора начального приближения, выполнения специальных условий сходимости.

Для выполнения Задания 1 выбраны простейшие методы решения нелинейного уравнения:

1. Метод деления отрезка пополам (метод бисекции)

2. Метод Ньютона (метод касательных)

3. Модифицированный метод Ньютона

4. Метод секущих

Здесь нужно рассмотреть материал пункта 1.1.2 из методички.

МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Это очень простой и надежный метод для вычисления корней. Пусть на отрезке $[a,\, b]$ длины h есть корень x^* уравнения $f(x) = 0$. Стратегия этого метода состоит в том, что мы делим исходный отрезок пополам, проверяем, на какой половине функция меняет знак, то есть там есть корень. И далее работаем с этим отрезком. Снова делим пополам и выбираем половину перемены знака функции $f(x)\ldots$

Блок-схема алгоритма метода бисекции представлена в отдельном файле.

Если стоит задача отыскания корня с точностью ε, процесс деления продолжают до тех пор пока длина отрезка не станет меньше 2ε (это и будет условием выхода из цикла). Тогда середина такого отрезка будет искомым приближением.

В этом методе используется минимальная информация о функции $f(x)$ (формально, нужен только знак на концах отрезков). Требуется относительно большое число итераций (линейная скорость сходимости), но сходимость этого метода гарантирована (если точность превышает машинный нуль, зацикливание не происходит).

Оценим количество итераций необходимых для вычисления корня с точностью ε. Так как длина интервала на каждом шаге итерационного процесса уменьшается вдвое (пусть на шаге k мы имеем дело с отрезком $[a_k,\, b_k]$. Мы останавливаем вычисления, когда

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \le 2\varepsilon,$$

откуда легко найти количество итераций, необходимое для выполнения этого условия:

$$k = \left[\frac{\ln(b-a) - \ln(2\varepsilon)}{\ln 2} \right] + 1.$$

Здесь $[z]$ означает целую часть z.

Например, если $b - a = 1$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$, мы получим $k = 17$.

Следующие три метода решения рассмотрим по материалам методички.

О сходимости метода Ньютона

Теорема Канторовича Л.В.(*без доказательства*)

Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $S = \{\, x :\ |x - x_0| \le \delta\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$1)\ f'(x_0) \ne 0, \quad \left| (f'(x_0))^{-1} \right| \le B$$

$$2)\ \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \le \eta$$

$$3)\ |f''(x)| \le K \quad \forall x \in S$$

$$4)\ h = B \cdot \eta \cdot K \le \frac{1}{2}, \quad a(h) = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \cdot \eta \le \delta.$$

Тогда на отрезке S существует решение x^* уравнения $f(x) = 0$ и к нему сходится последовательность $\{x_n\}_0^\infty$. При этом имеет место оценка:

$$|x^* - x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1} \cdot \eta \quad n = 1, 2, \ldots$$

Замечание
На практике можно встретиться как со случаем быстрой сходимости *метода Ньютона*, когда начальное приближение x_0 далеко от искомого x^*, так и со случаем расходимости метода для x_0 близких к корню. Также возможно зацикливание метода.