

Линейные методы классификации

Содержание

- 1 **Градиентные методы обучения**
 - Минимизация эмпирического риска
 - Линейный классификатор
 - Метод стохастического градиента
 - Регуляризация эмпирического риска
- 2 **Логистическая регрессия (LR)**
 - Экспонентные семейства плотностей
 - Основная теорема
 - Принцип максимума правдоподобия
 - Скоринг
- 3 **Балансировка ошибок и ROC-кривая**
 - Постановка задачи
 - Определение ROC-кривой
 - Эффективное построение ROC-кривой
 - Градиентная максимизация AUC
- 4 **Метод опорных векторов (SVM)**
 - Принцип оптимальной разделяющей гиперплоскости
 - Двойственная задача
 - Ядра и спрямляющие пространства
 - Метод релевантных векторов (RVM)

Задача построения разделяющей поверхности

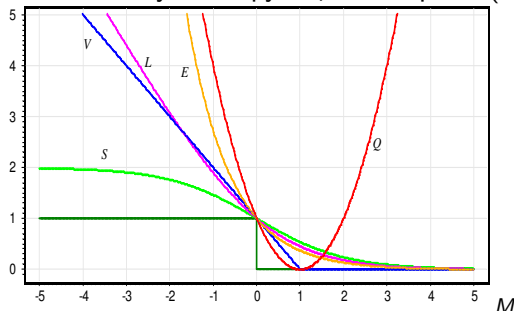
- Задача классификации с двумя классами, $Y = \{-1, +1\}$:
по обучающей выборке $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$ построить
алгоритм классификации $a(x, w) = \text{sign } f(x, w)$, где
 $f(x, w)$ — дискриминантная функция,
 w — вектор параметров.
- $f(x, w) = 0$ — разделяющая поверхность;
 $M_i(w) = y_i f(x_i, w)$ — отступ (margin) объекта x_i ;
 $M_i(w) < 0 \iff$ алгоритм $a(x, w)$ ошибается на x_i .
- Минимизация эмпирического риска:

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{\ell} [M_i(w) < 0] \leq \tilde{Q}(w) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(M_i(w)) \rightarrow \min_w;$$

функция потерь $\mathcal{L}(M)$ невозрастающая, неотрицательная.

Непрерывные аппроксимации пороговой функции потерь

Часто используемые функции потерь $\mathcal{L}(M)$:



- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| $Q(M) = (1 - M)^2$ | — квадратичная (ЛДФ); |
| $V(M) = (1 - M)_+$ | — кусочно-линейная (SVM); |
| $S(M) = 2(1 + e^M)^{-1}$ | — сигмоидная (нейросети); |
| $L(M) = \log_2(1 + e^{-M})$ | — логарифмическая (LR); |
| $E(M) = e^{-M}$ | — экспоненциальная (AdaBoost). |

Связь с принципом максимума правдоподобия

Пусть $X \times Y$ — в.п. с плотностью $p(x, y|w)$.

Пусть X^ℓ — простая выборка (i.i.d.)

- Максимизация правдоподобия:

$$L(w; X^\ell) = \ln \prod_{i=1}^{\ell} p(x_i, y_i|w) = \sum_{i=1}^{\ell} \ln p(x_i, y_i|w) \rightarrow \max_w.$$

- Минимизация аппроксимированного эмпирического риска:

$$\tilde{Q}(w; X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(y_i f(x_i, w)) \rightarrow \min_w;$$

- Эти два принципа эквивалентны, если положить

$$-\ln p(x_i, y_i|w) = \mathcal{L}(y_i f(x_i, w)).$$

$$\boxed{\text{модель } p} \Leftrightarrow \boxed{\text{модель } f \text{ и функция потерь } \mathcal{L}}.$$

Линейный классификатор

$f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ — числовые признаки;

Линейный алгоритм классификации:

$$a(x, w) = \text{sign} \left(\sum_{j=1}^n w_j f_j(x) - w_0 \right),$$

где $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ — коэффициенты (веса признаков);

Введём константный признак $f_0 \equiv -1$.

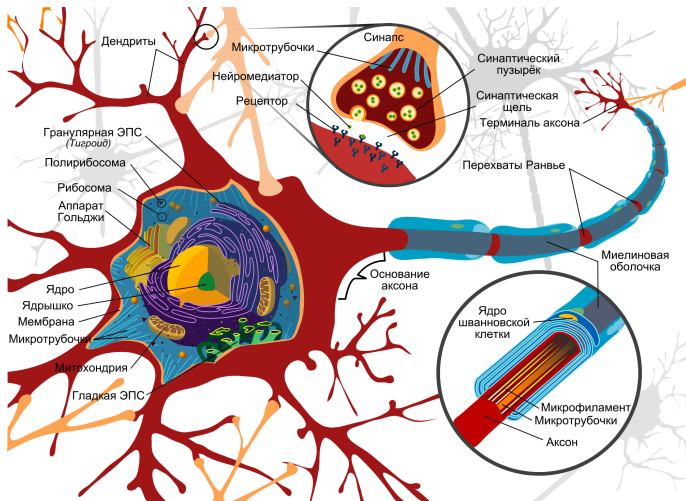
Векторная запись:

$$a(x, w) = \text{sign}(\langle w, x \rangle).$$

Отступы объектов x_i :

$$M_i(w) = \langle w, x_i \rangle y_i.$$

Похож ли нейрон на линейный классификатор?

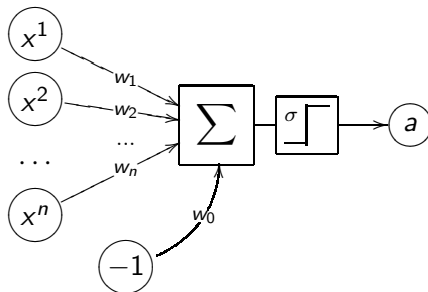


Математическая модель нейрона

Линейная модель нейрона МакКаллока-Питтса [1943]:

$$a(x, w) = \sigma(\langle w, x \rangle) = \sigma\left(\sum_{j=1}^n w_j f_j(x) - w_0\right),$$

где $\sigma(s)$ — функция активации (в частности, sign).



Градиентный метод численной минимизации

Минимизация аппроксимированного эмпирического риска:

$$Q(w; X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(\langle w, x_i \rangle y_i) \rightarrow \min_w.$$

Численная минимизация методом *градиентного спуска*:

$w^{(0)}$:= начальное приближение;

$$w^{(t+1)} := w^{(t)} - \eta \cdot \nabla Q(w^{(t)}), \quad \nabla Q(w) = \left(\frac{\partial Q(w)}{\partial w_j} \right)_{j=0}^n,$$

где η — *градиентный шаг*, называемый также *темпом обучения*.

$$w^{(t+1)} := w^{(t)} - \eta \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}'(\langle w^{(t)}, x_i \rangle y_i) x_i y_i.$$

Идея ускорения сходимости:

брать (x_i, y_i) по одному и сразу обновлять вектор весов.

Алгоритм SG (Stochastic Gradient)

Вход:

выборка X^ℓ ; темп обучения η ; параметр λ ;

Выход:

веса w_0, w_1, \dots, w_n ;

-
- 1: инициализировать веса w_j , $j = 0, \dots, n$;
 - 2: инициализировать текущую оценку функционала:
 $Q := \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(\langle w, x_i \rangle y_i)$;
 - 3: **повторять**
 - 4: выбрать объект x_i из X^ℓ (например, случайно);
 - 5: вычислить потерю: $\varepsilon_i := \mathcal{L}(\langle w, x_i \rangle y_i)$;
 - 6: градиентный шаг: $w := w - \eta \mathcal{L}'(\langle w, x_i \rangle y_i) x_i y_i$;
 - 7: оценить значение функционала: $Q := (1 - \lambda)Q + \lambda \varepsilon_i$;
 - 8: **пока** значение Q и/или веса w не стабилизируются;

Частный случай №1: дельта-правило ADALINE

Задача регрессии: $X = \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(a, y) = (a - y)^2.$$

Адаптивный линейный элемент ADALINE
[Видроу и Хофф, 1960]:

$$a(x, w) = \langle w, x \rangle$$

Градиентный шаг — **дельта-правило** (delta-rule):

$$w := w - \underbrace{\eta(\langle w, x_i \rangle - y_i)}_{\Delta_i} x_i$$

Δ_i — ошибка алгоритма $a(x, w)$ на объекте x_i .

Частный случай №2: правило Хэбба

Задача классификации: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \{-1, +1\}$,

$$\mathcal{L}(a, y) = (-\langle w, x \rangle y)_+.$$

Линейный классификатор:

$$a(x, w) = \text{sign}\langle w, x \rangle.$$

Градиентный шаг — **правило Хэбба** [1949]:

$$\text{если } \langle w, x_i \rangle y_i < 0 \text{ то } w := w + \eta x_i y_i,$$

Если $X = \{0, 1\}^n$, $Y = \{0, +1\}$, то правило Хэбба переходит в правило **перцептрона Розенблатта** [1957]:

$$w := w - \eta(a(x_i, w) - y_i)x_i.$$

Обоснование Алгоритма SG с правилом Хэбба

Задача классификации: $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $Y = \{-1, 1\}$.

Теорема (Новиков, 1962)

Пусть выборка X^ℓ линейно разделима:

$\exists \tilde{w}, \exists \delta > 0: \langle \tilde{w}, x_i \rangle y_i > \delta$ для всех $i = 1, \dots, \ell$.

Тогда Алгоритм SG с правилом Хэбба находит вектор весов w ,

- разделяющий обучающую выборку без ошибок;
- при любом начальном положении $w^{(0)}$;
- при любом темпе обучения $\eta > 0$;
- независимо от порядка предъявления объектов x_i ;
- за конечное число исправлений вектора w ;
- если $w^{(0)} = 0$, то число исправлений $t_{\max} \leq \frac{1}{\delta^2} \max \|x_i\|$.

SG: Инициализация весов

Возможны варианты:

- ❶ $w_j := 0$ для всех $j = 0, \dots, n$;
- ❷ небольшие случайные значения:
 $w_j := \text{random} \left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right)$;
- ❸ наивный линейный байесовский классификатор
по небольшой случайной подвыборке объектов;
- ❹ $w_j := \frac{\langle y, f_j \rangle}{\langle f_j, f_j \rangle}$,
где $f_j = (f_j(x_i))_{i=1}^{\ell}$ — вектор значений j -го признака.

SG: Порядок предъявления объектов

Возможны варианты:

- 1 *перетасовка объектов (shuffling)*:
попеременно брать объекты из разных классов;
- 2 чаще брать те объекты, на которых была допущена
бóльшая ошибка
(чем меньше M_i , тем больше вероятность взять объект);
- 3 вообще не брать «хорошие» объекты, у которых $M_i > \mu_+$
(при этом немного ускоряется сходимость);
- 4 вообще не брать объекты-«выбросы», у которых $M_i < \mu_-$
(при этом может улучшиться качество классификации);

Параметры μ_+ , μ_- придётся подбирать.

SG: Выбор величины градиентного шага

Возможны варианты:

- ❶ сходимость гарантируется (для выпуклых функций) при

$$\eta_t \rightarrow 0, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \eta_t = \infty, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \eta_t^2 < \infty,$$

в частности можно положить $\eta_t = 1/t$;

- ❷ метод скорейшего градиентного спуска:

$$Q(w - \eta \nabla Q(w)) \rightarrow \min_{\eta},$$

позволяет найти *адаптивный шаг* η^* ;

- ❸ пробные случайные шаги

— для «выбивания» из локальных минимумов;

Упражнение: доказать, что

при квадратичной функции потерь $\eta^* = \|x_i\|^{-2}$.

SG: Достоинства и недостатки

Достоинства:

- 1 легко реализуется;
- 2 легко обобщается на любые f , \mathcal{L} ;
- 3 возможно динамическое (потокковое) обучение;
- 4 на сверхбольших выборках не обязательно брать все x_i ;

Недостатки:

- 1 возможна расходимость или медленная сходимость;
- 2 застревание в локальных минимумах;
- 3 подбор комплекса эвристик является искусством;
- 4 проблема переобучения;

SG: Проблема переобучения

Возможные причины переобучения:

- 1 слишком мало объектов; слишком много признаков;
- 2 линейная зависимость (мультиколлинеарность) признаков;
- 3 наличие «шумовых» неинформативных признаков;

Симптоматика:

- 1 резкое увеличение $\|w\|$;
- 2 неустойчивость классификации;
- 3 $Q(X^\ell) \ll Q(X^k)$;

Терапия:

- 1 ранний останов (early stopping);
- 2 сокращение весов (weight decay);

SG: Сокращение весов

Штраф за увеличение нормы вектора весов:

$$Q_{\tau}(w; X^{\ell}) = Q(w; X^{\ell}) + \frac{\tau}{2} \|w\|^2 \rightarrow \min_w.$$

Градиент:

$$\nabla Q_{\tau}(w) = \nabla Q(w) + \tau w.$$

Модификация градиентного шага:

$$w := w(1 - \eta\tau) - \eta \nabla Q(w).$$

Подбор параметра регуляризации τ :

- 1 скользящий контроль;
- 2 стохастическая адаптация;
- 3 байесовский вывод второго уровня;

Обобщение: байесовская регуляризация

$p(x, y|w)$ — вероятностная модель данных;

$p(w; \gamma)$ — априорное распределение параметров модели;

γ — вектор *гиперпараметров*;

Теперь не только появление выборки X^ℓ ,
но и появление модели w также полагается случайным.

Совместное правдоподобие данных и модели:

$$p(X^\ell, w) = p(X^\ell|w) p(w; \gamma).$$

Принцип максимума совместного правдоподобия:

$$L(w, X^\ell) = \ln p(X^\ell, w) = \sum_{i=1}^{\ell} \ln p(x_i, y_i|w) + \underbrace{\ln p(w; \gamma)}_{\text{регуляризатор}} \rightarrow \max_{w, \gamma}.$$

Пример 1: квадратичный (гауссовский) регуляризатор

Пусть $w \in \mathbb{R}^n$ имеет n -мерное гауссовское распределение:

$$p(w; \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|w\|^2}{2\sigma}\right), \quad \|w\|^2 = \sum_{j=1}^n w_j^2,$$

т. е. все веса независимы, имеют нулевое матожидание и равные дисперсии σ ; σ — гиперпараметр.

Логарифмируя, получаем квадратичный регуляризатор:

$$-\ln p(w; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \|w\|^2 + \text{const}(w).$$

Вероятностный смысл параметра регуляризации: $\tau = \frac{1}{\sigma}$.

Пример 2: лапласовский регуляризатор

Пусть $w \in \mathbb{R}^n$ имеет n -мерное распределение Лапласа:

$$p(w; C) = \frac{1}{(2C)^n} \exp\left(-\frac{\|w\|_1}{C}\right), \quad \|w\|_1 = \sum_{j=1}^n |w_j|,$$

т. е. все веса независимы, имеют нулевое матожидание и равные дисперсии; C — гиперпараметр.

Логарифмируя, получаем регуляризатор по L_1 -норме:

$$-\ln p(w; C) = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^n |w_j| + \text{const}(w).$$

Почему этот регуляризатор приводит к отбору признаков?

Пример 2: лапласовский регуляризатор

$$Q(w, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \ln p(x_i, y_i | w) + \frac{1}{C} \sum_{j=1}^n |w_j| \rightarrow \min_{w, C}.$$

Почему этот регуляризатор приводит к отбору признаков:

Замена переменных: $u_j = \frac{1}{2}(|w_j| + w_j)$, $v_j = \frac{1}{2}(|w_j| - w_j)$.
Тогда $w_j = u_j - v_j$ и $|w_j| = u_j + v_j$;

$$\begin{cases} Q(u, v) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(M_i(u - v, w_0)) + \frac{1}{C} \sum_{j=1}^n (u_j + v_j) \rightarrow \min_{u, v} \\ u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \end{cases}$$

если $u_j = v_j = 0$, то вес $w_j = 0$ и **признак не учитывается**.

Регуляризация в линейных классификаторах

- В случае мультиколлинеарности
 - решение $Q(w) \rightarrow \min_w$ неединственно или неустойчиво;
 - классификатор $a(x; w)$ неустойчив;
 - переобучение: $Q(X^\ell) \ll Q(X^k)$.
- Регуляризация — это выбор наиболее устойчивого решения
 - Гаусс — без отбора признаков;
 - Лаплас — с отбором признаков;
 - возможны и другие варианты...
- Выбор параметра регуляризации:
 - с помощью скользящего контроля;
 - с помощью оценок обобщающей способности;
 - стохастическая адаптация;
 - байесовский вывод второго уровня.

Зоопарк методов

- Вид разделяющей поверхности $f(x, w)$:
 - линейная $f(x, w) = \langle x, w \rangle$;
 - нелинейная;
- Вид непрерывной аппроксимации функции потерь $\mathcal{L}(M)$:
 - логарифмическая $\mathcal{L}(M) = \log(1 + e^{-M})$... LR;
 - кусочно-линейная $\mathcal{L}(M) = (1 - M)_+$... SVM;
 - экспоненциальная $\mathcal{L}(M) = e^{-M}$... AdaBoost;
- Вид регуляризатора — $\log p(w; \gamma)$:
 - равномерный ... перцептроны, LR;
 - гауссовский с равными дисперсиями ... SVM, RLR;
 - гауссовский с неравными дисперсиями ... RVM;
 - лапласовский ... приводит к отбору признаков;
- Вид численного метода оптимизации $Q(w) \rightarrow \min$.

Логистическая регрессия: базовые предположения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \pm 1$, выборка $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$ i.i.d. из

$$p(x, y) = P_y p_y(x) = P(y|x) p(x)$$

- Функции правдоподобия $p_y(x)$ экспонентные:

$$p_y(x) = \exp(c_y(\delta) \langle \theta_y, x \rangle + b_y(\delta, \theta_y) + d(x, \delta)),$$

где $\theta_y \in \mathbb{R}^n$ — параметр сдвига;

δ — параметр разброса

b_y, c_y, d — произвольные числовые функции;

причём параметры $d(\cdot)$ и δ не зависят от y .

Класс экспонентных распределений очень широк:

равномерное, нормальное, гипергеометрическое, пуассоновское, биномиальное, Γ -распределение, и др.

Пример: гауссовская плотность — экспонентная

Многомерное нормальное распределение, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, является экспонентным:

параметр сдвига $\theta = \Sigma^{-1}\mu$;

параметр разброса $\delta = \Sigma$.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) = \\ &= \exp\left(\underbrace{\mu^\top \Sigma^{-1}x}_{\langle \theta, x \rangle} - \underbrace{\frac{1}{2}\mu^\top \Sigma^{-1}\Sigma \Sigma^{-1}\mu}_{b(\delta, \theta)} - \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1}x - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma|}_{d(x, \delta)}\right).\end{aligned}$$

Основная теорема

Оптимальный байесовский классификатор для двух классов:

$$a(x) = \text{sign}(\lambda_+ P(+1|x) - \lambda_- P(-1|x)) = \text{sign} \left(\frac{p_+(x)P_+}{p_-(x)P_-} - \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right).$$

Теорема

Если p_y экспонентны, параметры $d(\cdot)$ и δ не зависят от y , и среди признаков $f_1(x), \dots, f_n(x)$ есть константа, то байесовский классификатор линеен:

$$a(x) = \text{sign}(\langle w, x \rangle - w_0), \quad w_0 = \ln(\lambda_- / \lambda_+);$$

апостериорные вероятности классов:

$$P(y|x) = \sigma(\langle w, x \rangle y),$$

где $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ — логистическая (сигмоидная) функция.

Основная теорема. Доказательство: шаг 1

После подстановки экспонентных плотностей классов

$$p_{\pm}(x) = \exp(c_{\pm}(\delta)\langle\theta_{\pm}, x\rangle + b_{\pm}(\delta, \theta_{\pm}) + d(x, \delta))$$

в формулу байесовского классификатора

$$a(x) = \text{sign} \left(\frac{P(+1|x)}{P(-1|x)} - \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right) = \text{sign} \left(\ln \frac{P_+ p_+(x)}{P_- p_-(x)} - \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)$$

получаем

$$\ln \frac{P(+1|x)}{P(-1|x)} = \underbrace{\langle c(\delta)(\theta_+ - \theta_-), x \rangle}_{w=\text{const}(x)} + \underbrace{b_+(\delta, \theta_+) - b_-(\delta, \theta_-)}_{\text{const}(x)} + \ln \frac{P_+}{P_-}.$$

Основная теорема. Доказательство: шаг 2

Таким образом,

$$\frac{P(+1|x)}{P(-1|x)} = e^{\langle w, x \rangle}$$

По формуле полной вероятности $P(-1|x) + P(+1|x) = 1$,

$$P(+1|x) = \frac{1}{1 + e^{-\langle w, x \rangle}}; \quad P(-1|x) = \frac{1}{1 + e^{\langle w, x \rangle}}.$$

Объединяя эти два равенства в одно, получаем требуемое:

$$P(y|x) = \sigma(\langle w, x \rangle y).$$

Следовательно, разделяющая поверхность линейна:

$$\lambda_- P(-1|x) = \lambda_+ P(+1|x),$$

$$\langle w, x \rangle - \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = 0.$$

Обоснование логарифмической функции потерь

Максимизация логарифма правдоподобия выборки:

$$L(w, X^\ell) = \log \prod_{i=1}^{\ell} p(x_i, y_i) \rightarrow \max_w.$$

Подставим: $p(x, y) = P(y|x) \cdot p(x) = \sigma(\langle w, x \rangle y) \cdot \text{const}(w)$

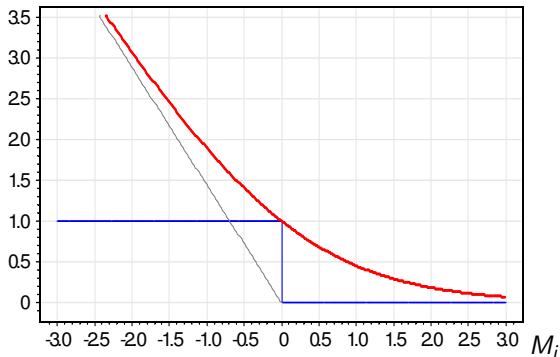
$$L(w, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \log \sigma(\langle w, x_i \rangle y_i) + \text{const}(w) \rightarrow \max_w.$$

Максимизация $L(w)$ эквивалентна минимизации $\tilde{Q}(w)$:

$$\tilde{Q}(w, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \log(1 + \exp(-\underbrace{\langle w, x_i \rangle y_i}_{M_i(w)})) \rightarrow \min_w.$$

Логарифмическая функция потерь

Логарифмическая функция потерь $\mathcal{L}(M_i) = \log_2(1 + e^{-M_i})$
и её наклонная асимптота.



Градиентный метод

Производная сигмоидной функции: $\sigma'(z) = \sigma(z)\sigma(-z)$.

Вектор градиента функционала $\tilde{Q}(w)$:

$$\nabla \tilde{Q}(w) = - \sum_{i=1}^{\ell} y_i x_i \sigma(-M_i(w)).$$

Градиентный шаг в методе стохастического градиента:

$$w^{(t+1)} := w^{(t)} + \eta y_i x_i \sigma(-M_i(w^{(t)})),$$

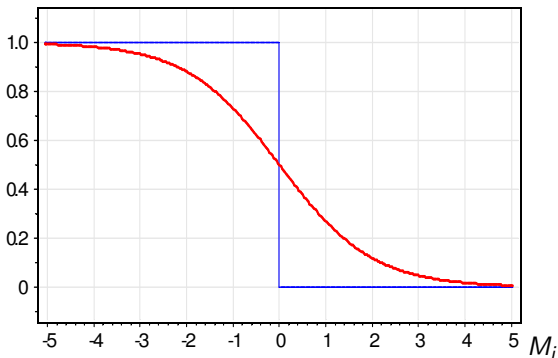
где (x_i, y_i) — предъявляемый прецедент, η — темп обучения.

Оказывается, это «сглаженный вариант» правила Хэбба:

$$w^{(t+1)} := w^{(t)} + \eta y_i x_i [M_i(w^{(t)}) < 0].$$

Сглаженное правило Хэбба

Правило Хэбба: пороговое $[M_i < 0]$ и сглаженное $\sigma(-M_i)$:



где $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ — логистическая (сигмоидная) функция.

Бинаризация признаков и скоринговая карта

Возраст	до 25	5
	25 - 40	10
	40 - 50	15
	50 и больше	10
Собственность	владелец	20
	совладелец	15
	съемщик	10
	другое	5
Работа	руководитель	15
	менеджер среднего звена	10
	служащий	5
	другое	0
Стаж	1/безработный	0
	1..3	5
	3..10	10
	10 и больше	15
Работа_мужа /жены	нет/домохозяйка	0
	руководитель	10
	менеджер среднего звена	5
	служащий	1

Балансировка ошибок I и II рода. Постановка задачи

Задача классификации на два класса, $Y = \{-1, +1\}$;
 λ_y — штраф за ошибку на объекте класса y ;
модель классификации: $a(x, w, w_0) = \text{sign}(f(x, w) - w_0)$.

В логистической регрессии:

- $f(x, w) = \langle x, w \rangle$ — не зависит от $\{\lambda_y\}$;
- $w_0 = \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+}$ — зависит только от $\{\lambda_y\}$.

На практике штрафы $\{\lambda_y\}$ могут многократно пересматриваться.

Постановка задачи

- Нужен удобный способ выбора w_0 в зависимости от $\{\lambda_y\}$, не требующий построения w заново.
- Нужна характеристика качества классификатора, инвариантная относительно выбора $\{\lambda_y\}$.

Определение ROC-кривой

ROC — «receiver operating characteristic».

- Каждая точка кривой соответствует некоторому $a(x; w, w_0)$.
- по оси X : доля ошибочных положительных классификаций (FPR — false positive rate):

$$\text{FPR}(a, X^\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} [y_i = -1][a(x_i; w, w_0) = +1]}{\sum_{i=1}^{\ell} [y_i = -1]};$$

$1 - \text{FPR}(a)$ называется специфичностью алгоритма a .

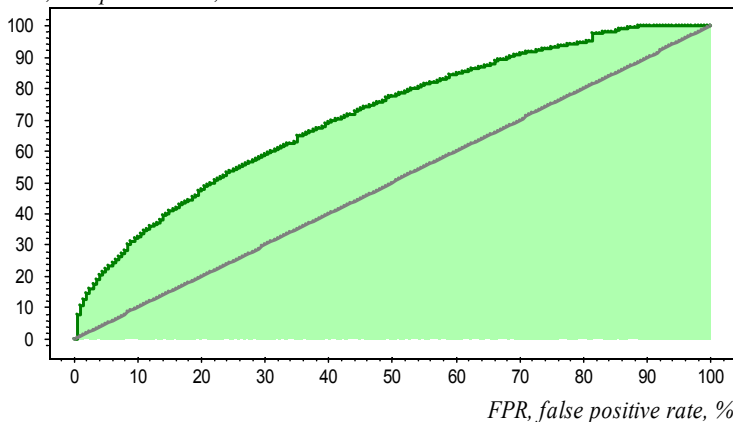
- по оси Y : доля правильных положительных классификаций (TPR — true positive rate):

$$\text{TPR}(a, X^\ell) = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} [y_i = +1][a(x_i; w, w_0) = +1]}{\sum_{i=1}^{\ell} [y_i = +1]};$$

$\text{TPR}(a)$ называется также чувствительностью алгоритма a .

Пример ROC-кривой

TPR, true positive rate, %



AUC, площадь под ROC-кривой

— наихудшая ROC-кривая

Алгоритм эффективного построения ROC-кривой

Вход: выборка X^ℓ ; дискриминантная функция $f(x, w)$;

Выход: $\{(FPR_i, TPR_i)\}_{i=0}^\ell$, AUC — площадь под ROC-кривой.

- 1: $\ell_y := \sum_{i=1}^\ell [y_i = y]$, для всех $y \in Y$;
- 2: упорядочить выборку X^ℓ по убыванию значений $f(x_i, w)$;
- 3: поставить первую точку в начало координат:
 $(FPR_0, TPR_0) := (0, 0)$; AUC := 0;
- 4: **для** $i := 1, \dots, \ell$
- 5: **если** $y_i = -1$ **то** сместиться на один шаг вправо:
- 6: $FPR_i := FPR_{i-1} + \frac{1}{\ell_-}$; $TPR_i := TPR_{i-1}$;
 $AUC := AUC + \frac{1}{\ell_-} TPR_i$;
- 7: **иначе** сместиться на один шаг вверх:
- 8: $FPR_i := FPR_{i-1}$; $TPR_i := TPR_{i-1} + \frac{1}{\ell_+}$;

Резюме в конце лекции

- *Логистическая регрессия* — это линейный байесовский классификатор, не требующий восстановления плотностей.
- Предположения об экспонентности плотностей и равных параметрах δ , $d(\cdot)$ трудно проверять на практике.
- Апостериорные вероятности $P(y|x)$ нужны в прикладных задачах для оценивания рисков.
- ROC и AUC — полезные меры качества классификации, инвариантные относительно цены ошибки 1 и 2 рода.

Принцип максимума ширины разделяющей полосы

Линейный классификатор:

$$a(x) = \text{sign}(\langle w, x \rangle - w_0), \quad w, x \in \mathbb{R}^n, \quad w_0 \in \mathbb{R}.$$

Пусть выборка $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$ линейно разделима:

$$\exists w, w_0 : \quad M_i(w, w_0) = y_i(\langle w, x_i \rangle - w_0) > 0, \quad i = 1, \dots, \ell$$

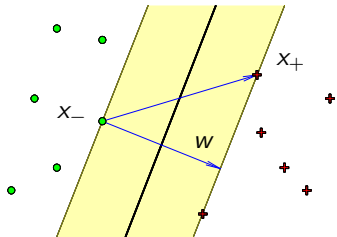
Нормировка: $\min_{i=1, \dots, \ell} M_i(w, w_0) = 1.$

Разделяющая полоса:

$$\{x : -1 \leq \langle w, x \rangle - w_0 \leq 1\}.$$

Ширина полосы:

$$\frac{\langle x_+ - x_-, w \rangle}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|} \rightarrow \max.$$



Обоснование кусочно-линейной функции потерь

Линейно разделяемая выборка

$$\begin{cases} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}; \\ M_i(w, w_0) \geq 1, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Переход к линейно неразделимой выборке (эвристика)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i \rightarrow \min_{w, w_0, \xi}; \\ M_i(w, w_0) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{cases}$$

Эквивалентная задача безусловной минимизации:

$$Q(w, w_0) = \sum_{i=1}^{\ell} (1 - M_i(w, w_0))_+ + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \rightarrow \min_{w, w_0}.$$

Задача поиска седловой точки функции Лагранжа

Функция Лагранжа: $\mathcal{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) =$

$$= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (M_i(w, w_0) - 1) - \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

λ_i — переменные, двойственные к ограничениям $M_i \geq 1 - \xi_i$;

η_i — переменные, двойственные к ограничениям $\xi_i \geq 0$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) \rightarrow \min_{w, w_0, \xi} \max_{\lambda, \eta}; \\ \xi_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \lambda_i = 0 \text{ либо } M_i(w, w_0) = 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \eta_i = 0 \text{ либо } \xi_i = 0, \quad i = 1, \dots, \ell; \end{cases}$$

Необходимые условия седловой точки функции Лагранжа

Функция Лагранжа: $\mathcal{L}(w, w_0, \xi; \lambda, \eta) =$

$$= \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (M_i(w, w_0) - 1) - \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i (\lambda_i + \eta_i - C),$$

Необходимые условия седловой точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = -\lambda_i - \eta_i + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad \eta_i + \lambda_i = C, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Понятие опорного вектора

Типизация объектов:

1. $\lambda_i = 0$; $\eta_i = C$; $\xi_i = 0$; $M_i \geq 1$.
— периферийные (неинформативные) объекты.
2. $0 < \lambda_i < C$; $0 < \eta_i < C$; $\xi_i = 0$; $M_i = 1$.
— **опорные** граничные объекты.
3. $\lambda_i = C$; $\eta_i = 0$; $\xi_i > 0$; $M_i < 1$.
— **опорные**-нарушители.

Определение

Объект x_i называется *опорным*, если $\lambda_i \neq 0$.

Двойственная задача

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(\lambda) = -\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j \rangle \rightarrow \min_{\lambda}; \\ 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, \dots, \ell; \\ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

Решение прямой задачи выражается через решение двойственной:

$$\begin{cases} w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i; \\ w_0 = \langle w, x_i \rangle - y_i, \quad \text{для любого } i: \lambda_i > 0, \quad M_i = 1. \end{cases}$$

Линейный классификатор:

$$a(x) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i \langle x_i, x \rangle - w_0 \right).$$

Нелинейное обобщение SVM

Переход к спрямляющему пространству
более высокой размерности: $\psi: X \rightarrow H$.

Определение

Функция $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — *ядро*, если $K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle$
при некотором $\psi: X \rightarrow H$, где H — гильбертово пространство.

Теорема

Функция $K(x, x')$ является ядром тогда и только тогда, когда
она симметрична: $K(x, x') = K(x', x)$;
и неотрицательно определена:

$$\int_X \int_X K(x, x') g(x) g(x') dx dx' \geq 0 \text{ для любой } g: X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Конструктивные методы синтеза ядер

- 1 $K(x, x') = \langle x, x' \rangle$ — ядро;
- 2 константа $K(x, x') = 1$ — ядро;
- 3 произведение ядер $K(x, x') = K_1(x, x')K_2(x, x')$ — ядро;
- 4 $\forall \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ произведение $K(x, x') = \psi(x)\psi(x')$ — ядро;
- 5 $K(x, x') = \alpha_1 K_1(x, x') + \alpha_2 K_2(x, x')$ при $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ — ядро;
- 6 $\forall \varphi : X \rightarrow X$ если K_0 ядро, то $K(x, x') = K_0(\varphi(x), \varphi(x'))$ — ядро;
- 7 если $s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ — симметричная интегрируемая функция, то $K(x, x') = \int_X s(x, z)s(x', z) dz$ — ядро;
- 8 если K_0 — ядро и функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ представима в виде сходящегося степенного ряда с неотрицательными коэффициентами, то $K(x, x') = f(K_0(x, x'))$ — ядро;

Пример: спрямляющее пространство для квадратичного ядра

Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $K(u, v) = \langle u, v \rangle^2$, где $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$.

Задача: найти пространство H и преобразование $\psi: X \rightarrow H$, при которых $K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_H$.

Разложим квадрат скалярного произведения:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \langle u, v \rangle^2 = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle^2 = \\ &= (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 = \\ &= \langle (u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2), (v_1^2, v_2^2, \sqrt{2}v_1 v_2) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H = \mathbb{R}^3, \quad \psi: (u_1, u_2) \mapsto (u_1^2, u_2^2, \sqrt{2}u_1 u_2),$$

Линейной поверхности в пространстве H соответствует квадратичная поверхность в исходном пространстве X .

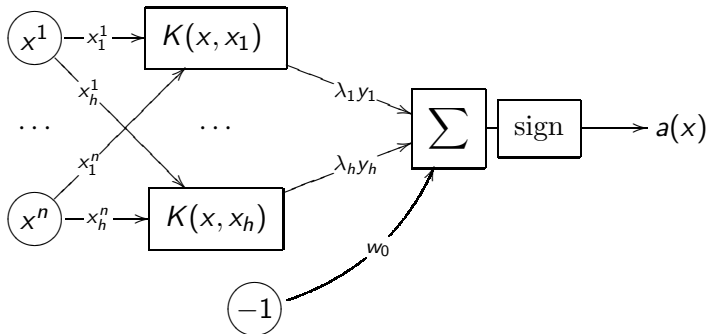
Примеры ядер

- ❶ $K(x, x') = \langle x, x' \rangle^2$
— квадратичное ядро;
- ❷ $K(x, x') = \langle x, x' \rangle^d$
— полиномиальное ядро с мономами степени d ;
- ❸ $K(x, x') = (\langle x, x' \rangle + 1)^d$
— полиномиальное ядро с мономами степени $\leq d$;
- ❹ $K(x, x') = \text{th}(k_0 + k_1 \langle x, x' \rangle)$, $k_0, k_1 \geq 0$
— нейросеть с сигмоидными функциями активации;
- ❺ $K(x, x') = \exp(-\beta \|x - x'\|^2)$
— сеть радиальных базисных функций;

SVM как двухслойная нейронная сеть

Перенумеруем объекты так, чтобы x_1, \dots, x_h были опорными.

$$a(x) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^h \lambda_i y_i K(x, x_i) - w_0 \right).$$



Преимущества и недостатки SVM

Преимущества SVM перед SG:

- Задача выпуклого квадратичного программирования имеет единственное решение.
- Число нейронов скрытого слоя определяется автоматически — это число опорных векторов.

Недостатки SVM:

- Неустойчивость к шуму.
- Нет общих подходов к оптимизации $K(x, x')$ под задачу.
- Приходится подбирать константу C .

Машина релевантных векторов RVM

Положим, как и в SVM, при некоторых $\lambda_i \geq 0$

$$w = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i y_i x_i,$$

причём опорным векторам x_i соответствуют $\lambda_i \neq 0$.

Проблема: Какие из коэффициентов λ_i лучше обнулить?

Идея: байесовский регуляризатор зависит не от w , а от λ_i .

Пусть λ_i независимые, гауссовские, с дисперсиями α_i :

$$p(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2} \sqrt{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell}} \exp \left(- \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^2}{2\alpha_i} \right);$$

$$\tilde{Q}(w) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathcal{L}(M_i(w(\lambda))) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\ln \alpha_i + \frac{\lambda_i^2}{\alpha_i} \right) \rightarrow \min_{\lambda, \alpha}.$$

Преимущества и недостатки RVM перед SVM

Преимущества:

- Опорных векторов, как правило, меньше (более «разреженное» решение).
- Шумовые выбросы уже не входят в число опорных.
- Не надо искать параметр регуляризации (вместо этого α ; оптимизируются в процессе обучения).
- Аналогично SVM, можно использовать ядра.

Недостатки:

- Авторам не удалось показать практическое преимущество по качеству классификации.

Резюме в конце лекции

- Методы обучения линейных классификаторов отличаются
 - видом функции потерь;
 - видом регуляризатора;
 - численным методом оптимизации.
- *Аппроксимация пороговой функции потерь* гладкой убывающей функцией отступа $\mathcal{L}(M)$ повышает качество классификации (за счёт увеличения зазора) и облегчает оптимизацию.
- *Регуляризация* решает проблему мультиколлинеарности и также снижает переобучение.
- *Максимизация AUC* инвариантна относительно штрафов.