তৃতীয় অধ্যায় [CHAPTER THREE]
প্রথম পরিচ্ছেদ [SECTION ONE]
ফাংশনের সীমা
[LIMIT OF A FUNCTION]

3.1.1. ভূমিকা [Introduction] ঃ

ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস ও গণিতের বিভিন্ন শাখার ক্রম বিকাশের ক্ষেত্রে ফাং সীমা একটি মূল ধারণা। ফাংশনের সীমাকে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাসের ভিত্তি হিসেবে করা হয়। গণিত শাস্ত্র ও বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে সীমার গু সর্বজন স্বীকৃত। এই অধ্যায়ে চলক রাশির সীমা এবং ফাংশনের সীমা সম্পর্কে আলোচনা হইবে।

গণিত শাস্ত্রে শুন্য দ্বারা ভাগ করা অসংজ্ঞায়িত [Indeterminate]

উদাহরণ স্বরূপ ঃ $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} \cdots (1)$

(1) নং এ $x = 5$ স্থাপন করিলে $f(5) = \dfrac{0}{0}$ হয়, যা অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $x = 5$ বি $f(x)$ ফাংশনের মান বিদ্যমান নাই।

কিন্তু x এর মান 5 না ধরিয়া যদি 5 এর অতি নিকটবর্তী কোন মান ধরা হয়, (1) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 4.999$ এবং $x = 5.001$ স্থাপন করা হয়, তবে

$$(1) \Rightarrow f(4.999) = \frac{(4.999)^2 - 5^2}{4.999 - 5} = \frac{(4.999 - 5)(4.999 + 5)}{4.999 - 5}$$

বা $f(4.999) = 4.999 + 5 = 9.999$

এবং $f(5.001) = \dfrac{(5.001)^2 - 5^2}{5.001 - 5} = \dfrac{(5.001 - 5)(5.001 + 5)}{5.001 - 5}$

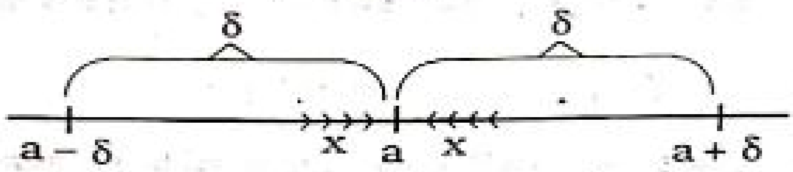
বা $f(5.001) = 5.001 + 5 = 10.001$ হয়।

উপরের উদাহরণ হইতে ইহা প্রতিয়মান হয় যে, x এর মান 5 এর অতি নিকটবর্তী হ $f(x)$ এর মান ও 10 এর খুব নিকটবর্তী পাওয়া যায়। অতএব $x = 5$ এর জন্য $f(x)$ অনি হইলেও 5 এর নিকটবর্তী মানগুলোতে $f(x)$ এর সসীম মান পাওয়া যায়।

3-1.2. চলক রাশির সীমা [Limit of a Variable] :

একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে কোন স্বাধীন চলক x কতকগুলো মান গ্রহন করিয়া একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হইয়া যদি a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে a কে x এর সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a$ অথবা $\lim x = a$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

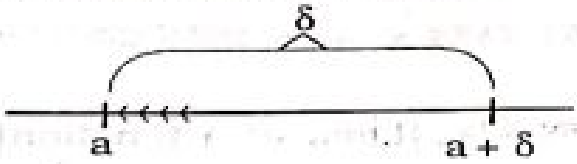
অথবা



একটি বাস্তব সংখ্যা x ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $x - a$ এর পরম মান ক্রমশ কমিতে কমিতে শেষ পর্যন্ত উহা যে কোন পূর্ব নির্ধারিত অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ হইতেও ক্ষুদ্রতর হয়, অর্থাৎ $|x - a| < \delta$ হয়, তবে a কে x এর সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a$ অথবা $\lim x = a$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

x এর মান a হইতে সামান্য বড় অথবা সামান্য ছোট হইবে কিন্তু $x = a$ হইবে না। ইহাকে $x \to a$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

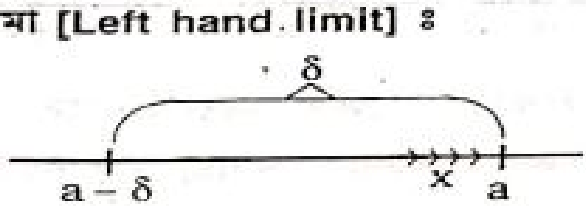
3.1.3. ডানহাতি সীমা [Right hand limit] :



যদি $a < x < a + \delta$ ব্যবধিতে x এর মান a অপেক্ষা বড় হইয়া ডানদিক হইতে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে ইহাকে ডানহাতি সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a+$ অথবা $x \to a+0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ : 5.01, 5.001, 5.0001, ··· এই সংখ্যাগুলো ডানদিক হইতে ক্রমশ 5 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; ইহাকে $x \to 5+$ অথবা $x \to 5 + 0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.4. বামহাতি সীমা [Left hand limit] :

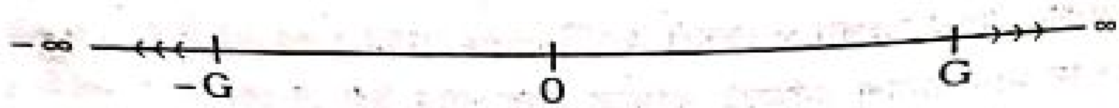


যদি $a - \delta < x < a$ ব্যবধিতে x এর মান a অপেক্ষা ছোট হইয়া বামদিক হইতে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে ইহাকে বামহাতি সীমা বলা হয়। ইহাকে $x \to a-$ অথবা $x \to a - 0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ 4.9, 4.99, 4.999, ... এই সংখ্যাগুলো বামদিক হইতে ক্রমশ 5 এর দিকে অগ্রসর হইতেছে; ইহাকে $x \to 5-$ অথবা $x \to 5-0$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.5. $x \to \infty$ অথবা $x \to -\infty$ এর অর্থ ঃ

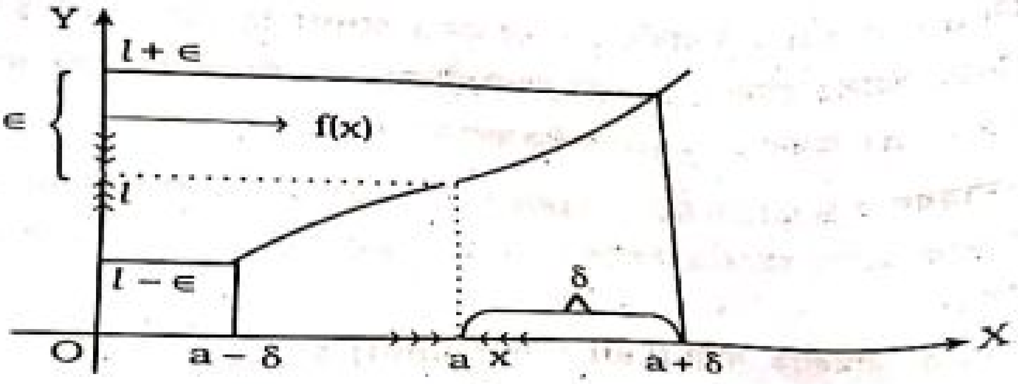
∞ কোন সংখ্যা নহে। ইহা একটি প্রতীক, যাহার অর্থ নিম্নের বর্ণনা হইতে বুঝা যাইবে।



যদি x এর ধারাবাহিক মানগুলো সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইয়া প্রদত্ত বৃহত্তম ধনাত্মক সংখ্যা G অপেক্ষে বৃহত্তর হয়, তবে x কে যোগবোধক অসীমের দিকে ধাবমান একটি চলক বলা হয় এবং ইহাকে $x \to \infty$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অনুরূপভাবে যদি x এর ধারাবাহিক মানগুলো সীমাহীনভাবে হ্রাস পাইয়া প্রদত্ত ক্ষুদ্রতম ঋণাত্মক সংখ্যা $-G$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে x কে বিয়োগবোধক অসীমের দিকে ধাবমান একটি চলক বলা হয় এবং ইহাকে $x \to -\infty$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

3-1.6. ফাংশনের সীমা [Limit of a function] ঃ



x চলকরাশি a অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা ক্ষুদ্রতর মানগুলো গ্রহন করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর নিকটবর্তী হওয়ায় যদি $f(x)$ ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা

l এর নিকটবর্তী হয়, তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

নোট : $\forall$ = For all [সকলের জন্য অথবা যে কোনটির জন্য]; $\exists$ = There exists বিদ্যমান।

3-1.7 $(\delta - \in)$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা :

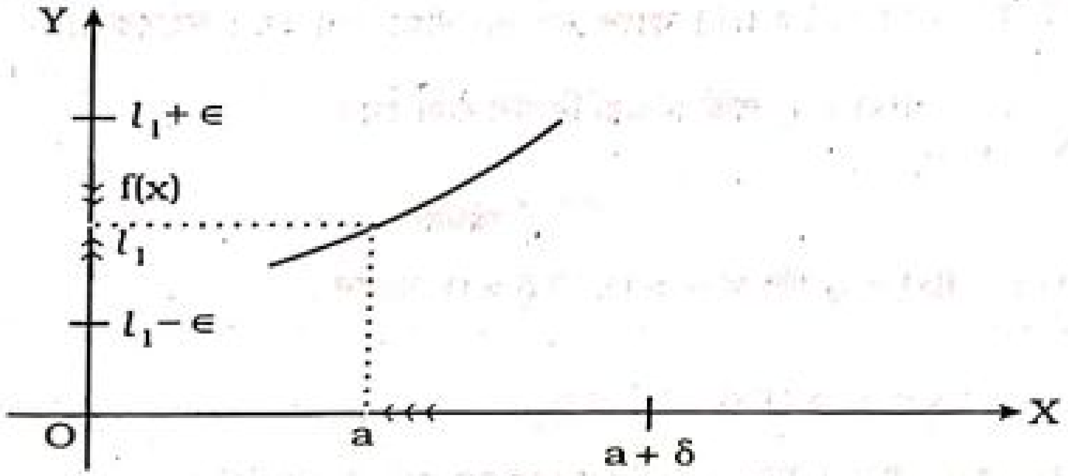
যদি যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ নির্ণয় করা যায় যে, $|x - a| < \delta$ হইলে $|f(x) - l| < \in$ হয়, তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়।

অথবা

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ যদি $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ যেখানে

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \in.$$

3-1.8. ফাংশনের ডানসীমা [Right hand limit of a function] :



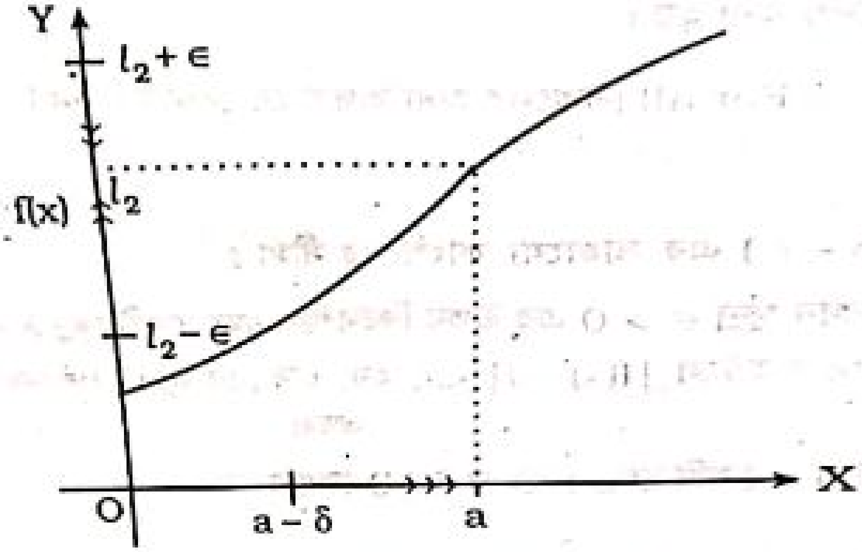
x চলকরাশি a অপেক্ষা বৃহত্তর মানগুলো গ্রহণ করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_1 এর নিকটবর্তী হয়, তবে l_1 কে f(x) ফাংশনের ডানসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x \to a+} f(x) = l_1$ অথবা $\lim_{x \to a+0} f(x) = l_1$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অথবা

$\lim_{x \to a+} f(x) = l_1$ যদি $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ যেখানে

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \in.$$

3-1.9. ফাংশনের বামসীমা [Left hand limit of a function] ঃ



x চলকরাশি a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানগুলো গ্রহণ করিয়া ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক l_2 এর নিকটবর্তী হয়, তবে l_2 কে f(x) ফাংশনের বামসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = l_2$ অথবা $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l_2$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অথবা

$\lim\limits_{x\to a-} f(x) = l_2$ যদি $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ যেখানে

$a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon.$

3-1.10. সীমার অস্তিত্ব [Existence of a limit] ঃ

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর সীমামান বিদ্যমান থাকিবে, যদি

(i). $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ এর মান সসীম হয়,

(ii). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x).$

অথবা

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর সীমামান বিদ্যমান থাকিবে যদি

(i). $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0+} f(a + h)$ এবং

$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{h \to 0-} f(a + h)$ এর মান সসীম হয়।

(ii). $\lim_{h \to 0+} f(a + h) = \lim_{h \to 0-} f(a + h)$.

3-1.11. সীমা বিদ্যমান নাই [Limit does not exist] :

$\lim_{x \to a} f(x)$ এর মান বিদ্যমান থাকিবে না যদি

(i). $\lim_{x \to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a-} f(x)$ এর সসীম হয়

কিন্তু (ii). $\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x)$.

অথবা

$\lim_{x \to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব নাই যদি

(i). $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$ হয়

তবে এইক্ষেত্রে ফাংশনের সীমা বিদ্যমান নাই, কারণ ডানসীমা এবং বামসীমার মান সসীম নহে।

3-1.12. f(a) এবং $\lim_{x \to a} f(x)$ এর অর্থ :

সমাধান : f(x) ফাংশনে x = a স্থাপন করিয়া যে মান পাওয়া যায়, ইহাই f(a).

x এর মান a এর খুব নিকটবর্তী কোন সংখ্যা হইলে কিন্তু x = a না হইলে f(x) এর যে মান পাওয়া যায়, ইহাই হইল $\lim_{x \to a} f(x)$.

3-1.13. $\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$ এর অর্থ :

x চলকরাশি সর্বদা ধনাত্মক মানগুলো গ্রহণ করিয়া সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি f(x) ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l_1 এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $f(x) - l_1$ এর পরম মান যে কোন কল্পনাধীন ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে l_1 কে f(x) এর সীমাস্থ মান বলা হয়, যখন $x \to \infty$ এবং ইহাকে $\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। **[N. U. H–2003]**

আবার x চলকরাশি সর্বদা ঋণাত্মক মানগুলো গ্রহণ করিয়া সংখ্যামানে সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে যদি f(x) ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সসীম রাশি l_2 এর এত নিকটবর্তী হয় যে, $f(x) - l_2$ এর পরমমান যে কোন কল্পনাধীন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে l_2 কে f(x) ফাংশনের সীমাস্থ মান বলা হয় যখন $x \to -\infty$ এবং ইহাকে $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। [N. U. H–2003]

3-1.14. সীমার মৌলিক উপপাদ্য [Basic Limit theorems] :

উপপাদ্য–1 : যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা, [N. U. H–2005]

তবে $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = l + m.$

প্রমাণ : যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m.$

কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (1)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2 \cdots (2)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ এইক্ষেত্রে (1) নং এবং (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এখন $|f(x) + g(x) - (l+m)| = |f(x) - l + g(x) - m|$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l+m)| \le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l+m)| < \epsilon \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = l + m.$

উপপাদ্য–2 : যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা

তবে $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l - m.$

প্রমাণ : যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$

কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (1)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2 \cdots (2)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ এইক্ষেত্রে (1) নং এবং (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x) - l| < \frac{\in}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$$

এবং $|g(x) - m| < \frac{\in}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এখন $|f(x) - g(x) - (l-m)| = |f(x) - l + m - g(x)|$

$$\Rightarrow |f(x) - g(x) - (l-m)| \le |f(x) - l| + |m - g(x)| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |f(x) - g(x) - (l-m)| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = l - m.$

উপপাদ্য–3 : যদি f(x) এবং g(x) ফাংশন দুইটি a বিন্দুর প্রতিবেশে সংজ্ঞায়িত হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ দ্বারা, তবে $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = lm.$

প্রমাণ : $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = lm$ এর জন্য দেখাইতে হইবে

$$|f(x)\, g(x) - lm| < \in \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta.$$

এখন $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m} + \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{m}\right|$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{m}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{1}{m}(f(x) - l)\right| + \left|\frac{f(x)}{mg(x)}(m - g(x))\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \frac{1}{|m|}\,|f(x) - l| + \frac{|f(x)|}{|m|\,|g(x)|}\,|m - g(x)| \cdots (1)$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ কাজেই $\in = 1 > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$ যেখানে $|f(x) - l| < 1$. যখন $0 < |x - a| < \delta_1$

এখন $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x - a| < \delta_1 \cdots (2)$

আবার যেহেতু $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ কাজেই $\in = \frac{|m|}{2} > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_2 > 0$ যেখানে

$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$ যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

এখন $|m| = |m - g(x) + g(x)| \le |m - g(x)| + |g(x)|$

$\Rightarrow |m| < \frac{|m|}{2} + |g(x)|$, যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

$\Rightarrow |g(x)| > \frac{|m|}{2}$ যখন $0 < x - a| < \delta_2$

$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$ যখন $0 < |x - a| < \delta_2 \cdots (3)$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$. এইক্ষেত্রে (2) নং এবং (3) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$|f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x - a| < \delta \cdots (4)$

এবং $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$ যখন $0 < |x - a| < \delta \cdots (5)$

$$\therefore (1) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{1}{|m|}\,|f(x) - l| + \frac{(1 + |l|).2}{|m|^2}\,|g(x) - m| \cdots (6)$$

এখন $|f(x)\,g(x) - lm| = |f(x)\,g(x) - mf(x) + mf(x) - lm|$

$$\Rightarrow |f(x)\,g(x) - lm| \le |f(x)\,g(x) - mf(x)| + |mf(x) - lm|$$

$$\Rightarrow |f(x)\,g(x) - lm| \le |f(x)|\;|g(x) - m| + |m|\;|f(x) - l| \cdots (1)$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ কাজেই $\epsilon = 1$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$ যেখানে

$|f(x) - l| < 1$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1 \cdots (2)$

এখন $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1$.

পুনরায় যেহেতু $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ এবং বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$, $\delta < \delta_2$ যেখানে

$|f(x) - l| < \dfrac{\epsilon}{2|m|}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (3)$

$|g(x) - m| < \dfrac{\epsilon}{2(1 + |l|)}$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (4)$

এবং $|f(x)| < 1 + |l|$ যখন $0 < |x-a| < \delta \cdots (5)$

এখন (3), (4) এবং (5) নং এর সাহায্যে (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x)\,g(x) - lm| < (1 + |l|)\frac{\epsilon}{2(1 + |l|)} + |m|\,\frac{\epsilon}{2|m|}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x)\,g(x) - lm| < \epsilon$, যখন $0 < |x-a| < \delta$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x) = lm$.

উপপাদ্য-4 ঃ যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটি ...

এখন $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m} + \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{m}\right|$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{f(x)}{m} - \frac{l}{m}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{m}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \left|\frac{1}{m}(f(x) - l)\right| + \left|\frac{f(x)}{mg(x)}(m - g(x))\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| \le \frac{1}{|m|}\,|f(x) - l| + \frac{|f(x)|}{|m|\,|g(x)|}\,|m - g(x)| \cdots (1)$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ কাজেই $\epsilon = 1 > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$ যেখানে $|f(x) - l| < 1$. যখন $0 < |x - a| < \delta_1$

এখন $|f(x)| = |f(x) - l + l| \le |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$

$$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |l| \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_1 \cdots (2)$$

আবার যেহেতু $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ কাজেই $\epsilon = \frac{|m|}{2} > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_2 > 0$ যেখানে

$$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_2$$

এখন $|m| = |m - g(x) + g(x)| \le |m - g(x)| + |g(x)|$

$$\Rightarrow |m| < \frac{|m|}{2} + |g(x)|, \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_2$$

$$\Rightarrow |g(x)| > \frac{|m|}{2} \text{ যখন } 0 < x - a| < \delta_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|} \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta_2 \cdots (3)$$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$. এইক্ষেত্রে (2) নং এবং (3) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$|f(x)| < 1 + |l| \text{ যখন } 0 < |x - a| < \delta \cdots (4)$$

এবং $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$ যখন $0 < |x - a| < \delta \cdots (5)$

আবার যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ কাজেই যে কোন ক্ষুদ্র $\epsilon > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ এবং বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ যেখানে

$$|f(x) - l| < \frac{|m|\epsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

$$\text{এবং } |g(x) - m| < \frac{|m|^2\epsilon}{4(1+|l|)} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

$$\therefore (6) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{1}{|m|}\cdot\frac{|m|\epsilon}{2} + \frac{2(1+|l|)}{|m|^2}\cdot\frac{|m|^2\epsilon}{4(1+|l|)}$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$.

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \epsilon \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

উপপাদ্য–5 : যদি $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান হয়, তবে ইহা অবশ্যই অনন্য। [If $\lim_{x\to a} f(x)$ exists then it must be unique.]

প্রমাণ : মনেকরি যদি সম্ভব হয় $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$.

তবে ধরি $\epsilon = |l_1 - l_2| > 0$ এর জন্য বিদ্যমান আছে ক্ষুদ্র $\delta > 0$ যেখানে

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (1)$$

$$\text{এবং } |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta \cdots (2)$$

$$\text{এখন } |l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$$

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| \le |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2};$$

যখন $0 < |x-a| < \delta$. (1) নং এবং (2) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| < \epsilon$$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ ইহা অসম্ভব।

সুতরাং $l_1 = l_2$. অর্থাৎ $\lim_{x\to a} f(x)$ এর সীমা মান অনন্য।

3-1.15. লক্ষনীয় ঃ

(i). $x > a$ কে $x \to a+$ এবং $x < a$ কে $x \to a-$ ধরিয়া ফাংশনের সীমা নির্ণয় করিতে হয়।

(ii). যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর সীমা নির্ণয় করার সময় দেখা যায় যে, $f(x)$ এর লব এবং হরে সাধারন উৎপাদক $x - a$ থাকে, তবে লব এবং হর উভয়কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করিতে হয়। কারণ $x \to a$ এর অর্থ $x - a \to 0$ কিন্তু $x - a \neq 0$, কাজেই এই রকম উৎপাদক দ্বারা ভাগ করা সম্ভব।

(iii). $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

(iv). $\lim\limits_{x \to 0+} e^{1/x} = e^{\infty} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0.$

(v). $\lim\limits_{x \to 0+} e^{-1/x} = e^{-\infty} = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} e^{-1/x} = e^{\infty} = \infty$

(vi). যেহেতু θ এর সকল মানের জন্য $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

কাজেই $-1 \leq \sin(1/h) \leq 1.$

কিন্তু $\lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}$ = (– 1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন অনির্দিষ্ট সংখ্যা অর্থাৎ নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করা গেল না। অর্থাৎ অনির্ণেয়।)

(vii). $\lim\limits_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h \lim\limits_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}.$

$= 0 \times$ (– 1 এবং 1 মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0.$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 ঃ (i). যদি $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডানসীমা এবং বাম সীমার মান একই এবং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান।

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ হয় তবে $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ ... (1)

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$; (1) নং দ্বারা।

$$= \lim_{x \to 3+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x-2) = 3 - 2 = 1$$

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$; (1) নং দ্বারা।

$$= \lim_{x \to 3-} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3-} (x-2) = 3 - 2 = 1.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 1$, কাজেই $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা মান বিদ্যমান আছে।

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

সমাধান ঃ (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ... (1)

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; (1) নং দ্বারা

$$= \lim_{x \to 2+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; (1) নং দ্বারা।

$$= \lim_{x \to 2-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} (x+2) = 2 + 2 = 4.$$

Bondo

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 4$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4.$

উদাহরণ–2 ঃ যদি $f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন } x > 1/2 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

[ঢাঃ বিঃ নঃ '86]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন } x > 1/2 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = 1 - 2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1-2x) = 1 - 2(0) = 1 - 0 = 1$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = 1 + 2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (1+2x) = 1 + 2(0) = 1 + 0 = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1.$ সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

যখন $x > 1/2$ তখন $f(x) = -1 + 2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim_{x\to (1/2)+} (-1+2x) = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$

যখন $x < 1/2$ তখন $f(x) = 1 - 2x$ কাজেই

$$\lim_{x\to (1/2)-} f(x) = \lim_{x\to (1/2)-} (1-2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to (1/2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to (1/2)-} f(x) = 0$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = 0.$

উদাহরণ–3 ঃ একটি ফাংশন f(x) নিম্ন লিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 3 & \text{যখন } x = 1; \\ x^2 + 1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 3 & \text{যখন } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = x^2 + 1$ কাজেই

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = x^2$ কাজেই

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1^2 = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1-} f(x)$.

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

উদাহরণ–4 ঃ যদি $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x}$ হয়, তবে

(i). $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii). $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর। [ঢাঃ বিঃ '86]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x}$

(i). $$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{2x}{1 - x} = \frac{2}{0-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{2x}{1 - x} = \frac{2}{0+} = \infty$$

(ii). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x(1/x-1)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x-1} = \frac{2}{0-1} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x(1/x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x-1} = \frac{2}{0-1} = -2.$$

উদাহরণ–5 ঃ যদি $f(x) = \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

যখন $x > 0$ তখন $|x| = x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x+x}{7x-5x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{4x}{2x} = \lim_{x\to 0+} 2 = 2.$$

আবার যখন $x < 0$ তখন $|x| = -x$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{3x-x}{7x-5(-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{2x}{12x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

উদাহরণ–6 ঃ যদি $f(x) = [x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর এবং $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = [x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3$

আমরা জানি $[x] = x$ এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা $\not> x$.

যখন $x > 1$ তখন $[x] = 1$ এবং $|x-1| = x-1$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to 1+} [x] + \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} + \lim_{x\to 1+} 3.$$

$$= [1+] + \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{x-1} + 3$$

$$= 1 + \lim_{x\to 1+} (1) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5.$$

যখন $x < 1$ তখন $[x] = 0$ এবং $|x-1| = -(x-1)$ কাজেই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to 1-} [x] + \lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} + \lim_{x\to 1-} 3$$

$$= [1-] + \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} + 3$$

$$= 0 + \lim_{x\to 1-} (-1) + 3 = 0 - 1 + 3 = 2.$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

উদাহরণ-7 : (i). যদি $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

তবে $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান? [ঢাঃ বিঃ '87]

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ হয় তবে $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

সমাধান : (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = x^2$ কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x^2 = 0$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = e^{-|x|/2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} e^{-|x|/2} = \lim_{x \to 0-} e^{x/2} = e^0 = 1$$

যেহেতু $|x| = -x$ যদি $x < 0$.

যেহেতু $\lim_{x \to 0+} f(x) \ne \lim_{x \to 0-} f(x)$

সুতরাং $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

$\boxed{e^{-\infty} = 0}$

সমাধান : (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{xe^{1/x}}{e^{1/x}(e^{-1/x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{x}{e^{-1/x} + 1} = \frac{0}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \to 0-} x \lim_{x \to 0-} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

$$= 0 . \frac{e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = 0 . \frac{0}{1 + 0} = 0$$

যেহেতু $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 0$. কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান।

সুতরাং $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

উদাহরণ–৪ : (i). যদি $f(x) = \begin{cases} \tan(x/2) & \text{যখন } x < \pi/2 \\ 3 - \pi/2 & \text{যখন } x = \pi/2 \\ \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2} & \text{যখন } x > \pi/2 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to (\pi/2)+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to (\pi/2)-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to (\pi/2)} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

সমাধান : (i). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} \tan(x/2) & \text{যখন } x < \pi/2 \\ 3 - \pi/2 & \text{যখন } x = \pi/2 \\ \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2} & \text{যখন } x > \pi/2 \end{cases}$

যখন $x > \pi/2$ তখন $f(x) = \dfrac{x^3 - \pi^3/8}{x - \pi/2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)+} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)+} \frac{x^3 - (\pi/2)^3}{x - \pi/2}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)+} \frac{(x - \pi/2)(x^2 + x\pi/2 + \pi^2/4)}{x - \pi/2}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)+} \left(x^2 + x\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2^2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{3\pi^2}{4}$$

যখন $x < \pi/2$ তখন $f(x) = \tan\dfrac{x}{2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)-} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)-} \tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to (\pi/2)+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (\pi/2)-} f(x)$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to (\pi/2)} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

সমাধান ঃ (ii). প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x \neq 0$ অর্থাৎ $x > 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 \cos\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} x^2 \lim_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x}$$
$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0.$ যেহেতু $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1.$

আবার যখন $x \neq 0$ অর্থাৎ $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x^2 \cos\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0-} x^2 . \lim_{x\to 0-} \cos\frac{1}{x}$$
$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা)

$= 0.$

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$

কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান। সুতরাং $\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$

উদাহরণ–9 ঃ (i). (δ-$\in$) সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে

$$\lim_{x\to 3} 2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 = 2.$$

(ii). (δ- $\in$) সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ এবং δ এর মান নির্ণয় কর যখন $\in = 1.$ **[ঢাঃ বিঃ সঃ '80]**

(iii). (δ- $\in$) সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর ঃ $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4}.$

[ঢাঃ বিঃ সঃ '83]

সমাধান ঃ (i). ধরি $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x + 29 \cdots (1)$

যেহেতু $x \to 3$ কাজেই মনেকরি $|x - 3| < \delta$ যখন $\delta > 0 \cdots (2)$

এখন $|f(x)-2| = |2x^3-3x^2-18x+29-2|$; (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)-2| = |2x^3-3x^2-18x+27|$

$\Rightarrow |f(x)-2| = |2(x^3-9x^2+27x-27)+15x^2-72x+81|$

$\Rightarrow |f(x)-2| = |2(x-3)^3+15(x^2-6x+9)+18x-54|$

$\Rightarrow |f(x)-2| = |2(x-3)^3+15(x-3)^2+18(x-3)|$

$\Rightarrow |f(x)-2| < |2(x-3)+15(x-3)+18(x-3)|$; যেহেতু $|x-3|<1$

$\Rightarrow |f(x)-2| < |35(x-3)|$

$\Rightarrow |f(x)-2| < 35|x-3| < 35\delta$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)-2| < 35\delta.$

$\Rightarrow |f(x)-2| < \in$ যখন $\in = 35\delta.$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-2| < \in$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 3} 2x^3-3x^2-18x+29 = 2.$ প্রমাণিত।

সমাধান : (ii). ধরি $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} \cdots (1)$

যেহেতু $x \to 1$ কাজেই ধরি $|x-1| < \delta$ যখন $\delta > 0 \cdots (2)$

এখন $|f(x)-3| = \left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|$; (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)-3| = \left|\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}-3\right|$

$\Rightarrow |f(x)-3| = |x^2+x+1-3|$

$\Rightarrow |f(x)-3| = |x^2-2x+1+3x-3|$

$\Rightarrow |f(x)-3| = |(x-1)^2+3(x-1)|$

$\Rightarrow |f(x)-3| < |(x-1)+3(x-1)|$; যেহেতু $|x-1| < \delta < 1.$

$\Rightarrow |f(x)-3| < |4(x-1)|$

$\Rightarrow |f(x)-3| < 4|x-1| < 4\delta$; (2) নং দ্বারা।

$\Rightarrow |f(x)-3| < 4\delta$

$\Rightarrow |f(x)-3| < \in$ যখন $\in = 4\delta$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \in$

সুতরাং $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3.$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$ প্রমাণিত।

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমাদের আছে $\in = 4\delta$

যখন $\in = 1$ তখন $4\delta = 1$, বা $\delta = \dfrac{1}{4}$.

সমাধান ঃ (iii). ধরি $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3} \cdots (1)$

যেহেতু $x \to 1$ কাজেই মনেকরি $|x-1| < \delta$ যখন $\delta > 0 \cdots (2)$

এখন $\left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{x-1}{x^2+2x-3} - \dfrac{1}{4}\right|$; (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{4}\right|$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{x+3} - \frac{1}{4}\right|$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-x-3}{4(x+3)}\right| = \left|\frac{1-x}{4(x+3)}\right|$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| = \frac{|x-1|}{|4(x+3)|} = \frac{|x-1|}{4|x+3|} < \frac{|x-1|}{4}$$

যেহেতু $\dfrac{1}{|x+3|} < 1$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < \frac{|x-1|}{4} < \frac{\delta}{4}$$; (2) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < \frac{\delta}{4}$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < \in \text{ যখন } \in = \frac{\delta}{4}.$$

অতএব যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে $|x-1| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{1}{4}\right| < \in$

সুতরাং $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}$

অর্থাৎ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}$.

বিবিধ উদাহরণ-10 : যদি $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ তবে দেখাও যে

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন} \quad |x| < 1 \\ 1/2 & \text{যখন} \quad |x| = 1. \\ 0 & \text{যখন} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

সমাধান : দেওয়া আছে $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} \cdots (1)$

যদি $|x| < 1$ হয় তবে $x^2 < 1$

যেহেতু $x^2 < 1$ কাজেই $(x^2)^2$ এর মান, $(x^2)^3$ এর মান, ··· ক্রমশ ক্ষুদ্র হইতে হয়।

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} \to 0$ যখন $n \to \infty$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

এবং যদি $|x| = 1$ হয় তবে $x^2 = 1$

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} = 1$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

আবার যদি $|x| > 1$ হয় তবে $x^2 > 1$

যেহেতু $x^2 > 1$ কাজেই $(x^2)^2$ এর মান, $(x^2)^3$ এর মান ··· ক্রমশ বৃদ্ধি পায়।

এইক্ষেত্রে $(x^2)^n = x^{2n} \to \infty$ যখন $n \to \infty$

$\therefore (1) \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

সুতরাং $f(x)$ কে নিম্নরূপে লিখা যায়

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন} \quad |x| < 1 \\ 1/2 & \text{যখন} \quad |x| = 1. \\ 0 & \text{যখন} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–3(A)

1(i). যদি $f(x) = \dfrac{2x+8}{x^2+x-12}$ হয় তবে $x = -4$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমা কি বিদ্যমান?

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ হয় তবে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডানসীমা এবং বামসীমার মান নির্ণয় কর। $x = 2$ বিন্দুতে কি $f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান?

(iii). যদি $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ হয় তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

2(i). যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল :

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{যখন } x \geq 0 \\ 2-3x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(iii). একটি ফাংশন $f(x)$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{যখন } x < 3 \\ 5 & \text{যখন } x = 3 \\ 2(5-x) & \text{যখন } x > 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{যখন } x > 0 \\ 1/2 & \text{যখন } x = 0 \\ x+1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(v). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{যখন} \quad x \le 1 \\ 3-x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(vi). একটি ফাংশন $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{যখন} \quad -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ -1+2x & \text{যখন} \quad 1/2 < x \end{cases}$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। f^{-1} নির্ণয় কর [যদি থাকে]; যদি না থা তবে কারণ দর্শাও। $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to 1/2} f(x)$ নির্ণয় কর। f এর ছবি আঁক এ f^{-1} [যদি থাকে] এর ছবি আঁক। [ঢাঃ বিঃ সঃ '৯]

3(i). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন} \quad x > 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \\ 1+x & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(ii). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x > 1 \\ 2 & \text{যখন} \quad x = 1 \\ x & \text{যখন} \quad x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to 1-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iii). একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x < 1 \\ 3 & \text{যখন} \quad x = 1 \\ x^2+2 & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

প্রমাণ কর যে $\lim_{x \to 1} f(x)$ এর সীমা বিদ্যমান নাই।

(iv). নিম্নের ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{যখন} \quad x < 1 \\ x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $\lim_{x \to 0} f(x)$ ও $\lim_{x \to 1} f(x)$ নির্ণয় কর।

[ঢাঃ বিঃ সঃ '89]

4(i). যদি $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(a). $\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x \to 1-} f(x) = \infty$

(b). $\lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty$

(c). $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ হয়, তবে

(a). $\lim_{x \to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to 1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(b). $\lim_{x \to -1+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to -1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(c). $\lim_{x \to \infty} f(x)$ এবং $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ নির্ণয় কর।

5(i). যদি $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ হয়, তবে $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(ii). $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ হইলে দেখাও যে $\lim_{x \to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

(iii). যদি $f(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}$ হয়, তবে $\lim_{x \to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-4|}{x-4} & \text{যখন } x \neq 4 \\ 0 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to 4+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 4-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

6(i). যদি একটি ফাংশন f কে $f(x) = [x]$ দ্বারা বর্ণনা করা হয়, যখন $[x]$ দ্বারা x এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায় যাহা x হইতে বৃহত্তর নয়, তবে প্রমাণ কর $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$ এবং $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0$.

(ii). যদি $f(x) = x - [x]$ হয় তবে $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য দেখাও যে

$\lim\limits_{x \to n+} f(x) = 0$ এবং $\lim\limits_{x \to n-} f(x) = 1$.

(iii). দেখাও যে $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x}{[x]}$ বিদ্যমান নয়।

(iv). যদি $f(x) = \left[\dfrac{x}{3}\right]$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 3-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(v). যদি $f(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right]$ হয় তবে $\lim\limits_{x \to 3/2} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(vi). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} [x + 1/2] & \text{যখন } x > 1/2 \\ 0 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 2x & \text{যখন } x < 1/2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to (1/2)+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (1/2)-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to (1/2)} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

7(i). যদি একটি ফাংশন f কে $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}}$ দ্বারা বর্ণনা করা হয়, তবে

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(ii). যদি $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ এর মান [যদি থাকে] নির্ণয় কর।

(iii). $f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}$ হইলে দেখাও যে $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

(iv). যদি $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ হয় তবে $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(v). যদি $f(x) = \frac{1}{3 + e^{1/(x-2)}}$ হয়, তবে $\lim_{x \to 2} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান?

(vi). $\lim_{x \to \pi/2} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(vii). $\lim_{x \to 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(viii). $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

৪(i). যদি $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ হয়, তবে $\lim_{x \to 1+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to 1-} f(x)$ নির্ণয় কর।

(ii). $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ এর সীমার বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

(iii). প্রমাণ কর $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$

(iv). যদি $f(x) = \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(v). দেখাও যে $\lim_{x \to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয় যেখানে $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

[N. U. H-2004]

9. নিম্ন বর্ণিত সীমা সমূহকে $(\delta - \in)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর ঃ

(i). $\lim_{x \to 2} 3x + 4 = 10$ (ii). $\lim_{x \to 4} 2x - 2 = 6$

(iii). $\lim_{x \to 2} x^2 - 3x + 5 = 3$ (iv). $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 7 = 9$

(v). $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$ (vi). $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

[N. U. H-2003]

(vii). $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x-2} = 8$ (viii). $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

(ix). $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$ (x). $\lim_{x\to 1/2} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2$

(xi). $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{2x+1} = 1$

বিবিধ–10 : (i). উদাহরণসহ $f(x)$ এর নিম্নলিখিত অবস্থগুলো ব্যাখ্যা কর :

(a). $f(a)$ এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে এবং উহারা সমান।

(b). $f(a)$ এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা অসমান।

(c). $f(a)$ এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ উভয়েই অস্তিত্বহীন।

(d). $f(a)$ এর অস্তিত্ব আছে কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x)$ অস্তিত্বহীন।

(e). $f(a)$ অস্তিত্বহীন কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

(ii). কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব আছে যদিও ঐ বিন্দুতে ফাংশন অস্তিত্বহীন, উদাহরণ দ্বারা সত্যতা প্রমান কর। [রাঃ বিঃ '79]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{1/x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ e^2 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iv). প্রমাণ কর : $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

(v). প্রমাণ কর $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i). $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = -\frac{2}{7}$

(ii). $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

(iii). $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

2(i). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

(ii). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 2$

(iii). $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 4$

(iv). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$

(v). $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

3(i). $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

(ii). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 1$

4(ii) (a). $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \infty$

(b). $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \infty$

(c). $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

5(i). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

(iii). $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = -1$

(iv). $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to 4-} f(x) = -1$

6(iv). $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 0$

(v). $\lim\limits_{x\to 3/2} f(x) = 0$

(vi). $\lim\limits_{x\to (1/2)+} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to (1/2)-} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = 1$

7(i). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1;\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$

(ii). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই। (iv). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর মান বিদ্যমান না

(v). $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ এর মান বিদ্যমান নাই। (vi). সীমা মান বিদ্যমান নাই।

(vii). সীমা মান বিদ্যমান নাই। (viii). 1

8(i). $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$

(ii). $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

10 (a). $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$; (b). $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন } x \neq 0 \\ 4 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$

(c). $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ (d). $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{যখন } x > 1 \\ 5 & \text{যখন } x = 1 \\ x-2 & \text{যখন } x < 1 \end{cases}$

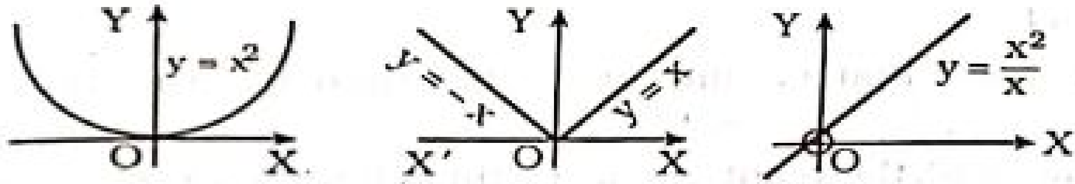
(e). $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ (iii). $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^2$.

———x———

তৃতীয় অধ্যায় [CHAPTER THERE]
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION TWO]
অবিচ্ছিন্নতা [CONTINUITY]

3-2.1. ভূমিকা [Introduction] :

সাধারণভাবে কোন একটি ফাংশন অবিচ্ছিন্ন অথবা ছেদহীন হইলে উহার লেখচিত্রটি পেন্সিল না তুলিয়া একটানে অংকন করা যায়। আবার কোন বিন্দুতে ফাংশনের লেখচিত্র যদি পেন্সিল তুলিয়া অংকন করিতে হয়, তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।



উদাহরণ স্বরূপ প্রথম দুইটি চিত্রে $f(x) = x^2$ এবং $f(x) = x$, $f(x) = -x$ ফাংশনের লেখচিত্র সর্বদা অবিচ্ছিন্ন। কিন্তু তৃতীয় চিত্রে $f(x) = \frac{x^2}{x}$ ফাংশনের মান $x = 0$ বিন্দুতে $f(0) = \frac{0}{0}$ অনির্ণেয় বলিয়া $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

তৃতীয় অধ্যায়ের প্রথম পরিচ্ছেদে ফাংশনের সীমা $\lim_{x \to a} f(x) = l$ নির্ণয়ের সময় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা হয় নাই এবং উহা নির্ণয় করার প্রয়োজনও পড়ে নাই। $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$; ইহা l এর সমান হইতেও পারে, নাও হইতে পারে।

যদি $f(a) = l$ হয়, অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে। এই অধ্যায়ে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

[**Introduction** : Generally if any function is continuous then its graph is drawn at a stretch without lift up a pencil. Again if a graph is drawn with lift up a pencil at a point then the function is not continuous at that point.

For example [Fig-1, Fig-2] the graph of the functio[n] $f(x) = x^2$, $f(x) = x$ and $f(x) = -x$ are always continuous. But [in fig-] the value of $f(x) = \frac{x^2}{x}$ at the point $x = 0$ is $f(0) = \frac{0}{0}$ which is undefin[ed]. So the function $f(x)$ is discontinuous at $x = 0$.

First section of third chapter, at the time of determine th[e] limit of a function $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, the value of $f(x)$ at the po[int] $x = a$ is not determined and it is not require to determined.

The value of the function $f(x)$ at $x = a$ is $f(a)$. It may or may n[ot] equal to l.

If $f(a) = l$, that is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ then the function $f(x)$ [is] continuous at the point $x = a$. In this chapter we shall disc[uss] about the continuity of a function.]

3-2.2. অবিচ্ছিন্ন ফাংশন [Continuous function] :

সংজ্ঞা : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হইবে যদি নিম্নের [তিনটি] শর্ত সিদ্ধ হয়।

(i). $f(a)$ সংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ সসীম হয়।

(ii). $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ এর মান বিদ্যমান এবং

(iii). $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

অথবা

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হইবে যদি $f(a)$ সংজ্ঞায়িত অ[র্থাৎ] $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ সসীম এবং

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

অথবা $\lim\limits_{h \to 0+} f(a + h) = \lim\limits_{h \to 0-} f(a + h) = f(a)$.

[**Definition :** A function f(x) is said to be continuous at a point x = a if the following 3 conditions are satisfied :

(i). f(a) is defined that is the value of f(x) at x = a is f(a) is finite.

(ii). $\lim_{x \to a} f(x)$ exists.

(iii). $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A function f(x) is said to be continuous at the point x = a if f(a) is defined i.e. , the value of f(x) at x = a is f(a) is finite and

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

or

$$\lim_{h \to 0+} f(a+h) = \lim_{h \to 0-} f(a+h) = f(a)$$

3-2.3. (δ − ∈) এর সাহায্যে অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা ঃ

x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হইবে যদি যে কোন ক্ষুদ্র $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in.$$

অথবা

x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হইবে যদি $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ যেন

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in.$$

[**Continuity by (δ − ∈) definition :**

A function f(x) is said to be continuous at the point x = a if for any $\in > 0$ there exists a $\delta > 0$ [δ depends on ∈] such that

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in.$$

or

[A function f(x) is said to be continuous at the point x = a if $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ s. t.

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in.]$$

3-2.4. বামদিক থেকে অবিচ্ছিন্ন [Continuity from Left] :

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে বামদিক থেকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয়।

যদি $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

[A function $f(x)$ is said to be continuous from left at a point $x = a$ if $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$]

3-2.5. ডানদিক থেকে অবিচ্ছিন্ন [Continuity from right] :

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে ডানদিক থেকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি [A function $f(x)$ is said to be continuous from right at a point $x = a$ if]

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

3-2.6. খোলা ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন [Continuity in an open interval] :

(a, b) অথবা $]a, b[$ খোলা ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি (a, b) ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c), \forall c \in (a, b)$.

3-2.7. বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন [Continuity in a closed interval] :

সংজ্ঞা : $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয়, যদি প্রান্তবিন্দু a, b সহ ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়।

[**Definition** : A function $f(x)$ is said to be continuous on a closed interval $[a, b]$ if it is continuous at each point of the interval including a and b.]

সংজ্ঞা : $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি নিম্নের 3 টি শর্ত সিদ্ধ হয় :

[A function f(x) is said to be continuous on a closed interval [a, b] if the following 3 conditions are satisfied]

(i). $\lim_{x \to c} f(x) = f(c),\ \forall c \in (a, b)$

(ii). $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$; (b) $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

উদাহরণ **[Example]** : [– 5, 5] ব্যবধিতে $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর। [Examine the continuity of the function $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ in the interval [– 5, 5]]

Solution : প্রথমত (– 5, 5) খোলা ব্যবধিতে অতঃপর প্রান্তবিন্দু – 5 এবং 5 এ f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা নির্ণয় করিব। [At first we shall determine the continuity of f(x) on an open interval (– 5, 5) and then at the end points – 5 and 5]

প্রদত্ত ফাংশন [Given function is]

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \cdots (1)$$

(1) নং এ x = c, – 5 এবং 5 স্থাপন করিয়া পাই [Putting x = c, – 5 and 5 in (1) we get]

$f(c) = \sqrt{25 - c^2}$, $f(-5) = 0$ এবং $f(5) = 0$

মনে করি (– 5, 5) ব্যবধিতে c যে কোন বিন্দু তবে [Let c be any point in the interval (– 5, 5) then]

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to c} (25 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = \sqrt{25 - c^2} = f(c).$$

$$\lim_{x \to -5+} f(x) = \lim_{x \to -5+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to -5+} (25 - x^2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -5+} f(x) = 0 = f(-5)$$

and $\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 5-} (25 - x^2)}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 5-} f(x) = 0 = f(5)$

সুতরাং [− 5, 5] বদ্ধ ব্যবধিতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [Thus f(x) is continuous on the closed interval [− 5, 5]]

3-2.8. বিচ্ছিন্ন ফাংশন [Discontinuous function] :

সংজ্ঞা : বিচ্ছিন্ন ফাংশন অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের বিপরীত। $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন না হয়। এই বিন্দুকে বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলা হয়।

অথবা

$x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি নিম্নে বর্ণিত এক বা একাধিক শর্ত সত্য হয় :

(i). f(a) সংজ্ঞায়িত না হয়, অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে f(x) এর মান f(a) অসীম হয়।

(ii). $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ এই শর্ত পূরণ না হয়।

(iii). ফাংশনের লেখচিত্রে এক বা একাধিক বিন্দুতে f(x) এর মান নির্ণয় করা না যায়।

[**Definition :** A function f(x) is said to be discontinuous at a point $x = a$ if it is not continuous at $x = a$. This point is called the point of discontinuity.

or

A function f(x) is said to be discontinuous at a point $x = a$ if any one or more conditions of the following is true :

(i). f(a) is undefined that is, the value of f(x) at $x = a$ is f(a) is infinite.

(ii). $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, this condition is not satisfied.

(iii). The value of f(x) is not determined at one or more points in the graph of function.]

3-2.9. বিচ্ছিন্নতার শ্রেণী বিভাগ [Types of discontinuities] :

ছয় প্রকারের বিচ্ছিন্নতা নিম্নরূপ ঃ

1. প্রথম প্রকারের বিচ্ছিন্নতা (সাধারণ বিচ্ছিন্নতা) [Discontinuity of the first kind (ordinary discontinuity)] :

সংজ্ঞা ঃ যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান সসীম অথবা অসীম হইতে পারে এবং উভয় সীমা $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ বিদ্যমান কিন্তু $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ কে প্রথম প্রকারের [বা সাধারণ] বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।]

a বিন্দুকে বাম বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলা হয় যদি $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq f(a) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

a বিন্দুকে ডান বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

[**Definition** : If the value of $f(x)$ at $x = a$ may be finite or infinite and both the limits $\lim\limits_{x \to a+}$ and $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ exist but $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$. Then the function $f(x)$ is said to have discontinuity of the first kind [ordinary discontinuity] at the point $x = a$.

The point a is called to be a point of discontinuity from left

$$\text{if } \lim_{x \to a-} f(x) \neq f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

The point a is called to be a point of discontinuity from right

$$\text{if } \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \neq \lim_{x \to a+} f(x).$$

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}}$ এর $x = 0$ বিন্দুতে প্রথম প্রকারের [সাধারণ] বিচ্ছিন্নতা আছে।

[Show that $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}}$ has a discontinuity of the first kind [ordinary discontinuity] at $x = 0$.]

Solution : দেওয়া আছে [Given that] $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-1/x}}$

এখানে $x = 0$ বিন্দুতে f(x) এর প্রথম প্রকারের বিচ্ছিন্নতা আছে। কারণ [Here f(x) has a discontinuity of the first kind at $x = 0$, because]

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = \frac{1}{1 + e^{\infty}} = F(1, 1 + \infty) = \frac{1}{\infty} = 0$$

and $f(0) = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$, finite [সসীম]

যেহেতু [since] $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$ and f(0) finite [সসীম]

কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে f(x) এর একটি সাধারণ [১ম প্রকারের] বিচ্ছিন্নতা আছে। [So f(x) has a discontinuity of the first kind [ordinary discontinuity at $x = 0$.]

2. অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা [Removable discontinuity] :

যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকে এবং $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) \neq f(a)$ হয়, তবে এই ধরণের বিচ্ছিন্নতাকে $x = a$ বিন্দুতে অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

এইক্ষেত্রে $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে এমনভাবে পুনঃ সংজ্ঞায়িত করা হয় যেন $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয় এবং ইহার ফলে $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন করা যায়।

এই জন্যই এই রকমের বিচ্ছিন্নতাকে অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

[**Definition :** If $\lim_{x \to a} f(x)$ exists and $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ then this type discontinuity is called removable discontinuity.

In this case, the function redefining at the point $x = a$ in such a manner that $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ and consequently f(x) can be made continuous at the point $x = a$. For this reason, this type of discontinuity is called removable discontinuity.]

উদাহরণ ঃ একটি ফাংশন f নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত [A function f is defined as follows]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{if } x \neq a, \text{ i. e. } x > a \text{ or } x < a \\ 3a & \text{if } x = a \end{cases}$$

$x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা আছে, কারণ [There is a removable discontinuity of the function f(x) at the point $x = a$, because]

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a+} (x + a) = a + a = 2a; \text{ যেহেতু } x - a \neq 0$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a-} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a-} (x + a) = a + a = 2a.$$

$$\therefore \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = 2a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 2a$$

But given that [কিন্তু দেওয়া আছে] $f(a) = 3a$

যেহেতু $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান কিন্তু [since $\lim_{x \to a} f(x)$ exists but]

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

কাজেই $x = a$ একটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু [So $x = a$ is a point of discontinuity]

যদি f(x) ফাংশনকে নিম্নরূপে পুনঃসংজ্ঞায়িত করা যায় [If the function f(x) is redefined as follows] :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & \text{if } x \neq a \\ 2a, & \text{if } x = a \end{cases}$$

যখন $x = a$ তখন [when $x = a$ then] $f(x) = 2a \Rightarrow f(a) = 2a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2a = f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

এখানে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন এবং অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা অপসারণ হইল। [Here $f(x)$ is continuous at $x = a$ and the removable discontinuity is removed.]

3. দ্বিতীয় প্রকারের বিচ্ছিন্নতা [Discontinuity of the second kind] :

সংজ্ঞা : যদি $\lim_{x \to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a-} f(x)$ এর একটি অথবা দুইটিই বিদ্যমান না থাকে, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। এই ধরণের বিচ্ছিন্নতাকে দ্বিতীয় প্রকারের বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

$x = a$ বিন্দুকে বাম থেকে দ্বিতীয় প্রকারের বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলা হয় যদি $\lim_{x \to a-} f(x)$ বিদ্যমান না থাকে এবং $x = a$ বিন্দুকে ডান থেকে দ্বিতীয় প্রকারের বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলা হয় যদি $\lim_{x \to a+} f(x)$ বিদ্যমান না থাকে।

[**Definition :** If one of the limits $\lim_{x \to a+} f(x)$ and $\lim_{x \to a-} f(x)$ and both the limits do not exist. Then $f(x)$ is discontinuous at the point $x = a$. This type of discontinuity is called discontinuity of the second kind.

The point a is called point of discontinuity of the second kind from left if $\lim_{x \to a-} f(x)$ does not exist.

The point a is called point of discontinuity of the second kind form right if $\lim_{x \to a+} f(x)$ does not exist.]

4. মিশ্র বিচ্ছিন্নতা [Misced discontinuity] :

সংজ্ঞা : যদি $x = a$ বিন্দুর একদিকে $f(x)$ এর প্রথম প্রকারের বিচ্ছিন্নতা এবং অপরদিকে দ্বিতীয় প্রকারের বিচ্ছিন্নতা থাকে, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মিশ্র বিচ্ছিন্নতা আছে।

[**Definition** : If f(x) has a discontinuity of the first kind on one side of x = a and a discontinuity of second kind on the other side of x = a. Then f(x) is called a mixed discontinuity at x = a.]

5. অসীম বিচ্ছিন্নতা [Infinite discontinuity] :

যদি $\lim_{x \to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a-} f(x)$ এর যে কোন একটি অথবা উভয়টির মান ∞ অথবা $-\infty$ হয়, তবে এই বিচ্ছিন্নতাকে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অসীম বিচ্ছিন্নতা বলা হয়। এই বিচ্ছিন্নতায় f(a) এর মান সসীম অথবা অসীম হইবে।

[**Definition** : If one or both the limits of $\lim_{x \to a+} f(x)$ and $\lim_{x \to a-} f(x)$ is ∞, or $-\infty$ then f(x) is called infinite discontinuity at the point x = a. In this discontinuity the value of f(a) is finite or infinite.]

উদাহরণ [Example] : দেখাও যে x = 3 বিন্দুতে $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ এর অসীম বিচ্ছিন্নতা আছে।

[Show that $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ has a infinite discontinuity at the point x = 3]

Solution : দেওয়া আছে [Given that] $f(x) = \frac{2x}{x-3}$.

x = 3 বিন্দুতে f(x) এর অসীম বিচ্ছিন্নতা আছে, কারণ [f(x) has an infinite discontinuity at the point x = 3, because]

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \frac{2x}{x-3} = \frac{2(3)}{0+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} \frac{2x}{x-3} = \frac{2(3)}{0-} = -\infty$$

এবং [and] $f(3) = \frac{6}{0} = \infty$.

সুতরাং x = 3 বিন্দুতে f(x) এর অসীম বিচ্ছিন্নতা আছে। [Hence f(x) has an infinite discontinuity at the point x = 3.]

6. দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতা [Oscillatory discontinuity] :

যে সকল বিন্দুতে f(x) ফাংশন সসীমভাবে অথবা অসীমভাবে দোদুল্যমান হয়, সে সকল বিন্দুকে দোদুল্যমান বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলা হয় এবং এই সকল বিচ্ছিন্ন বিন্দুর সাপেক্ষে f(x) ফাংশনটিকে দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতা বলা হয়। এইক্ষেত্রে f(x) ফাংশনটি $-\infty$ অথবা ∞ এর দিকে অগ্রসর হইতেও পারে নাও হইতে পারে।

উদাহরণ [Example] : দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ফাংশনের দোদুল্যান বিচ্ছিন্নতা আছে। [Show that the function $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ has an oscillatory discontinuity at the point $x = 0$]

Solution : এখানে $\sin\frac{1}{x}$ ফাংশনটি -1 এবং 1 এর মধ্যে দোদুল্যমান এবং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন। সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতা আছে।

[Here the function $\sin\frac{1}{x}$ oscillates between -1 and 1 and f(x) is discontinuous at the point $x = 0$. Hence f(x) has an oscillatory discontinuity at the point $x = 0$.]

3-2.10. একটি বিন্দুতে ফাংশনের লম্ফ [Jump of a function at a point] :

সংজ্ঞা : যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের জন্য উভয় সীমা $\lim_{x\to a+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a-} f(x)$ বিদ্যমান থাকে, তবে অঋণাত্মক পার্থক্য $\lim_{x\to a+} f(x) \sim \lim_{x\to a-} f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে f(x) এর লম্ফ বলা হয়।

যদি প্রদত্ত ব্যবধিতে কোন ফাংশনের সসীম সংখ্যক লম্ব থাকে তবে উক্ত ব্যবধিতে ফাংশনটি খন্ড অবিচ্ছিন্ন।

[Definition : If for a function f(x), both the limits $\lim_{x\to a+} f(x)$ and $\lim_{x\to a-} f(x)$ exist at a point $x = a$ then the non-negative diference $\lim_{x\to a+} f(x) \sim \lim_{x\to a-} f(x)$ is called the jump of a function f(x) at the point $x = a$.

If a function having a finite number of jumps in a given interval then f(x) is sectionally continuous or piecewise continuous in that interval].

উপপাদ্য [Theorem] : যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $g(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয় তবে দেখাও যে [If $f(x)$ and $g(x)$ are continuous at the point $x = a$ then show that]

(i) $x = a$ বিন্দুতে $f(x) + g(x)$ অবিচ্ছিন্ন [$f + g$ is continuous at a]

(ii). a বিন্দুতে $f - g$ অবিচ্ছিন্ন [$f - g$ is continuous at a]

(iii). a বিন্দুতে fg অবিচ্ছিন্ন [fg is continuous at a]

(iv). a বিন্দুতে f/g অবিচ্ছিন্ন যদি $g(a) \neq 0$ [f/g is continuous at a if $g(a) \neq 0$]

Proof : (i). $x = a$ বিন্দুতে $f + g$ এর অবিচ্ছিন্নতার জন্য দেখাইতে হইবে [Continuity of $f + g$ at the point $x = a$ we have to show that]

$$\forall \in > 0, \exists \delta > 0 \text{ যেন [such that]}$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(a)| < \in$$

যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে f এবং g অবিচ্ছিন্ন কাজেই $\forall \in > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ এবং $\delta_2 > 0$ যেন [Since f and g are continuous at $x = a$, so $\forall \in > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ and $\delta_2 > 0$ s. t.]

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\in}{2}, \cdots (1)$$

$$\text{and } |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}, \cdots (2)$$

বিবেচনা করি $\delta > 0$ যাহা $\delta < \delta_1$ এবং $\delta < \delta_2$ এইক্ষেত্রে (1) এবং (2) $\Rightarrow$ [We consider $\delta > 0$ such that $\delta < \delta_1$ and $\delta < \delta_2$. In this case (1) and (2) $\Rightarrow$]

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\in}{2}, \cdots (3)$$

$$\text{and } |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}, \cdots (4)$$

Now $|(f+g)(x)-(f+g)(a)| = |f(x)+g(x)-\{f(a)+g(a)\}|$

$\Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(a)| = |f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|$

$\Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(a)| \leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}.$

when $0<|x-a|<\delta$, by (3) & (4)

$\Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(a)| < \epsilon$ যখন $0<|x-a|<\delta$

i. e. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ যেন [such that]

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(a)| < \epsilon$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $f+g$ অবিচ্ছিন্ন। [Hence $f+g$ is continuous at the point $x = a$]

(ii). Proof (ii) is similar to (i).

(i) নং এর বিকল্প প্রমাণ [Alternate proof of (i)] :

যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $g(x)$ অবিচ্ছিন্ন কাজেই [Since f and g are continuous at the point $x = a$ so]

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \cdots (1) \text{ and } \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \cdots (2)$$

সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি [From definition we know]

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ \forall x \cdots (3)$$

$$\text{Now } \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a)+g(a);\ \text{by (1), (2)}$$

$$= (f+g)a;\ \text{by (3)}$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $f+g$ অবিচ্ছিন্ন। [Hence $f+g$ is continuous at $x = a$.]

***Proof* : (ii).** প্রমাণ (i) এর ন্যায় [Similar to proof (i).]

Proof : (iii). যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে f এবং g অবিচ্ছিন্ন, কাজেই [Since f and g are continuous at the point $x = a$, so]

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \cdots (1) \text{ and } \lim_{x \to a} g(x) = g(a), \cdots (2)$$

সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি [From definition we know]

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x),\ \forall x \cdots (3)$$

Now $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$; by (3)

$$= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$= f(a) \cdot g(a); \text{ by (1), (2)}$$

$$= (fg)(a), \text{ by (3)}$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে fg অবিচ্ছিন্ন। [Hence fg is continuous at the point $x = a$.]

Proof : (iv). যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে f এবং g অবিচ্ছিন্ন, কাজেই [Since f and g are continuous at the point $x = a$ so]

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \cdots (1) \text{ and } \lim_{x \to a} g(x) = g(a) \cdots (2)$$

সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি [From definition we know]

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x,\ g(x) \neq 0 \cdots (3)$$

Now $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; by (3)

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$= \frac{f(a)}{g(a)}; \text{ by (1) and (2).}$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $\frac{f}{g}$ অবিচ্ছিন্ন। [Hence $\frac{f}{g}$ is continuous at the point $x = a$.]

উপপাদ্য : যদি a বিন্দুতে ফাংশন g অবিচ্ছিন্ন এবং g(a) বিন্দুতে ফাংশন f অবিচ্ছিন্ন। তবে দেখাও যে a বিন্দুতে যৌগিক fog অবিচ্ছিন্ন।

[**Theorem** : If the function g is continuous at the point a and the function f is continuous at the point g(a) then show that the composition f∘g is continuous at the point a.]

Proof : যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে g অবিচ্ছিন্ন, কাজেই, [Since g is continuous at $x = a$, so]

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \quad \cdots (1)$$

আমাদের দেখাইতে হইবে [We have to show that]

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a)$$

Now $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(g(x)), \quad \cdots (2)$

$$= f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$= f(g(a)); \text{ by } (1)$$

$$= (f \circ g)(a)$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে f∘g অবিচ্ছিন্ন। [Hence f∘g is continuous at the point $x = a$.]

3-2.11. সন্দেহজনক বিন্দু [Suspicious point] :

সংজ্ঞা : সাধারণত ফাংশনের ডোমেনে কতিপয় বিন্দু আছে যেখানে ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা ঘটিতে পারে। এই ধরণের বিচ্ছিন্ন বিন্দুকে সন্দেহজনক বিন্দু বলা হয়।

[**Definition** : Generally there are few points in the domain of function where a discontinuity can occur. This type of discontinuity point is called suspicious point.]

সন্দেহজনক বিন্দুর ব্যবহার নিম্নের উল্লেখিত ফাংশনে ঘটিতে পারে **[Use of suspicious point can occur in the following functions] :**

(i). ফাংশনের সংজ্ঞার সূত্র পরিবর্তন হইলে [The defining rule of function changes]

যেমন : $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ if $x^2 - 1 > 0$

and $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ যদি $x^2 - 1 < 0$

ইহার অর্থ হইল যখন $x^2 - 1 = 0$ তখন ফাংশনের সংজ্ঞা পরিবর্তন হয় এবং ফাংশনটির সন্দেহজনক বিন্দু $x = \pm 1$. [This means when $x^2 - 1 = 0$ then the definition of function changes and the function has suspicious points at $x = \pm 1$.]

(ii). $x = a$ স্থাপন করিলে যদি ফাংশনের হর শুন্য হয়। [If the denominator of function is zero by putting $x = a$]

যেমন $\frac{x-a}{x^2-a^2}$ এর সন্দেহজনক বিন্দু $x = \pm a$. $\left[\frac{x-a}{x^2-a^2}\right.$ has suspicious points $x = \pm a.\left.\right]$

(iii). $\sin\frac{1}{x}$ এর সন্দেহজনক বিন্দু $x = 0$. $\left[\sin\frac{1}{x}\right.$ has suspicious point $x = 0.\left.\right]$

3-2.12. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবার শর্ত :

(i). $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ বিদ্যমান থাকিবে।

(ii). $\lim_{x \to a+} f(x)$ বিদ্যমান থাকিবে অর্থাৎ সসীম হইবে।

(iii). $\lim_{x \to a-} f(x)$ বিদ্যমান থাকিবে অর্থাৎ সসীম হইবে।

(iv). $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 : $x = 2$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। [Discuss the continuity of the following function at the point $x = 2$.]

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন [when]} \quad 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন [when]} \quad 1 < x \le 2. \\ 15 & \text{যখন [when]} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

[ঢাঃ বিঃ '80]

সমাধান :

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = 15$. কাজেই [when $x > 2$ then $f(x) = 15$ so]

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 15 = 15$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = 10$. কাজেই [When $x < 2$ then $f(x) = 10$ so]

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 10 = 10.$$

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = 10$ [when $x = 2$ then $f(x) = 10$]

কাজেই $f(2) = 10$. যেহেতু [since] $\lim_{x\to 2+} f(x) \neq \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়। [Hence the function $f(x)$ is not continuous at the pint $x = 2$.]

উদাহরণ-2 : নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনটির $x = 0$ এবং $x = 3/2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

$$f(x) = \begin{cases} 3+2x & \text{যখন} \quad -3/2 \le x < 0 \\ 3-2x & \text{যখন} \quad 0 \le x < 3/2. \\ -3-2x & \text{যখন} \quad x \ge 3/2 \end{cases}$$

[জাঃ বিঃ সঃ '03, '07, ঢাঃ বিঃ '82]

সমাধান : প্রথমতঃ $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা : [At first test the continaity of $f(x)$ at the point $x = 0$]

যখন $x > 0$ তখন [when $x > 0$ then] $f(x) = 3 - 2x$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (3 - 2x) = 3 - 0 = 3$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = 3 + 2x$, কাজেই [when $x < 0$ then $f(x) = 3 + 2x$ so]

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (3 + 2x) = 3 + 0 = 3$$

যখন [when] $x = 0$ তখন [then] $f(x) = 3 - 2x$

কাজেই [so] $f(0) = 3 - 0 = 3$

যেহেতু [since] $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = 3$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [Hence the function $f(x)$ is continuous at the point $x = 0$]

দ্বিতীয়তঃ $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ [Secondly test the continuity of $f(x)$ at the point $x = \frac{3}{2}$.]

যখন $x > \frac{3}{2}$ তখন $f(x) = -3 - 2x$, কাজেই

$$\lim_{x \to (3/2)+} f(x) = \lim_{x \to (3/2)+} (-3 - 2x) = -3 - 2(3/2) = -6$$

যখন $x < \frac{3}{2}$ তখন $f(x) = 3 - 2x$, কাজেই

$$\lim_{x \to (3/2)-} f(x) = \lim_{x \to (3/2)-} (3 - 2x) = 3 - 2(3/2) = 0$$

যখন $x = \frac{3}{2}$ তখন $f(x) = -3 - 2x$, কাজেই $f(3/2) = -3 - 2(3/2) = -6$

যেহেতু $\lim_{x \to (3/2)+} f(x) \neq \lim_{x \to (3/2)-} f(x) \neq f(3/2)$

সুতরাং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। [Hence the function $f(x)$ is discontinuous at the point $x = \frac{3}{2}$.]

উদাহরণ-3(i) : $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ফাংশনটির অবিচ্ছি[illegible] আলোচনা কর যেখানে [Examine the continuity of the functi[illegible] $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ at the points $x = 0$ and $x = 1$ where]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1. \\ 1/x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

[জাঃ বিঃ '04, চাঃ বিঃ '86, '88: ঢাঃ বিঃ সঃ [illegible]

(ii). ফাংশন f নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত [A function f defined as follows]

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{যখন} \quad x \le 0 \\ 5x - 4 & \text{যখন} \quad 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন} \quad 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

$x = 0, 1, 2$ বিন্দুতে ফাংশন f এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। [Test the continuity of the function f at the points $x = 0, 1, 2$]

[N. U. H-2007, R. U-1987, D. U-19[illegible]

সমাধান (i) : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1. \\ 1/x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$

প্রথমতঃ $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

যখন $x > 0$ তখন [when $x > 0$ then] $f(x) = x$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x = 0$$

যখন $x < 0$ তখন [when $x < 0$ then] $f(x) = x^2 + 1$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1.$$

যখন $x = 0$ তখন [when $x = 0$ then] $f(x) = x$, কাজেই [so] $f(0) = 0$

যেহেতু $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x) \neq f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। [Hence $f(x)$ is disconti-nuous at the point $x = 0$]

দ্বিতীয়তঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = \frac{1}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x = 1$$

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই $f(1) = 1$

যেহেতু $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান (ii) ঃ প্রদত্ত ফাংশন $\begin{cases} -x^2 & \text{যখন} \quad x \le 0 \\ 5x - 4 & \text{যখন} \quad 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন} \quad 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \end{cases}$

প্রথমতঃ $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (5x - 4) = 0 - 4 = -4$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = -x^2$, কাজেই

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-x^2) = 0$$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = -x^2$, কাজেই $f(0) = 0$

যেহেতু $\lim_{x \to 0+} f(x) \ne \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (5x-4) = 5-4 = 1$$

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই $f(1) = 5 - 4 = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

তৃতীয়তঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = 3x + 4$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (3x+4) = 3.2 + 4 = 10$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = 4x^2 - 3x$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (4x^2-3x) = 4.2^2 - 3.2 = 10$$

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = 3x + 4$, কাজেই $f(2) = 3.2 + 4 = 10$

যেহেতু $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–4 ঃ f বাস্তব ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{যখন } x \neq 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$

দ্বারা প্রদত্ত হইলে দেখাও যে f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটি এমনভাবে সম্প্রসারিত কর যেন উহা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

[জাঃ বিঃ '05, ঢাঃ বিঃ সঃ '82, '8

সমাধান ঃ যখন $x > 2$ তখন $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2+} (x+2) = 2+2 = 4.$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2-} (x+2) = 2+2 = 4$$

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = 3$, কাজেই $f(2) = 3$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} f(x) \neq f(2)$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

এখন $f(x)$ ফাংশনকে নিম্নরূপে পুনঃসংজ্ঞায়িত করি [Now the function $f(x)$ is redefined as follows :]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{যখন} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{যখন} \quad x = 2 \end{cases}.$$

যখন $x = 2$ তখন [when $x = 2$ then] $f(x) = 4 \Rightarrow f(2) = 4$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$$

$\therefore$ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। [Hence $f(x)$ is continuous at $x = 2$]

উদাহরণ–5 ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে বর্ণিত হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

প্রমাণ কর যে, উহা $x = 0$ বিন্দুতে ডান অবিচ্ছিন্ন অথচ উহা উক্ত বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়। [ঢাঃ বিঃ সঃ '76]

সমাধান ঃ যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$, কাজেই $f(0) = 1$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = 1$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ডান অবিচ্ছিন্ন। [Hence $f(x)$ is righ continuous at the point $x = 0$]

আবার যখন $x < 0$ তখন $f(x) = \frac{|x|}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1$$

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x) \neq f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়। [Hence $f(x)$ is not continuous at the point $x = 0$]

উদাহরণ–6 ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ [A function $f(x)$ defined as follows :]

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। [Discuss the continuity of $f(x)$ at $x = 0$.]

সমাধান ঃ যখন $x > 0$ তখন $f(x) = [x] + [-x]$. কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} ([x] + [-x])$$

$= [0 +] + [- 0 +]$

$= [0 +] + [0 -]$, যেহেতু $- 0 + = 0 -$

$= 0 + (-1)$; যেহেতু $[0 -] =$ বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা $\not> 0$.

$= -1.$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = [x] + [- x]$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} ([x] + [- x])$$

$= [0 -] + [- 0 -]$

$= [0 -] + [0 +]$

$= - 1 + 0 = - 1.$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = - 1$, কাজেই $f(0) = - 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-7 ঃ যদি $f(x)=\frac{1}{x-2}$ হয়, তবে $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f(x)=\frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0+}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0-}=-\infty$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)$.

অর্থাৎ $\lim_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান নহে এবং লক্ষনীয় $f(2)$ অসংজ্ঞায়িত।

সুতরাং $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-8(i) ঃ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=\frac{1}{5+e^{1/(x-2)}}$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। [রাঃ বিঃ '83]

(ii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর ঃ

$$f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{1/x} & \text{যখন } x\neq 0\\ e^2 & \text{যখন } x=0\end{cases}$$

$\boxed{e^{\infty}=\infty}$

সমাধান (i) ঃ দেওয়া আছে $f(x)=\frac{1}{5+e^{1/(x-2)}}$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{5+e^{1/(x-2)}}=\frac{1}{5+e^{1/0+}}=\frac{1}{5+e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{1}{5+e^{1/(x-2)}}=\frac{1}{5+e^{1/0-}}=\frac{1}{5+e^{-\infty}}=\frac{1}{5+0}=\frac{1}{5}$$

$$f(2)=\frac{1}{5+e^{1/0}}=\frac{1}{5+e^{\infty}}=\frac{1}{5+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)\neq f(2)$

সুতরাং $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

সমাধান (ii) ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{1/x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ e^2 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = (1+2x)^{1/x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1+2x)^{1/x} = \lim_{x\to 0+} \{(1+2x)^{1/2x}\}^2$$

$$= e^2;\ \text{যেহেতু } \boxed{\lim_{n\to 0} (1+n)^{1/n} = e.}$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = (1+2x)^{1/x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (1+2x)^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \{(1+2x)^{1/2x}\}^2 = e^2$$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = e^2$, কাজেই $f(0) = e^2$

যেহেতু $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-9(i) ঃ যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $a = 1$ না হইলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইবে। f ফাংশনকে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত কর যেন উহা $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{যখন } x \neq 0 \\ \cos x & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

সমাধান (i) ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = \frac{\sin^2 ax}{x^2}$, কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2 ax}{a^2 x^2} \cdot a^2$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 a^2 = 1^2 a^2 = a^2$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = \frac{\sin^2 ax}{x^2}$ কাজেই

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin^2 ax}{a^2 x^2} a^2$$

$$= \lim_{x \to 0-} \left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 a^2 = 1^2 a^2 = a^2.$$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$. কাজেই $f(0) = 1$

যেহেতু $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) \neq f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

এখন $f(x)$ ফাংশনকে নিম্নরূপে পুনঃসংজ্ঞায়িত করি [Now $f(x)$ is redefined as follows :]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ a^2 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

যখন $x = 0$ তখন [when $x = 0$ then] $f(x) = a^2 \Rightarrow f(0) = a^2$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = a^2 = f(0) \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান (ii) ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{যখন } x \neq 0 \\ \cos x & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = -\cos x$, কাজেই

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (-\cos x) = -\cos 0 = -1$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = -\cos x$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (-\cos x) = -\cos 0 = -1$$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = \cos x$, কাজেই $f(0) = \cos 0 = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) \neq f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

বিবিধ উদাহরণ-10 : যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

সমাধান : যখন $x > 0$ তখন $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots}{x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x(1 - x/2 + x^2/3 - \cdots)}{x(1 - x^2/3 + x^4/5 - \cdots)}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1 - x/2 + x^2/3 - \cdots}{1 - x^2/3 + x^4/5 - \cdots} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x} = \lim_{x\to 0-} \frac{x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots}{x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{1 - x/2 + x^2/3 - \cdots}{1 - x^2/3 + x^4/5 - \cdots} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$, কাজেই $f(0) = 1$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-11 : মনেকরি [Let] $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{when } x \le 2 \\ 2x + k & \text{when } x > 2 \end{cases}$

তবে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে k এর মান নির্ণয় কর। [Then determine the value of k such that the function f(x) is continuous at the point $x = 2$]

Solution : যখন $x = 2$ তখন [when $x = 2$ then]

$$f(x) = kx^2 \Rightarrow f(2) = 4k$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} kx^2 = 4k$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 2x + k = 4 + k$$

যেহেতু $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কাজেই [Since f(x) is continuous at $x = 2$, so]

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + k = 4k = 4k$$

$$\Rightarrow 4 + k = 4k$$

$$\Rightarrow 3k = 4$$

$$\Rightarrow k = \frac{4}{3}.$$

উদাহরণ-12 : মনেকরি [Let] $f(x) = \begin{cases} lx + 1 & \text{when } x > 5 \\ 7 & \text{when } x = 5 \\ x^2 + kx + 2 & \text{when } x < 5 \end{cases}$

তবে $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে l এবং k এর মান নির্ণয় কর। [Then determine the values of l and k such that the function f(x) is continuous at the point $x = 5$.]

Solution : যখন $x = 5$ তখন [When $x = 5$ then]

$$f(x) = 7 \Rightarrow f(5) = 7$$

$$\lim_{x\to 5+} f(x) = \lim_{x\to 5+} lx + 1 = 5l + 1.$$

$$\lim_{x\to 5-} f(x) = \lim_{x\to 5-} x^2 + kx + 2 = 25 + 5k + 2.$$

যেহেতু x = 5 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন, কাজেই [since f(x) is continuous at the point x = 5, so]

$$\lim_{x\to 5+} f(x) = \lim_{x\to 5-} f(x) = f(5)$$

or, $5l + 1 = 27 + 5k = 7.$

$\Rightarrow 5l + 1 = 7$ এবং $27 + 5k = 7$

$\Rightarrow l = \frac{6}{5}$, এবং $5k = -20 \Rightarrow k = -4.$

নির্ণেয় মান [Required values are] $l = \frac{6}{5}$, $k = -4$.

উদাহরণ–13(i) : নিম্নেবর্ণিত ফাংশন সমূহের সন্দেহ জনক বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। [Examine the continuity at suspicious point of the following functions.]

(i). $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & -6 \le x < 3 \\ x - 3, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$

(ii). $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -5 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

f কোন কোন ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন তাহা নির্ণয় কর। [Find the intervals on which f is continuous.]

Solution–13(i) : প্রদত্ত ফাংশন [Given functions is]

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & -6 \le x < 3 \\ x - 3, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

এখানে f ফাংশনের সন্দেহজনক বিন্দু x = 3. [Here x = 3 is a suspicious point of function f]

x = 3 বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা : [Discuss the continuity of f(x) at the point x = 3.]

যখন x < 3 তখন [when, x < 3 then] f(x) = 4 − x, কাজেই [so]

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} (4 - x) = 4 - 3 = 1.$$

Bosha

যখন $x > 3$ তখন [when $x > 3$ then] $f(x) = x - 3$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} (x - 3) = 3 - 3 = 0$$

Bosha

$$\therefore \lim_{x \to 3-} f(x) \neq \lim_{x \to 3+} f(x).$$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ বিদ্যমান নয় এবং $f(x)$ ফাংশনটি $x = 3$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। সুতরাং $6 \le x < 3$ এবং $3 < x \le 6$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

[$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ does not exist and the function $f(x)$ is discontinuous at $x = 3$. Thus the function $f(x)$ is continuous in the intervals $6 \le x < 3$ and $3 < x \le 6$.]

Solution–13(ii) : প্রদত্ত ফাংশন [Given function is]

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -5 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

এখানে f ফাংশনের সন্দেহজনক বিন্দু $x = 1$. [Here $x = 1$ is a suspicious point of f.]

যখন $x < 1$ তখন [when $x < 1$ then] $f(x) = 1 - x$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (1 - x) = 1 - 1 = 0.$$

যখন $x > 1$ তখন [when $x > 1$ then] $f(x) = x - 1$, কাজেই [so]

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

যখন $x = 1$ তখন [when $x = 1$ then] $f(x) = x - 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1).$$

$\therefore$ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং f ফাংশনটি $[-5, 5]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন। [$\therefore$ $f(x)$ is continuous at $x = 1$. Hence f is continuous throughout the interval $[-5, 5]$.]

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–3(B)

1(i). একটি ফাংশন f(x) নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x^2 > 1 \\ 1 & \text{যখন } x^2 < 1 \\ 1/2 & \text{যখন } x^2 = 1 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = -1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইবে। x এর সকল মানের জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত হওয়া সত্ত্বেও কেন বিচ্ছিন্ন হইল তাহা বর্ণনা কর।

2(i). একটি ফাংশন f(x) নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

(ii). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1 - x & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$

তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। [রাঃ বিঃ '৪০]

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 2-x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

তবে $x = 0$, $x = 1$ বিন্দুদ্বয়ে উহার অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। [ঢাঃ বিঃ '89]

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} 1/2-x & \text{যখন } 0 < x < 1/2 \\ 1/2 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 3/2-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$

তবে দেখাও যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

(vi). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

(vii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} (b^2 - a^2)/2 & \text{যখন } 0 \le x \le a \\ b^2/2 - x^2/6 - a^3/3x & \text{যখন } a < x \le b \\ (b^3 - a^3)/3x & \text{যখন } x > b \end{cases}$$

তবে দেখাও যে x এর সকল যোগবোধক মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

[রাঃ বিঃ '88]

(viii). একটি ফাংশন f কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 1/2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

3(i). যদি $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{যখন } x \ge 0 \\ x-1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়। [রাঃ বিঃ '73]

127

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{যখন} \quad x \le 1 \\ 3-ax^2 & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে a এর মান কত হইলে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবে?

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{যখন} \quad x < 2 \\ x^2-1 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনের লম্ফ [Jump] নির্ণয় কর।

(iv). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x < 1 \\ 2.5 & \text{যখন} \quad x = 1 \\ x^2+2 & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। [জাঃ নঃ বিঃ সঃ '83]

(v). একটি ফাংশন $f(x)$ কে $(-4, 4)$ ব্যবধিতে নিম্নরূপে বর্ণনা করা হইল ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন} \quad -4 \le x < -1 \\ 4 & \text{যখন} \quad -1 \le x \le 0 \\ 4+x^2 & \text{যখন} \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু $x = -1$ বিন্দুতে উহা বিচ্ছিন্ন। [রাঃ বিঃ '69]

(vi). একটি ফাংশন $f(x)$ কে $(0, 4)$ ব্যবধিতে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad 0 < x < 1 \\ x & \text{যখন} \quad 1 \le x < 2 \\ x^3/4 & \text{যখন} \quad 2 \le x < 4 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(vii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন} \quad x > 1 \\ 2 & \text{যখন} \quad x = 1 \\ 2x & \text{যখন} \quad x < 1 \end{cases}$

তবে দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(viii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 0 & \text{যখন } x = 1/2 \\ x+3 & \text{যখন } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$

তবে যে সকল বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন, সেই সকল বিন্দু নির্ণয় কর।

4(i). যদি $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$ যখন $x \neq 2$, তবে f(2) এর মান কত হইলে f(x) ফাংশন $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে। [ঢাঃ বিঃ '79]

(ii). $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ ফাংশন $x = 4$ বিন্দুতে অসংজ্ঞায়িত। f(4) এর মান কত হইলে f(x) ফাংশন $x = 4$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে। [ঢাঃ বিঃ '75]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x-a} & \text{যখন } x \neq a \\ a-b & \text{যখন } x = a \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে f(x) ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

5(i). যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-a|}{x-a} & \text{যখন } x \neq a \\ 1 & \text{যখন } x = a \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে f(x) ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

(ii). $x = 3$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{যখন } x \neq 3 \\ 0 & \text{যখন } x = 3 \end{cases}$$ [জাঃ নঃ বিঃ সঃ '81]

(iii). $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = |x-1|$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

6(i). যদি $f(x) = [x]$ হয়, তবে দেখাও যে $x = \dfrac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

(ii). একটি ফাংশন f(x) নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} [x] & \text{যখন } x \neq 5 \\ 5 & \text{যখন } x = 5 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 5$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

(iii). যদি $f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$ হয়, তবে দেখাও যে $x = 1, 2, 3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাং[...]
অবিচ্ছিন্ন।

7. যদি $f(x) = \frac{1}{x-3}$ হয়, তবে $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলো[...]
কর।

8(i). যদি $f(x) = \begin{cases} e^{1/(x-1)} & \text{যখন} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 1 \end{cases}$

তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। [রাঃ বিঃ ...]

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x^2}}{e^{1/x^2} - 1} & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

(iii). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2} & \text{যখন} \quad -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{যখন} \quad x > 0 \\ 2 & \text{যখন} \quad x = 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$

তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ নির্ণয় কর, $x = 0$ বিন্দুতে উহা কি অবিচ্ছিন্ন? [রাঃ বিঃ ...]

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

(vi). যদি $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

9(i). নিম্নবর্ণিত ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi / x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$ [বিঃ এসসিঃ এগ্রিঃ সঃ '78]

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos(1 / x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর।

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} x \sin(1 / x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 4 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। তুমি কি $f(0)$ কে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করিতে পার যেন উহা $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

(iv). নিম্নেবর্ণিত ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\pi / x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$ [রাঃ বিঃ '73]

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} \tan(x / 2) & \text{যখন} \quad x < \pi / 2 \\ 3 - \pi / 2 & \text{যখন} \quad x = \pi / 2 \\ \dfrac{x^3 - \pi / 8}{x - \pi / 2} & \text{যখন} \quad x > \pi / 2 \end{cases}$

তবে $x = \pi/2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডানসীমা এবং বামসীমা নির্ণয় কর এবং উক্ত বিন্দুতে $f(x)$ কি অবিচ্ছিন্ন না বিচ্ছিন্ন, তাহা নির্ণয় কর। [ঢাঃ বিঃ সঃ '77]

(vi) Is $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ফাংশন কি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন? [Continuous at $x = 0$?]

10(i). নিম্নে বর্ণিত ফাংশনের $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{যখন} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{যখন} \quad 1 < x \leq 2 \\ 1 + x^2 & \text{যখন} \quad x > 2 \end{cases}$$ [রাঃ বিঃ '79]

(ii). এইরূপ দুইটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যাহাদের লিমিটের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা বিচ্ছিন্ন। [রাঃ বিঃ '৬৯]

(iii). কোন শহরের জনসংখ্যা স্বাভাবিক সময়ের অবিচ্ছিন্ন ফাংশন কিন্তু কোন কোন সময় উহা বিচ্ছিন্ন হইতে পারে, এই সম্পর্কে মন্তব্য কর। [রাঃ বিঃ '৭৯]

(iv). t সময়ে কোন শহরের জনসংখ্যা f(t) হইলে, f(t) কি t এর অবিচ্ছিন্ন ফাংশন? উত্তরের যথার্থতা প্রমাণ কর। [চঃ বিঃ '83; রাঃ বিঃ '৭৯]

11. (i). ধ্রুবক k এর মান নির্ণয় কর যার জন্য [Find a value for the constant k that makes]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

ফাংশন $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। [function continuous at $x = 0$]

(ii). ধ্রুবক k এর মান নির্ণয় কর যার জন্য [Find a value for the constant k that makes]

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

ফাংশন $x = 1$ বিন্দুতে অনিচ্ছিন্ন [function continuous at $x = 1$]

(iii). অশূন্য ধ্রুবক k এর মান নির্ণয় কর যার জন্য [Find a nonzero value for the constant k that makes]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

ফাংশন $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন [function continuous at $x = 0$]

12. নিম্নে উল্লেখিত ফাংশন সমূহ x এর সকল মানের জন্য অবিচ্ছিন্ন হইলে a ও b ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর: [Find the constants a and b such that following functions are continuous for all x.]

(i). $$f(x) = \begin{cases} 7ax - 2 & \text{when } x < 1 \\ 5 & \text{when } x = 1 \\ bx^2 & \text{when } x > 1 \end{cases}$$

(ii). $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{when } x < 3 \\ 6 & \text{when } x = 3 \\ ax + 3 & \text{when } x > 3 \end{cases}$

(iii). $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + b + 4 & \text{when } x < 2 \\ 3 & \text{when } x = 2 \\ ax + b & \text{when } x > 2 \end{cases}$

(iv). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan ax}{\tan bx}, & \text{when } -\dfrac{\pi}{2} < ax < 0, -\dfrac{\pi}{2} < bx < 0 \\ 4, & \text{when } x = 0 \\ ax + b, & \text{when } x > 0 \end{cases}$

(v). $f(x) = \begin{cases} (1 + |\sin x|)^{a/|\sin x|}, & -\dfrac{\pi}{6} < x < 0 \\ b, & x = 0 \\ e^{\tan 2x/\tan 3x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

(vi). $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{when } x < 0 \\ \sqrt{3} & \text{when } x = 0 \\ 2\sin(a\cos^{-1}x) & \text{when } 0 < x < 1 \end{cases}$

13. নিম্নের বর্ণিত ফাংশন সমূহের সন্দেহজনক বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর : [Examine the continuity at suspicious point of the following functions]

(i). $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{when } -5 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{when } 2 \le x \le 5 \end{cases}$

(ii). $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{if } -7 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{if } 2 \le x \le 7 \end{cases}$

(iii). $f(x) = \begin{cases} 15 - x^2, & -3 < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 3 \end{cases}$

f কোন কোন ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন তাহা নির্ণয় কর। [Find the intervals on which f is continuous]

উত্তরমালা [ANSWERS]

1(i).	বিচ্ছিন্ন	2(i).	অবিচ্ছিন্ন,	(iv).	অবিচ্ছিন্ন, অবিচ্ছিন্ন,
3(ii).	$a = 1$,	(iv).	অবিচ্ছিন্ন নয়,	(viii).	$0, \frac{1}{2}, 1$
4(i).	$f(2) = 7$,	(ii).	$f(4) = 8$,	5(ii).	বিচ্ছিন্ন,
6(ii).	অবিচ্ছিন্ন,	7.	বিচ্ছিন্ন,	8(i).	বিচ্ছিন্ন,
(ii).	অবিচ্ছিন্ন,	(iii).	বিচ্ছিন্ন,	(iv).	বিচ্ছিন্ন,
(v).	বিচ্ছিন্ন,	9(i).	বিচ্ছিন্ন,	(ii).	অবিচ্ছিন্ন,
(iii).	$f(0) = 0$	(iv).	অবিচ্ছিন্ন,	(v).	$\frac{3\pi^2}{4}, 1,$ বিচ্ছিন্ন।

10(i). অবিচ্ছিন্ন।

(ii). $$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{যখন} \quad x = 1 \\ 2 - x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 4 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

11(i). $k = 3$, (ii). $k = 5$, (iii). $k = 1/2$

12(i). $a = 1, b = 5$; (ii). $a = 1, b = -4/3$

(iii). $a = 0, b = 3$; (iv). $a = 16, b = 4$

(v). $a = 2/3, b = e^{2/3}$; (vi). $a = 2/3, b = \sqrt{3}$

13. (i) $-5 \le x < 2$ এবং $2 < x \le 5$

(ii). $[-7, 7]$. (iii). $-3 \le x < 0$ এবং $0 < x \le 3$.

তৃতীয় অধ্যায় [CHAPTER THERE]
তৃতীয় পরিচ্ছেদ [SECTION THREE]
অন্তরীকরণযোগ্যতা
[DIFFERENTIABILITY]

3-3.1. অন্তরীকরণযোগ্যতা [Differentiability] ঃ

মনেকরি $f(x)$ ফাংশন $[a, b] \subset \mathbf{R}$ বদ্ধ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত এবং $a < c < b$. তবে $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হইবে যদি

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ বিদ্যমান থাকে,}$$

অর্থাৎ ডান $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$,

বাম $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ এর মান সসীম

এবং ডান $f'(c) =$ বাম $f'(c)$ হয়।

নোট ঃ ডান $f'(c)$ কে $Rf'(c)$ এবং বাম $f'(c)$ কে $Lf'(c)$ ধরিব।

3-3.2. উপপাদ্য ঃ যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য, কাজেই

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ একটি সসীম রাশি।

$$\text{এখন } \lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \to 0} h$$

$$= f'(a) \times 0$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

3-3.3. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে। দুইটি উদাহরণের সাহায্যে উক্তির সত্যতা যাচাই কর।

উদাহরণ-১ : $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 5$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য।

প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2+5) = 1+5 = 6$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x^2+5) = 1+5 = 6$$

এবং $f(1) = 1^2 + 5 = 6$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(1+h)^2 + 5 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0+} (2+h) = 2 + 0 = 2.$$

এবং $$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2 + 5 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0-} (2+h) = 2 + 0 = 2$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 2$

অর্থাৎ $f'(1)$ বিদ্যমান এবং $f'(1) = 2$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

বিঃ দ্রঃ উপরে উল্লেখিত উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

উদাহরণ–2 : যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1/2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়। **[N. U. H-2006]**

প্রথমতঃ $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

$$\lim_{x \to (1/2)+} f(x) = \lim_{x \to (1/2)+} (1-x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to (1/2)-} f(x) = \lim_{x \to (1/2)-} x = \frac{1}{2}.$$

যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $f(x) = 1 - x$, কাজেই $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

যেহেতু $\lim_{x \to (1/2)+} f(x) = \lim_{x \to (1/2)-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

$$Rf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(1/2 + h) - f(1/2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1 - (1/2 + h) - 1/2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{(-h)}{h} = \lim_{h \to 0+} (-1) = -1$$

$$Lf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1/2 + h) - f(1/2)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(1/2 + h) - 1/2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0-} (1) = 1.$$

যেহেতু $Rf'\left(\frac{1}{2}\right) \ne Lf'\left(\frac{1}{2}\right)$. সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

বিঃ দ্রঃ উপরোক্ত উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ-1 ঃ একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } 0 \le x < 3 \\ 4 & \text{যখন } x = 3 \\ 5 & \text{যখন } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

$x = 3$ বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[বিঃ এসসিঃ এগ্রিঃ সঃ '81]

সমাধান ঃ প্রথমতঃ $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} 0 = 0$$

যখন $x = 3$ তখন $f(x) = 4$, কাজেই $f(3) = 4$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 3-} f(x) \ne f(3)$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা ঃ

$$Rf'(3) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{5-4}{h} = \frac{1}{0+} = \infty \text{ অনির্ণেয়।}$$

$$Lf'(3) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{0-4}{h} = \frac{-4}{0-} = \infty \text{ অনির্ণেয়।}$$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ-2 ঃ যদি $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং $f'(x)$ এর অস্তিত্বের আলোচনা কর।

[ঢাঃ বিঃ '87]

সমাধান ঃ প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = 4x^2 - 3x$, কাজেই

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (4x^2 - 3x) = 4 - 3 = 1$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (5x - 4) = 5 - 4 = 1$$

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই $f(1) = 5.1 - 4 = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্বের আলোচনা ঃ

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = 5x - 4$, কাজেই $f(1) = 5 - 4 = 1$

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{4(1+h)^2 - 3(1+h) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{5h + 4h^2}{h} = \lim_{h\to 0+} (5 + 4h) = 5 + 0 = 5$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{5(1+h) - 4 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{5h}{h} = \lim_{h\to 0-} (5) = 5$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 5$; কাজেই $f'(1) = 5$.

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

উদাহরণ–3 ঃ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $(0, 3)$ ব্যবধিতে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ x & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ x^3/4 & \text{যখন } 2 \le x < 3 \end{cases}$$

তবে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ আছে কিনা তাহা যাচাই কর।

সমাধান : প্রথমতঃ $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণ সম্পর্কে আলোচনা :

যখন $x = 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই $f(1) = 1$

যখন $x > 1$ তখন $f(x) = x$, কাজেই

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1+h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

যখন $x < 1$ তখন $f(x) = x^2$, কাজেই

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0-} (2+h) = 2+0 = 2$$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$, কাজেই $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নাই।

দ্বিতীয়তঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ সম্পর্কে আলোচনা :

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = \frac{x^3}{4}$, কাজেই $f(2) = \frac{2^3}{4} = 2$

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = \frac{x^3}{4}$ কাজেই

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h)^3/4-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h)^3-8}{4h} = \lim_{h\to 0+} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{12h+6h^2+h^3}{4h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h(12+6h+h^2)}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(12+6h+h^2)}{4} = \frac{12+0+0}{4} = 3$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = x$ কাজেই

$$Lf'(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{2+h-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0-} (1) = 1$$

যেহেতু $Rf'(2) \neq Lf'(2)$, কাজেই $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নাই।

উদাহরণ–4 : যদি $f(x) = |x - 2|$ হয়, তবে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর। [ঢাঃ বিঃ '86]

সমাধান : দেওয়া আছে $f(x) = |x-2| \cdots (1)$

যখন $x \geq 2$ তখন (1) নং হইতে পাই $f(x) = x - 2$

যখন $x < 2$ তখন (1) নং হইতে পাই $f(x) = -(x-2)$

$\therefore$ (1) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{যখন } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$

প্রথমতঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা :

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x-2) = 2-2 = 0$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = -x + 2$, কাজেই

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (-x+2) = -2+2 = 0$$

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই $f(2) = 2 - 2 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

যখন $x = 2$ তখন $f(x) = x - 2$, কাজেই $f(2) = 2 - 2 = 0$

যখন $x > 2$ তখন $f(x) = x - 2$ কাজেই

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(2+h)-2-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

যখন $x < 2$ তখন $f(x) = -x + 2$, কাজেই

$$Lf'(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-(2+h)+2-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{(-h)}{h} = \lim_{h\to 0-} (-1) = -1$$

যেহেতু $Rf'(2) \neq Lf'(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ–5(i) : যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে $f'(0)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii). $x = \pi/2$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর : [চাঃ বিঃ ...]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \leq x < \pi/2 \\ 2 + (x - \pi/2)^2 & \text{যখন } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

[N. U. H. '02, '03, '05, N. U. '02, '04, চাঃ বিঃ '84; ...]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

সমাধান (i) : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0$, কাজেই $f(0) = 0$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, কাজেই

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 \cos(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} h \cos\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0+} h \lim_{h\to 0+} \cos\frac{1}{h}$$

$$= 0 \times (-1 \text{ এবং } 1 \text{ এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা}) = 0$$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, কাজেই

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{h^2 \cos(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} h \cos\frac{1}{h} = \lim_{h \to 0-} h \lim_{h \to 0-} \cos\frac{1}{h}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$) = 0$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0) = 0$; সুতরাং $f'(0) = 0$.

সমাধান (ii) ঃ প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \le x < \pi/2 \\ 2 + (x - \pi/2)^2 & \text{যখন } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

প্রথমতঃ $x = \pi/2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

যখন $x > \pi/2$ তখন $f(x) = 2 + (x - \pi/2)^2$, কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)+} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)+} \left\{2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$$

যখন $x < \pi/2$ তখন $f(x) = 1 + \sin x$, কাজেই

$$\lim_{x \to (\pi/2)-} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)-} [1 + \sin x] = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

কাজেই $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$

যেহেতু $\lim_{x \to (\pi/2)+} f(x) = \lim_{x \to (\pi/2)-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়তঃ $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা ঃ

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

কাজেই $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2 + 0 = 2$

যখন $x > \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, কাজেই

$$Rf'(\pi/2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(\pi/2 + h) - f(\pi/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{2 + (\pi/2 + h - \pi/2)^2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0+} h = 0$$

যখন $x < \frac{\pi}{2}$ তখন $f(x) = 1 + \sin x$, কাজেই

$$Lf'(\pi/2) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(\pi/2 + h) - f(\pi/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{1 + \sin(\pi/2 + h) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{(1 - h^2/2! + h^4/4! - \cdots) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{-h^2/2! + h^4/4! - \cdots}{h} = \lim_{h \to 0-} \left[-\frac{h}{2!} + \frac{h^3}{4!} - \cdots\right] = 0$$

যেহেতু $Rf'(\pi/2) = Lf'(\pi/2)$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

সমাধান (iii) : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

যখন $x \neq 0$ তখন $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. কাজেই

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{(-1)}{x^2}$$

বা $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

সুতরাং $x > 0$ এবং $x < 0$ এর জন্য $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

এখন $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা :

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0$, কাজেই $f(0) = 0$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. কাজেই

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} h \sin \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0+} h \lim_{h \to 0+} \sin \frac{1}{h}$$

$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা) $= 0$.

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, কাজেই

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} h \sin \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0-} h \lim_{h \to 0-} \sin \frac{1}{h}$$

$= 0 \times$ (-1 এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা) $= 0$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0)$; কাজেই $f'(0) = 0$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

$\therefore x > 0$, $x < 0$ এবং $x = 0$ এর জন্য অর্থাৎ x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

দ্বিতীয়তঃ $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা ঃ

প্রথম অংশ হইতে পাই

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{যখন} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

যখন $x > 0$ তখন $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0+} 2x\sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} 2x \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$) - \lim\limits_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x}$

$= 0 -$ ইহার মান বিদ্যমান নাই।

যখন $x < 0$ তখন $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, কাজেই

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-}\left[2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0-} 2x\sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0-} \cos\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0-} 2x \lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0-} \cos\frac{1}{x}$$

$= 0 \times (-1$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা$) - \lim\limits_{x\to 0-} \cos\frac{1}{x}$

$= 0 -$ ইহার মান বিদ্যমান নাই।

যখন $x = 0$ তখন $f'(x) = 0$, কাজেই $f'(0) = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0-} f'(x) \neq f'(0).$$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–3(C)

1. একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 2 & \text{যখন } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন এবং $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান বিদ্যমান নাই।

2(i). যদি $f(x) = \begin{cases} a + x & \text{যখন } x \ge 0 \\ a - x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে x = 0 বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর। [রাঃ বিঃ '81]

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে x = 1 বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। [চঃ বিঃ '81]

(iii). একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

দেখাও যে x = 1 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে f′(x) বিদ্যমান নহে। [জাঃ বিঃ '08, ঢাঃ বিঃ সঃ '76]

(iv). লেখচিত্রসহ নিম্নলিখিত ফাংশনটির x = 1 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$ [ঢাঃ বিঃ সঃ '85]

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x \ge 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়। [রাঃ বিঃ '85]

(vi). যদি $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{যখন } x \le 1 \\ 3x-2 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে কি $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্ন অন্তরক আছে?

(vii). যদি $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x \le 1 \\ x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর। [ঢাঃ বিঃ '82; চঃ বিঃ '82]

3(i). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 3-x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

(ii). যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। [জাঃ বিঃ 2003]

(iii). $x = 0$ ও $x = 1$ বিন্দু গুলোতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর ;

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ফাংশনটির চিত্র আঁক। [ঢাঃ বিঃ সঃ '85]

(iv). $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } 1 < x \end{cases}$

দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর। f এর ডোমেন এবং রেঞ্জ বাহির কর : $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে f এর অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা নির্ণয় কর। [জাঃ বিঃ সঃ '93, '04]

(v). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন} \quad x \le 0 \\ x & \text{যখন} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{যখন} \quad 1 \le x \le 2 \\ 2x - x^2 & \text{যখন} \quad x > 2 \end{cases}$$

তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু এই বিন্দুগুলোতে $f'(x)$ বিদ্যমান নহে। [ঢাঃ বিঃ সঃ '82; চঃ বিঃ সঃ '82]

4(i). যদি $f(x) = |x - 1|$ হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর।

(ii). দেখাও যে $f(x) = |x|$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). যদি $f(x) = |x| + |x - 1|$ হয়, তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[জাঃ বিঃ সঃ '05, ঢাঃ বিঃ সঃ '82, '85]

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{যখন} \quad x \ge 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণযোগ্যতা যাচাই কর।

[ঢাঃ বিঃ সঃ '81]

5(i). যদি $f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{যখন} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নহে।

(ii). একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{যখন} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$$

হয়, তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা কর। [জাঃ বিঃ '03, ঢাঃ বিঃ সঃ '84; ঢাঃ বিঃ '85]

(iii). যদি $f(x) = \begin{cases} (x-a)\sin(1/(x-a)) & \text{যখন } x \neq a \\ 0 & \text{যখন } x = a \end{cases}$

হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরীকরণযোগ্যত
কর।

(iv). যদি $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{যখন } |x| \leq 1 \\ \sin \pi x & \text{যখন } |x| > 1 \end{cases}$

হয়, তবে প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতা
কর। [ঢাঃ বি

(v). যদি $f(x) = \begin{cases} x + x^{4/3}\sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $f'(0)$ নির্ণয় কর যদি বিদ্যমান থাকে। [ঢাঃ বিঃ ন

(vi). যদি $f(x) = \begin{cases} x + (x/3)\sin(\ln x^2) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবে কিন্তু $f'(x)$ কি
নহে।

(vii). বিদ্যমান থাকিলে $f'(1)$ নির্ণয় কর যেখানে,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{যখন } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$$ [জাঃ বিঃ

উত্তরমালা [ANSWERS]

2(i). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(ii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(vi). $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন অন্তরক আছে।

(vii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

3(i). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(ii). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছি, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). $D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [0, \infty)$

$x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

4(i). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

5(ii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iii). অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(iv). $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = -1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

(v). $f'(0) = 1$. (vii) $f'(1)$ বিদ্যমান এবং $f'(1) = 1$.

———×———