

# ACP

Exemple numérique

- Considérons deux variables  $X_1$  et  $X_2$  mesurés pour cinq individus

	$X_1$	$X_2$
Ind 1	1	5
Ind 2	2	10
Ind 3	3	8
Ind 4	4	8
Ind 5	9	12

# Changement du centre de gravité

- Calcul des moyennes des variables

$\text{Moy}(X1) = ???$

$\text{Moy}(X2) = ???$

- Calcul des variances et écarts types des variables

$\text{Var}(X1) = ???$

$\text{Var}(X2) = ???$

$$\text{Moy}(X1) = 3,8$$

$$\text{Moy}(X2) = 8,6$$

$$\text{Var}(X1) = 7,76$$

$$\text{Var}(X2) = 5,44$$



$$\sigma(X1) = 2,79$$

$$\sigma(X2) = 2,33$$

# Matrice centrée

**Xc**

$$\begin{bmatrix} -2,8 & -3,6 \\ -1,8 & 1,4 \\ -0,8 & -0,6 \\ 0,2 & -0,6 \\ 5,2 & 3,4 \end{bmatrix}$$

	X1	X2
Ind 1	1	5
Ind 2	2	10
Ind 3	3	8
Ind 4	4	8
Ind 5	9	12

Moy(X1)= 3,8

Moy(X2) =8,6

# Matrice variance covariance

$$V = 1/n * X_c^t * X_c$$

# Matrice variance covariance

$$V = \begin{bmatrix} 7,76 & 5,12 \\ 5,12 & 5,44 \end{bmatrix}$$

# Matrice centrée réduit

$$X_{cr} = X_c * D$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$$



$$X_{cr} = \begin{bmatrix} -1,005 & -1,543 \\ -0,646 & 0,600 \\ -0,287 & -0,257 \\ 0,072 & -0,257 \\ 1,867 & 1,458 \end{bmatrix}$$



# Matrice de corrélation

$$R = 1/n * X_{cr}^t * X_{cr}$$

# Matrice de corrélation

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,788 \\ 0,788 & 1 \end{bmatrix}$$

# Valeurs propres

$$\text{Det} (R - \lambda I) = 0$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0,788 \\ 0,788 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



$$\lambda_1 = ? \quad \lambda_2 = ?$$

# Valeurs propres

$$\lambda_1 = 1,788$$

$$\lambda_2 = 0,212$$

# Vecteurs propres

- $\lambda_1 = 1,788 \longrightarrow R * U_1 = \lambda_1 * U_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,788 \\ 0,788 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

# Vecteurs propres

- $\lambda_1 = 1,788 \longrightarrow R * U_1 = \lambda_1 * U_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,788 \\ 0,788 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$$a = b$$



$$U_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

# Vecteurs propres

- $\lambda_2 = 0,212 \longrightarrow R * U_2 = \lambda_2 * U_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,788 \\ 0,788 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

# Vecteurs propres

- $\lambda_2 = 0,212 \longrightarrow R * U_2 = \lambda_2 * U_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,788 \\ 0,788 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$$a = -b$$



$$U_2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \text{ ou } U_2 = \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}$$



# Normalisation des vecteurs propres

$$U1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \longrightarrow U1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \end{bmatrix} \longrightarrow U1 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

$$\bullet U2 = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \longrightarrow U2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \end{bmatrix} \longrightarrow U2 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{bmatrix}$$

# Qualité de l'ACP

# Composantes principales

$X_{cr} * U$

$$\begin{array}{cc} -1,005 & -1,543 \\ -0,646 & 0,600 \\ -0,287 & -0,257 \\ 0,072 & -0,257 \\ 1,867 & 1,458 \end{array} * \begin{array}{cc} 0,707 & 0,707 \\ 0,707 & -0,707 \end{array}$$

# Coordonnées des individus

−1,802	0,381	→	Ind 1
−0,032	−0,881		
−0,385	−0,021		
−0,131	0,233		
2,351	0,289		

# Coordonnées des variables

$$\begin{array}{cc} 0,707 & 0,707 \\ 0,707 & -0,707 \end{array}$$

\*

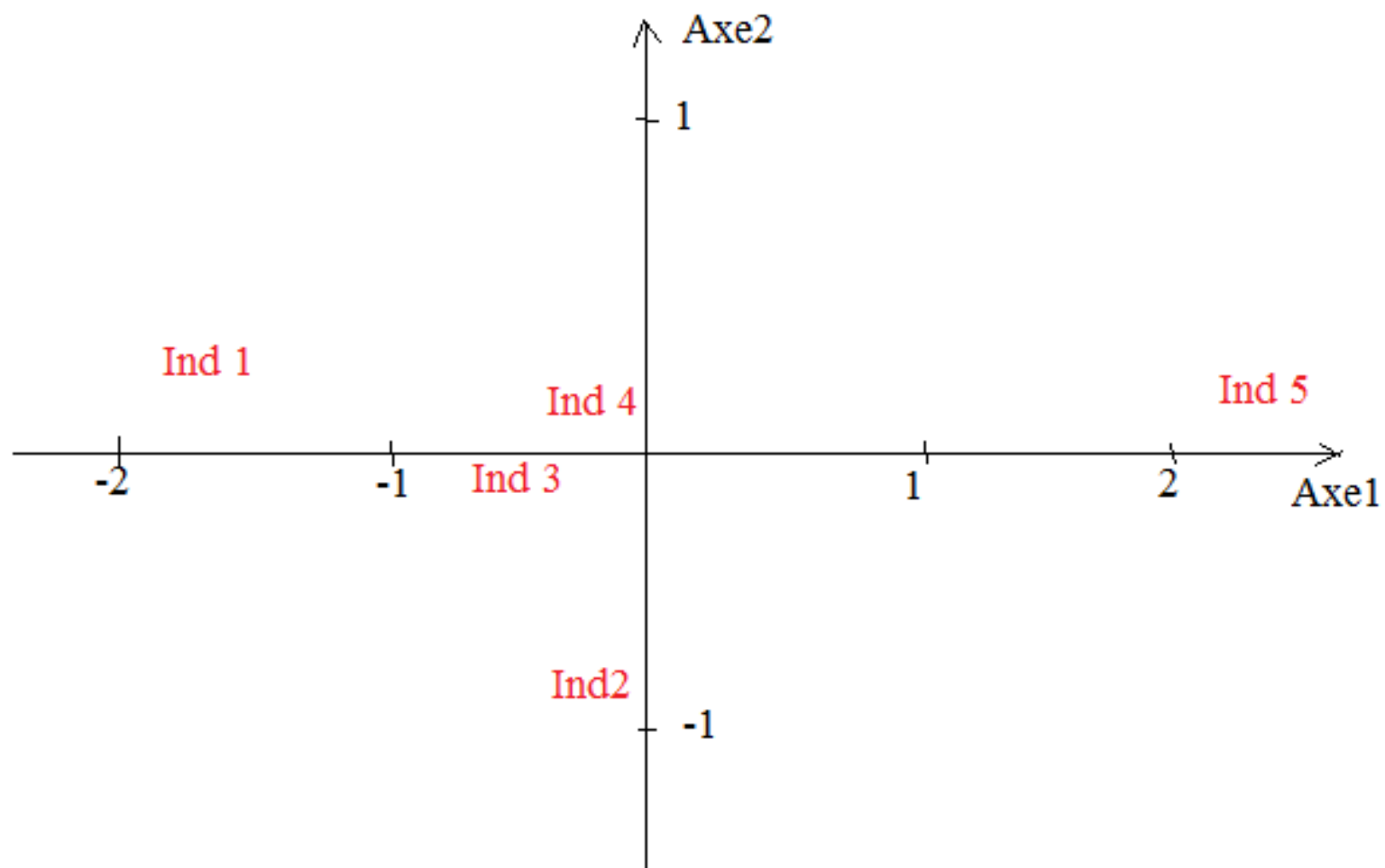
\*

$$\sqrt{1,788} \quad \sqrt{0,212}$$

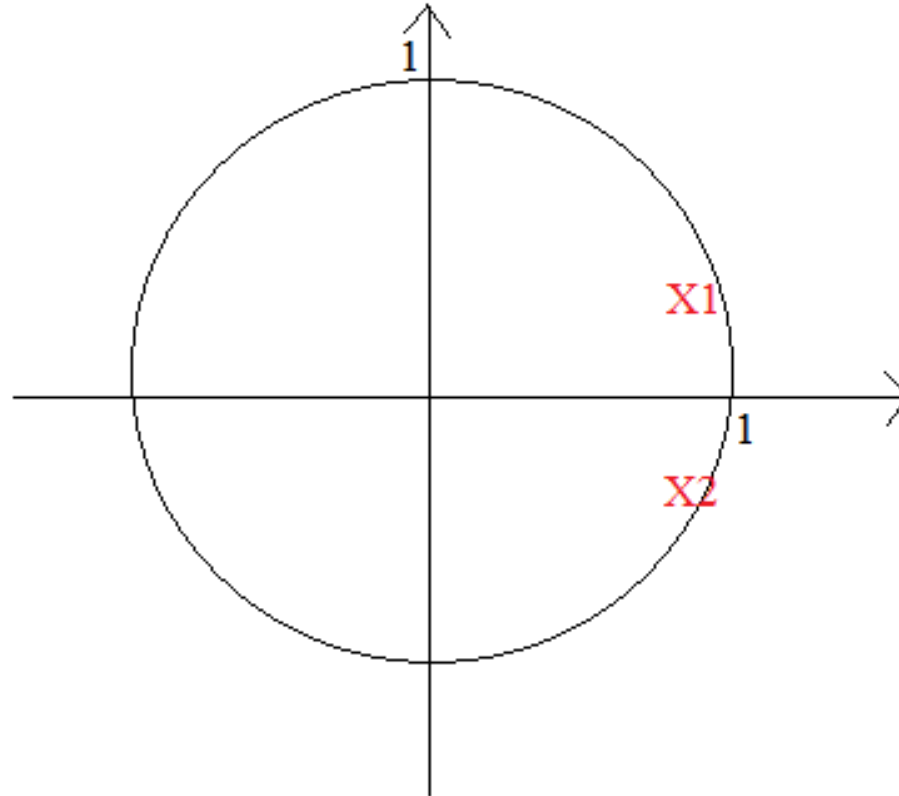
# Coordonnées des variables

0,946	0,324	→	Var1
0,946	−0,324	→	Var2

# Représentation des individus



# Cercle de corrélation





# Tableaux Aides à l'interprétation

# Tableau de la qualité de représentation

- Pour l'Individus 4

$$\text{Axe 1 : } \frac{(-0,131)^2}{(0,072)^2 + (-0,257)^2} = 0,24$$

$$\text{Axe 2 : } \frac{(0,233)^2}{(0,072)^2 + (-0,257)^2} = 0,76$$

# Tableau de la qualité de représentation

Ind	Axe1	Axe2
Ind1	0,96	0,04
Ind2	0,01	0,99
Ind3	0,99	0,01
Ind4	0,24	0,76
Ind5	0,98	0,02

# Tableau de la contribution à la variance

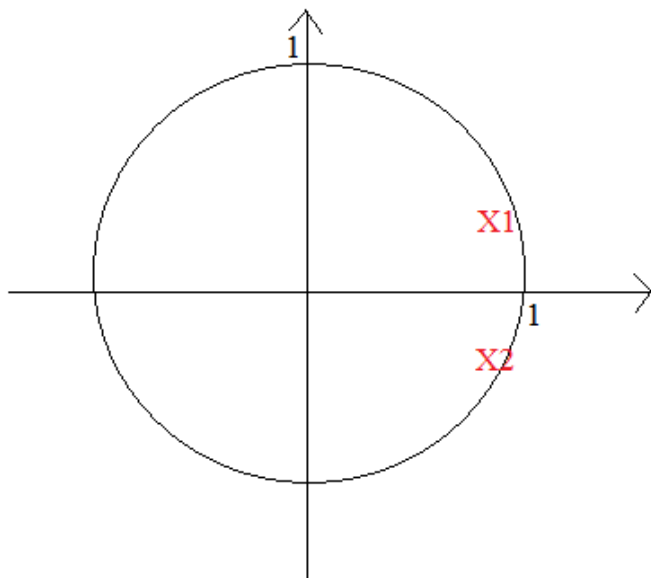
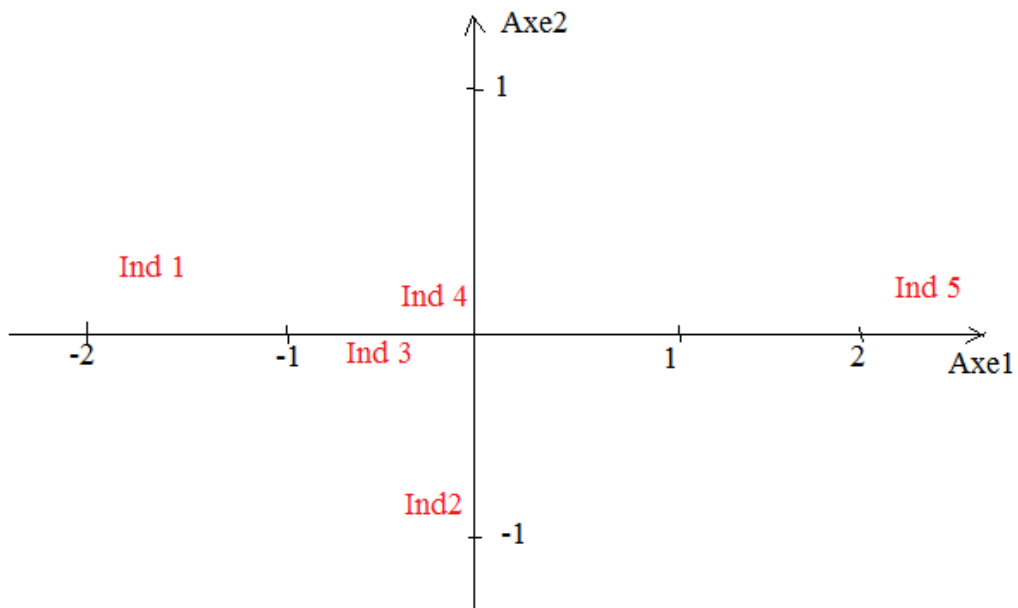
- Pour l'Individus 4

$$\text{Axe 1 : } \frac{(-0,131)^2}{5 * 1,788} = 0,002$$

$$\text{Axe 2 : } \frac{(0,233)^2}{5 * 0,212} = 0,76$$

# Tableau de la contribution à la variance

Ind	Axe1	Axe2
Ind1	0,363	0,137
Ind2	0,0001	0,737
Ind3	0,016	0,0004
Ind4	0,002	0,051
Ind5	0,619	0,079



Qualité

Ind	Axe1	Axe2
Ind1	0,96	0,04
Ind2	0,01	0,99
Ind3	0,99	0,01
Ind4	0,24	0,76
Ind5	0,98	0,02

Ind	Axe1	Axe2
Ind1	0,363	0,137
Ind2	0,000	0,737
Ind3	0,016	0,000
Ind4	0,002	0,051
Ind5	0,619	0,079

	X1	X2
Ind 1	1	5
Ind 2	2	10
Ind 3	3	8
Ind 4	4	8
Ind 5	9	12

Contribution a la variance