EX04 : TD2 :

① Pour chaque question $\exists$ 2 $\begin{cases} \text{réponse juste} \Rightarrow P(\text{réponse juste}) = P(\text{Succès}) = \frac{1}{3} \\ \text{réponse fausse} \Rightarrow P(\text{réponse fausse}) = P(\text{échec}) = \frac{2}{3} \end{cases}$

et X compte le nbr de succès lorsqu'on répète 10 fois une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$; Alors X une v.a qui suit une loi Binomiale $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$. et par la suite X a pour fonction de masse :

$$P(x=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad x \in \mathbb{D}_x = \{0, 1, 2, \dots 10\}.$$

② La Probabilité que cette Personne donne 3 réponse juste est :

$$P(X=3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1-\frac{1}{3}\right)^{10-3} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \left| \begin{array}{l} 0! = \boxed{1} \\ 3! = 1\times2\times3 = \boxed{6} \end{array} \right.$$

$$= \left(C_{10}^3\right)\left(\frac{1}{3^3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(C_{10}^3\right)\left(\frac{1}{3^3}\right)\left(\frac{2^7}{3^7}\right)$$

$$= \left(\frac{10!}{3!(10-3)!}\right)\left(\frac{2^7}{3^{10}}\right) = \frac{10!}{3!\,\cancel{7!}} \frac{2^7}{3^{10}} = \frac{8\times9\times10}{\cancel{2}\times\cancel{3}} \frac{2^7}{3^{10}} = \frac{4\times3\times10\times2^7}{3^{10}}$$

$$= \frac{15360}{59049} \simeq \boxed{0,26}$$

③ le calcul de la probabilité que cette personne soit admise revient à calculer $\boxed{P(X \geq 5)}$ ce qui est équivalent à calculer $\boxed{1 - P(X < 5)}$

Meth 1 :

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1-\frac{1}{3}\right)^{10-k} = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^k \frac{1}{3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$$

$$= \left[C_{10}^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] + \left[C_{10}^6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4\right] + \left[C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^3\right] + \left[C_{10}^8\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] + \left[C_{10}^9\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1\right] + \left[C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]$$

$$= \left[C_{10}^5\left(\frac{2^5}{3^{10}}\right)\right] + \left[C_{10}^6\left(\frac{2^4}{3^{10}}\right)\right] + \left[C_{10}^7\left(\frac{2^3}{3^{10}}\right)\right] + \left[C_{10}^8\left(\frac{2^2}{3^{10}}\right)\right] + \left[C_{10}^9\left(\frac{2}{3^{10}}\right)\right] + \left[C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3^{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3^{10}}\left[\left[C_{10}^5(\underbrace{2^5}_{32})\right] + \left[C_{10}^6(\underbrace{2^4}_{16})\right] + \left[C_{10}^7(\underbrace{2^3}_{8})\right] + \left[C_{10}^8(\underbrace{2^2}_{4})\right] + \left[C_{10}^9(\underbrace{2}_{2})\right] + \left[\underbrace{C_{10}^{10}}_{1}\right]\right]$$

$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{(5!)(5!)} = \boxed{252}$ / $C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{(6!)(4!)} = \boxed{210}$ /

$C_{10}^{7} = \frac{10!}{(7!)(3!)} = \boxed{120}$ / $C_{10}^{8} = \frac{10!}{(8!)(2!)} = \boxed{45}$ / $C_{10}^{9} = \frac{10!}{(9!)(1!)} = \boxed{10}$ / $C_{10}^{10} = \frac{10!}{(10!)(0!)} = \boxed{1}$

Donc

$$P(X \geq 5) = \frac{1}{3^{10}} \left[\underbrace{((252)(32)) + ((210)(16)) + ((120)(8)) + ((45)(4)) + ((10)(2)) + (1)} \right]$$

$$= \frac{1}{3^{10}} (12585) = \frac{12585}{59049} = \boxed{0,213}$$

méthode 2:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{4} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \right)$$

$$= \left[1 - \left(\sum_{k=0}^{4} \left(C_{10}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \right) \right) \right]$$

$$= 1 - \left[\left(C_{10}^{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \right) + \left(C_{10}^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{9} \right) + \left(C_{10}^{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{8} \right) + \left(C_{10}^{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{7} \right) + \left(C_{10}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \right) \right]$$

$$= 1 - \left[\left(C_{10}^{0} \left(\frac{2^{10}}{3^{10}}\right) \right) + \left(C_{10}^{1} \left(\frac{2^{9}}{3^{10}}\right) \right) + \left(C_{10}^{2} \left(\frac{2^{8}}{3^{10}}\right) \right) + \left(C_{10}^{3} \left(\frac{2^{7}}{3^{10}}\right) \right) + \left(C_{10}^{4} \left(\frac{2^{6}}{3^{10}}\right) \right) \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3^{10}} \left[\left(C_{10}^{0} (\underset{1024}{2^{10}}) \right) + \left(C_{10}^{1} (\underset{512}{2^{9}}) \right) + \left(C_{10}^{2} (\underset{256}{2^{8}}) \right) + \left(C_{10}^{3} (\underset{128}{2^{7}}) \right) + \left(C_{10}^{4} (\underset{64}{2^{6}}) \right) \right] \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3^{10}} (46464) \right] = 1 - 0,787$$

$$= \boxed{0,213}$$

- $C_{10}^{0} = \frac{10!}{0!\,10!} = \boxed{1}$ / $C_{10}^{1} = \frac{10!}{1!\,9!} = \boxed{10}$ / $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \boxed{45}$ / $C_{10}^{3} = \boxed{120}$ / $C_{10}^{4} = \boxed{210}$

Benayad Mohamed