Rappel :

Afin de centrer et normaliser une variable X on effectue la transformation suivante :

$$P[X < x_0] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right] \; (avec\ \mu\ l'espérencede\ X\ et\ \sigma\ l'écart\ type\ de\ X)$$

Soit X une variable aléatoire avec une moyenne égale à E(X) et un écart type σ(X), alors :

La variable aléatoire Y = X+a (a est une constante) est une variable aléatoire qui a une moyenne (espérance mathématique) E(Y)=E(X) +a et un écart type de σ(Y) = σ(X) (Var(Y) = Var(X)). Lorsqu'on multiplie une variable aléatoire par une constante **b**, la moyenne et l'écart type changent E(Z)=**b**E(X), σ(Z) = **b**σ(X) (Var(Z) = $\mathbf{b}^2$Var(X)).

Exercice 1 :

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs de fabrication d'usinage provoquent des variations de diamètre.

On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm.

Quelle est la proportion (pourcentage %) de billes rejetées ?

Solution

$$P[Rejetée] = 1 - P[7.97 < X < 8.03] = 1 - (P[X \leq 8.03]) - P[X \leq 7.97])$$

$$P[X \leq 7.97]) = P\left[\frac{X-8}{0.02} \leq \frac{7.97-8}{0.02}\right] = P\left[\frac{X-8}{0.02} \leq -1.5\right] = 1 - P\left[\frac{X-8}{0.02} \leq 1.5\right]$$
$$= 0.0668$$

$$P[X \leq 8.03]) = P\left[\frac{X-8}{0.02} \leq \frac{8.03-8}{0.02}\right] = P\left[\frac{X-8}{0.02} \leq 1.5\right] = 0.9332$$

$$P[Rejetée] = 1 - P[7.97 < X < 8.03] = 1 - (0.9332 - 0.0668) = 1 - 0.8664 = 0.1336$$

$\%\ des\ billets\ rejetés = 13.$36%

Exercice 2 :

Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. L'épaisseur d'une crêpe est représenté avec une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres m = 0.6mm et σ = 0.1.

1. Quelle est la probabilité que l'épaisseur d'une crêpe est : a) inférieur à 0.7mm , a) inférieur à 0.8mm , b) supérieur à 0.7mm, c) inférieur à 0.5mm ,
2. Soit Y la variable aléatoire «épaisseur du paquet en mm» (le paquet est constitué de 10 crêpes). Calculez la probabilité pour que Y soit comprise entre 6.3mm et 6.6mm.

Solution :

1. $a)\ P[X < 0.7] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < \frac{0.7-0.6}{0.1}\right] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < 1\right] = 0.8413$

$b)\ P[X < 0.8] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < \frac{0.8-0.6}{0.1}\right] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < 2\right] = 0.9772$

$c)\ P[X > 0.7] = 1 - P[X \leq 0.7] = 1 - P\left[\frac{X-0.6}{0.1} \leq \frac{0.7-0.6}{0.1}\right] = 1 - P\left[\frac{X-0.6}{0.1} \leq 1\right]$
$= 0.1587$

$d)\ P[X < 0.5] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < \frac{0.5-0.6}{0.1}\right] = P\left[\frac{X-0.6}{0.1} < -1\right] = 1 - P\left[\frac{X-0.6}{0.1} \leq 1\right]$
$= 0.1587$

2. Y suit N(μ=10x0.6, Var(Y) =10^2xVar(X)) σ (Y)=(10 x 0.1)=1

P(6.3 < Y < 6.6) = P(Y<6.6) - P(Y<6.3)

$$P\left[\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{6.3-\mu}{\sigma}\right] = P\left[\frac{Y-6}{1} < \frac{6.3-6}{1}\right] = P[Y-6 < 0.3] = 0.6179$$

$$P[Y-6 < 0.6] = 0.7257$$

$$\mathrm{P}(6.3 < Y < 6.6) = P[Y-6 \leq 0.6] - P[Y-6 \leq 0.3] = 0.1078$$

Exercice 3 :

Dans une usine, le temps nécessaire pour assembler une voiture est une variable aléatoire X ayant une distribution normale avec une moyenne de 20 heures et un écart type de 2 heures. Quelle est la probabilité qu'une voiture puisse être assemblée dans cette usine en:

1. Moins que 19.5 heures?
2. Compris entre 20 et 22 heures?

Solution :

1)

$$P[X < 19.5] = P\left[\frac{X-20}{2} < \frac{19.5-20}{2}\right] = P\left[\frac{X-20}{2} < -0.25\right] = 1 - P\left[\frac{X-20}{2} < 0.25\right]$$
$$= 0.4013$$

$$P[20 \le X \le 22] = P\left[0 \le \frac{X-20}{2} \le \frac{22-20}{2}\right] = P\left[\frac{X-20}{2} \le 1\right] - P\left[\frac{X-20}{2} \le 0\right]$$
$$= 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

Exercice 4 :

Les notes finales d'un examen de physique passé par un grand groupe d'étudiants ont une moyenne μ=70 et un écart type de σ =10. Si nous pouvons approximer la distribution de cette variable aléatoire X par une distribution normale, quel pourcentage d'élèves:

1) A eu une note supérieur à 80(c'est-à-dire avoir un X>80)?
2) A réussi le test (c.-à-d. X>=60)?
3) Échec du test (c.-à-d. X<60)?

Solution :

1) $P[X > 80] = 1 - P[X \le 80] = 1 - P\left[\frac{X-70}{10} < \frac{80-70}{10}\right] = 1 - P\left[\frac{X-70}{10} < 1\right] =$

$P[X > 80] = 1 - 0.8413 = 0.1587$

2) $P[X \ge 60] = 1 - P[X < 60] = 1 - P\left[\frac{X-70}{10} < \frac{60-70}{10}\right] = 1 - P\left[\frac{X-70}{10} < -1\right]$

$= 1 - (1 - P\left[\frac{X-70}{10} < 1\right])$

$P[X \ge 60] = 0.8413$

3) $P[X < 60] = P\left[\frac{X-70}{10} < \frac{60-70}{10}\right] = P\left[\frac{X-70}{10} < -1\right] = 1 - P\left[\frac{X-70}{10} \le 1\right] = 0.1587$

Exercice 5 :

Un grand ascenseur peut transporter un maximum de 9800 kg. Supposons une cargaison contenant 49 boîtes doivent être transportées via l'ascenseur. Le poids de la caisse de ce type de cargaison suit une distribution normale avec une moyenne de μ=205kg et un écart type σ =15kg.

1) Soit une variable aléatoire Z qui représente la distribution des poids des 49 boites. Quelle est la moyenne et l'écart type de Z ?
2) Sur la base de ces informations, quelle est la probabilité que toutes les boîtes peuvent être chargées en toute sécurité sur l'ascenseur et transportées ?

Solution :

1) Z suit N(μ=49x205kg, Var(Z)=49^2 x15^2) σ =735kg
2) $P[X \leq 9800\,] = P\left[\frac{X-10045}{735} < \frac{9800\ -10045}{735}\right] = P\left[\frac{X-10045}{735} < -0.33\right] = 1 - P\left[\frac{X-10045}{735} < 0.33\right] = 0.3707$