EX2 ; TD2

$f(x) = C.x.e^{-x/2} \quad \forall x \in [0, +\infty[$.

f une fct de densité d'une variable aléatoire X ssi

$$f(x) \geq 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$\boxed{C ?}$

$$\int_0^{+\infty} C x e^{-x/2}\,dx = 1 \Rightarrow C\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1$$

• Intégration Par Partie : $\boxed{\int u.v' = u.v - \int u'.v}$

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x/2} \qquad v(x) = -2e^{-x/2}$$

↳ Primitive de e^{ax} : $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}.e^{ax} + c$

$$C\int_0^{+\infty} x.e^{-x/2}\,dx = C\left[\left[(x)(-2e^{-x/2})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(1).(-2e^{-x/2})\,dx\right] = 1$$

$$= C\left[\left[-2xe^{-x/2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx\right] = 1$$

$$= C\left[\underbrace{\left[-2xe^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 2\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}\right] = 1$$

③

$$= C\left[-4e^{-x/2}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$= -4C\underbrace{\left[e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{-1} = 1$$

$$= +4C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}}$$. Donc : $\boxed{f(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2} \quad \forall x \geq 0}$

↳ 0 ? : $\left[-2xe^{-x/2}\right]_0^{+\infty} = \left[\lim_{x \to +\infty} -2x\underbrace{e^{-x/2}}_{0}\right] - \left[\underbrace{-2(0)(e^{-0/2})}_{0}\right]$

$\lim e^{-x/2}$ $\left\{\lim -\frac{1}{2}x = -\infty\right.$ } Par composition $\lim e^{-x/2}$

$$2\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{+\infty} = -4\left[e^{-x/2}\right]_0^{+\infty} = -4\left[\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x/2}\right) - \left(e^{0/2}\right)\right]$$

$$= -4\left[0 - 1\right] = \boxed{4}$$

② Fonction de répartition :

$D_X : [0, +\infty[$ le domaine où f est non nulle

$$F_X(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{si } x \geq 0$$

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$\frac{1}{4}\int_0^x t\,e^{-t/2}\,dt$: Intégration Par Partie :

$U(t) = t \qquad U'(t) = 1$

$V'(t) = e^{-t/2} \qquad V(t) = -2e^{-t/2}$

$$F_X(x) = \frac{1}{4}\left[\left[-2t\,e^{-t/2}\right]_0^x - \int_0^x -2e^{-t/2}\,dt\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(-2x\,e^{-x/2}\right) + 2\int_0^x e^{-t/2}\,dt\right] = \frac{1}{4}\left[-2x\,e^{-x/2} + 2\left[-2e^{-t/2}\right]_0^x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2x\,e^{-x/2} - 4\left[e^{-t/2}\right]_0^x\right] = \frac{1}{4}\left[-2x\,e^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4e^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2x\,e^{-x/2} - 4e^{-x/2} + 4\right] = -\frac{1}{2}x\,e^{-x/2} - e^{-x/2} + 1$$

$$= -e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = 1 - e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

③ Calculons la Moyenne :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{4} x e^{-x/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2}\, dx$$

Integration Par Partie :

$U(x) = x^2 \qquad U'(x) = 2x$

$V'(x) = e^{-x/2} \qquad V(x) = -2e^{-x/2}$

$$E(X) = \frac{1}{4}\left[\left[x^2(-2e^{-x/2})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x(2e^{-x/2})\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left[-2x^2 e^{-x/2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 4x e^{-x/2}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left[-2x^2 e^{-x/2}\right]_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} x e^{-x/2}\, dx\right]$$ Déjà calculer do ①.

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\left[-2x^2 e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 4\left[\underbrace{\left[-2x e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 2\underbrace{\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{+2}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4)(4)\right] = 4 \Rightarrow \boxed{E(X) = 4}$$

Calculons la Variance : $Var(X) = \underbrace{E(X^2)}_{?} - \underbrace{(E(X))^2}_{✓}$

Sachant que : $\int f[g(x)]\, dx = \int g(x) \cdot f(x)\, dx$

$$\Rightarrow E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{4} x e^{-x/2}\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x/2}\, dx$$

. Intégration Par Partie :

$$U(x) = x^3 \qquad U'(x) = 3x^2$$

$$V'(x) = e^{-x/2} \qquad V(x) = -2e^{-x/2}$$

$$E(X^3) = \frac{1}{4}\left[\underbrace{\left[x^3 \cdot e^{-x/2}\right]_0^{+\infty}}_{0''} - \int_0^{+\infty} 3x^2 - 2e^{-x/2}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\int_0^{+\infty} -6x^2 e^{-x/2}\, dx\right] = \frac{3}{2}\left[\underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2}\, dx}_{\text{Déjà calculer}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[(4)(4)\right] = \frac{(3)(16)}{2} = \boxed{24}$$

Donc : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 24 - (4)^2 = \boxed{8}$.