# Fonction Caractéristique

Soit X une v.a. R $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\boxed{\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad t \in \mathbb{R}}$$

Espérence de la fct complexe $e^{itX}$

-1- Si X est une V.a.R discrète :

$$*\ \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x \in D_X} e^{itx} P(X=x).$$

-2- Si X est une V.a.R continue :

$$*\ \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{x \in C_X} e^{itx} f_X(x)\, dx.$$

-TD5-

**Exo1 :** * Donnons la fction caractéristique de X ; (X : v.a.r. Discrète)

-1- Si $X \sim \mathcal{B}(P)$ : $D_X = \{0,1\}$ ; $\begin{cases} P(X=0) = 1-P \\ P(X=1) = P \end{cases}$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x \in D_X} e^{itx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{1} e^{itx} P(X=x)$$

$$= e^{it(0)} P(X=0) + e^{it(1)} P(X=1)$$

$$= (1)(1-P) + (e^{it})(P) = \boxed{1-P+Pe^{it}}$$

-2- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ : $D_X = \{0, \dots, n\}$ ; $P(X=x) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \left(C_n^x P^x (1-P)^{n-x}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x (e^{itx})(P^x)(1-P)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x (e^{it}P)^x (1-P)^{n-x}.$$

Formule du binôme :
$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x a^x b^{n-x}$$

Donc : $\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n = \boxed{\left(1-p+pe^{it}\right)^n}$

3- Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ : $\lambda > 0$ ; $D_X = \mathbb{N} = [0, +\infty[$ ; $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{itx} \frac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^x$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{itx} * \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!}$$

On rappelle que :
$$e^y = \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{y^x}{x!}$$

Donc : $\varphi_X(t) = \left(e^{-\lambda}\right)\left(e^{e^{it}\lambda}\right) = \boxed{e^{\lambda(e^{it}-1)}}$

$e^{e^{it}\lambda - \lambda}$

EXO2 : $X_n$ : le nbr Total de Succès $\Rightarrow$ v.a.r. discrète.

① • n expériences (Succès/echec) de Type Bernoulli avec Proba de Succès $p = \frac{\lambda}{n}$ donc : la loi de la v.a.r discrète $X_n$ est : la loi Binomial

$$\boxed{X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, p = \frac{\lambda}{n}\right)}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ ; $\varphi_{X_n}(t) = (1-p+pe^{it})^n = \left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}e^{it}\right)^n \ldots$ Déjà calculée Q2 EX1

② Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R}$ ; $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(t)$

$$\varphi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n$$

$$\ln \varphi_{X_n}(t) = \ln\left[\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n\right] = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)$$

→ On sait que $\ln(1+x) \simeq x$ quand $x \to 0$.

↳ On pose : $x = \frac{-\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}$ ; $\lim_{n \to +\infty} x = 0$.

On fait un développement limité à l'ordre 1 ($DL_1$) :

$$\ln(1+x) = \ln\left(1 + \left(-\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)\right)$$

$$\underset{DL_{k=1}}{=} f(0) + \frac{x^k}{k!} f'(0) + x^k \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc : $\ln(1+x) = \underset{\ln(1+0)}{0} + x \underset{u'/u = \frac{1}{1+0}}{(1)} + x\,\varepsilon(x)$

$$\ln(1+x) = x = \frac{-\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}$$

Donc : $\ln \varphi_{X_n}(t) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right) = n \ln\left(1 + \underbrace{\left(-\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)}_{x}\right) = nx$

$$= n\left(\frac{-\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right) = -\lambda + \lambda e^{it}$$

$$\ln \varphi_{X_n}(t) = -\lambda + \lambda e^{it} \Rightarrow \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi(t)$$

Et c'est exactement la fct caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda$

EXO3 : Donnons la fction caractéristique de X : b(X : v.a.r. continue)

-1- Si $X \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$ : $\lambda > 0$ ; $C_X = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ; $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{itx} f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{itx - \lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{x(it-\lambda)}\, dx$$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

$$= \lambda \left[ \frac{1}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{it-\lambda} \left[ e^{(it-\lambda)x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{it-\lambda} \Big[ \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{(it-\lambda)x}}_{=0} - \underbrace{e^{(it-\lambda)(0)}}_{=1} \Big]$$

$\lim_{x \to +\infty} (it-\lambda)x = \lim_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$

$$= \frac{\lambda}{it-\lambda}(-1) = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

-2- Si $Y \leadsto f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad ; \ C_Y = \mathbb{R}$$

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ity} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y}\, dy + \int_0^{+\infty} e^{ity} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{ity} e^{\lambda y}\, dy + \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{ity} e^{-\lambda y}\, dy$$

$$\varphi_y(t) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y(it+\lambda)}\,dy + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{y(it-\lambda)}\,dy$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{it+\lambda} e^{(it+\lambda)y}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)y}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{it+\lambda} - 0\right] + \frac{\lambda}{2}\left[0 - \frac{1}{it-\lambda}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2(it+\lambda)} - \frac{\lambda}{2(it-\lambda)} = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{(it-\lambda)-(it+\lambda)}{(it+\lambda)(it-\lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\,\frac{it-\lambda-it-\lambda}{(it)^2-\lambda^2} = \frac{\lambda}{\cancel{2}}\,\frac{-\cancel{2}\lambda}{-t^2-\lambda^2} = \boxed{\frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}}$$

FIN TD-5