TD 3 Les lois usuelles

Exercice 1 :

Un canal de transmission qui subit un bruit est caractérisé par une probabilité d'erreur lors de la transmission d'un chiffre p = 0.01.

1. Calculez la probabilité d'avoir plus d'une erreur lors de la transmission de 100 chiffres (loi binomiale).

X suit une loi binomiale avec n=100 et p =0.01. Ainsi :

$$P(X = x) = \binom{100}{\mathrm{x}} \mathrm{p}^{\mathrm{x}} (1 - \mathrm{p})^{100-\mathrm{x}}$$

$$P(X = x) = \binom{100}{\mathrm{x}} 0.01^{\mathrm{x}} (0.99)^{100-\mathrm{x}}$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - \binom{100}{0} 0.01^{0} (0.99)^{100} - \binom{100}{1} 0.01^{1} (0.99)^{99}$$

$$P(X > 1) = 0.264238$$

2. Répétez le calcule précédant avec une approximation en utilisant la loi de Poisson.

$$\lambda = \mathrm{np} = 100 \text{ x } 0.01 = 1$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - e^{-1} \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \frac{1^1}{1!} = 0.264241$$

Exercice 2 :

Le nombre d'appels téléphoniques arrivants à un tableau électronique durant 10 minutes correspond à une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson avec $\lambda = 2$.

1. Calculez la probabilité que plus de trois appels arrivent au tableau électronique durant 10 minutes.

$$\mathrm{p_X(k)} = \mathrm{P(X = k)} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ (avec } \lambda = 2 \textit{ dans cet exercice)}$$

$$\mathrm{P(X > 3)} = 1 - \mathrm{P(X \leq 3)} = 1 - \sum_{\mathrm{k}=0}^{3} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = 1 - e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right) \approx 0.143$$

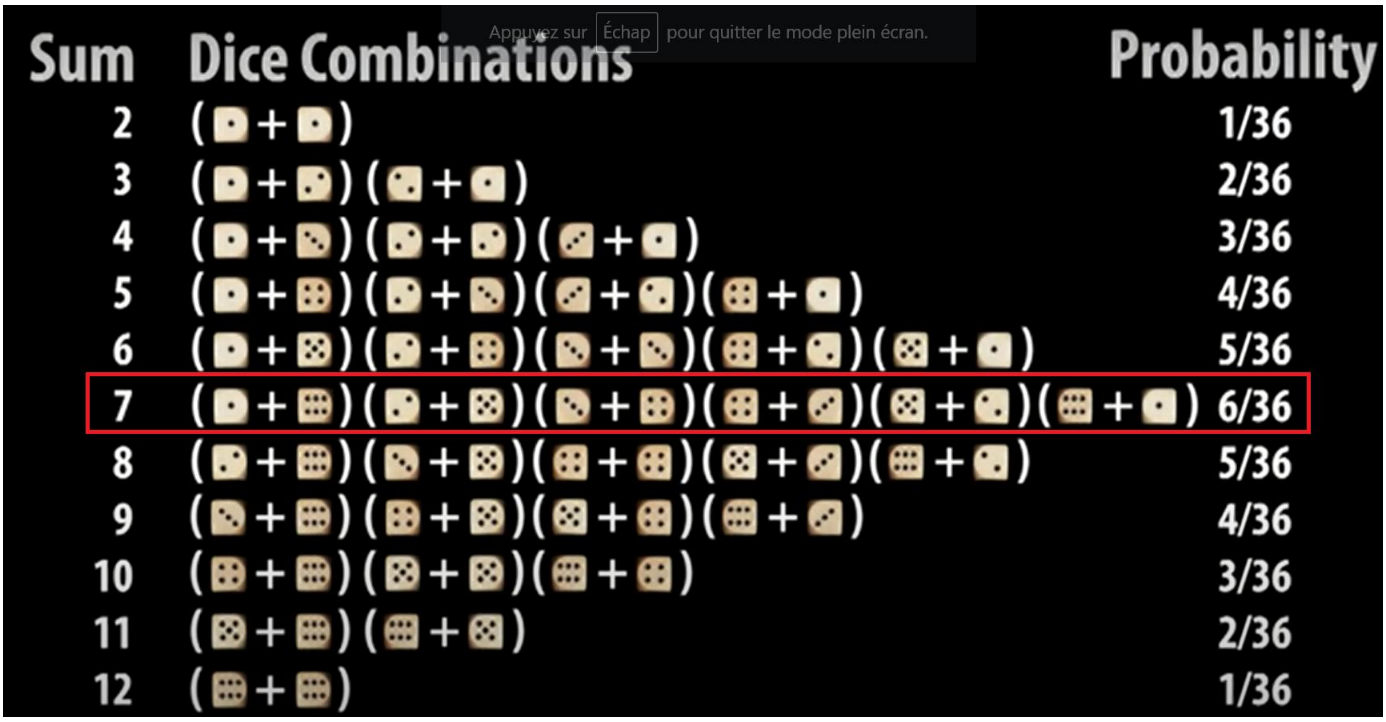
2. Calculez la probabilité qu'aucun appel n'arrive dans une période de 10 minutes.

$$P(X = 0) = e^{-2} \approx 0.135$$

Exercice 3 :

Considérons une expérience qui consiste à jeter deux dés. Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de tentatives jusqu'à l'obtention d'une somme des deux dés égale à 7.

1. Sachant que X suit une loi géométrique, calculez la probabilité de succès après moins de 6 tentatives.



La probabilité d'avoir une somme de dés égale à 7 est 1/6.

Ainsi, la probabilité d'avoir une somme différente de 7 est égale à 5/6. (Événement complément)

Explication somme d'une série géométrique :

$$S = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1}$$

$S=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}$

$Sr= ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^n$

$S-Sr=a-ar^n$

$S(1-r)=a(1-r^n)$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$P(X < 6) = P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.598$$

Démonstration pour P(X>5)

$$P(X > 5) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=5}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^5 (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{+\infty})}{1 - \frac{5}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 6\left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

2. Calculez la probabilité de succès après plus de 6 tentatives.

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6) = 0.335$$

3. Calculez l'espérance de X.

$$E(X) = \frac{1}{p} = 6$$

Exercice 4 :

On assume que durée d'un appel téléphonique (en minutes) est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle avec un paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$. Si une personne arrive juste avant vous, quelle est la probabilité que : a) vous devez attendre moins de 5 minutes pour qu'il termine ça communication, b) entre 5 et 10 minutes pour qu'il termine ça communication.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X < 5) = \int_0^5 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\,dx = -e^{-\frac{x}{10}}\Big]_0^5 = -e^{-0.5} - (-1) = 0.393$$

b)

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\,dx = -e^{-\frac{x}{10}}\Big]_5^{10} = -e^{-1} - (-e^{-0.5}) = 0.239$$

Exercice 5 :

Un composant électronique est destiné à échoué tôt ou tard. Supposant que la durée de vie d'une RAM est représentée par une variable aléatoire exponentielle avec un paramètre λ.

1. Etant donné que la probabilité d'échec d'une RAM après 10^4heurs est e^{-1}≈0.368, calculez la valeur du paramètre λ pour cette variable aléatoire.

La fonction de densité pour une variable qui suit une loi exponentielle :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Pour x<0 F(x) (fonction de répartition) est égale à 0.

Pour x>0 :

$$\begin{aligned} F(x) = P[X \leq x] &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt \\ &= -e^{-\lambda t}\Big|_0^x \\ &= -e^{-\lambda x} - (-e^0) \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X > 10^4) = 1 - P(X \leq 10^4) = 1 - F_X(10^4)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda 10^4}\right) = e^{-\lambda 10^4} = e^{-1}$$

$$-\lambda\, 10^4 = -1$$

$$\lambda = 10^{-4}$$

2. En utilisant la valeur calculée de λ , quelle est la valeur du temps d'échec (durée de vie) x_0 tel que la probabilité d'échec est inférieur à 0.05.

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = 0.05$$

$$1 - e^{-10^{-4}x_0} = 0.05$$

$$e^{-10^{-4}x_0} = 0.95$$

$-10^{-4}x_0=\ln(0.95)$ (appliquer le log pour éliminer l'exponentiel)

$x_0= -\ln(0.95)10^4=513$ heurs