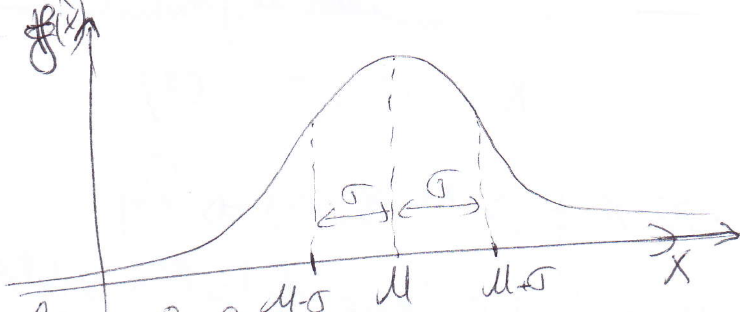
Rappel



→ X : v.a.r continue

- $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

  tel que : μ : la moyenne

  σ : écart type

$\mathcal{N}$: Loi normale = loi de Gauss = loi de Laplace Gauss.

- Courbe en forme de cloche.
- Symétrique.
- $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou bien $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

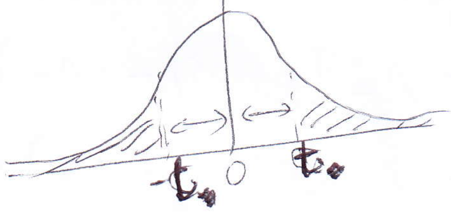
→ $f(x)$: fonction de densité de la variable aléatoire :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Afin de centrer et normaliser une var X, on affecte le changement de variable suivant : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ alors : $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

→ Z suit une loi normale centrée réduite de paramètres "0" : moyenne μ et "1" : écart type σ.

→ $$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$



- $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq t) = F_x(t)$
- $\boxed{P(Z \leq -t) = 1 - F_x(t)}$
- $\boxed{P(a \leq Z \leq b) = F_x(b) - F_x(a)}$ ← Sujet
- $\boxed{P(Z \geq t) = 1 - F_x(t)}$

→

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

-1- V.a. $Y = X + a$ $(a \in \mathbb{R})$ Donc :

$\boxed{\mu_Y = \mu_X + a \; ; \; \sigma_Y = \sigma_X \; ; \; \sigma_Y^2 = \sigma_X^2}$

$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_X + a, \sigma)$ $\boxed{\sigma_X^2 = \sigma_Y^2}$

-2- V.a $Y = bX$ Donc :

$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(b\mu ; b\sigma)$ $\boxed{\sigma_Y^2 = b^2\sigma_X^2}$

$\boxed{\mu_Y = b\mu_X \; ; \; \sigma_Y = b\sigma \; ; \; \sigma_Y^2 = b^2\sigma_X^2}$

EX1: V.a. X : Erreur de fabrication (TD 4)

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(8 ; 0.02)$

. Si $X \notin [7.97, 8.03] \Rightarrow$ Rejet

① Le Pourcentage de tailles rejetées ??

$P(\text{Rejetée}) = P(X \notin [7.97 ; 8.03])$

$= 1 - \underbrace{P(7.97 \leq X \leq 8.03)}_{?}$

. changement de Var :

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 8}{0.02}$ $\quad Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$P(\text{Rejetée}) = 1 - P\left(\frac{7.97 - 8}{0.02} \leq Z \leq \frac{8.03 - 8}{0.02}\right)$

$= 1 - P(-1.5 \leq Z \leq 1.5)$

$= 1 - [F(1.5) - F(-1.5)]$

$= 1 - [F(1.5) - (1 - F(1.5))]$

$= 1 - [F(1.5) - 1 + F(1.5)]$

$= 1 - 2F(1.5) + 1$

$= 2 - 2F(1.5) = 2(1 - \underbrace{F(1.5)}_{?})$

$F_x(1.5) = F(\underbrace{1.5}_{L} + \underbrace{0.0}_{C})$ (la Table $\mathcal{N}(0,1)$)

$F_x(1.5) = 0,9332$

$P(\text{Rejetée}) = 2(1 - 0,9332)$

$= 0,1336 = \boxed{13,36\%}$

EX2: V.a X : Épaisseur d'une crêpe

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,6 ; 0.1)$

. changement de Var :

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $Z = \frac{X - 0.6}{0.1}$

①

a) ? $P(X \leq 0.7) = P\left(Z \leq \frac{0.7 - 0.6}{0.1}\right)$

$P(Z \leq 1) = F_*(1) = 0,8413$

$F_x(1) = F_x(\underbrace{1,0}_{L} + \underbrace{0,0}_{C})$ la Table $\mathcal{N}(0,1)$

b) ? $P(X \leq 0.8) = P\left(Z \leq \frac{0.8 - 0.6}{0.1}\right)$

$P(Z \leq 2) = F_*(2) = 0,9772$

$F_x(2) = F_x(\underbrace{2,0}_{L} + \underbrace{0,0}_{C})$ la Table $\mathcal{N}(0,1)$

c) ? $P(X \geq 0.7) = P\left(Z \geq \frac{0.7 - 0.6}{0.1}\right)$

$P(Z \geq 1) = 1 - F_*(1)$ ← Déjà calculé

$= 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$

d) ? $P(X \leq 0.5) = P\left(Z \leq \frac{0.5 - 0.6}{0.1}\right)$

$P(Z \leq -1) = 1 - F_*(1)$

$= \boxed{0,1587}$

② V.a Y : Épaisseur du paquet

$Y = 10 X$ Donc :

$\mu_Y = 10\,\mu_X = 10(0.6) = \boxed{6}$

$\sigma_Y = 10\,\sigma_X = 10(0.1) = \boxed{1}$ Alors :

$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(6, 1)$

. changement de var:

$W = \frac{Y-6}{1} = Y-6 \qquad W \sim N(0,1)$

$\boxed{?}$

$P(6{,}3 \leq Y \leq 6{,}6) = P(6{,}3-6 \leq W \leq 6{,}6-6)$

$P(0{,}3 \leq W \leq 0{,}6) = F(0{,}6) - F(0{,}3)$

$F(0{,}6) = F(\underset{L}{0{,}6} + \underset{C}{0{,}0}) \;|\; F(0{,}3) = F(\underset{L}{0{,}3} + \underset{C}{0{,}0})$ (Table)

$= 0{,}7257 - 0{,}6179$

$= 0{,}1078 = \boxed{10{,}78\%}$

Ex 3: X: Temps pour assembler une voiture.

$X \sim N(20, 2)$

① ? $P(X \leq 19{,}5)$; ② $P(20 \leq X \leq 22)$?

. changement de variable:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-20}{2} \qquad Z \sim N(0,1)$

① $P(X \leq 19{,}5) = P\left(Z \leq \frac{19{,}5-20}{2}\right)$

$P(Z \leq -0{,}25) = 1 - F(0{,}25)$

$F(0{,}25) = F(\underset{L}{0{,}2} + \underset{C}{0{,}05}) = 0{,}5987$ Table $N(0,1)$

$P(Z \leq -0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = \boxed{0{,}4013}$

② $P(20 \leq X \leq 22) = P\left(\frac{20-20}{2} \leq Z \leq \frac{22-20}{2}\right)$

$P(0 \leq Z \leq 1) = F(1) - F(0)$

$= 0{,}8413 - 0{,}5$

$= \boxed{0{,}3413}$

Ex 4: X: note d'examen.

$X \sim N(70, 10)$

. changement de variable:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-70}{10} \qquad Z \sim N(0,1)$

① $P(X > 80) = 1 - P(X \leq 80)$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{80-70}{10}\right)$

$= 1 - P(Z \leq 1)$

$= 1 - F(1) = 1 - 0{,}8413$

$= \boxed{0{,}1587}$

② $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 60)$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{60-70}{10}\right)$

$= 1 - P(Z \leq -1)$

$= 1 - (1 - F(1))$

$= 1 - 1 + F(1) = F(1) = \boxed{0{,}8413}$

③ $P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-70}{10}\right)$

$= P(Z < -1) = 1 - F(1)$

$= \boxed{0{,}1587}$

Ex 5: X: Poids d'une boite

$X \sim N(205, 15)$

1) $Z = 49X$ Donc:

$Z \sim N(49\mu_X ; 49\sigma_X)$

$Z \sim N((49)(205) ; (49)(15))$

$\boxed{Z \sim N(10045 ; 735)}$

② $P(Z \leq 9800)$?

. changement de variable : (Pour centrée la Variable Z)

On pose : $C = \frac{Z - \mu}{\sigma} = \frac{Z - 10045}{735}$

$$P\left(C \leq \frac{9800 - 10045}{735}\right) = P\left(C \leq \frac{-245}{735}\right)$$

$$P(C \leq -0,33) = 1 - F(0,33)$$

$$= 1 - 0,6293 = \boxed{0,3707}$$

FIN TD4