CHAPITRE III

Résolution des Programmes Linéaires

Résolution Graphique

Exemple Introductif

- Achat de matières brutes contenant un minerai à extraire (2 types de MB disponibles) :
  - MB1 : taux moyen de minerai = 6kg par tonne
  - MB2 : taux moyen de minerai = 10kg par tonne
- 3 aspects à prendre en compte :
  - Le temps d'extraction,
  - Le volume total de stockage,
  - Le prix.

Exemple Introductif

- Temps d'extraction (16 heures disponibles) :
  - MB1 : 10 minutes par tonne
  - MB2 : 30 minutes par tonne
- Au plus 40 tonnes de MB peuvent être stockées
- Prix unitaires (119 000 euros disponibles) :
  - MB1 : 3.50 euros par kg
  - MB2 : 2 euros par kg
- On veut maximiser la quantité de minerai extraite

==> Quelle quantité acheter de chaque MB ?

Exemple Introductif

- Formulation du problème
  - **Variables**
    - $x_1 \geq 0$ est le nombre de tonnes de MP1 à acheter
    - $x_2 \geq 0$ est le nombre de tonnes de MP2 à acheter
  - **Objectif** : maximiser la quantité totale de minerai
    - Quantité totale = quantité via MP1 + quantité via MP2
  - **Contraintes de disponibilité sur les ressources**
    - Temps d'extraction disponible,
    - Poids de stockage disponible,
    - Budget disponible.

Exemple Introductif

- Modèle mathématique obtenu (PL)

$$\underbrace{\max 6\,x_1 + 10\,x_2}$$ **Maximiser** une fonction (objectif) **linéaire** en x_1 et x_2

sous contraintes :

$x_1 + 3\,x_2 \leq 96$ (temps) *{en divisant par 10}*

$x_1 + x_2 \leq 40$ (stockage)

$7\,x_1 + 4\,x_2 \leq 238$ (budget) *{en div. par 500}*

3 contraintes linéaires en x_1 et x_2

$$\underbrace{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}_{\text{Deux variables } x_1 \text{ et } x_2 \text{, contraintes à être positives}}$$

Deux variables x_1 et x_2, contraintes à être **positives**

Petit lexique de la PL

- x_1, x_2, ..., x_n : variables (de décision)
- Solution **admissible = affectation de valeurs** aux x_i **vérifiant les contraintes**
- Région/ensemble/domaine/polyèdre **admissible** = ensemble des solutions admissibles
- Solution **optimale** = solution admissible qui maximise/minimise la fonction objectif

Résolution graphique d'un PL (1/2)

- Méthode dite de « **résolution graphique** »
  - Exploite le fait qu'on a 2 variables : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$
- Toute inégalité est vérifiée par une moitié du plan $\Rightarrow$ contrainte = demi-plan (dimension 2)
  - Tracé du domaine admissible dans le plan
    - Tracé de la frontière (= *une droite*) du demi-plan défini par chaque contrainte,
    - Pour chaque droite, on sélectionne un demi-plan
    - Région admissible = intersection de tous ces demi-plans.
  - Déterminer la *meilleure* des solutions admissibles ?

Résolution graphique d'un PL (2/2)

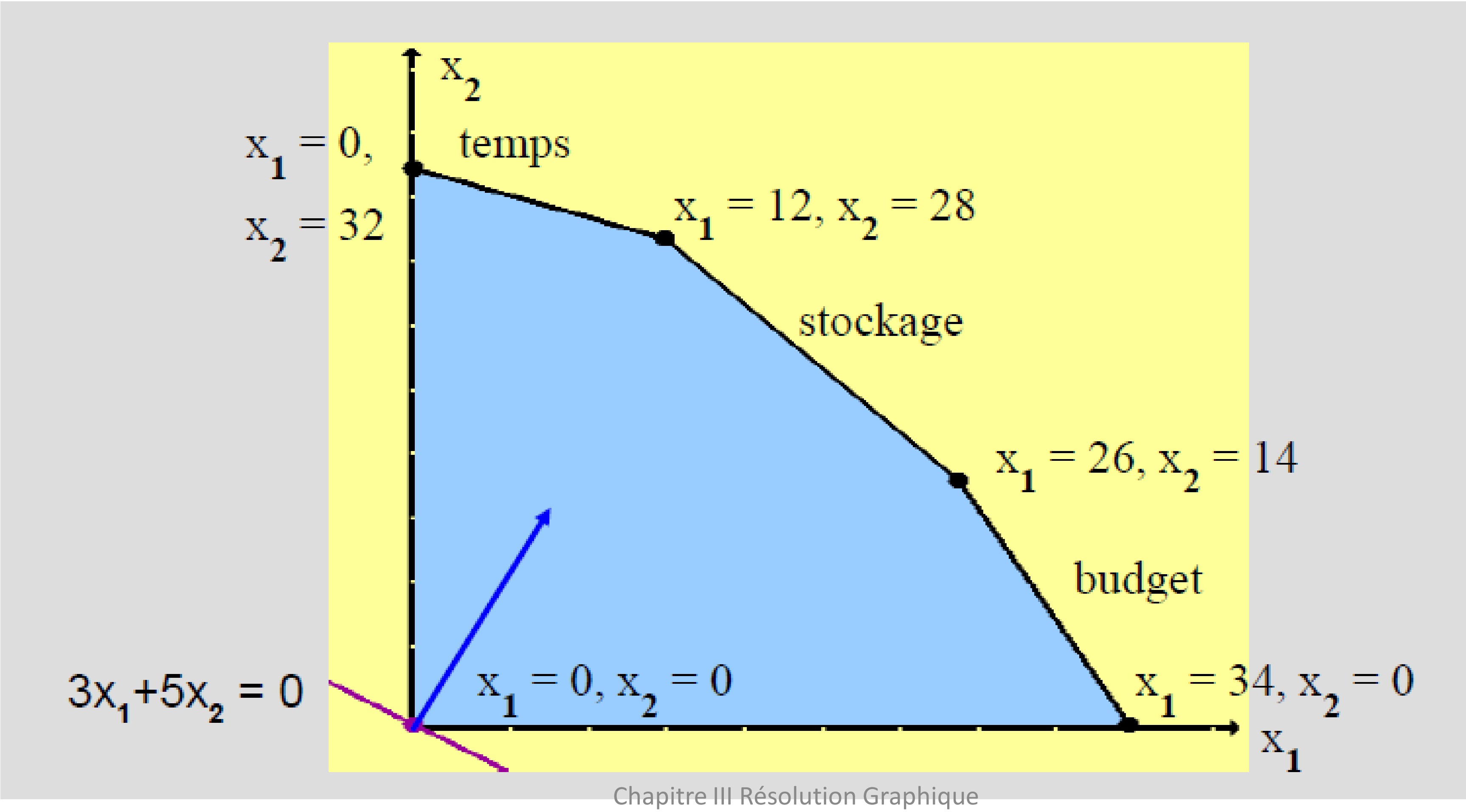
- Prise en compte de la fonction objectif f ?
  - Si la valeur optimale est f*, on appelle **droite optimale** la droite d'équation f(x)=f* :
    - Toute droite d'équation f(x)=constante lui est parallèle,
    - Tracé de la droite f(x)=0
    - déplacer de f(x)=0 **Vers la droite** en restant parallèle à f(x)=0, et continuer dans cette direction le plus possible tout en restant admissible,
  - Donc : recherche « visuelle » d'une solution optimale !

- La solution optimale est un sommet du polyèdre

Résolution graphique du problème d'achat de matières brutes (1/3)

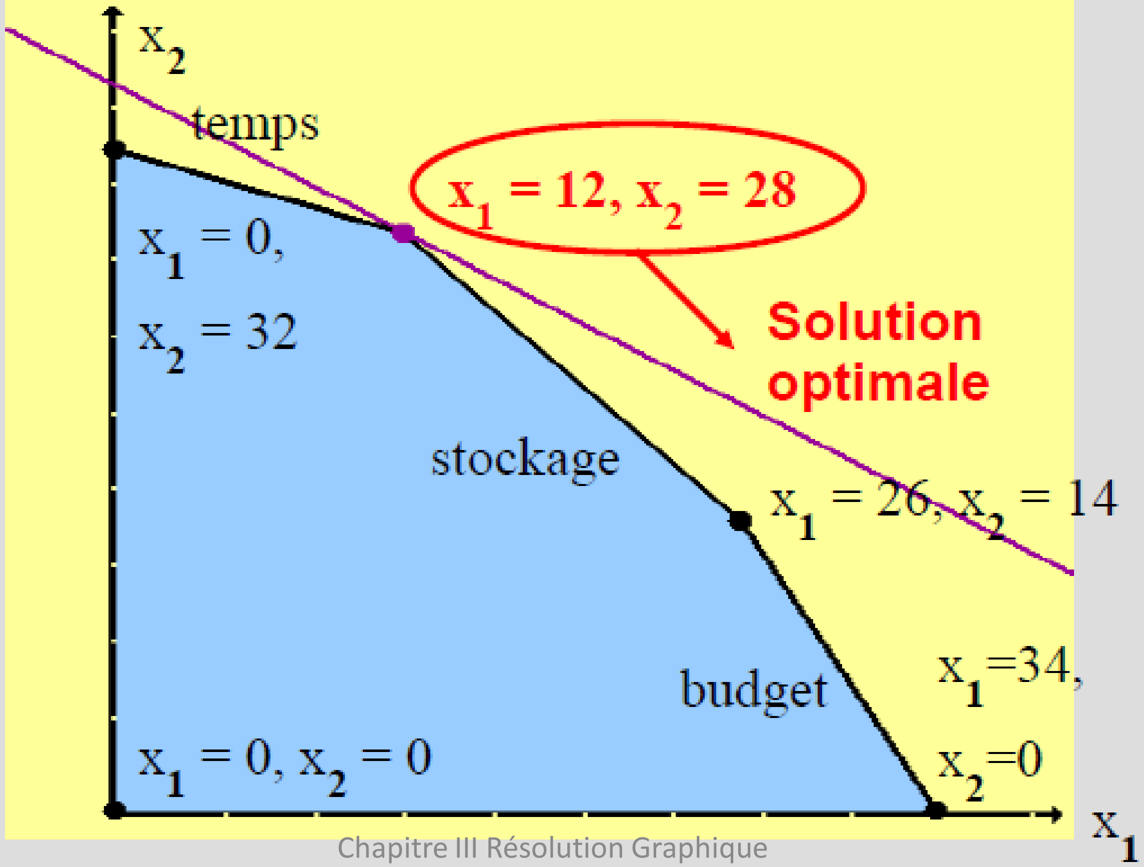
- Dans le domaine admissible (en bleu), on cherche une solution qui maximise $3x_1 + 5x_2$
  - On trace la droite $3x_1+5x_2=0$ (en violet)
    - La droite optimale est $3x_1+5x_2=$*valeur optimale*
    - Cette droite est donc **parallèle** à la droite $3x_1+5x_2=0$
  - Idée (visuelle) : on « déplace » la droite $3x_1+5x_2=0$
    - En la faisant « glisser », le plus possible, dans le bon sens ($3x_1+5x_2=8$ passe par le point $x_1=1$ et $x_2=1$),
    - Tout en restant dans le domaine admissible.

Résolution graphique du problème d'achat de matières brutes (2/3)



Résolution graphique du problème d’achat de matières brutes (3/3)

$$\underbrace{6x_1+10x_2 = 352}_{\text{Droite optimale}}$$



Plan d’achat optimal (unique) :
12 tonnes de MP1,
28 tonnes de MP2,
temps et stockage disponibles utilisés intégralement,
352 kg de minerai