Exercice 1 1) (Cours)

2) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout t réel $\varphi_X(t) := E(e^{itX}) =$

$$= \sum_{x \in D_X} e^{itx} P_X(x) \quad \text{avec} \begin{cases} D_X = \{0,1,2,\dots,n\} \\ P_X(x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^{it})^x (1-p)^{n-x}.$$

On rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x a^x b^{n-x}$.

Ainsi $\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n = (1-p+pe^{it})^n$

3) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout réel t, $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) =$

$$= \sum_{x \in D_X} e^{itx} P_X(x) \quad \text{avec} \begin{cases} D_X = \mathbb{N} \\ P_X(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \end{cases}.$$

Alors $\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda e^{it})^x}{x!}$

On rappelle que $e^y = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{y^x}{x!}$.

Ainsi $\varphi_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Exercice 2 1) X_n indique le nombre de succès au bout de n expériences de type Bernouilli de paramètre $p = \frac{\lambda}{n}$. Donc si n est assez grand p est assez petit (voisin de 0).

Donc pour chaque n $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p=\frac{\lambda}{n})$ et d'après l'exercice 6

$\varphi_{X_n}(t) = (1-p+pe^{it})^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n$ pour tout réel t.

2) $\varphi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n \Rightarrow \ln \varphi_{X_n}(t) = \ln\left[\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n\right] =$

$= n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)$

②

On sait que $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$.

en posant $x = -\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}$

$\lim_{n \to +\infty} x = 0$ en fait un développement limité à l'ordre 1 donne

donc $\ln(1+x) = f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + x\,\mathcal{E}(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$

Ainsi $\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1!} \frac{1}{1+0} + x\,\mathcal{E}(x)$.

et $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right) = -\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}$

Ainsi $\ln \varphi_{X_n}(t) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right) = -\lambda + \lambda e^{it} + \left(-\lambda + \lambda e^{it}\right) \cdot \mathcal{E}\left(-\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)$

$\ln \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\lambda + \lambda e^{it}$

et par suite $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \Phi(t)$

qui est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ. Toujours vérifier sur la table des lois usuelles.

Exercice 3:

1) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ on rappelle que le support de X : $C_X = [0, +\infty[$

et la densité de X est $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in C_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La fonction caractéristique de X : pour tout t réel

$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$

$(C_X = \mathbb{R}_+)$

$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x}\,dx = \lambda \left[\frac{1}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x}\right]_0^{+\infty} = \lambda\left(-\frac{1}{it-\lambda}\right) e^0 = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

quand $x \to +\infty \Rightarrow \mathrm{Re}(it-\lambda)x = -\lambda x \to -\infty$

③

2) $Y \hookrightarrow f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$

et $C_Y = \mathbb{R}$.

La fonction caractéristique de Y : $\varphi_Y(t) := E\left(e^{itY}\right)$ pour tout t réel

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ity} f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{0} e^{ity} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} dy + \int_{0}^{+\infty} e^{ity} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(it+\lambda) y} dy + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{(it-\lambda) y} dy$$

$$= \frac{\lambda}{2} \frac{1}{it+\lambda} \left[e^{(it+\lambda)y}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{it-\lambda} \left[e^{(it-\lambda)y}\right]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \frac{1}{it+\lambda} - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(it-\lambda) - (it+\lambda)}{(it+\lambda)(it-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}$$

L'exercice suivant n'est pas à faire en TD car il comporte trop de calcul mathématique vous l'ignorez svp

Exercice 4: $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\phi_X(t)$ sa fonction caractéristique

alors $C_X = \mathbb{R}$ et $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

On a $\phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

$$\Rightarrow \phi_X'(t) \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}} ix\, e^{itx} f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} ix\, e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

on dérive par rapport à la variable t sous le signe intégral

$$\left(e^{itx}\right)' = ix\, e^{itx}$$

④

Pour réécrire cette intégrale on utilise l'intégration par parties et on a :

$$\phi_X'(t) = \frac{-i\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{-x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbb{R}} u\, dv = [uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} v\, du$$

$$\left\langle \begin{array}{l} u = e^{itx} \Longrightarrow du = it e^{itx} dx \\ dv = \underbrace{-\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}_{w' e^{w} dx} \Rightarrow v = e^{w} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right\rangle$$

$$\phi_X'(t) = \frac{-i\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} it e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\phi_X'(t) = i\sigma^2 (it) \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx = -\sigma^2 t\, \phi_X(t)$$

2) On sait que $\phi_X'(t) = -\sigma^2 t\, \phi_X(t)$ on a alors en posant $y = \phi(t)$ une e.d.o. de type : (1) $y' + \sigma^2 t y = 0$ équation linéaire SSM.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -\sigma^2 t y = \frac{dy}{y} = -\sigma^2 t\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\sigma^2 t\, dt \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{\sigma^2}{2} t^2 + c^{te}$$

de plus $y(0) = \phi(0) = 1$ (la valeur d'une fonction caractéristique est 1 au point $t=0$) on peut alors déterminer c^{te}

$$(1) \Leftrightarrow y(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2 + c^{te}} = e^{c^{te}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$$

$$\Rightarrow 1 = y(0) = e^{c^{te}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2} \cdot 0} \Rightarrow e^{c^{te}} = 1$$

$$\Rightarrow c^{te} = 0.$$

Au final $y(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$ c'est à dire $\underline{\phi(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}}$