V.a.D

• Si D_X est un ensemble discret; avec D_X est le support de X

• Fonction de masse de X : P_X est définie par :

$$P_X(x) = \begin{cases} P(X=x) & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• ↳ P une fonction réelle définie sur D_X nulle ailleurs et vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & 0 \leq P_X(x) \leq 1 \\ \sum_{k \in D_X} P_X(k) = 1 \end{cases}$$

• Fonction de répartition : $\boxed{F_X = P(X \leq x)}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad P_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F_X(x) = \sum_{n_0}^{x} P_X(x) = P(X \leq x)$

- n_0 : le premier element de D_X.

- Théorème : $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$:

① $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

② $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P_X(X=a)$

③ $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X=b)$

④ $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X=a) - P(X=b)$

⑤ $P(X > a) = 1 - F_X(\cancel{\ } X \leq a)$

Espérance : Moyenne :

$$E(X) = \sum_{k \in D_X} k P(k)$$

• E(X) est peut être infinie

• Si E(X) = 0 ; On dit que la V.a X est centrée.

• $\min D_X \leq E(X) \leq \max D_X$

→ $E(g(x)) = \sum g(k) \cdot P_X(k)$

V.a.C

• X est une V.a. absolument continue s'il existe f_X une fonction qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Tel que : F_X : est la fonction de répartition de X.

→ et f_X est la fonction de densité de X

⟹ La fonction de densité f_X peut être définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• f est la fonction de densité de X (V.a.c) vérifiant les conditions suivantes :

• $\forall t \in D_X \quad f_X(t) \geq 0$

• $\int_{n_0}^{x} f(t)\,dt = 1$

- Pour X (V.a.c) : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$
$= P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
$= \int_a^b f_X(t)\,dt$.

Espérance :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx$$

f_X : fct de densité de X

• E(X) peut être infinie

• Si E(X) = 0 ; On dit que X est centrée

- linéarité de E :

→ Soient X, Y deux v.a. discrètes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$
- $E(|X|) = 0 \Rightarrow P(X=0) = 1$

- Variance et écart Type :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \sum_{k \in D_X} k^2 P(k) - (E(X))^2$$

Ecart Type : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

- La Variance est tjrs positive, et elle peut être infinie
- Contrairement à l'esperence la Var n'est pas liniaire : $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$Var(aX + bX) = a^2 Var(X)$$
$$Var(X + b) = Var(X).$$

- Moment centré d'ordre r :

$$\mu_r = E[(X - E(X))^r]$$
$$= \sum_{k \in D_X} (k - E(X))^r . P_X(k).$$

- Moment d'ordre r :

$$\nu_r = E(X^n) = \sum_{k \in D_X} k^n P_X(k)$$

↳ Le moment centré d'ordre 2 c'est exactement la Var(X).

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) . f_X(x)\, dx$$

- Linéarité de E :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

- Si $E(|X|) = 0 \Rightarrow P(X=0) = 1$

- Variance et ecart Type :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx - (E(X))^2$$

- La Var est Tjrs Positive, et elle est peut être infinie.
- contrairement à l'esperence la Var n'est pas linéaire :
- X v.a.c, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$Var(aX + bX) = a^2 Var(X).$$

- Ecart Type :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

- Moment centré r :

$$\mu_r = E[(X - E(X))^r]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^r . f_X(x)\, dx$$

- Moment d'ordre r :

$$\nu_r = E(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x)\, dx.$$

- Le moment centré d'ordre 2 de X est exactement la Var(X).