CHAPITRE II

Introduction et Propriétés de la Programmation Linéaire

Notions de bases

Programmation linéaire

Définition (Programme linéaire). Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, ...

Existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (*simplex*)

Notions de bases

Un programme linéaire générique s'écrit sous la forme

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max_x & c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
 & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq b_m,
\end{array}
$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$
\max_x \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.
$$

Notions de bases

La ligne

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

représente la *fonction objectif*, que nous souhaitons maximiser. La maximisation se fait en respectant les m *contraintes*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Sous forme matricielle, le problème se réecrit

$$\max_x c^T x$$
$$Ax \leq b,$$

Notions de bases

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La terminologie “linéaire” vient du fait que toutes les fonctions impliquées sont linéaires. Typiquement, nous ajouterons également des contraintes de non-négativités:

$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n,$$

ou, en abrégé,

$$x \geq 0.$$

Exemples de modèles linéaires

Exemple (Production de peinture). Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

– Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.

– La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Exemples de modèles linéaires

Formulation (Production de peinture)

Alternatives (*variables*, inconnues du problème)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{tonnes de peinture d'extérieur} \\
&\quad \text{produites par jour} \\
x_2 &= \text{tonnes de peinture} \\
&\quad \text{d'intérieur produites par jour}
\end{aligned}
$$

***Fonction objectif* à optimiser**

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Restrictions (*contraintes*)

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_2 - x_1 &\leq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Exemples de modèles linéaires

Solutions et méthodes de résolution

– *Solution admissible :* satisfait toutes les contraintes.

$$x_1 = 3, \; x_2 = 1 \; (\Rightarrow z = 19)$$

– Nous voulons trouver la *solution (admissible) optimale*.
– Infinité de solutions admissibles !

Méthodes pour trouver l'optimum

– Méthode graphique
– Simplexe

Forme standard et forme canonique d’un programme linéaire

Forme standard

Définition (Forme standard). Un programme linéaire est sous *forme standard* lorsque toutes ses contraintes sont des *égalités* et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

n variables, m contraintes, $m < n$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme canonique

Définition (Forme canonique). Un programme linéaire est sous *forme canonique* lorsque toutes ses contraintes sont des *inégalités* et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

n variables, m contraintes, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Théorème (Equivalence des formes standard et canonique). Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique.

Démonstration.

– Une containte d'inégalité $a^T x \leq b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une *variable d'écart* :

$$a^T x + s = b,$$
$$s \geq 0.$$

Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme standard du problème de production de peinture

$$
\begin{aligned}
\max z = 5x_1 + 4x_2 & & \\
s.c. 6x_1 + 4x_2 &\leq& 24 \\
x_1 + 2x_2 &\leq& 6 \\
x_2 &\leq& 2 \\
x_2 - x_1 &\leq& 1 \\
x_1, x_2 &\geq& 0
\end{aligned}
$$

Forme standard

$$
\begin{array}{rllllllll}
\max z = & 5x_1 & +4x_2 & & & & & & \\
\text{s.c.} & 6x_1 & +4x_2 & +s_1 & & & & = & 24 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +s_2 & & & = & 6 \\
 & & x_2 & & & +s_3 & & = & 2 \\
 & -x_1 & +x_2 & & & & +s_4 & = & 1 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Forme matricielle

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
\text{s.t.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

$$
c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix},
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$