<u>Opérations sur les ensembles :</u>

Soit A et B deux sous ensembles de Ω.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$

$(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$

A – B (signifie A sauf les éléments contenus dans B) = $A \cap B^c$

$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$A \cup A^c = \Omega$

<u>Rappel sur les probabilités :</u>

Une expérience aléatoire est n'importe quel processus pour le quel on ne peu pas prédire le résultat à l'avance.

Par exemple :

1. Si on jette une pièce monétaire. Le résultat peut-être pile (P) ou face (F).
2. On jette un dé deux fois et on enregistre la somme des résultats.

Pour une expérience aléatoire, Ω représente l'espace des possibles, qui est un ensemble des résultats possibles de l'expérience en question.

1. Pour l'exemple 1 : Ω={Pile , Face}
2. Pour l'exemple 2 : Ω= {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

L'ensemble des possibles est dit discret s'il est fini ou infini mais dénombrable.

Sinon l'ensemble des possibles est dit continu (généralement quand les résultats possibles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle de nombres réelles).

Un sous ensemble A de Ω ($A \subset \Omega$) est appelé un événement.

Dans l'exemple 2, soit A l'événement où la somme après deux jets de dé est multiple de 3 :

A={3,6,9,12}

Un élément appartenant à Ω est appelée un événement élémentaire.

Soit A et B deux événements contenus dans Ω. La probabilité d'un événement doit assurer les propriétés suivantes :

0<=P(A)<=1

P(Ω)=1

P(ϕ)=0

P(A)+P(A^c)=1

Si A ⊂B alors P(A)≤P(B)

- P(A∩B) signifie que l'événement A et B sont réalisés au même temps
- P(AUB) signifie que l'événement A ou B sont réalisés

P(AUB) = P(A)+P(B)-P(A∩B)

La formule générale pour la probabilité de l'union de n événements est la suivante:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card} I = k}} P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card} I = k}} P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right).
\end{aligned}$$

- Deux événements A et B sont incompatibles si A∩B = ϕ. Aussi, P(A∩B) = P(A)+P(B) si A∩B = ϕ.
- Si A_1,A_2,….A_n forment une partition de Ω (A_1,A_2,….A_n sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_i = \phi$ si i ≠j et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) alors :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

$$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

- Soit A un événement ($A \subset \Omega$). Si on suppose que chaque événement élémentaire de Ω est équiprobable (pour chaque $\omega \in \Omega$ $P(\{\omega\})= \frac{1}{card(\Omega)}$) alors $P(A)= \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

  (Les événements élémentaires sont équiprobables= chaque événement a la même probabilité d'occurrence)

<u>Probabilité conditionnelle</u>

Soit A et B deux événements dans Ω. $P(A \mid B)$ signifie la probabilité que A se réalise en sachant que B est déjà réalisé.

$$P(A \mid B)= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Deux événements sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Ceci signifie que l'occurrence de B n'affecte pas l'occurrence de A et vice versa. Une autre manière de prouver l'indépendance de deux événements consiste à vérifier que :

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ et } P(B \mid A) = P(B)$$

Exercices :

<u>Exercice 1 :</u>

Soit A, B et C des événements dans Ω avec $P(A)=P(B)=1/4$, $P(C)=1/3$, $P(A \cap B)=1/8$, $P(A \cap C)=1/6$ et $P(B \cap C)=0$. Calculez la probabilité de $P(A \cup B \cup C)$

<u>Exercice 2 :</u>

Une entreprise qui produit un composant électronique comprend trois usines A, B et C qui fabriquent cette pièce. A, B et C produisent 50%, 30% et 20% du totale des pièces produites par l'entreprise. Le composant possède les probabilités d'être défectueux de 0.02, 0.05 et 0.01 selon l'usine où il est produit (A, B et C respectivement).

1. Quelle est la probabilité qu'un composant sélectionné aléatoirement soit défectueux ?
2. Sachant que le composant sélectionné est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit de l'usine B.

<u>Exercices 3 :</u>

Deux usines de fabrication A et B d'une entreprise fabriquent la même pièce. L'usine A produit 1000 pièces avec 100 entre ces 1000 qui sont défectueuses. L'usine B produit 2000 pièces avec 150 entre ces 2000 qui sont défectueuses.

Si on sélectionne aléatoirement une pièce et celle-ci est défectueuse, quelle est la probabilité que celle-ci a été produite par l'usine A ?

Exercice 4 :

Un test développé par un laboratoire pour une maladie est caractérisé comme suit :

L'événement A : « La personne testée est infectée par la maladie »

L'événement B : « Le résultat est positive » (le test a indiqué que la personne est malade)

Les probabilités suivantes sont connues :

$$P(B|A) = 0.99 \text{ et } P(B|A^c)=0.005$$

Il est aussi connu que 0.1% ($P(A)=0.001$) de la population est infectée par la maladie.

Quelle est la probabilité que le résultat du test est positif ($P(B)$)?

Sachant que le résultat du test est positive, quelle est la probabilité que la personne qui est testé est malade ?