Matière

Programmation Linéaire

Objectif de la matière

- Ce cours dresse un panorama des techniques de modélisation utilisées en programmation linéaire qui consistent à la résolution de problèmes complexes visant à obtenir le meilleur résultats possible en tenant compte de certaines contraintes.

- La *programmation linéaire* est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont à une série d'équations et d'inéquations linéaires

Exemple

Un problème d'optimisation linéaire

On considère le cas d'un fabricant d'automobiles qui propose deux modèles à la vente, des grosses voitures et des petites voitures. Les voitures de ce fabriquant sont tellement à la mode qu'il est certain de vendre tout ce qu'il parvient à produire, au moins au prix catalogue actuel de 16000 euros pour les grosses voitures, et 10000 euros pour les petites voitures. Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier. La construction d'une petite voiture nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'une grosse voiture nécessite une unité de caoutchouc mais deux unités d'acier. Sachant que son stock de caoutchouc est de 400 unités et son stock d'acier de 600 unités, combien doit-il produire de petites et de grosses voitures au moyen de ces stocks afin de maximiser son chiffre d'affaire ?

Un problème d'optimisation linéaire

Nous appellerons x le nombre de grosses voitures produites, y le nombre de petites voitures produites, et z le chiffre d'affaire résultant. Le problème se traduit alors sous la forme

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 16000x + 10000y \\ \text{sous les contraintes} & x + y \leq 400 \\ & 2x + y \leq 600 \\ & x \geq 0,\ \ y \geq 0. \end{array}$$

Programme

1. **Rappels Mathématiques (Algèbre linéaire)**
   - **Matrice, déterminant d'une matrice, inverse d'une matrice, …**
2. **Introduction et propriétés de la programmation linéaire**
   - **Forme générale d'un programme linéaire, forme canonique, standard et mixte, résolution graphique, notion de polyèdre, résolution analytique**
3. **Méthode du Simplexe**
   - **Introduction à la méthode, algorithme du simplexe, tableau du simplexe**
4. **Dualité**
   - **Introduction, règle de passage du primal au dual, algorithme dual du simplexe**
5. **Problème du transport**
   - **Introduction du problème, graphe associé au tableau du transport Algorithme du transport, Algorithme dual du transport.**

Mode d’évaluation

- **Contrôle continu**

- **Examen écrit**

Chapitre I

Rappels Mathématiques

Définitions, notations

Définition 1 *Une* **matrice de format (m,n)** *est un tableau rectangulaire de mn* **éléments**, *rangés en m* **lignes** *et n* **colonnes**.

On utilise aussi la notation $m \times n$ pour le format. Lorsque $m = n$, on dit plutôt : **matrice carrée d'ordre n**. Si $m = 1$, on parle de **matrice-ligne d'ordre n**, et si $n = 1$, on parle de **matrice-colonne d'ordre m**.

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, et $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. A est une matrice carrée d'ordre 3. B est de format $(3,2)$, C de format $(2,3)$. D est une matrice-colonne d'ordre 3, et L une matrice-ligne d'ordre 3.

Définitions, notations

Conventions Chaque matrice est encadrée par des crochets - [ ] - ou des parenthèses - ( ), parfois par d'autres symboles (accolades, traits doubles, ...) : la seule notation non admise est le trait simple - | | - réservé aux déterminants.
Les éléments sont nommés en utilisant deux indices, **le premier est l'indice de ligne, le second est l'indice de colonne.** On note alors, par exemple : $A = [a_{i,j}]$.

Exemples : $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$, $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$, et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Définition 2 *Deux matrices* **de même format**, *$[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$, sont* **égales** *si et seulement si : $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout couple (i, j).*

Définition 3 *La* **diagonale** *d'une matrice $[a_{i,j}]$ est l'ensemble des éléments $a_{i,i}$.*

Exemples : $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \mathbf{a_{3,3}} \end{bmatrix}$

Opérations Matricielles

2.1 Transposition

Définition 4 *La* **transposée** *d'une matrice* $A = [a_{i,j}]$ *est la matrice* $A^t = [a_{j,i}]$*, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de* A*.*

Ceci revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A.

Exemples : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, alors :
$C^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Opérations Matricielles

Propriétés
Si A est de format (m, n), alors A^t est de format (n, m). En particulier, si A est carrée d'ordre n, alors A^t a le même format. La transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne, et réciproquement. Enfin, $(A^t)^t = A$ pour toute matrice A.

Définition 5 *Une matrice carrée A est dite* **symétrique** *si elle vérifie :* $A^t = A$.

Opérations Matricielles

Définition 6 *Le* **produit** *d'une matrice* $A = [a_{i,j}]$ *par le nombre* λ *est la matrice :* $\lambda A = [\lambda a_{i,j}]$. *On dit aussi que* λA *est le* **produit** *de* A *par le* **scalaire** λ.

Exemples : $3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $(-1)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Propriétés

Les matrices A et λA ont toujours le même format. De plus : $\lambda(A^t) = (\lambda A)^t$.
Pour toute matrice A et tous scalaires λ et μ, on a : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
Si $\lambda = 1$, on a bien entendu : $1A = A$, et si $\lambda = 0$, on obtient la matrice nulle.
Enfin, le produit λA n'est nul que si l'un des facteurs est nul :
$\lambda A = 0$ si est seulement si $\lambda = 0$ ou $A = 0$.*(ce produit est* **intègre***)*

Opérations Matricielles

2.3 Somme

Définition 8 *La* **somme de deux matrices de même format** *est définie par :*

$$[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}].$$

Exemple : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$

Propriétés Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ, μ :

$A + (B + C) = (A + B) + C.$ *(la somme est associative)*

$A + B = B + A.$ *(la somme est commutative)*

$A + 0 = 0 + A = A.$ *(la matrice 0 est élément neutre)*

Toute matrice admet une opposée, $-A = (-1)A$.

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. *(le produit par un scalaire est distributif par rapport à la somme des matrices et par rapport à la somme des scalaires)*

$(A + B)^t = A^t + B^t$. *(la transposée d'une somme est la somme des transposées)*

Opérations Matricielles

2.4 Produit

2.4.1 Produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne

Définition 9 *Soit* $X = [x_i]$ *une matrice-ligne, et soit* $Y = [y_i]$ *une matrice-colonne* **de même ordre n.** *Leur* **produit** *est le nombre :* $XY = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.
(comme le résultat est un nombre, ce produit s'appelle aussi **produit scalaire** *de X par Y)*

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$, $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$

Opérations Matricielles

2.4 Produit

2.4.2 Cas général

Définition 10 *Le* **produit** *de deux matrices n'est défini que si* **le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.** *Si A est de format (m,n), et si B est de format (n,p), le produit $C = AB$ est la matrice de format (m,p) définie par : chaque élément $c_{i,j}$ de C est le produit de la ième ligne de A (considérée comme une matrice-ligne) par la jème colonne de B (considérée comme une matrice-colonne). Autrement dit, si $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$, alors, pour tous (i,j) :* $\quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}$.

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -5 \\ 22 & 16 & 10 \\ -11 & -8 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Opérations Matricielles

2.4 Produit

Propriétés Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :
$A(BC) = (AB)C.$ *(le produit est associatif)*
$AB \neq BA$ en général. *(le produit n'est pas commutatif)*
$A0 = 0$ et $0A = 0.$ *(chaque matrice nulle est élément absorbant)*
$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$ *(associativité généralisée)*
$(AB)^t = B^t A^t.$ *(attention à l'ordre)*
$A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC.$ *(le produit est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme)*
Le produit AB peut être nul avec $A \neq 0$ et $B \neq 0.$ *(le produit des matrices n'est pas intègre, voir exemple ci-dessus)*
En particulier, dans le calcul matriciel, on ne peut pas simplifier :
$AC = BC$ n'implique pas nécessairement $A = B$

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

Pour deux matrices carrées **de même ordre** A et B, la somme $A + B$ et les produits AB et BA existent toujours (on n'a plus à se soucier des conditions d'existence). Toutes les propriétés vues ci-dessus sont encore vraies, et le calcul matriciel ressemble beaucoup au calcul algébrique ordinaire, à deux exceptions près :

- le produit n'est pas commutatif,
- il n'est pas intègre.

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.1 Matrices identités

Définition 11 *Pour chaque ordre n, on appelle* **matrice identité d'ordre n** *la matrice notée I_n définie par :* $I_n = [\delta_{i,j}]$, *avec :* $\delta_{i,j} = 0$ *si* $i \neq j$,
$\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$

Autrement dit, I_n n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Si l'ordre est implicite, on la note simplement I.

Exemple : $$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.1 Matrices identités

Propriétés La matrice I_n est élément neutre du produit des matrices carrées d'ordre n :
pour toute matrice carrée A d'ordre n, $AI_n = I_nA = A$.
Plus généralement, pour toute matrice A de format (n, p) : $\quad I_nA = A$, et, pour toute matrice B de format (m, n) : $\quad BI_n = B$.

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$.

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.2 Matrices inverses

Définition 12 *On dit qu'une matrice carrée A est* **inversible** *si et seulement si il existe une matrice B (de même format) telle que :* $AB = BA = I.$
*B est alors appelée l'***inverse** *de A , et est notée A^{-1}.*

Exemples : Puisque $I^2 = I$, la matrice identité est sa propre inverse : $I^{-1} = I$.
Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $AB = BA = I$, et donc $B = A^{-1}$.
Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors : $AB = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puisque AB n'est jamais égale à I(pour toute matrice B), la matrice A n'est pas inversible.

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.2 Matrices inverses

Propriétés Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

On en déduit que si A est inversible, alors son inverse est **unique**.
$(A^{-1})^{-1} = A$, autrement dit, A^{-1} est inversible, d'inverse A.
Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ *(attention à l'ordre)*.
Si A est inversible et si $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
Si A est inversible, alors A^t l'est aussi, et : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
(l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse)

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.2 Matrices inverses

Théorème 1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n , et soient X et B deux matrices-colonnes d'ordre n . Si A est inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution unique, donnée par : $X = A^{-1}B$, quelle que soit la matrice-colonne B .*
Réciproquement, si le système $AX = B$ n'admet qu'une seule solution, pour une matrice-colonne quelconque B , alors A est inversible (et la solution est $X = A^{-1}B$).

Opérations Matricielles

3 Matrices carrées

3.3 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 13 *Une matrice carrée* $[a_{i,j}]$ *est* **triangulaire supérieure** *si tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$ *.*
Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ *est* **triangulaire inférieure** *si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$ *.*
Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ *est* **diagonale** *si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$ *. (elle est donc à la fois triangulaire supérieure et inférieure)*

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est triangulaire inférieure et $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ est diagonale.