Solution exercice 1 :

1) $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ \sum_{x \in \{1,2,\dots,n\} = D_X} P(x) = 1 \end{cases}$ sont les conditions pour que p soit une fonction de masse pour une certaine v.a. X (X est discrète

$$1 = \sum_{x=1}^{n} p(x) = \sum_{x=1}^{n} C \frac{x-1}{n} = \frac{C}{n} \sum_{x=1}^{n} (x-1) = \frac{C}{n} \underbrace{(0 + 1 + \dots + n-1)}_{\overset{(*)}{=} \frac{(n-1)(n)}{2}}$$

(somme d'une suite arithmétique).

$$= \frac{C}{n} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{C(n-1)}{2}$$

$$1 = \frac{C(n-1)}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2}{n-1}}$$

et on a aussi $p(x) = \frac{2}{n-1} \frac{x-1}{n} \geq 0 \quad \forall x \in \{1,2,\dots,n\}$

2) Fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}$

si $x < 1$ alors $F_X(x) = 0$

si $1 \leq x < 2$ alors $F_X(x) = P_X(1) = \frac{2}{n-1} \frac{1-1}{n} = 0$

si $2 \leq x < 3$ alors $F_X(x) = P_X(1) + P_X(2) = 0 + \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

⋮

si $k \leq x < k+1$ alors $F_X(x) = P_X(1) + P_X(2) + \dots + P_X(k) =$

avec $(k < n)$

$$= 0 + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{2 \cdot 2}{n(n-1)} + \frac{2 \cdot 3}{n(n-1)} + \dots + \frac{2 \cdot (k-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2(1 + 2 + 3 + \dots + k-1)}{n(n-1)} \overset{(*)}{=} \frac{2(k-1)(k)}{n(n-1)2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

si $x \geq n$ alors $F_X(x) = 1$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \\ \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Remarque : la fonction de répartition F_X est toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors que P_X est définie sur D_X le support de X uniquement et elle est nulle ailleurs.

On suppose n assez grand.

3) $$P(X \leq 3) = F_X(3) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = \frac{3.2}{n(n-1)} = \frac{6}{n(n-1)}$$

$$P(1 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(1) = \frac{5.4}{n(n-1)} - 0 = \frac{20}{n(n-1)}$$

$$P(X > n-2) \underset{\uparrow}{=} 1 - P(X \leq n-2) = 1 - F_X(n-2) = 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

(évènements contraires $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$)

$$= \frac{n(n-1) - (n-2)(n-3)}{n(n-1)} = \frac{4n-6}{n(n-1)}$$

4) $$E(X) = \sum_{x \in D_X} x . p_X(x) = \sum_{x=1}^{n} x . \frac{2(x-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{x=1}^{n} x(x-1)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \Big(\underbrace{\sum_{x=1}^{n} x^2}_{\substack{\text{Somme des } n \text{ premiers} \\ \text{carrés des nombres entiers}}} - \underbrace{\sum_{x=1}^{n} x}_{= \frac{n(n+1)}{2}} \Big)$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}}$$

Alors $E(X) = \frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{3} - (n+1)\right]$

$= \frac{1}{3(n-1)}\left[(n+1)(2n+1) - 3\cdot(n+1)\right]$

$= \frac{1}{3(n-1)}\left[2n^2-3\right] = \frac{2n^2-3}{3(n-1)}$

Solution exercice 2 :

1) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$ sont les conditions pour que f soit une fonction de densité d'une variable aléatoire continue

$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} Cxe^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} Cxe^{-\frac{x}{2}}\,dx =$

$= C\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}\,dx$ $\left\langle \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array} \right\rangle$

par parties

$\stackrel{(*)}{=} C\int_0^{+\infty} u\,dv = C\left\{[uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\,du\right\} =$

$= C\left\{\underbrace{\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\,dx\right\} = -C\left[4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} =$

$= C4e^0 = 4C$ $\qquad 1 = 4C \Rightarrow C = \frac{1}{4}$.

De plus $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \geq 0$ pour tout x réel.

2) $F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ donc si $x < 0$ $F_X(x) = 0$. car le support de X c'est $C_X = [0,+\infty[$ (le domaine où f est non nulle).

et si $x \geq 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4}\, t\, e^{-\frac{t}{2}}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\,dt$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x t\, e^{-\frac{t}{2}}\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left\{ [uv]_0^x - \int_0^x v\,du \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \left[-2t\, e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x - \int_0^x -2\, e^{-\frac{t}{2}}\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ -2x\, e^{-\frac{x}{2}} - \left[4\, e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}x\, e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + e^{0} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0. \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) La moyenne : $E(X) := \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \frac{1}{4}\, x\, e^{-\frac{x}{2}}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx \underset{\text{par parties}}{\overset{(*)}{=}} \left\langle \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\,du \right\} = \frac{1}{4}\left\{ \underbrace{\left[-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -4x\, e^{-\frac{x}{2}}\,dx \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x}{2}}\,dx \overset{(*)}{=} \underbrace{\left[-2x\, e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -2\, e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 2\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$= 4$ $\quad$ ainsi $E(X) = 4$.

La variance $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Calcul du moment d'ordre 2 : $E(X^2)$

$$E(X^2) := \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2\, \frac{1}{4}\, x\, e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 4^{-1}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

Par parties $\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2\,dx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

$$E(X^2) = \frac{1}{4}\left\{[uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\,du\right\} = \frac{1}{4}\left\{\underbrace{\left[-2x^3e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -6x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx\right.$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx \overset{X}{=} \frac{3}{2}\left\{\underbrace{\left[-2x^2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{} - \int_0^{+\infty} -4xe^{-\frac{x}{2}}\,dx\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{4\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}\,dx\right\} \overset{(*)}{=} 6\left\{\underbrace{\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\,dx\right\}$$

$$= 6\cdot 2\underbrace{\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}}_{=2} = \cancel{384}\ 24$$

Ainsi $E(X^2) = \cancel{384}\ 24$ et par suite $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$

$= 24 - 4^2 = \cancel{384 - 16} = \cancel{368}\ 8$

Exercice 4 (solution).

1) Pour chaque question $P(\text{réponse juste}) = P(\text{succès}) = \frac{1}{3}$

$P(\quad " \text{ fausse}) = P(\text{échec}) = \frac{2}{3}$

et X compte le nombre de succès lorsqu'on répète 10 fois une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. Alors X est une variable aléatoire de loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$ et donc X a pour fonction de masse :

$P_X(x) = C_{10}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$ quand $x \in D_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

2) $P(X=3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-3}$

$$P(X=3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7} = \frac{10!}{3!\,7!}\,\frac{2^7}{3^{10}} = \frac{10.9.8}{3.2}\,\frac{2^7}{3^{10}} = \dots$$

3) $P(\text{"la personne est admise"}) = P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) =$

$= 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$

$= 1 - F_X(4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} C_{10}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = 1 - \frac{1}{3^{10}}\sum_{x=0}^{4} 2^{10-x}\cdot C_{10}^{x}$

$= 1 - \frac{1}{3^{10}}\left[2^{10}C_{10}^{0} + 2^{9}C_{10}^{1} + 2^{8}C_{10}^{2} + 2^{7}C_{10}^{3} + 2^{6}\right.$