TD Dualité

Exercice 1

Donner le primal du dual

Primal

a) Max $Z = 2x1 + 4x2 + 3x3$
$3x1 + 4x2 + 2x3 \leq 60$
$2x1 + x2 + 2x3 \leq 40$
$x1 + 3x2 + 2x3 \leq 80$
$x1, x2, x3 \geq 0$

b) Min $Z = 20x1 + 24x2$
$x1 + x2 \geq 30$
$x1 + 2x2 \geq 40$
$x1, x2 \geq 0$

c) Max $Z = 10x1 + 6x2$
$x1 + 4x2 \leq 40$
$3x1 + 2x2 = 60$
$2x1 + x2 \geq 25$
$x1, x2 \geq 0$

-------------------------------------**Solution Exercice1**--

Dual

a) Min $w = 60y1 + 40y2 + 80y3$
$3y1 + 2y2 + y3 \geq 2$
$4y1 + y2 + 3y3 \geq 4$
$2y1 + 2y2 + 2y3 \geq 3$
$y1 \geq 0, y2 \geq, y3 \geq 0$

b) Max $w = 30y1 + 40y2$
$y1 + y2 \leq 20$
$y1 + 2y2 \leq 24$
$y1 \geq 0, y3 \geq 0$

c) Min $w = 40y1 + 60y2 - 25y3$
$y1 + 3y2 - 2y3 \geq 10$
$4y1 + 2y2 - y3 \geq 6$
$y1 \geq 0, y3 \geq 0$, y2 quelconque

Exercice 2

Max Z = 40x1 + 50x2

5x1 + 4x2 ≤ 80

x1 + 2x2 ≤ 24

3x1 + 2x2 ≤ 36

x1, x2 ≥ 0

1- Donner le dual PL* de ce primal PL
2- Résoudre le primal PL par le simplexe
3- Déduire la solution du dual PL*

-------------------------------------Solution Exercice 2-------------------------------------

1. Donner le dual PL* de ce primal PL

Min w=80y1 + 24y2 + 36y3

5y1+y2+3y3 ≥ 40

4y1+2y2+2y3 ≥ 50

y1,y2,y3≥0

2- Résolution du primal par la méthode de simplexe

Forme standard

Max Z= 40 x1 + 50 x2

s.c. 5x1 + 4 x2 + s1=80

x1 + 2x2 + s2=24

3x1 + 2x2 + s3=36

x1, x2, s1, s2, s3>=0

Tableau initial

Base	x1	x2	s1	s2	s3	B
s1	5	4	1	0	0	80
s2	1	2	0	1	0	24
s3	3	2	0	0	1	36
-Z	40	50	0	0	0	0

Base initiale={s1, s2, s3}

Itération 1

Base	x1	x2	s1	s2	s3	B	Critère
s1	5	4	1	0	0	80	80/4=20
s2	1	2	0	1	0	24	24/2=12
s3	3	2	0	0	1	36	36/2=18
-Z	40	50	0	0	0	0	

x2 entre en base et s2 sort de la base

Nouvelle base={s1, x2, s3}

Base	x1	x2	s1	s2	s3	B
s1	3	0	1	-2	0	32
x2	1/2	1	0	1/2	0	12
s3	2	0	0	-1	1	12
-Z	15	0	0	-25	0	-600

Itération 2

Base	x1	x2	s1	s2	s3	B	Critère
s1	3	0	1	-2	0	32	32/3=10.66
x2	1/2	1	0	1/2	0	12	12/(1/2)=24
s3	2	0	0	-1	1	12	12/2=6
-Z	15	0	0	-25	0	-600	

x1 entre en base et s3 sort de la base

Nouvelle base={s1, x2, x1}

Base	x1	x2	s1	s2	s3	B
s1	0	0	1	-1/2	-3/2	14
x2	0	1	0	3/4	-1/4	9
x1	1	0	0	-1/2	1/2	6
-Z	0	0	0	-35/2	-15/2	-690

Tous les coefficients dans la fonction objectif sont <=0 donc la solution est optimale

s1= 14, x2=9, x1=6 et Z=690

3- Déduction de la solution du Dual ¨PL*

A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes:
- les fonctions objectifs Z et W ont la même valeur optimale **z=cx*** = y*b=w
- la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement

- les variables du primal (**x_1, x_2**), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées, d'où pour le dual à résoudre:

5y1+y2+3y3 = 40
4y1+2y2+2y3 = 50

- la première variable d'écart s_1 est non nulle donc la première valeur $y_1 = 0$, d'où le dual à résoudre est :
y2+3y3 = 40
2y2+2y3 = 50

Primal	**z = 690**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	6	9	14	0	0
	valeurs marginales	0	0	0	-17.5	-7.5
Dual	**w = 690**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	0	17.5	7.5
	valeurs marginales	-6	-9	-14	0	0