Exercice 4 (solution).

1) Pour chaque question $P(\text{réponse juste}) = P(\text{succès}) = \frac{1}{3}$

$P(\quad " \text{ fausse}) = P(\text{échec}) = \frac{2}{3}$

et X compte le nombre de succès lorsqu'on répète 10 fois une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Alors X est une variable aléatoire de loi Binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$ et donc X a pour fonction de masse :

$$P_X(x) = C_{10}^{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$$

quand $x \in D_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots$

2) $P(X=3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10-3}$

$$P(X=3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7} = \frac{10!}{3!\,7!}\,\frac{2^7}{3^{10}} = \frac{10.9.8}{3.2}\,\frac{2^7}{3^{10}} = \ldots$$

3) $P(\text{"la personne est admise"}) = P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) =$

$= 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$

$$= 1 - F_X(4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} C_{10}^{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = 1 - \frac{1}{3^{10}} \sum_{x=0}^{4} 2^{10-x} \cdot C_{10}^{x}$$

(5) $= 1 - \frac{1}{\ldots}\left[2^{10}C^{0} + 2^{9}C^{1} + 2^{8}C^{2} + 2^{7}C^{3} + \ldots\right.$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

P(X=0)=$C_{10}^{0}(\frac{1}{3})^{0}(\frac{2}{3})^{10} = (\frac{2}{3})^{10} = 0.017$

P(X=1)=$C_{10}^{1}(\frac{1}{3})^{1}(\frac{2}{3})^{9} = 0.086$

P(X=2)=$C_{10}^{2}(\frac{1}{3})^{2}(\frac{2}{3})^{8} = 0.195$

P(X=3)=$C_{10}^{3}(\frac{1}{3})^{3}(\frac{2}{3})^{7} = 0.260$

P(X=4)=$C_{10}^{4}(\frac{1}{3})^{4}(\frac{2}{3})^{6} = 0.227$

$P(X>=5) = 0.215$