| TD2 |

Ex1:

P une fction definie Par : $P(x) = C\,\frac{x-1}{n}$ si $x \in \{1, 2 \dots n\}$.

① • Pour que P soit la fction de masse d'une $\underbrace{\text{v.a.d}\,X}$, 2 conditions à verifier
(X : variable aléatoire discrète)

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ \sum P(x) = 1 \quad x \in D_X \end{cases}$$

• Valeur de C ? $\sum_{x=1}^{n} P(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{n} C \cdot \frac{x-1}{n} = 1$

$$\frac{C}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x - 1 = 1 \Rightarrow \frac{C}{n} \cdot \left(\sum_{x=1}^{n} x - \sum_{x=1}^{n} 1 \right) = 1$$

$$\frac{C}{n} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = 1$$

$$n \cdot \frac{C}{n} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) = 1 \Rightarrow C \left(\frac{n+1-2}{2} \right) = 1 \Rightarrow C \cdot \frac{n-1}{2} = 1$$

$$C = \frac{1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2}{n-1} \qquad \boxed{C = \frac{2}{n-1}}$$

$$P(x) = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{x-1}{n} \geq 0 \quad \forall x \in \{1, 2 \dots n\}.$$

↳ Calcul de la Somme des n Premiers Termes : $\sum_{i=1}^{n} i \quad i \in \{1 \dots n\}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$= \quad 2 \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

② Fonction de répartition :

$$F_X(x) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{n(n-1)} \cdot (i-1)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} i - 1 = \frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 \right]$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left[\frac{k(k+1)}{2} - k \right]$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left[\frac{k^2 + k - 2k}{2} \right] = \frac{\cancel{2}}{n(n-1)} \cdot \frac{k^2 - k}{\cancel{2}}$$

$$= \boxed{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}$$

③ Calculer :

• $P(X \leq 3)$? On sait que : $P(X \leq x) = F_X(x)$ alors :

$$P(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{3(3-1)}{n(n-1)} = \boxed{\frac{6}{n(n-1)}}$$

• $P(1 < X \leq 5)$? On sait que : $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ alors :

$$P(1 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(1) = \frac{5(5-1)}{n(n-1)} - \frac{1(1-1)}{n(n-1)} = \boxed{\frac{20}{n(n-1)}}$$

• $P(X > n-2)$? On sait que : $P(X > x) = 1 - F_X(x)$ alors :

$$P(X > n-2) = 1 - P_X(X \leq n-2) = 1 - F_X(n-2)$$

$$= 1 - \frac{(n-2)(n-2-1)}{n(n-1)} = 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n(n-1) - (n-2)(n-3)}{n(n-1)} = \frac{\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2} + 3n + 2n - 6}{n(n-1)}$$

$$= \boxed{4n - 6}$$

| TD2 Suite : |

Ex1 : ④ La Moyenne de X :

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x\, P_X(x) = \sum_{x=1}^{n} x\, \frac{2(x-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{x=1}^{n} x(x-1)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left[\sum_{x=1}^{n} x^2 - x\right] = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \left[\sum_{x=1}^{n} x^2 - \sum_{x=1}^{n} x\right]$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}(n-1)} \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{2}} \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{3} - (n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{3(n-1)} \left[(n+1)(2n+1) - 3(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{3(n-1)} \left[2n^2 + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{3n} - 3\right]$$

$$= \frac{2n^2 - 2}{3(n-1)} = \boxed{\frac{2(n^2-1)}{3(n-1)}} = \frac{2(n-1)(n+1)}{3(n-1)} = \frac{2}{3}(n+1)$$

↳ calcul de la somme des carrées des n premiers termes : (nbr entiers) :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{n} \left(i^3 - (i-1)^3\right) = \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3$$

$$= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3\right) - \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3\right)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(i^3 - (i-1)^3\right) = n^3}$$

$$\cdot\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^3-(i-1)^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(i^3-\left(i^3-3i^2+3i-1\right)\right)$$

$$n^3=\sum_{i=1}^{n}\left(\cancel{i^3}-\cancel{i^3}+3i^2-3i+1\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2-3i+1\right)$$

$$n^3=\sum_{i=1}^{n}3i^2-\sum_{i=1}^{n}3i+\sum_{i=1}^{n}1$$

$$n^3=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\sum_{i=1}^{n}i+n$$

$$n^3=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\left(3\sum_{i=1}^{n}i^2=n^3+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\times 2$$

$$6\sum_{i=1}^{n}i^2=2n^3+3n(n+1)-2n$$

$$6\sum_{i=1}^{n}i^2=2n^3+3n^2+3n-2n$$

$$6\sum_{i=1}^{n}i^2=2n^3+3n^2+n=n\left(2n^2+3n+1\right)$$

On calcul Δ et On trouve 2 racines

$$6\sum_{i=1}^{n}i^2=n(n+1)(2n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$