TD 2 Ex 3 : (1)

$$f_X(x) = k e^{-|x-5|} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow C_X = \mathbb{R}$

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \geq 5 \\ -x+5 & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

$x-5<0 \Leftrightarrow x<5$

Alors

$$f_X(x) = \begin{cases} k e^{-(x-5)} & \text{si } x \geq 5 \\ k e^{-(-x+5)} & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} k e^{-x+5} & \text{si } x \geq 5 \\ k e^{x-5} & \text{si } x < 5. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} f_X(x) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1. \end{cases}$

$$\underline{\underline{1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{5} k e^{x-5}\, dx + \int_{5}^{+\infty} k e^{-x+5}\, dx$$

$$= k e^{-5} \int_{-\infty}^{5} e^{x}\, dx + k \cdot e^{5} \int_{5}^{+\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= k e^{-5} \left[e^{x} \right]_{-\infty}^{5} + k e^{5} \left[(-1) e^{-x} \right]_{5}^{+\infty}$$

$$= k e^{-5} \left[e^{5} - 0 \right] + k e^{5} \left[+ e^{-5} \right]$$

$$= k e^{-5+5} + k e^{5-5} = k \cdot 1 + k \cdot 1 = 2k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

<u>1^e^ cas</u> si $x < 5$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{t-5}\,dt = \frac{1}{2} e^{-5} \int_{-\infty}^{x} e^{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-5} \left[e^{t}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} e^{-5} \cdot \left[e^{x} - 0\right] = \frac{1}{2} e^{x-5}$$

<u>2^e^ cas</u> si $x \geq 5$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{2} e^{t-5}\,dt + \int_{5}^{x} \frac{1}{2} e^{-t+5}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{5} e^{-5} \cdot e^{t}\,dt + \frac{1}{2} \int_{5}^{x} e^{5} e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{-5} \left[e^{t}\right]_{-\infty}^{5} + \frac{1}{2} e^{5} \left[-e^{-t}\right]_{5}^{x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-5} \left[e^{5} - 0\right] + \frac{1}{2} e^{5} \left[-e^{-x} + e^{-5}\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-5+5} + \frac{1}{2} e^{5-5} - \frac{1}{2} e^{5-x} = 1 - \frac{1}{2} e^{5-x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x-5} & \text{si } x < 5 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{5-x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$