TD3

EX1: ① Calculons la Probabilité d'avoir plus d'une erreur (loi Binomiale) :

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(\underbrace{100}_{n};\underbrace{0,01}_{p})$: $\Rightarrow$ $\boxed{P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}}$

Alors : $P(X=k) = C_{100}^k (0,01)^k (0,99)^{100-k}$

Donc : $P(X>1) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$P(X>1) = 1 - \Big(\underbrace{C_{100}^0}_{1}(0,01)^0(0,99)^{100}\Big) - \Big(\underbrace{C_{100}^1}_{100}(0,01)^1(0,99)^{99}\Big)$

$P(X>1) = 1 - (0,7357) = \boxed{0,2642}$ (*)

↳ $C_{100}^0 = \dfrac{100!}{0!(100-0)!} = \boxed{1}$ / $C_{100}^1 = \dfrac{100!}{1!(100-0!)} = \boxed{100}$.

② Répétons le calcul précédant avec une approximation en utilisant la loi de Poisson :

$\lambda = n.p = (100)(0,01) = \boxed{1}$

$\boxed{P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$ $P(X>1) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$P(X>1) = 1 - \Big(\dfrac{e^{-1}1^0}{0!}\Big) - \Big(\dfrac{e^{-1}1^1}{1!}\Big) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$

$P(X>1) = 1 - 0,7357 = \boxed{0,2642}$ (**)

↳ La mê valeur obtenue en (*) et (**).

Exo2: $X \rightsquigarrow P(2) \Rightarrow P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

① Calculons la Probabilité que Plus de Trois appels arrivent au tableau electronique durant 10 minutes:

$$P(X>3) = 1 - P(X\leq 3) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$$

$$P(X>3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-2}\frac{2^k}{k!} = 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right)$$

$$= 1 - e^{-2}\left(1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}\right) = 1 - 0,857 = \boxed{0,143}$$

② Calculons la Probabilité qu'aucun appel n'arrive dans 10 minutes:

$$P(X=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} = \boxed{0,135}.$$

Exo3: $X \rightsquigarrow G\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow P(X=k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

$P(X=k) = P(1-P)^{k-1}$

① Calculons la Probabilité de Succés aprés moins de 6 Tentatives:

$$P(X<6) = P(X\leq 5) = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^0+\left(\frac{5}{6}\right)^1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{6}(3,586) = \boxed{0,5977} \simeq \boxed{0,598}$$

② Calculons la Probabilité de succés aprés plus de 6 tentatives:

$$P(X>6) = 1 - P(X\leq 6) = 1 - [P(X\leq 5) + P(X=6)]$$

$$= 1 - \Big[0,577 + \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5}_{0,0679}\Big] = 1 - 0,6646 \simeq \boxed{0,3317}$$

③ Calculons l'esperance de X: $E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{1/6} = \boxed{6}.$

$P(X > k)$: Proba d'avoir le succès après plus de k tentatives.

Si : $k = 90$

$$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90)$$

$$P(X \leq 90) = \sum_{k=1}^{90} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \leftarrow \text{Somme d'une Serie Géométrique}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} a r^{i-1}$$

$$r \times \left(S = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots \dots + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}} \right)$$

$$- \quad Sr = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots \dots + \cancel{ar^{n-2}} + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n$$

$$S - Sr = a - ar^n$$

$$S(1-r) = a(1-r^n) \Rightarrow \boxed{S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

Donc :

$$S = \frac{1/6 \left(1 - (5/6)^n\right)}{1 - 5/6} = \frac{\cancel{1/6}\left(1 - (5/6)^n\right)}{\frac{6-5}{6}} = \boxed{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$1/6$

$$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90) = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{90}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{90} = \dots$$

ds l'exo 3 :

• (1) $P(X \leq 6) \overset{P(X \leq 5)}{=} \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \boxed{0{,}598}$

• (2) $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx \boxed{0{,}335}$$

Méth 2:

(2) $$P(X>6)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=7}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$=\underbrace{\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1-\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}_{=0}\right)\right]}_{=1}-\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right]$$

$$=1-1+\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\simeq\boxed{0,335}$$