**TD Méthode de simplexe**

**Exercice 1**

Une entreprise disposant de 10 000 m2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d’une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d’assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d’agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d’agrafes disponible permet d’assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 300 DA et 500DA.

* Formuler le problème de la recherche d’un plan de production maximisant le chiffre d’affaires de l’entreprise sous forme d’un programme linéaire.
* Résoudre le problème par la méthode de simplexe

***-------------------------Solution Exercice 1------------------------------------------***

1. ***Programme linéaire***

Max Z=300 x1 + 500 x2

s.c. x1+ 2x2 <= 10000

2 x1 + 3x2 <= 12000

X1 + 4 x2 <= 15000

X1, x2>= 0

1. ***Résolution du problème par la méthode simplexe***

Etape 0

Forme standard du PL

Max Z= 300 x1 + 500 x2

s.c. x1+ 2x2 + e1 =10000

2x1 + 3 x2 + e2 = 12000

x1 + 4 x2 + e3 =15000

x1, x2, e1, e2, e3>=0

**Variable de base : e1, e2, e3, VHB : x1, x2**

**Base= {e1, e2, e3}**

**Solution de base initiale : e1=10000, e2=12000, e3=15000**

**x1=x2=0**

**Z=0**

Tableau initial

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b |
| e1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10000 |
| e2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 12000 |
| e3 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 15000 |
| -Z | 300 | 500 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Itération 1**

Etape1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b |
| e1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10000 |
| e2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 12000 |
| e3 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 15000 |
| -Z | 300 | 500 | 0 | 0 | 0 | 0 |

x2 va entrer en base

Etape 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b | Critère |
| e1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10000 | 10000/2=5000 |
| e2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 12000 | 12000/3=4000 |
| e3 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 15000 | 15000/4=3750 |
| -Z | 300 | 500 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

e3 va sortir de la base

**Nouvelle base ={e1, e2, x2}**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b |
| e1 | ½ | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 2500 |
| e2 | 5/4 | 0 | 0 | 1 | -3/4 | 750 |
| x2 | ¼ | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 3750 |
| -Z | 175 | 0 | 0 | 0 | -125 | -1875\*103 |

Solution e1=2500, e2= 750 , x2= 3750 , x1=e3=0 et Z=1875\*103

Cette solution n’est pas optimale

**Itération 2**

Etape 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b |
| e1 | ½ | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 2500 |
| e2 | 5/4 | 0 | 0 | 1 | -3/4 | 750 |
| x2 | ¼ | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 3750 |
| -Z | 175 | 0 | 0 | 0 | -125 | -1875\*103 |

x1 entre en base

***Etape2***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b | Critère |
| e1 | ½ | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 2500 | 2500/(1/2)=5000 |
| e2 | 5/4 | 0 | 0 | 1 | -3/4 | 750 | 750/(5/4)=600 |
| x2 | ¼ | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 3750 | 3750/(1/4)=15000 |
| -Z | 175 | 0 | 0 | 0 | -125 | -1875\*103 |  |

e2 va sortir de la base

**Nouvelle base ={e1, x1, x2}**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | b |
| e1 | 0 | 0 | 1 | -5/2 | -1/5 | 2200 |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 4/5 | -3/5 | 600 |
| x2 | 0 | 1 | 0 | -1/5 | 2/5 | 3600 |
| -Z | 0 | 0 | 0 | -140 | -20 | -1980\*103 |

Tous les coefficients dans la fonction objectif Z sont <=0 donc :

L’algorithme s’arrête

Solution optimale :

e1=2200, x1=600, x2= 3600 et e2=e3=0 Z= 1980\*103

Z=300 x1+ 500 x2= 300\*600 + 500\* 3600=180000+1800000=1980\*103

**Exercice 2**

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode de deux phases :

Max Z=5x1+ 2x2

s.c. 2x1+ x2<=70

x1<=30

x1+ x2>=10

x1, x2>=0

**-------------------------------------Solution Exercice 2 ----------------------------------------------**

Max Z=5x1+ 2x2

s.c. 2x1+ x2<=70

x1<=30

x1+ x2>=10

x1, x2>=0

**Forme standard**

Max Z=5x1+ 2x2

s.c. 2x1+ x2 +e1=70

x1 + e2=30

x1+ x2 – e3=10

x1, x2, e1, e2, e3>=0

***Phase I***

Min Z’=a

s.c. 2x1+ x2 +e1=70

x1 + e2=30

x1+ x2 – e3 + a=10

x1, x2, e1, e2, e3, a>=0

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | a | b | Critère |
| e1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 70 |  |
| e2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 30 |  |
| a | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 10 |  |
| -Z | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| -Z’ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |

Il faut enlever le coefficient de la variable artificielle de la ligne qui exprime la fonction Z’ du tableau ; pour cela on fait L5 (ligne bleu)=L5 -L3 (ligne verte)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | A | b | Critère |
| e1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 70 | 70/2=35 |
| e2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 30 | 30/1=30 |
| A | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 10 | 10/1=10 |
| -Z | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| -Z’ | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -10 |  |

Variable entrante : on choisit la variable qui a le coefficient négatif le plus petit (car on a un problème de minimisation)

Le choix entre x1 et x2 est arbitraire car les deux ont le même coefficient négatif le plus petit

x1 entre en base et a sort de la base

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | B | Critère |
| e1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 2 | 50 |  |
| e2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 20 |  |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 10 |  |
| -Z | 0 | -3 | 0 | 0 | 5 | -50 |  |
| -Z’ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

La variable artificielle est hors base, on a maintenant une base pour le problème initial.

***Phase II***

***Itération 1***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | B | Critère |
| e1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 2 | 50 | 50/2 |
| e2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 20 | 20/1 |
| x1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 10 |  |
| -Z | 0 | -3 | 0 | 0 | 5 | -50 |  |

e3 entre en base et e2 sort de la base

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | B | Critère |
| e1 | 0 | 1 | 1 | -2 | 0 | 10 |  |
| e3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 20 |  |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 30 |  |
| -Z | 0 | 2 | 0 | -5 | 0 | -150 |  |

***Itération 2***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | B | Critère |
| e1 | 0 | 1 | 1 | -2 | 0 | 10 |  |
| e3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 20 |  |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 30 |  |
| -Z | 0 | 2 | 0 | -5 | 0 | -150 |  |

x2 entre en base et e1 sort de la base

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x1 | x2 | e1 | e2 | e3 | B | Critère |
| x2 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | 10 |  |
| e3 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 30 |  |
| x1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 30 |  |
| -Z | 0 | 0 | -2 | -1 | 0 | -170 |  |

Tous les coefficients sont <=0 alors l’algorithme s’arrête

Solution optimale : x1=30, x2= 10, e3=30, Z=170