

## 線型代数 II ( 2017 後期 )

- 単純なことを徹底的にすることがものごとの役に立つという。数学でこれに当てはまるのが一次式の理論 = 線型代数といえようか。一方、数学の形態として見た場合、線型代数には、代数計算の形式、幾何学的直感、それと推論に伴う論理の形式、という3つの側面が認められる。手と目と頭ということであるが、これを同時に鍛えるためには、簡単な稽古を厭わぬ勤勉さが肝要。いずれにせよ、かけた労力よりもはるかに多くの見返りが期待できることだけは断言できる。
- 授業は次の資料のうち抽象的な部分にできるだけ触れない形で行う。  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/linear/linear2017.pdf>  
 ( 注意 : 問題番号等に変更あり、最新のものを利用すること。 ) もう少し具体的に、後期の目標の一つに二次式の理論を据えたい。これは、歴史的にも応用上も重要であるにも関わらず、実際の授業では抜け落ちがちな部分であるため、備忘を兼ねてとくに記しておく。
- 成績は、授業時間内で行う3回の試験 ( 4 点 × 3 回 ) + 期末試験 ( 8 点 ) の合計による。  
 12 点以上が合格。試験結果はその都度掲示するので、忘れず確認し、後れをとらぬよう工夫されたい。なお、受けた試験の配点の合計が12点未満の場合は、授業全体を欠席したものとみなす。
- オフィスアワーは、水曜 12 : 30 ~ 13 : 30 ( 理 A 349 )。予約等は、  
[yamagami@math.nagoya-u.ac.jp](mailto:yamagami@math.nagoya-u.ac.jp) まで。
- 授業の情報は、以下にも随時掲載の予定。  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/>

### 進度予定表

10/06	複素数と方程式
10/13	行列の対角化と固有ベクトル (10.1, 10.4)
10/20	対角化の実際、2 次行列の場合 (10.9, 10.10)
10/27	まとめと試験 1
11/10	実内積、直交行列、p.56-p.58, p.72-p.73 (16.3, 16.4)
11/17	対称行列と二次形式、標準形、p.70-p.71 (15.2, 15.3)
11/24	複素内積空間、エルミート行列と直交性、p.62、p.66、
12/01	まとめと試験 2
12/08	エルミート行列の対角化
12/15	内積の不等式、正規直交系、射影定理
12/22	まとめと試験 3
1/12	学習相談日
1/19	残り物 1
1/26	残り物 2
2/02	期末試験

宿題の締め切りは、翌週の火曜 12 : 00  
 当面の宿題の番号は、進度予定表にあるが、変更の可能性あり。  
 宿 1 方程式  $z^3 + i = 0$  の解を求め図示せよ。  
 宿 2 複素数  $z$  が単位円周上を 1 周するとき、 $z^n$  はどちら向きに何周するか。

また、本文を補う資料を随時用意するかも知れないが、こちらは皆さんの反応次第ということで。

宿 1 方程式  $z^3 + i = 0$  の解を求め図示せよ。

宿 2 複素数  $z$  が単位円周上を 1 周するとき、 $z^n$  はどちら向きに何周するか。

徹底して行列にこだわろう。それでも色々やることはあるはず。抽象的な話は最後に 1 - 2 回、アリバイ程度。もうひとつの方法があるか。行列の対角化のあとに内積空間を一般的にするというのはどうか。それで対称行列の対角化まで

$$4 + 4 + 3 + 3 = 14 \text{ 回}$$

10/06 固有値と固有ベクトルの復習、複素数の必要性、複素数と多項式、オイラーの公式、方程式の解の存在

[複素行列と連立一次方程式、掃き出し法の復習、複素行列式の復習、基本定理の復習]

10/13 行列の対角化、固有方程式、固有空間の独立性、基底の復習、固有ベクトルと基底

10/20 対角化可能性と対角化の方法、2 次行列の場合、2 次連立漸化式の解の漸近挙動

10/27 試験 1

11/10 実標準内積空間、正規直交基底、直交行列、回転行列と折り返し行列

与えられた単位ベクトルを含む正規直交基底の存在（証明等はあとで）。直交行列の積と逆行列も直交行列であること。線型性を利用して、回転の行列が実際に回転を表すこと。折り返し行列の固有値と固有ベクトル。3 次元の直交行列が回転を表すことと行列式の値が 1 であることの同値性。固有値 1 の固有ベクトルの存在、それを含む正規直交基底についての表示から 2 次元への帰着。

問 16.3, 16.4

11/17 対称行列と二次形式、直交行列による対角化（証明はあとで）、2 次対称行列の対角化（実践的に）  
短縮授業

問：2 次対称行列の固有値の符号を調べる。

問：2 変数の 2 次式の極値問題を解く。

11/24 複素内積空間、エルミート共役、エルミート行列とその固有値、固有空間の直交性。

実対称行列の直交対角化の証明。固有値が実数であること。固有ベクトルを含む正規直交基底についての行列表示が別れること。

問：2 次エルミート行列の固有値が実数であること。

問：3 次実対称行列の対角化。 $A_2$  行列。

12/01 試験 2

12/08 ユニタリー行列、エルミート行列のユニタリー対角化、パウリ行列とその対角化。  
ユニタリー行列の積と逆もユニタリー。

問：パウリ行列の対角化。

問：パウリ行列の間の代数関係を確認せよ。

12/15 内積の不等式、部分空間と正規直交系、Gram-Schmidt の直交化、直交分解と射影定理。

12/22 試験 3

1/12 学習相談日

1/19

1/26

あと 2 回を適当に

線型写像と表現行列。

次元定理、核と像。

平面の一次変換。

最初の2つは、数学者が大好き。私は批判的。その批判的なところを説明するのも面白いかも知れない。

こんなことをしてもしょうがない。読めばしまい。

2/2 試験4