FA 2012/6/14

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。
以下では、開区間 $(0,\infty)$ を $\mathbb{R}_+$ という記号で表す。

$\boxed{1}$ 開区間 $\mathbb{R}_+$ 上の測度 $\mu(dt) = e^{-t}\,dt$ から作られるヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}_+,\mu)$ を考え、そこでの関数列 $\{f_k\}_{k\geq 0}$ を $f_k(t) = t^k$ で定める。

(i) 関数列 $\{f_k\}$ にグラム・シュミットの直交化を施して得られる正規直交系を $\{e_k\}_{k\geq 0}$ で表す。e_0, e_1, e_2 を具体的に求めよ。

(ii) e_n は、n 次の多項式であることを示せ。

(iii) 自然数 $0 \leq m \leq n$ に対して、

$$\int_0^\infty t^m \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\,dt$$

の値を求めよ。

(iv)

$$e_n(t) = (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

であることを示せ。

$\boxed{2}$ 開区間 $\mathbb{R}_+$ の上で定義された複素数値 C^1 級関数全体のつくるベクトル空間を $C^1(\mathbb{R}_+)$ で表し、$V = \{f \in C^1(\mathbb{R}_+); f, f' \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$ とおく。(f' は f の導関数を表す。)

(i) V は $C^1(\mathbb{R}_+)$ の部分空間であり、

$$(f|g) = \int_0^\infty \overline{f(t)}g(t)\,dt + \int_0^\infty \overline{f'(t)}g'(t)\,dt$$

が V 上の内積を与えることを示せ。

(ii) 関数 $f \in V$ と正数 $a \leq b$ に対して、

$$|f(a) - f(b)|^2 \leq |b-a| \int_0^\infty |f'(t)|^2\,dt$$

を示せ。

(iii) 関数 $f \in V$ に対して、極限

$$\lim_{t\to+0} f(t)$$

が存在することを示せ。

(iv) V 上の線型汎関数 $\phi : V \to \mathbb{C}$ を

$$\phi(f) = \lim_{t\to+0} f(t)$$

で定めるとき、$\phi(f) = (g|f)$ $(\forall f \in V)$ となる $g \in V$ を具体的に求めよ。(ヒント:g の満たす微分方程式を導く。)