

問題 1 と問題 2 のレポートを、学生番号-1.pdf, 学生番号-2.pdf という名前の pdf ファイルで用意し、1月29日 16:00 (厳守) までに NUCT に上げること。

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

(ii) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を (i) で求めた固有ベクトルの一次結合で表わせ。

(iii) 漸化式と初期条件

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす数列 $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}, (z_n)_{n \geq 0}$ を求めよ。

2 実数 c をパラメータとする対称行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & c & 2-c \\ 1 & 2-c & c-2 \end{pmatrix}$$

に関連した以下の問に答えよ。

(i) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が C の固有ベクトルであることを確かめ、その固有値を求めよ。

(ii) C の固有多項式 $|tI_3 - C|$ を求めよ。

(iii) x, y, z の二次式 $x^2 + cy^2 + (c-2)z^2 - 2xy + 2(2-c)yz + 2zx$ が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ で極値を取るような c の範囲を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 72^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2(-1)^n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 1 & t-c & c-2 \\ -1 & c-2 & t-c+2 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2 - 2(c-1)t + 2(c-3)).$$

$$t^2 - 2(c-1)t + 2(c-3)$$