

微積分 2022

山上 滋

2023 年 4 月 5 日

目次

1	微分の公式	2
2	関数の増大度	6
3	逆三角関数	8
4	積分のこころ	9
5	関数の状態と近似式	22
6	テイラー展開	28
7	広義積分	40
8	級数の収束と発散	45
9	重積分	55
10	偏微分	62
11	変数変換	70
12	微分作用素	75
13	ガンマ関数	79
14	多変数の極値問題	81
15	等高線と陰関数	86
16	条件付極値	91
17	線積分	95
18	変分法	98
A	微分方程式事始め	101

B	ガンマ関数の漸近展開	105
C	関数の定義域	108
D	重積分あれこれ	110
E	くり返し積分から	111
F	二次形式の符号	112
G	対称行列の対角化	114
H	条件付き極値の二次判定	115
I	曲率と曲率半径	117

晴れて無為徒食の身になれたので、気ままに手を入れて、できるところまで前に、と思う暇もなく改めて貧乏ひま無しであるか。

久方ぶりに微積分の改訂である。若干、項目の並べかえを行った。それと近似式の扱いを少ししつこくした。この近似に対する感覚というか稽古というか、そういったものが不足していると感じていたから。

オーダー記号は、小さいのはやめて大きめにした。小さい方が定義が楽なので迷ったのであるが、テイラー近似においてあえて情報を減らす必要がないこと、応用上は big O が多用されるというあたりを勘案して変更した。吉とするか凶とするか結果は不明なれど。

昔は高校でやっていた程度の微分方程式を何とかしたい、それも変量の関数関係とからめて説明したい、置き換え積分を使う胡散臭さを払拭したい、の三したいへの布石としてメモを付録に入れてみた。もとより、不完全なものなので、今後、補充を続けていきたいのであるが、はてさて。

と、書いてから早一年。いまだバトンの送り渡し不如意なれど、教えて厳ならざるは師の怠りなり、という。学生の迷惑を顧みず、2012年度の標語としたい。

さらに3年の時がむなしく過ぎ、いまわの言葉もあらばこそ。と思う暇もあらばの4歳を重ねいよいよ極まり。

この講義ノートは、高校で微積分を受験科目として学習した大学1年生を対象とする。本来は手垢のついた内容ではあるが、未だ定まりなきは、何を意味するのであろうか。

とにかくも、授業とは切り離された自主的な読まれ方を期待して、前期と後期に分けていたものを合わせ、シラバスのようなものとも縁を切り、ゆるゆると手直してみることにする。命あらばこそ。

小さいオーダー記号が残っていたのを笠原式（？）で置き換えた。あと、等高線の図を入れた。これで思い残すことはないであろうか。

1 微分の公式

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とは、極限

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在すること。A を微分係数 (differential coefficient) という。微分係数は、 $f(x)$ と a だけで決まるので、 $f'(a)$ という書き表し方をする。また、関数を $y = f(x)$ と書く習慣に従って、 $\Delta y = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$ という式の極限として、 $\frac{dy}{dx}$ という表記も一般的である。

さらに、 a を変化させると $f'(a)$ は a の関数と思えるので、これを f の導関数 (derivative) という。また、以上の手続きを総称して微分 (differentiation) と呼ぶ。

微分（係数）の幾何学的¹（図形的）な意味は接線の傾きであり、微分可能とは接線が引けること。一方、物理的な意味としては、変数を時間のパラメータ t として、速度 (velocity) ということになる。とくに、3次元空間における質点の運動が、

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

というベクトル値関数で表されているとき、その速度（ベクトル）は、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

によって与えられる。他にも、数が表している量の意味に応じて様々な解釈が可能であるが、とくに断らなければこの幾何学的立場を第一に考えることにする。

問 1. 定義に従って

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

を導いてみる。

問 2. 連続だが $x = 0, x = 1$ の二ヶ所で微分できない、実数全体で定義された関数を無数に作れ。あらゆる点で微分できない連続関数は存在すると思うか否か²。

上で述べた微分の定義は、次のように言い換えることができる。

$$A(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a), \quad A(a) = A$$

とおくと、関数 $A(x)$ は $x = a$ の付近で連続であり、

$$f(x) = f(a) + A(x)(x - a)$$

と表わされる。逆に、 $x = a$ の付近で定義された連続関数 $A(x)$ を使って、 $f(x)$ が上のように表わされるならば、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であり、 $f'(a) = A(a)$ となる。

のことから、微分係数とは、関数を一次式で近似したときの係数に他ならないことがわかる。これは便利な言い換えで、例えば、

$$f(x) = f(a) + A(x)(x - a), \quad g(x) = g(a) + B(x)(x - a)$$

を掛けると

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + A(x)(x - a))(g(a) + B(x)(x - a)) \\ &= f(a)g(a) + (A(x)g(a) + f(a)B(x) + A(x)B(x)(x - a))(x - a) \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)g(x)$ も $x = a$ で微分可能で、その微分係数は

$$\lim_{x \rightarrow a} (A(x)g(a) + f(a)B(x) + A(x)B(x)(x - a)) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

で与えられる。

同じような考え方で、次が分かる。

¹ 幾何（きか）という用語は、geometry の音訳の geo の部分に由来するという。

² Weierstrass 関数、高木関数で検索してみよ。

定理 1.1 (微分の基本公式).

(i) 積の微分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(ii) 合成関数^{*3} の微分

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x).$$

問 3. (ii) を $A(x)$ 方式で確かめよ。理解したかどうかがはっきりする。

ここで、基本的な関数の微分の公式を復習しておこう。まず、定義から即座にわかるものとして

$$1' = 0, \quad x' = 1, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

次に、指数関数 a^x の微分は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

より、 Aa^x の形である。ここで、 A は指数関数 $y = a^x$ の $x = 0$ における接線の傾きを表しているから、 a が 1 に近づけば $A \rightarrow 0$ となり、また a が大きくなれば、 $A \rightarrow +\infty$ となる。そこで、ちょうど $A = 1$ となるような $a > 1$ が存在するはずで、それを普通 e と書く。したがって、 $(e^x)' = e^x$ であり、また e を底^{*4}とする対数関数^{*5} $\log x$ は、 e^x の逆関数であることから（接線の傾きの関係を考えて、詳しくは 3 節）、 $(\log x)' = 1/x$ ($x > 0$) となる。

注意 1. ここでは、直感的な形で数 e を導入してみた。より厳密な（直感を排除した）定義は、多くの教科書に採用されている「連続複利計算」を使うか、積分を使う方法であるが、それは「なぜ」という間に答えにくい形のもので、説得力のある導入方法とは言いがたい。

例 1.2.

(i) 正数 $a > 0$ を底とする指数関数 $y = a^x$ の微分は、 $a^x = e^{x \log a}$ と書きなおして ($a = e^{\log a}$ を使う)、合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

(ii) 同じく実数 a に対して x の幂関数 x^a ($x > 0$) の微分は、 $x^a = e^{a \log x}$ と書きなおして、同じく合成関数の微分の公式を適用すれば、

$$\frac{d}{dx} x^a = e^{a \log x} (a \log x)' = ax^{a-1}.$$

問 4. 正数 $a > 0$ を変化させると、指数関数 $y = a^x$ のグラフがどのように変わるか確認する。幂関数 $y = x^a$ のグラフについてはどうか。

問 5. x^x ($x > 0$) の導関数を求めよ。

問 6. $x < 0$ のとき、

$$(\log(-x))' = \frac{1}{x}$$

であることを確認。

^{*3} 合成関数と言っているものは、具体的には式の代入に他ならない。あえて別の用語を使うのは、値域と定義域の関係に注意を促したいがためである。しかしながら、具体的な経験が乏しい段階でうるさくいうこともなかろう。

^{*4} base の誤語。土台の方が適訳とは思うが。

^{*5} いわゆる自然対数 (natural logarithm) と呼ばれるもので、 $\ln x$ という記号を使うのが国際標準。

以上のことまとめると、

$$(e^x)' = e^x, \quad (\log|x|)' = \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0).$$

例 1.3. 合成関数の微分を三重に行う計算。

$$\left(\log \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

問 7. 上の例で、 x の範囲（関数の定義域）を（実数 a の正負で場合分けし）吟味する。

例 1.4. $\frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ を微分して

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = - (f(x))^{-2} f'(x) = - \frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

問 8. 商の微分の公式

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$$

を導け。

注意 2. 商の微分の公式を覚える必要はない。覚えてしまった人は、これを機会に忘れよう。具体的な関数に対して、基本関数の微分と基本公式を組み合せて計算できれば十分である。

次に、三角関数の微分。加法公式 $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ を使うと、

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x$$

であるから、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

が問題。

最初の極限は、関数 $\cos x$ の $x = 0$ における接線の傾きになっており、 $y = \cos x$ は $x = 0$ で直線 $y = 1$ に接するから、0 となる。2つめの極限は、角度を測る単位として、半径 1 の円の弧の長さ^{*6}を使えば、1 となる。（面積の比較から、 $\sin h \leq h \leq \tan h$ を導く。図 1 参照。）

以上により、 $(\sin x)' = \cos x$ がわかり、同様にして $(\cos x)' = -\sin x$ となるので、

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

問 9. $\tan x$ の微分の公式を確認。

問 10. 三角関数の微分において、角度を測る単位として radian を使う理由は何か。

問 11. 具体的な関数の微分の公式の中で基本的なものは何か。また派生的なものは何か。

^{*6} 弧度 (radian) という。1.7 rad のように書くが、数学では rad を省くことが多い。角度 $\pi/2$ の如く。

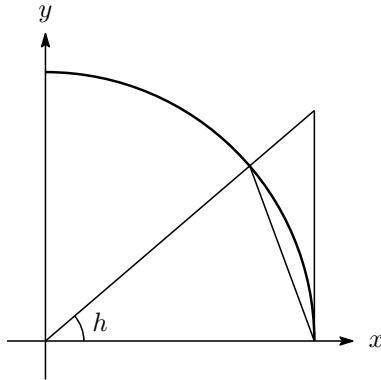


図 1

2 関数の増大度

基本的な 3 つの関数 ($a > 0$ は定数)

$$\log x, \quad x^a, \quad e^x$$

の値は、 $x \rightarrow \infty$ のとき、いずれも正の無限大に発散する。その増大のスピードを比較してみよう。

まずは x^a と e^x の比較。もう少し一般に、 x^a と e^{bx} ($b > 0$) の比較。このためには、両者の比を表す関数

$$f(x) = x^a e^{-bx}, \quad x > 0$$

を考えるとよい。 $f(x)$ のグラフは、 $f'(x) = x^{a-1} e^{-bx}(a - bx)$ に注意して増減表を書いてみると、

x		a/b	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow		\searrow

となり、 $x = a/b$ で最大値をとることがわかる。

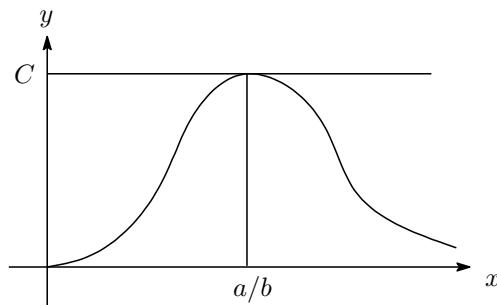


図 2

これだけでは $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ かどうか判断できないが、定数 $C > 0$ で、 $|f(x)| \leq C$ *7 をみたすものが

*7 \leq は \leqq の意味。国際的には、 \leq や \geq が常用される。

あることは分かる。(このような $C > 0$ があるとき、関数 $f(x)$ は有界であるといった言い方をする。) さて、 x^a と e^x の比較にもどって、 $x^a e^{-x}$ を $x^a e^{-x/2} e^{-x/2}$ とわけてみよう。すると $b = 1/2$ の場合の結果により、 $|x^a e^{-x/2}| \leq C$ となる定数 $C > 0$ があるので、

$$|x^a e^{-x}| \leq C e^{-x/2}$$

という不等式が得られる。一方、 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} = 0$ は知っているので、これから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-x} = 0$$

が出てくる。

次に $\log x$ と x^a との比較は、変数変換 $t = \log x$ により、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{at}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1/a}}{e^t} \right)^a = 0$$

となる。 $(x \rightarrow \infty$ のとき、 $t \rightarrow \infty$ であることに注意。)

以上の結果を

$$\log x \ll x^a \ll e^x \quad (x \rightarrow \infty)$$

と書くことにしよう。

注意 3. $x^a \ll e^{bx}$ は、 x が大きいところでの様子を表しているのであって、不等式 $x^a < e^{bx}$ が x の大きくないところでも成立立つといっているのではない。実際、 $a = 4, b = 1$ のとき $x = 2$ とすれば、

$$2^a = 16 > 3^2 > e^2.$$

問 12. 勝手な $a > 0, b > 0$ に対して、 $x^a \ll e^{bx}$ ($x \rightarrow \infty$) を確かめよ。また、 $0 < a < b$ であるとき、 x^a と x^b, e^{ax} と e^{bx} のスピードを比較せよ。

例 2.1. 極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

を求めてみよう。ややこしげな幕が出てきたら対数である。性質 $\log x \ll x$ に注意して、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

これから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1.$$

問 13. 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ を求めよ。

問 14. 正数 $a > 0$ と実数 $|x| < 1$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a x^n = 0$ であることを確かめよ。

問 15. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = x^2 e^{-x}.$

(ii) $y = x \log x$ ($x > 0$).

3 逆三角関数

逆関数 (inverse function) の復習 (縦のものを横に見る) : $y = f(x)$ の逆関数 g は、 $x = g(y)$ という関係をみたす。すなわち、

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y$$

が恒等的に成り立つ。

問 16. 無限大のスピード比較をした関数 x^a ($x \geq 0$), e^x , $\log x$ ($x > 0$) から、互いに逆関数の関係にあるものを取り出し、そのグラフをひとまとめに描け。

$f(x)$ として $\sin x$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$), $\cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $\tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) を考えた場合の逆関数を記号

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x.$$

(定義域に注意) で表し、**逆三角関数**^{*8} (inverse trigonometric function) と総称する。記号の由来は弧の長さを表していることによる。

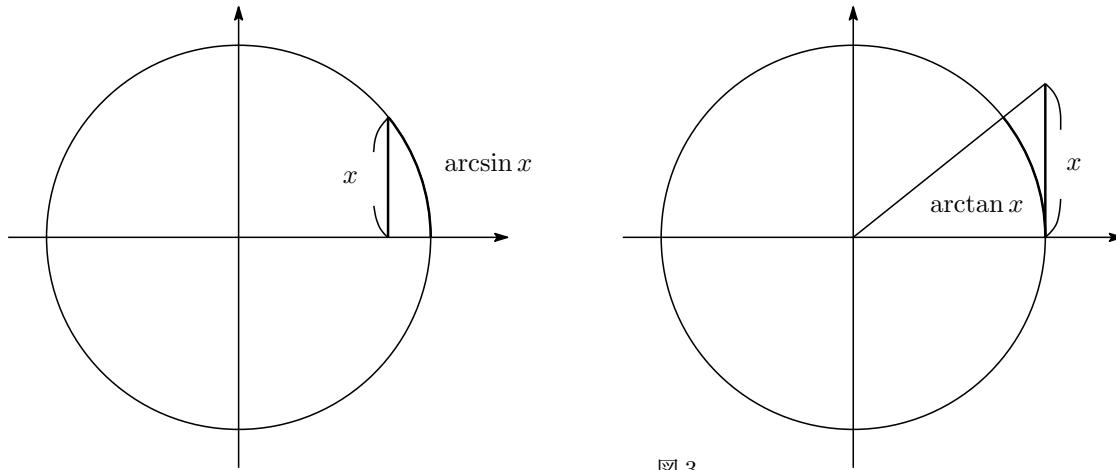


図 3

例 3.1. $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ が具体的に求められる x をできるだけ沢山挙げよ。

問 17. 等式 $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) を図形的に確認。

問 18. $0 < a < \pi/2$ とする。 $\sin x = \sin a$ をみたす実数 x をすべて求めよ。

問 19. $5\pi/4$ を含む閉区間で $\sin x$ の逆関数が定義できる最大のものは何か。

微分の公式 :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

*8 逆三角関数については $\sin^{-1} x$ などの表記法も一般的であるが、 $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆数 $(\sin x)^{-1}$ と紛らわしいのでここでは使わない。

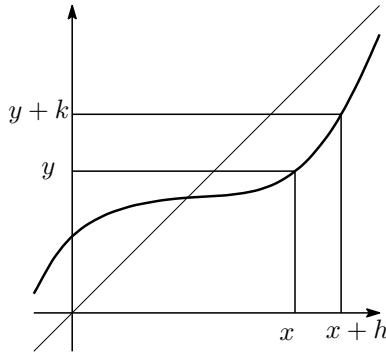


図 4

これを導くには、一般の逆関数で考えたほうがよい^{*9}。すなわち、 $y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ で表すとき、

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

実際、関数のグラフの図で、 $y + k = f(x + h)$, $x + h = g(y + k)$ と表示して計算すると、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y + k) - g(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x + h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

具体的には、 $y = \sin x$ のとき $x = \arcsin y$ であるから、

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

のように使う。

問 20. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

問 21. 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

- (i) グラフの概形を描け。
- (ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。
- (iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

4 積分のこころ

区分求積法 (quadrature) というのを覚えているか。少し前はこれすらもなかったのだが、ましになったといふべきか、焼け石に水と思うべきか。積分を原始関数の値の差で定義するなど論外としても、符号付き面積というのも定義としては問題がある。積分の基本性質である線型性

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

^{*9} 具体的であることが必ずしもわかり易いとは限らない。一般的状況を考えることで物事の本質が見えることがあることもある。「問題は難しくしないと解けない」(岡潔のことば)。

が明らかでないから。その点、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(a + k(b-a)/n) \frac{b-a}{n}$$

という解釈は、線型性始め、積分の基本性質がよく見える形なのでよい。

そこまでは良いのであるが、分点公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

の証明が不自然なものになる。均等割では分割点がうまく表示される保証がないため。ここまで見てくると、不均等割による積分の定義に思い至るのは当然のことである。わざわざリーマンの名前を持ち出すまでもなく、次の定義にたどり着く。

区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して、定義域を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ と分割し、各小区間ごとに点 $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を勝手にとっておく。このとき、極限

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad |\Delta| = \max\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

が、分割の仕方および点 ξ_j の取り方に依存せずに一つの値に収束するとき、関数 $f(x)$ は（区間 $[a, b]$ 上で）**積分可能**であるという。また、その極限値を**積分**^{*10}(integral) とよび

$$\int_a^b f(x) dx$$

と書く。また f のことを**被積分関数** (integrand) という言い方をする。

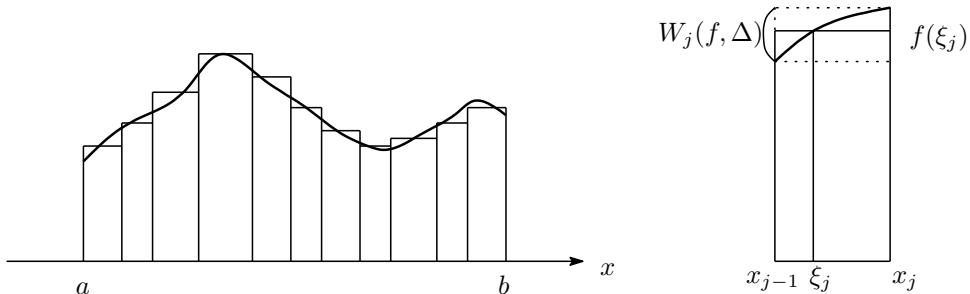


図 5

注意 4. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0}$ の意味は、実際のところかなり高度なものである。また、その値を直接的に計算しがたい形のものもある。ちなみに、積分を表す記号は、極限をとる過程で、 $x_j - x_{j-1}$ が無限小量 dx に、和 \sum が連続和 \int に移行したことによく、微積分の創始者のひとりであるライプニッツによるものである。

積分の最も直感的な意味は、関数のグラフが区間 $[a, b]$ で切り取られる部分の「符号つき面積」であるが、関数および変数の値のもつ意味に応じてさまざまな解釈が可能であることも知るべきである。立体の切り口の面積の積分としての体積

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

*10 B. Riemann (1826–1866) に因んでリーマン積分ともいう。ただし、概念そのものは A.-L. Cauchy (1789–1857) による。区分求積法を拡張したものであることに注意。

電流 $I(t)$ の時間（正確には時刻） t に関する積分としての電荷

$$Q = \int_a^b I(t) dt.$$

速さの積分としての道のり

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

極座標 (r, θ) を使って、 $r = f(\theta)$ と表される曲線と直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた扇状図形の面積は、

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

といった具合。

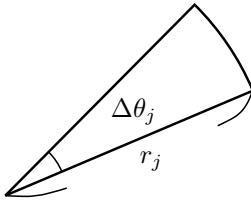


図 6

以上、いずれの場合も、「微小量を加えたものの極限が積分である」という認識が必要となる。このことを、最後の例を使って少し詳しく見ておこう。まず、角の動く範囲を $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$ のように分割する。このとき、 $\theta_{j-1} \leq \xi_j \leq \theta_j$ に対して、半径が $r_j = f(\xi_j)$ で開きが $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ の微小扇形の面積

$$\frac{\Delta\theta_j}{2\pi} \pi r_j^2 = \frac{1}{2} r_j^2 \Delta\theta_j$$

と、曲線 $r = f(\theta)$ ($\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$) で囲まれた図形の面積は、ほぼ等しく、近似式

$$S \doteq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)^2 (\theta_j - \theta_{j-1})$$

が成り立つ。分割を細かくすることで、近似の精度が上がり、その極限では、等式

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

に移行する^{*11}。これすなわち、上で挙げた公式である。

問 22. 上で述べたこと以外で積分の事例になっているものを一つ挙げよ。

問 23. 曲線 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) が、心臓形 (cardioid) と呼ばれる理由を納得し、この曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

^{*11} $f(\theta)$ ($\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$) の最大値・最小値を与える θ の値をそれぞれ $\bar{\xi}_j, \underline{\xi}_j$ とし、不等式

$$\frac{1}{2} \sum_j f(\underline{\xi}_j)^2 (\theta_j - \theta_{j-1}) \leq S \leq \frac{1}{2} \sum_j f(\bar{\xi}_j)^2 (\theta_j - \theta_{j-1})$$

を導いてから、この極限を取ればよい。

命題 4.1 (積分の基本性質).

(i)

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

(ii) 不等式 $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$) が成り立てば、

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

とくに

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

注意 5. 数学では無次元化した数量を扱うため、積分変数を表す記号 x に特別な意味はない、すなわち

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

問 24. 実数 a と自然数 n に対して、次の不等式を示せ。

$$\left| \int_0^a (a-x)^n \sin x dx \right| \leq \frac{1}{n+1} |a|^{n+1}.$$

問 25. 積分表示

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

と上の基本性質を使って、対数関数の性質 $\log(xy) = \log x + \log y$ を（図形的に）示せ。

問 26. 正数 $b > a > 0$ に対して、

$$\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b \frac{1}{t} dt$$

を確かめ、これを使って、どのような $a > 0$ に対しても、 $b > a$ を十分大きく取れば、

$$\int_a^b \frac{1}{t} dt > \frac{1}{2}$$

であることを示せ。さらに、 $x > 0$ の関数 $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ は、単調増加で

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\infty,$$

であることを示せ^{*12}。

さて、積分可能と言い立てるくらいなので、積分不可能な関数もあるはずである。そのような「変な例」を一つだけ。

例 4.2 (Dirichlet). 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

を定めると、どのような区間 $[a, b]$ においても、上の意味で積分可能にならない。

*12 対数は知らないものとして示す。この積分関数の逆関数として指数関数 e^x を定義するのが、論理的構成上は最も簡便である。

実はある意味、このような積分できない関数の方が多いのであるが、グラフを描けるような通常の関数は積分可能である。その内容を定理の形で述べる前に、ことばを用意しておこう。関数 $f(x)$ が $x = a$ で不連続ではあるが、極限

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

が存在するとき^{*13}、良い不連続点と呼ぶことにしよう。

例 4.3.

(i) 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}$$

は、 $x = 0$ を良い不連続点としてもつ。

(ii) 関数

$$g(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の不連続点 $x = 0$ は良くない。

定理 4.4. 有界閉区間 $[a, b]$ の上で定義された関数 f の不連続点が有限個ですべて良い不連続点であれば、積分可能である。

Proof. まず、積分が存在するかどうかは、変数のもつ意味（単位）に無関係であることに注意する。そこで、 x および $y = f(x)$ が長さを表している場合に、積分の存在がわかれればよい。

さて、問題にしている関数については、そのグラフと x 軸とで囲まれた図形の（符号つき）面積^{*14}を S とする。

まず、連続関数の場合を扱う。区間の分割 $a = x_0 < \dots < x_n = b$ を Δ で表し、区間 $[x_{j-1}, x_j]$ における f の変動幅=最大値と最小値の差 $W_j(f)$ を用いて、 f の分割 Δ に関する変動幅を

$$W(f, \Delta) = \max_j \{W_j(f)\}$$

で定めると（前掲図参照）、

$$\left| S - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \leq W(f, \Delta)(b - a)$$

である。そこで、極限 $|\Delta| \rightarrow 0$ を考えるのであるが、 f が連続であれば、 $W(f, \Delta) \rightarrow 0$ となるので^{*15}、上の不等式から

$$S = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

がわかる。

^{*13} 片側極限を表す国際標準は、 $\lim_{x \rightarrow a \pm 0}$ ではなく $\lim_{x \rightarrow a \pm}$ であったのだなあ。院入試の英訳作業で知る驚き。

^{*14} どのような图形にも面積が考えられるかといふことは単純ではない。そもそも面積が何を意味するのかといふ問は素朴に見えてどうしてその奥はとても深い。微積分が高度の発達を遂げた後に初めて認識された問題であり、糸余曲折の末「測度論」という形で一応の解決を見たのが 20 世紀始めのことであった。

^{*15} ここは、かのコーシーも間違えたところだが、結果自体は正しいので、安心して騙されて欲しい。そもそも、関数が連続とは何を意味するかといった疑問を抱かなければ気にすることもないはずのことなので。これは無邪気さを皮肉っているのではなく、そもそもそういった問題意識が生じて初めて意味をもつ類の問題なわけで、そこまでの経験がない人をつかまえて、お前のやっていることは正しくないのだ、反省しろ、と決めつけるのは余計なお世話というものである。

つぎに不連続点をもつ場合であるが、説明を簡単にするために、不連続点は $x = c$ ($a < c < b$) 一箇所であるとして、分割 Δ を c を含む部分 $[x_{k-1}, x_k]$, その左側の部分 Δ' , 右側の部分 Δ'' に分けて考えると、分割 Δ', Δ'' から作られる和の極限は、連続関数の場合の議論が使えて、それぞれ

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_j' f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^c f(x) dx, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_j'' f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_c^b f(x) dx$$

となる。残りの c を含む部分は、関数 $f(x)$ が $x = c$ の近くで有界であることから、

$$|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \leq M(x_k - x_{k-1}) \leq M|\Delta|$$

と評価して極限 $|\Delta| \rightarrow 0$ をとれば 0 に近づくことがわかる。

□

注意 6. すべての点が良い不連続点である関数 (regulated function) は積分可能であり、その不連続点を番号付けることができる (数学用語で可算という)。Diuedonne (7.6.1), (8.7.10) を参照。

定積分が連続関数に対して存在することを認めた上で、べき関数 x^α ($0 \leq x \leq b, \alpha > 0$) に対する定積分を定義に立ち戻って求めてみよう。

例 4.5 (P. Fermat). $0 < r < 1$ に対して、分点を $br^n, br^{n-1}, \dots, br, b$ と取り、 $r^n \rightarrow 0$ となるような極限 $r \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ について考える。関数の値を計算する代表点として、小区間の左端を取れば、積分の近似和として

$$\sum_{k=0}^{n-1} (br^{k+1})^\alpha (br^k - br^{k+1}) = b^{\alpha+1} \frac{(1-r)r^\alpha(1-r^{n(\alpha+1)})}{1-r^{\alpha+1}}$$

を得るので、 $r \rightarrow 1, r^n \rightarrow 0$ に注意して極限を求める。

$$\int_0^b x^\alpha dx = b^{\alpha+1} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r}{1-r^{\alpha+1}} = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

がわかる。最後のところで、べき関数 $x^{\alpha+1}$ の $x = 1$ での微分係数を使った。

問 27. $r \rightarrow 1$ かつ $r^n \rightarrow 0$ となる極限の取り方を具体的に与えよ。

ここで言葉の整理をしておこう。一般に、積分

$$\int_a^b f(t) dt$$

において a, b は定数と思っているのに対して、下の定理では、 b のところを変数 x にかえて、積分

$$\int_a^x f(t) dt$$

を x の関数と思っている。このように積分を使って作られる関数のことを**不定積分** (indefinite integral) と称するのに対して、範囲を固定して考えた積分を**定積分** (definite integral) と呼んで区別して使う。

一方、 $F'(x) = f(x)$ となるような関数 $F(x)$ のことを $f(x)$ の**原始関数** (primitive function) と呼ぶことにはすれば、次の定理は、原始関数と不定積分が定数の違いを除いて同じものであることを主張していることになる^{*16}。結果として、原始関数と不定積分を同じ意味で使うという慣行が出来あがった。原始関数を表わす記号として $\int f(x) dx$ が使われる理由もこれに由来する。

不定積分 $\int f(x) dx$ は x の関数であるのに対して、定積分 $\int_a^b f(x) dx$ は数であることにくれぐれも注意。

^{*16} 微分が恒等的に零である関数は定数関数であるという、直感的には明らかな、しかしながらよく考えてみると「議論」が必要になってくる事実を使う。

例 4.6. ステップ関数 $h(x) = -1 (x < 0), h(x) = 1 (x \geq 1)$ の不定積分は $\int_a^x h(t) dt = |x| + c$ という連続関数であるのに対して、 h の原始関数は存在しない。

問 28 (意地悪問題?). 原始関数と不定積分の違いについて述べよ。

定理 4.7 (微積分の基本定理). 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Proof. 不定積分を $S(x)$ で表す。関数 $f(t)$ の $x \leq t \leq x+h$ での最大値・最小値を M_h, m_h とすれば、

$$m_h \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq M_h$$

である。そこで、関数 $f(t)$ が $t=x$ で連続であることに注意して、極限 $h \rightarrow 0$ を取ると、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} M_h = \lim_{h \rightarrow 0} m_h = f(x).$$

□

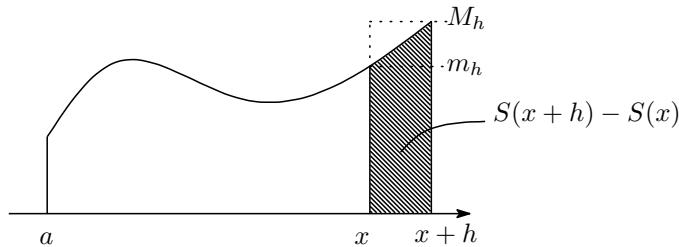


図 7

系 4.8 (微積分の基本公式^{*17}). 関数 $f(x)$ の定積分は、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

と計算できる。この右辺を、左辺に似せた形で、

$$F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

と表記する。

Proof.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x F'(t) dt - F(x) \right) = F'(x) - F'(x) = 0$$

^{*17} (日本の) 高校数学では、この「基本公式」を定積分の定義に採用している。定積分の具体的な計算のためには、それで十分な場合がほとんどであるが、積分のより深い理解と応用のためには、「和の極限」としての定義が重要な意味をもつくることは既に見たとおり。

である。一方、微分が（恒等的に）0に等しい関数は、定数関数に限るので、

$$\int_a^x F'(t) dt - F(x) = C$$

となる定数 C が存在する。すなわち、等式

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) + C$$

がどのような x に対しても成立する。ここで、 $x = a$ とおくと、 $0 = F(a) + C$ より、 $C = -F(a)$ を得る。

一方、 $x = b$ とすると、

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

□

積分の定義は、 $a \leq b$ という状況で与えたのであるが、上の公式を睨んで、 $a > b$ の場合にも、

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

と定めることにする。積分の定義をこのように拡張しても、中間点の公式が成り立つことに注意。

問 29. 分かりきった関係式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

を使って、微分が連続であるような関数 $f(x)$ ($a < x < b$) に対して、

- (i) $f'(x) \geq 0$ ($a < x < b$) ならば、 f は、区間 (a, b) で増加 (increasing)、
- (ii) $f'(x) > 0$ ($a < x < b$) ならば、 f は、区間 (a, b) で強い意味で増加 (strictly increasing)、

であることを示せ。

微分の結果を解釈しなおすと、積分の公式が得られる。

新たに記憶に留めるべき不定積分^{*18}

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a}, \\ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= a^{-1} \arctan \frac{x}{a}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx &= \log |x + \sqrt{x^2 + A}|. \end{aligned}$$

例 4.9. $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$ である。

*18 不定積分を表すのに、いわゆる積分定数は書かないことにする。積分定数を書いておく理由が分かっていないのに機械的にお作法を守ることは科学的态度に反する。一度、痛い思いをすれば良いだけ。そうして不定積分の等式の意味を知るべき。

定理 4.10 (積分の技法).

置換積分 (*integration by substitution*)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

$f(g(x))g'(x)$ の原始関数は、 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に $g(x)$ を代入した $F(g(x))$ で与えられる。

部分積分 (*integration by parts*)

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

注意 7. (i) 置換積分の公式は、 $y = g(x)$, $g'(x) = dy/dx$ という補助的な変数 y を使って、

$$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy$$

と書くと覚えやすい。ただし、積分範囲の変化の仕方に注意。

(ii) 部分積分の「公式」は、積の微分の公式の利用の仕方（多くは試行錯誤）を学ぶべきで、上の形の式を覚える必要はない（というか覚えない方がよい）。

例 4.11. 不定積分

$$\int \log x dx$$

を「部分積分の方法」で求めてみよう。

そのために、積の微分の結果 $\log x$ という項が現れる $x \log x$ という関数の微分を書き下してみる。

$$(x \log x)' = \log x + 1.$$

次に、両辺の積分を取って、

$$x \log x = \int \log x dx + \int 1 dx$$

より、

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

であることがわかる。

例 4.12. 自然数 $n = 2, 3, \dots$ に対して、

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2-2n} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

問 30. 上の積分で $n = 1$ のときはどうなるか。

問 31. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad \int xe^{-x^2} dx$$

を求めよ。

例 4.13. 不定積分

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

を部分積分の方法で調べてみよう。

積の微分の計算式

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \right)' &= \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - 2n \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\ &= -\frac{2n-1}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2a^2 n}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

を積分して、

$$2a^2 n I_{n+1}(x) - (2n-1) I_n(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}$$

という漸化式 (recurrence relation) を得るので、

$$I_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

から出発して、 $I_2(x), I_3(x), \dots$ を次々と求めることができる。

問 32. 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\int x^n e^{-x} dx$$

を求めよ。

例 4.14.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin \frac{x-2}{2}. \\ \text{(ii)} \quad &\int \sqrt{x^2+A} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+A} + A \log|x+\sqrt{x^2+A}| \right). \end{aligned}$$

Proof. (i) まず平方根の中身を処理しやすい形に書き直してから置換積分を使って、

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx = \arcsin \frac{x-2}{2}.$$

(ii) これは部分積分による。ただし、公式丸暗記ではない柔軟性が必要となる。 $\sqrt{x^2+A}$ が現れるものとして、 $x\sqrt{x^2+A}$ の微分を計算してみると、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = \sqrt{x^2+A} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}.$$

ここで、求めるものよりも一見複雑そうな形の第二項の出現にめげそうになるが、不定積分の公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}} dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}|$$

を思い起こし、

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

という書き直しを実行すると、うれしや、第一項と同じ物が出現し、

$$(x\sqrt{x^2+A})' = 2\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{\sqrt{x^2+A}}$$

となる。あとはこれを積分して $\int \sqrt{x^2+A} dx$ について解けば、求める公式を得る。 \square

問 33. 微分 $(x\sqrt{a^2 - x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

を扇方の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

不定積分が（原理的に）計算可能なクラスとして有理関数^{*19}があり重要であるが、その「理論」を完全に把握するには、「複素変数」を避けて通ることができない（仮に避けたとしても不自然なものになる）。

ここでは、あくまでも実践的な理解ということで、手順の説明と具体的な計算例にとどめよう。有理関数の不定積分は（分母の因数分解さえ実行できれば）いつでも具体的に求めることができる、という安心感が何よりも大事かもしれない。積分計算の技巧の多くは、適当な変数変換を施すことにより、有理関数の不定積分に帰着させるというものなので。

有理関数の不定積分の求め方

必要に応じて割り算を実行することにより、

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx, \quad \deg g < \deg f$$

の場合^{*20}が問題である。

分母の式 $f(x)$ を（実数の範囲で）因数分解して、

$$(x^2 + ax + b)^m, \quad (x + c)^n$$

の形の積で表しておく。

このとき

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum \frac{p(x)}{(x^2 + ax + b)^m} + \sum \frac{q(x)}{(x + c)^n}$$

という表示 (partial fraction decomposition) が可能である^{*21}。ここで、 $p(x)$ 、 $q(x)$ は分母よりも次数の低い多項式を表す。

$p(x)$ を $x^2 + ax + b$ で割った商をさらに $x^2 + ax + b$ で割って、そのまた商を $x^2 + ax + b$ で割って、という操作を繰り返すことにより、 $p(x)$ は

$$(\alpha x + \beta)(x^2 + ax + b)^k, \quad 0 \leq k < m$$

の和で書き表せるので、結局

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + ax + b)^l} dx, \quad 1 \leq l \leq m$$

の形の不定積分に帰着する。

$q(x)$ の部分も同様に処理して、こちらは、

$$\int \frac{1}{(x + c)^l} dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-l)(x+c)^{l-1}} & \text{if } l \neq 1, \\ \log|x+c| & \text{if } l = 1 \end{cases}$$

^{*19} rational function. 分数関数（多項式の商で表される関数）のこと。

^{*20} $\deg f$ は、多項式 f の次数 (degree) を表す。温度を表すときの用語と同じであるから、度数といつてもよかつたのであるが、数学では次数という。

^{*21} ユークリッドのアルゴリズム (Euclidean algorithm) による。

と簡単に求まる。

最後に、1次式／2次式の幂、の不定積分は、 $x^2 + ax + b = (x + a/2)^2 + b - a^2/4$ により、 $y = x + a/2$ という変数変換を使えば、

$$\int \frac{Ay + B}{(y^2 + C)^l} dy$$

の計算に還元され、これは、例 4.12, 例 4.13 で調べたように具体的に求めることができる。

例 4.15.

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

を計算してみよう。

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ であるから、

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

において、 a, b, c を求めると $a = 1/3, b = -1/3, c = 2/3$ となるので、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 + 1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log(x + 1) - \frac{1}{6} \int \frac{2(x - 1/2) - 3}{(x - 1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \frac{1}{3} \log(x + 1) - \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x - 1/2)^2 + 3/4} d(x - 1/2)^2 + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - 1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \frac{1}{3} \log(x + 1) - \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan((2x - 1)/\sqrt{3}) \end{aligned}$$

という表示を得る。(こう書いたからといって何か良いことがあるのかどうか。)

問 34.

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx, \quad \int \frac{1}{x^4 - 1} dx$$

問 35.

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

を求めよ。(1 の 8 乗根が関係している。)

例 4.16. 不定積分 $\int \frac{1}{1 + e^x + e^{2x}} dx$ は、 $t = e^x$ という置き換え（置換積分）をすると、有理関数の不定積分

$$\int \frac{1}{1 + t + t^2} \frac{1}{t} dt$$

に帰着する。

問 36. 上の有理関数の不定積分を実行して、

$$\int \frac{1}{1 + e^x + e^{2x}} dx$$

を求めよ。

有理曲線と積分

積分における変数変換で有力な方法の一つに、曲線の有理関数表示がある。関数 $y = f(x)$ が、曲線のパラメータ表示 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ で t を消去したものであれば、 x, y の有理式 $R(x, y)$ に対して $x = \varphi(t)$ を変数変換とみて、

$$\int R(x, f(x)) dx = \int R(x, y) dx = \int R(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

と計算できる。とくに、 φ, ψ ともに t の有理関数で取れるならば^{*22}、有理関数の不定積分に還元され、具体的な表示が（原理的に）可能となる。

円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合、円周上の点、例えば $(-1, 0)$ 、を通る直線の傾き t をパラメータに取って、

$$y = t(x + 1), \quad x^2 + y^2 = 1$$

と連立させて解くことにより、

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

という有理パラメータ表示を得る。例えば

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{y} dx$$

は t の有理積分に帰着する。

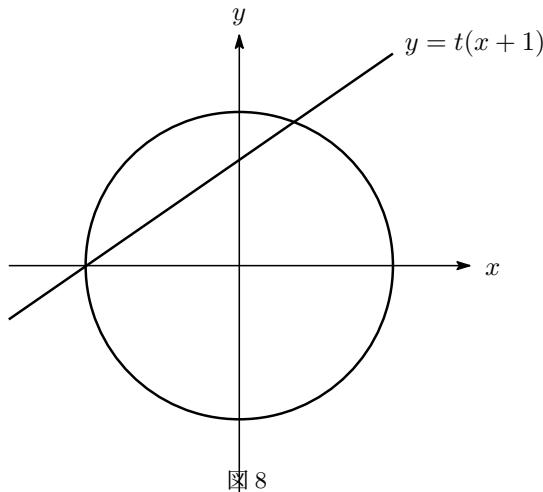


図 8

問 37. $\int \frac{1}{y} dx$ を実行して、 $\arcsin x$ が得られることを確かめよ。ヒント：下の問と $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ 。

また、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ という表示と結びつけることにより、三角関数の有理式の積分は、やはり t の有理積分を使って表せることがわかる。実際、 $\sin \theta$ を t で微分した

$$\cos \theta d\theta = 2 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} dt$$

^{*22} このようなパラメータ表示をもつ曲線を有理曲線 (rational curve) という

に $\cos \theta = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ を代入して得られる関係 $d\theta = 2dt/(1 + t^2)$ を使うと、

$$\int R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

となるので、有理関数の不定積分に帰着する。

問 38. 半角の公式

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1, \quad \sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

を使うと、 $t = \tan(\theta/2)$ である。これをチェック。

同じ方法は、他の二次曲線にも有効で、例えば、双曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ については、

$$y = t(x+1), \quad y^2 = x^2 - 1$$

と連立させて解くと、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この場合も t の有理積分に帰着する。

問 39. パラメータ t の動く範囲に注意し、不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

をこの方法で求めよ。

5 関数の状態と近似式

関数の局的な性質^{*23}を調べる上で基本的な考え方、微分と近似式の関係がある。とくに、一次の近似式と呼ばれるものは高校の教科書でも太字で取り上げられているのだが、あまり入試で出題されないせいもあるのか、不慣れな人も多いようである。しかし重要なことには変わりないので、ここで少し詳しくみておこう。

まず、関数の状態と微分との関係であるが、微分係数が接線の傾きを表しているという幾何学的意味から、

$$\begin{cases} f'(a) > 0 \text{ ならば } f(x) \text{ は } x = a \text{ で増加の状態} \\ f'(a) = 0 \text{ ならば } f(x) \text{ は、 } x = a \text{ で瞬間に変化を止めている状態} \\ f'(a) < 0 \text{ ならば } f(x) \text{ は } x = a \text{ で減少の状態} \end{cases}$$

であるので、 $f'(a) = 0$ のとき、 $f'(x)$ の符号が、 $x = a$ の前後で正から負へ（負から正へ）変化すれば、 $y = f(x)$ のグラフは、 $x = a$ でピーク（谷底）になっていることが分かる。そのときの関数の値 $f(a)$ を極大値（極小値）^{*24}と呼ぶことは知っているよう。

一方、微分の定義式から

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

^{*23} ある狭い範囲で成り立つ性質という意味。

^{*24} local maximum (local minimum). 意味は、局所的最大（局所的最小）。

は、 $|x - a|$ が小さい時、ほぼ $f'(a)$ に等しいので、

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \doteq a$$

という近似式^{*25}が成り立つ。これを関数 $f(x)$ の $x = a$ の付近での一次近似式 (linear approximation) という。右辺の一次式は、関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ を通る接線の方程式を与えるものであることに注意。

例 5.1. 次はいずれも $a = 0$ の場合である。

- (i) $\sqrt{1+x} \doteq 1 + x/2$ の x に $x = 0.001$ を代入して、 $\sqrt{1.001} \doteq 1.0005$.
- (ii) $\sin x \doteq x$ の x に $1^\circ = 2\pi/360$ を代入して、 $\sin 1^\circ \doteq 0.017$.

例 5.2. 半径 x の球の体積を表す関数 $f(x) = 4\pi x^3/3$ の $x = r$ の付近での近似式から、半径が Δr 増加したときの体積増加率は

$$\frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{f(r)} \doteq 3 \frac{\Delta r}{r}$$

となる。これを使って地球の体積 V と大気圏の体積 ΔV の比を見積もってみよう。地球および大気圏の形状は完全な球ではなく回転楕円体に近いもので、赤道付近での半径と大気圏の層の厚さが 6378km と 17km、極点付近での半径と大気圏の層の厚さが 6357km と 7km であるから、

$$\frac{7}{6378} \leq \frac{\Delta r}{r} \leq \frac{17}{6357}$$

という不等式が成り立ち、 $\Delta V/V$ は、0.3% と 0.8% の間であることが分かる。

注意 8. 2変数の一次近似式 (§10) を使えば、

$$\frac{\Delta V}{V} \doteq \frac{7}{6357} + 2 \frac{17}{6378} = 0.0064 \dots$$

例 5.3. 一次近似式の精度は、 x が a に近いほど上がるということで、次のような使い方もできる。

$$e^x - e^{-x} \doteq 2x, \quad \log(1+x) \doteq x \quad (x \doteq 0)$$

の比を取って、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

このように上手に使えば便利な一次近似式であるが、問題点もある。それは、近似の誤差がどの程度なのかが近似式を見ていただけではわからないこと。そこで、一次近似式の精密化を試みる。そのためには、微分の定義式ではなく、微積分の基本公式を書き直した

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

から得られる一次近似式の誤差の式

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \int_a^x f'(t) dt - f'(a)(x - a)$$

^{*25} 近似等式を表す記号は、 \approx が国際標準。この類の日本だけの「方言」は、プライム記号の読み方を始め色々あって、 \neq の傾きもそう。

に着目する。目移りを防ぐために、一旦 $x = b$ とおいて、部分積分により書き直す。具体的には、次のような式変形²⁶を施す。積の微分

$$\frac{d}{dt} (f'(t)(b-t)) = -f'(t) + f''(t)(b-t)$$

を $a \leq t \leq b$ (あるいは、 $b \leq t \leq a$) の範囲で積分して得られる等式

$$-f'(a)(b-a) = -(f(b) - f(a)) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt$$

で、再度 $b = x$ と置き戻すと、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt$$

という表式を得る。もとの関数 $f(x)$ とその一次近似式の差、すなわち誤差が一つの積分で表されていることに注目。この誤差の大きさを見積るために、 $|f''(t)|$ ($t \geq a$) (あるいは $t \leq a$) が $t = a$ の近くで M 以下であるとして、積分の基本不等式を使えば、

$$\left| \int_a^x f''(t)(x-t) dt \right| \leq \int_a^x |f''(t)|(x-t) dt \leq M \int_a^x (x-t) dt = \frac{M}{2}(x-a)^2$$

を得る。したがって誤差の絶対値は $M|x-a|^2/2$ 以下であることがわかる。

問 40. 誤差を表す積分を評価する際に $a < x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x < a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

例 5.4. $|(\sqrt{1+t})''| = |(1+t)^{-3/2}|/4$ の $0 \leq t \leq 0.001$ での最大値は $1/4$ であるから、

$$|\sqrt{1.001} - 1.0005| \leq \frac{1}{8}(0.001)^2 = 1.25 \times 10^{-7}$$

のように小さい²⁷。

問 41. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

次に誤差項を表す積分の近似表示を求めてみよう。 $f''(t)$ が連続関数であるものとして、 $x = a$ である場合を考えると、 $f''(t)$ ($a \leq t \leq x$) の値は、ほぼ $f''(a)$ に等しい。そこで、積分の中の関数 $f''(t)$ を定数 $f''(a)$ で置換えて積分を実行すると、

$$\int_a^x f''(t)(x-t) dt \doteq \int_a^x f''(a)(x-t) dt = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

のように近似されるので、結局

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \quad (x \doteq a)$$

という近似式が得られた。これを $f(x)$ の $x = a$ の付近での二次近似式²⁸(quadratic approximation) という。

この二次近似式は、 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) \neq 0$ である場合がとくに有効で、関数 $f(x)$ が $x = a$ の付近で $(a, f(a))$ を頂点とする二次関数にほぼ等しいことを意味する。したがって、 $f''(a)$ の正負に応じて、 $x = a$ の

²⁶ 微分の結果 $f'(t)$ が一部に現れる積関数として $f'(t)(\alpha t + \beta)$ を考えている訳であるが、そのうち $\alpha = -1$, $\beta = b$ を採用したのは、変形する前の式に形が合うように調整した試行錯誤の結果である。

²⁷ $f''(t)$ の符号が負であることに配慮すれば $\sqrt{1.001} < 1.0005$ である。

²⁸ 近似式の右辺が x の二次式になっていることに注意。

付近で関数の値は、最小あるいは最大になっている。これは、 $x = a$ の付近に限定した上での最大・最小なので、定義域全体を通しての最大・最小と区別して、**極大・極小**という言い方をすることは前に述べた通り。また、 $|f''(a)|$ が山（または谷）の開き具合を表している^{*29}。

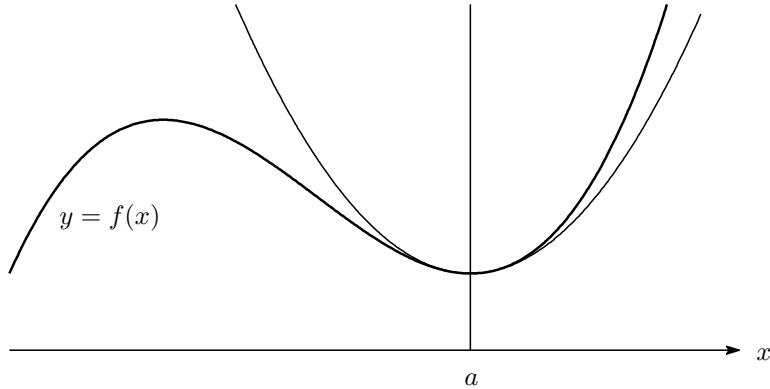


図 9

定理 5.5. $f'(a) = 0$ とする。

- (i) $f''(a) < 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で極大。
- (ii) $f''(a) > 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で極小。

例 5.6.

- (i) 二次近似式 $\cos x \doteq 1 - x^2/2$ に $x = 1^\circ = 2\pi/360$ を代入すると、 $\cos 1^\circ \doteq 0.99986$
- (ii) 二次近似式 $\sqrt{1+x} - 1 - x/2 \doteq -x^2/8$ と $1 - \cos x \doteq x^2/2$ ($x \doteq 0$) の比を取って、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/8}{x^2/2} = -\frac{1}{4}.$$

問 42. 関数 $x^a e^{-x}$ ($x > 0$) のピークの開き具合が、パラメータ $a > 0$ の増加とともにどのように変化するか調べよ。

一般に、ある区間で $f''(x) \geq 0$ が成り立っていれば、接線の傾き $f'(x)$ は x の増加関数^{*30}となるので、 $f(x)$ のグラフは、下に凸になっている。

このことをもう少し正確に記述してみよう。まず、ある区間で関数 f （のグラフ）が（下に）凸であるとは、区間内の勝手な 2 点 a, b に対して

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b), \quad 0 \leq t \leq 1$$

という不等式が成り立つことと定義する。

このとき、次が成り立つ。

^{*29} $|f''(a)|$ が大きいほど山は険しく谷は深くなる。

^{*30} ここでは弱い意味での増加関数をこのように呼ぶ。

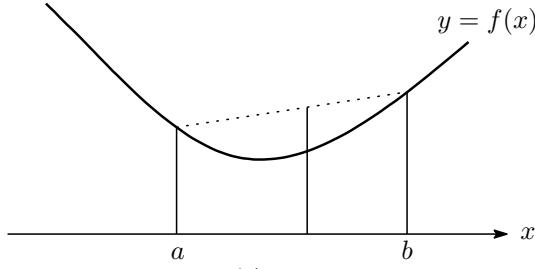


図 10

命題 5.7 (Jensen 不等式). 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ を含むある範囲で定義されていて、2階微分可能で $f''(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) であれば、 t_1, \dots, t_n という確率分布 (すなわち、 $t_j \geq 0$ かつ $\sum_j t_j = 1$) と数列 $\{c_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ に対して、

$$f\left(\sum_{j=1}^n t_j c_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(c_j)$$

が成り立つ³¹。

Proof. 等式

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \int_c^x f''(t)(x - t) dt$$

で $f''(t) \geq 0$ に注意すれば、

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

という不等式が $a \leq c \leq b$, $a \leq x \leq b$ である限り成り立つことがわかる。そこで、 $x = c_j$, $c = \sum t_j c_j$ とおくと、

$$f(c_j) \geq f(c) + f'(c)(c_j - c)$$

となり、この両辺に t_j を掛けて j について和をとると、

$$\sum_j t_j f(c_j) \geq f(c) + f'(c) \sum_j t_j (c_j - c) = f(c)$$

を得る。 □

問 43. 上の証明の中で示した不等式

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

を幾何学的に解釈せよ。

問 44. $0 \leq \theta_j \leq \pi$ に対して、

$$\frac{\sin \theta_1 + \cdots + \sin \theta_n}{n} \leq \sin \frac{\theta_1 + \cdots + \theta_n}{n}$$

であることを確かめ、円に内接する n 角形の面積が最大になるのは、正 n 角形の場合であることを示せ。

問 45. Jensen 不等式が開区間 (a, b) 上の凸関数についても成り立つことを以下の手順で示せ。

³¹ $a \leq \sum_j t_j c_j \leq b$ に注意。これは、 $t_j a \leq t_j c_j \leq t_j b$ を j について足せばわかる。

- (i) $D(s', s'') = \frac{\phi(s') - \phi(s'')}{s' - s''}$ ($s' \neq s'' \in (a, b)$) と置くと、 $D(s', s) \leq D(s, s'')$ ($a < s' < s < s'' < b$) が成り立つ。
- (ii) ϕ は各点 $s \in (a, b)$ で左微分 $D_-(s)$ と右微分 $D_+(s)$ を持ち、 $D_-(s) \leq D_+(s)$ を満たす。とくに ϕ は連続である。
- (iii) $s \in (a, b)$ と $m \in [D_-(s), D_+(s)]$ に対して、 $\phi(t) \geq \phi(s) + m(t - s)$ ($a < t < b$) が成り立つ。
- (iv) 数列 $(c_j)_{1 \leq j \leq n} \subset [a, b]$ と確率分布 $t_j)_{1 \leq j \leq n}$ に対して $\phi(\sum t_j c_j) \leq \sum t_j \phi(c_j)$ である。

例 5.8. 二つの確率分布 $p = \{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $q = \{q_j\}_{1 \leq j \leq n}$ (ただし、 $p_j > 0$, $q_j > 0$ とする) に対して、その相対エントロピー (relative entropy) を、

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j \log \frac{p_j}{q_j}$$

で定めるとき、 $\log x$ が凸関数であることに注意すれば、

$$-H(p, q) = \sum p_j \log \frac{q_j}{p_j} \leq \log \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{q_j}{p_j} \right) = \log 1 = 0$$

であることがわかる。

関数のグラフの図形的な性質をさらに調べるために、 $f(x)$ は、 $f''(x)$ が存在して連続であると仮定し、 $f''(x) = 0$ となる点 c の前後で $f''(x)$ の符号が変わるものとしよう。

具体的に考えるために、

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{if } x < c, \\ f''(x) > 0 & \text{if } x > c \end{cases}$$

であったとする。

このとき、関数 $f(x)$ のグラフは、 $x < c$ の範囲で（下に）凹、 $x > c$ の範囲で（下に）凸となるので、 $x = c$ の点で、グラフの凹凸が変化することがわかる。

問 46. べき関数 $y = x^a$ ($x > 0$) の凹凸が実数 a のとり方で変化する様子を観察せよ。

こうのように凹凸の変化する点を変曲点 (point of inflection) と呼ぶ。

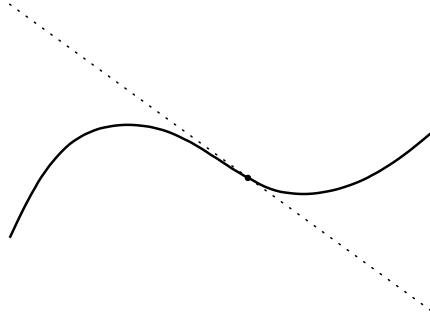


図 11

系 5.9. 関数 $f(x)$ は、 $f''(c) = 0$ かつ $x = c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化すれば、そのグラフは、 $(c, f(c))$ を変曲点にもつ。

例 5.10. 関数 $f(x) = x^3$ のグラフは $x = 0$ で変曲している。

例 5.11. 関数 $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ のグラフは、

$$f''(x) = e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4}$$

より、 $|x| < \sigma$ で上に凸、 $|x| > \sigma$ で下に凸であり、 $x = \pm\sigma$ が変曲点である。

問 47. 関数 $y = f(x)$ は、 $f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) \neq 0$ であるとき、 $x = c$ を変曲点にもつことを示せ。

問 48. 関数 $f(x)$ に対して、変曲点での接線は、曲線 $y = f(x)$ を変曲点付近で二分割することを示せ。

6 テイラー展開

前回、近似式を調べた際に用いた積分表示は、より高次の場合にも容易に拡張することができる。それを述べる前に、少し用語の準備を。

定義 6.1. 開区間の上で定義された関数 $f(x)$ は、 n 回微分できて n 次導関数 $f^{(n)}$ が連続であるとき、 C^n 級であるという^{*32}。また、何度も微分できる関数を C^∞ 級と呼ぶ。

問 49 (Leibniz Rule). C^n 級関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ も C^n 級で、次が成り立つ。

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

とくに、 $f(x) = e^{ax}, g(x) = e^{bx}$ とおけば、どのような等式が得られるか。

問 50. 関数 $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ (ただし $f(0) = 0$) は微分可能であるが、 $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である。

定理 6.2 (微積分の基本公式). 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

と表示される。 $(R_n(x)$ を剩余項 (remainder) と呼ぶ。)

Proof. n についての帰納法で示す。 $n = 0, 1$ については既に確かめた。そこで、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

を仮定する。

$$\frac{1}{n!} \frac{d}{dt} \left(f^{(n)}(t)(x-t)^n \right) = -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x-t)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

を t について積分して得られる

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

をこれに代入すると定理で述べた形となり、帰納法が完了する。 \square

^{*32} $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。したがって、 C^0 級とは連続関数であるということ。

注意 9. 上の形の等式をテイラーの定理あるいは公式と呼ぶのが慣例であるが、B. Taylor がこういった公式なり定理を提示したわけではない。あのテイラー展開についての注意書を参照。なお、コーチーの無限小解析要論 (1823) によれば、この部分積分を使った表示式は、Gaspard de Prony の論文 (1805) にあるらしい。de Prony の公式と呼ぶべきか。

例 6.3. 単項式関数 $f(x) = x^n$ の場合、 $f^{(n+1)} = 0$ に注意すれば、基本公式は

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(x-a)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}(x-a)^n$$

となるので、二項定理に他ならない。

例 6.4. 以下では、すべて $a = 0$ とする。

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t(x-t)^n dt. \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1} \\ &\quad + (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \int_0^x (x-t)^{2m} \cos t dt. \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} \\ &\quad + (-1)^{m+1} \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^x (x-t)^{2m+1} \cos t dt. \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt. \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

問 51. 上の例を確かめよ。 $\sin x, \cos x$ では、 $\int_0^x (x-t)^n \sin t dt = \frac{1}{n+1} \int_0^x (x-t)^{n+1} \cos t dt$ に注意。

問 52. $x > 0$ のとき、 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$1 - x + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1} < e^{-x} < 1 - x + \cdots + \frac{1}{(2n)!}(-x)^{2n}.$$

問 53. 連続関数 g に対して、

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x g(t)(x-t)^{n-1} dt = g(x)$$

である。何故か。

例 6.5. 基本公式は、近似式のみならず、つぎのような使い道もある。 $f(x) = e^x$ で $x = 1$ の場合を書けば、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t(1-t)^n dt.$$

$0 \leq e^t(1-t)^n \leq 1$ ($0 \leq t \leq 1$) に注意すれば、

$$2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

また、 $n!e$ の整数部分 $[n!e]$ が、 $n!(2 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!})$ であることに注意すれば、 $0 < n!e - [n!e] < 1$ がすべての自然数 n について成り立つ。このことから、 e が無理数であることもわかる。

問 54. つぎの 3 つの関数

$$((t-a)f(t))', \quad ((b-t)f(t))', \quad ((b-t)(t-a)f'(t))'$$

を区間 $[a, b]$ で積分することにより、積分の関係式（台形公式）

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{2} \int_a^b (b-t)(t-a)f''(t) dt$$

を導け。

問 55. $f(x)$ が $x = a$ の付近で 2 階微分可能で $f''(x)$ が連続であるとき、

$$f''(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(a+\delta) + f(a-\delta) - 2f(a)}{\delta^2}$$

である。これは二階微分方程式を差分により近似する際に常用される。

さて、誤差項=剰余項を伴った等式が得られたので、あとは積分を評価して近似式を作るだけであるが、その前に近似式の意味をより的確に表現するための用語と記号を導入しておこう。

オーダー記号について

以前、無限大のスピードの比較をした際に、 $|x^a e^{-x}| \leq C e^{-x/2}$ ($x > 0$) という形の不等式を利用した。このように、関数の漸近的な振る舞いを調べるために、素性のわかっている関数と比較することが良く行われる。そこで、こういった状況を表す記号を導入しておくと便利である。2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対して、定数 $C > 0$ をうまく選べば、 x が大きいところで

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は、漸近的に $g(x)$ 程度以下であるといい、 $f(x) = O(g(x))$ と書く^{*33}。上の例であれば、 $x^a e^{-x} = O(e^{-x/2})$ となる。この記号はまた、数列の漸近的性質を記述する際にも用いられる。

例 6.6. 階乗 $n!$ は、 n が大きくなるとき急激に増大することが知られている。その増大のスピードが指数関数 A^n ($A > 1$) のそれと比べてどの程度か調べてみよう。大きな数が出てきたら、まずは対数である。

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

の大きさを下から評価する。これを積分 $\int_1^n \log x dx$ と比べることで、不等式

$$\log n! \geq \int_1^n \log x dx = n \log n - n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を得るので、

$$\frac{A^n}{n!} = O((Ae/n)^n)$$

であることがわかる。急激な増加の代名詞にもなっている指数関数と比べてもなお、階乗のスピードが勝るということである。

問 56. 階乗を上から評価することで、 $(n-1)! = O((n/e)^n)$ を示せ。

^{*33} big O は Paul Bachmann が著書 (1894) の中で導入し、それを継承した Edmund Landau が別の著書 (1909) で追加的に導入した little o とともに広く用いられるようになった。O は Ordnung (order) の意で、ギリシャ文字の Omicron を使用するのが正式であるという。

以上は、 $x \rightarrow \infty$ のときの振る舞いについてであるが、同様の考えは、 $x \rightarrow a$ の際にも使える。改めて述べれば次のとおり。

ある点 $x = a$ の付近で定義された関数 $f(x), g(x)$ があるとき、 $f(x)$ が $x = a$ の付近で $g(x)$ 程度以下であるとは、 $f(x)/g(x)$ が $x = a$ の近くで有限の範囲に留まること、いいかえると、定数 $C > 0$ をうまく選ぶことで、不等式

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

が $x = a$ の近くで成り立つようにできること、と定義する。

関数 $g(x)$ を固定して考えると、この条件は、関数 $f(x)$ についての性質を表していることになる。このような性質をもつ関数全体を $O(g)$ という記号で表せば、 $f(x)$ が上の条件を満たすことは、集合の記号を用いて

$$f \in O(g)$$

と表すことができる。より便利な記法 (notation) として、二つの関数 $f_1(x), f_2(x)$ の差 $f_1(x) - f_2(x)$ が $O(g)$ に属することを、

$$f_1(x) = f_2(x) + O(g(x))$$

と書くこととする。ここで、 $O(g(x))$ は、特定の関数を表しているのではなく、 f_1 と f_2 の差で表される関数の性質を変数 x を指定して書き表したものであると理解する。とくに、 $f_2 \equiv 0$ のときは、 $f \in O(g)$ の意味で、 $f(x) = O(g(x))$ とも書く。

例 6.7. 関数として $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = x^2$ とすれば、 $|f(x)| \leq |g(x)|$ であるから、 $C = 1$ と取ることで、 $x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ がわかる。

問 57. 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ が存在するならば、 $f(x) = O(g(x))$ である。

基本公式に戻って、 $a \leq t \leq x$ (または $x \leq t \leq a$) での $|f^{(n+1)}(t)|$ の最大値を $M_{n+1}(x)$ で表せば、剩余項は

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} M_{n+1}(x) \left| \int_a^x |x-t|^n dt \right| = \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(x) |x-a|^{n+1}$$

と評価されるので、 $\lim_{x \rightarrow a} M_{n+1}(x) = |f^{(n+1)}(a)|$ に注意すると、次がわかる。

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

すなわち、剩余項は、 n 次の近似式

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

のどの項と比べても 0 に近づくスピードが速く (高位の無限小という)、近似式の誤差項と呼ぶに相応しいものになっている。以上のことをまとめると、

定理 6.8 (テイラー近似式^{*34}). 実数 a を含む開区間で定義された C^{n+1} 級関数 $f(x)$ は、 $x = a$ の付近で、次のように近似式表示される。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + O((x-a)^{n+1}).$$

また、このような表示は一つしかない。すなわち、

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$$

が成り立てば、 $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ ($0 \leq k \leq n$) である。

^{*34} あまり一般的な呼び方ではないし、Taylor が近似式を認識していたかどうかも不明だが、意味は通じるだろう。

Proof. 唯一性のみ確かめる。そのためには、

$$b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n = O((x-a)^{n+1})$$

から、 $b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0$ が分かればよい。 O の定義から、

$$|b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n| \leq C|x-a|^{n+1}$$

が、 a に近いすべての x で成り立つので、極限 $x \rightarrow a$ をとって、まず、 $b_0 = 0$ がわかる。次に上の不等式の両辺を $|x-a| \neq 0$ で割ったのち、再度極限 $x \rightarrow a$ を取れば、 $b_1 = 0$ も分かる。あとは、これを繰り返せばよい。□

例 6.9. 以下の近似式が $x = 0$ の付近で成り立つ。

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1}). \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}). \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}). \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + O(x^{n+1}). \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

問 58. $f(x) = \tan x$ に対して、 $x = 0$ の付近での近似式を低次の項から求めてみて、その計算量の増え方を実感せよ。

問 59. C^{n+2} 級関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \right)$$

を求めよ。

以下では、 $a = 0$ の場合、すなわち、原点のまわりでのオーダーについて考える。

命題 6.10. 原点 0 のまわりでのオーダーについて、 $f(x) = O(x^m)$, $g(x) = O(x^n)$ であれば、次が成り立つ。ただし、 α, β は定数、 $m \wedge n = \min\{m, n\}$ であり、(iii) では $m \geq 1$ を仮定する。

$$(i) \alpha f(x) + \beta g(x) = O(x^{m \wedge n}).$$

$$(ii) f(x)g(x) = O(x^{m+n}).$$

$$(iii) g(f(x)) = O(x^{mn}).$$

問 60. (iii) で $m = 0$ を除外する理由を認識せよ。

例 6.11. $f(x) = 2x - x^2 + O(x^3)$, $g(x) = 1 - x + 3x^2 + O(x^3)$ であれば、

(i)

$$f(x) - g(x) = -1 + 3x - 4x^2 + O(x^3).$$

(ii)

$$f(x)g(x) = (2x - x^2 + O(x^3))(1 - x + 3x^2 + O(x^3)) = 2x - 3x^2 + O(x^3).$$

(iii)

$$g(f(x)) = 1 - (2x - x^2 + O(x^3)) + 3(2x - x^2 + O(x^3))^2 + O(x^3) = 1 - 2x + 13x^2 + O(x^3).$$

例 6.12. 積の利用 : $e^x \sin x$ の近似式を 3 次の項まで求めようと思ったら、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4), \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$

の積を展開し、オーダーの性質を使うことで、

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

を得る。

例 6.13. 合成関数の利用 :

$$y = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)$$

を

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O(y^3)$$

に代入すれば、

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - (-x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)) + (-x^2/2 + O(x^4))^2 + O(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

例 6.14. 近似式の唯一性の利用 : $\tan x$ が奇関数であることに注意すれば、 $\tan x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$ と表すことができて、これと $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6)$ を $\tan x \cos x$ に代入したものを計算すると

$$(1 - x^2/2 + x^4/4! + O(x^6))(ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)) = ax + (b - a/2)x^3 + (c - b/2 + a/4!)x^5 + O(x^7)$$

となる。そこで、これと $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + O(x^7)$ を比較して得られる

$$a = 1, \quad b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}, \quad c - \frac{b}{2} + \frac{a}{4!} = \frac{1}{5!}$$

を解いて、

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7).$$

以上、泰イラー近似式を使用するにあたって、剩余項のオーダー表示を明記してきたが、実際の計算においては、どのオーダーまでが関係するのかは計算してみて初めてわかるものであるため、以下では、多少曖昧ではあるが、剩余項を明示しない

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$$

といった書き方も許すことにする。

例 6.15. 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{1 - (1 - x^2/2 + \dots)}{x(x - x^3/3! + \dots)} = \frac{x^2/2 - x^4/4! + \dots}{x^2 - x^4/3! + \dots} = \frac{1/2 + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

□

例 6.16. $2^{10} = 1024$ を利用して、

$$\sqrt{1000} = \sqrt{1024 - 24} = 2^5 \sqrt{1 - \frac{24}{1024}} = 32 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{24}{1024} + \dots \right)$$

と計算してみる。

問 61. テイラー近似式を利用して、 e の値を小数点以下 3 衡まで正確に求めよ。

問 62. $\sin 61^\circ$ の値を小数点以下 3 衡まで正確に求めよ。また作図による計測値とこれを比較せよ（実験数学？）。

問 63. 関数 $\sqrt{\cos x}$ のテイラー近似式を x の 4 次の項まで求めよ。また関数 $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ ($m > 0, c > 0$ は定数) のテイラー近似式を v の 2 次の項まで求めよ。とくに前者については、

- (i) $\sqrt{1+t}$ の近似式に $t = \cos x - 1$ のテイラー近似式を代入することで、
- (ii) (ii) $(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)^2 = \cos x$ の両辺を比較することで、

求めてみよ。

問 64. 関数 $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ のテイラー近似式を x の 5 次の項まで求めよ。

例 6.17.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a.$$

Proof. 対数の極限値を調べる。

$$\begin{aligned} n \log \left(1 + \frac{a}{n} \right) &= n \left(\frac{a}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{n} \right)^2 + \dots \right) \\ &= a - \frac{1}{2} \frac{a^2}{n} + \dots \\ &\rightarrow a. \end{aligned}$$

□

上の 2 つの例題を組み合わせた次のような問題はどうであろうか。

例 6.18. 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x \sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots, \quad x \sin x = x^2 - \frac{1}{3!} x^4 + \dots$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2} x^2 \right)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

□

例 6.19. 上の例題の結果から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + 1/n)^n - e) = 0$$

であるが、この左辺の量の 0 に近づくスピードはどうであろうか。

Proof. 以前と同様の考え方で、

$$\log(1 + 1/n)^n = n \log(1 + 1/n) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + \dots$$

であるから、

$$\begin{aligned} e^{-1}(1 + 1/n)^n - 1 &= e^{-1/2n+1/3n^2+\dots} - 1 \\ &= (-1/2n + 1/3n^2 + \dots) + \frac{1}{2} (-1/2n + 1/3n^2 + \dots)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} (-1/2n + 1/3n^2 + \dots)^3 + \dots \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{11}{24} \frac{1}{n^2} + \dots \end{aligned}$$

となって、 $(1 + 1/n)^n - e$ の 0 に近づくスピードは、 $-e/2n$ と同じであることがわかる。従って、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n((1 + 1/n)^n - e) = -\frac{e}{2}$$

であることまで分かる。 □

問 65. ネピア数 e の定義として、上で確かめた極限式

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

を採用している教科書も多いが、 e の計算式としては、効率が悪い。上の例題を参考に、誤差の評価を行って、小数点以下 3 衡まで正確に求めようと思ったら、 n をどの程度大きくしないといけないか調べよ。また指数関数のテイラー近似式を使った場合と比較せよ。

問 66. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(x/\sqrt{n}))^n$ を求めよ。

問 67. 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f(1/n)}{n}\right) \left(1 + \frac{f(2/n)}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{f(n/n)}{n}\right) = e^{\int_0^1 f(t) dt}$$

である。

問 68. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

問 69. 関数 $y = \sqrt{-\log \cos x}$ ($0 \leq x < \pi/2$) のグラフの概形を境界での様子に注意して描け。

以上、テイラー近似式を通じて基本公式の有用性を見てきたのであるが、近似の次数を最後まで推し進めたら何が起こるであろうか。もし、 $|x - a| < r$ である x に対して、剩余項 $R_n(x)$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = 0$$

という性質をもてば、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots, \quad |x-a| < r$$

という表示を得る。これを、関数 $f(x)$ の $x = a$ のまわりでの ($|x-a| < r$ における) **テイラー展開** (Taylor expansion) といい、また右辺を**テイラー級数** (Taylor series) と称す。これは、一般項が $x - a$ の幕 (べき) の定数倍であるという意味で、 $x - a$ の**幕級数** (power series) と呼ばれるものになっている。幕級数の和を途中で打ち切ったものは多項式になっていて、テイラー近似式を与える。したがって、テイラー展開とは、近似多項式の次数を無限に大きくした形であることに注意する。このように幕級数の形で表される関数は、解析関数と呼ばれ、数学の中でも重要な地位を占めるものとなっている。

定理 6.20 (基本関数のテイラー展開). 最初の 3 つは全ての実数 x で、との 2 つは $|x| < 1$ で成り立つ。なお、最後の式の α は実数。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \quad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \quad (3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots, \quad (4)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots. \quad (5)$$

Proof. (1) の剩余項は、

$$\frac{1}{n!} \left| \int_0^x e^t (x-t)^n dt \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

と評価されるので、例 6.6 の結果から、 $R_n(x) \rightarrow 0$ がわかる。(2), (3) についても同様。

(4) の剩余項は、

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

であるが、 $0 \leq t \leq x$ または $x \leq t \leq 0$ のとき、

$$\left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$$

となるので、

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が分かる。

最後に、もっとも面倒な (5) を示そう。剩余項は、

$$\frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n) \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt$$

の形である。まず、 $x > 0$ とする。十分大きな n については $\alpha - n - 1 \leq 0$ なので

$$\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

次に、 $-1 < x < 0$ のときは、

$$\left| \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt \right| = \int_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{1-t} \right)^n (1-t)^{\alpha-1} dt$$

で、 $\max\{|x|-t|/(1-t); 0 \leq t \leq |x|\} = |x|$ を使うと、

$$\int_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{1-t} \right)^n (1-t)^{\alpha-1} dt \leq |x|^n \int_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} dt.$$

何れの場合も $|x| < 1$ のとき、

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が確かめられればよい。

これを扱うには α の正負で場合を分ける^{*35}必要がある。例えば、 $\alpha > 0$ の時には、 $l-1 < \alpha \leq l$ なる自然数 l を取ってきて、

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)(l-\alpha)\cdots(n-\alpha)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{(l-1)!} \frac{l-\alpha}{l} \cdots \frac{n-\alpha}{n} \\ &\leq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{(l-1)!}. \end{aligned}$$

一方、 $\alpha < 0$ の時には、 $-l \leq \alpha < -l+1$ なる自然数 l を取ってきて、

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!} \frac{-\alpha}{l} \frac{1-\alpha}{l+1} \cdots \frac{n-\alpha}{n+l} \leq \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!}$$

と評価すれば、 $n \rightarrow \infty$ のときの

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}$$

の増大度のスピードが n について l 次多項式程度であるのに比して、 $|x|^n$ の減少度のスピードの方が勝り^{*36}、求める結論を得る。 \square

注意 10. べき乗のテイラー展開の証明については、べき級数の理論を用意した上で、微分方程式の解の唯一性に訴えるのが最も簡明である。

問 70. $\log(1+x)$ の級数表示は、 $x = 1$ でも成り立つ。すなわち、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

これを示せ。

^{*35} 分けるというのは、分かるということだ。数学の基本は場合分け。Divide and rule である。

^{*36} $|x| < 1$ に注意して $|x| = e^{-a}$ と置いてみる。

ここで、テイラー展開とテイラー近似式の関係について整理しておこう。テイラー展開が可能であるためには、もとの関数は何度でも微分できる必要があり、その場合には、当然のことながらテイラー近似式は、テイラー級数を有限項で打ち切った形をしており、近似式が全ての次数で有効である。しかしながら、この逆は一般に成り立たない。次のコーシーによる例が示すように、無限回微分可能でもテイラー展開できない場合、すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = 0$$

が成り立たない場合があるからである。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

と置くと、 f は何度でも微分でき、 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) であることを示すことができる。したがって、 $R_n(x) = f(x)$ であり、 $x > 0$ に対しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = e^{-1/x} \neq 0$$

となる。

問 71.

$$f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}, \quad x > 0$$

($p_n(1/x)$ は、 $1/x$ の $2n$ 次の多項式) であることを確かめ、 $f^{(n)}(0) = 0$ を示せ。

問 72. (i) $t > 0$ のとき、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} k^n \geq n! \frac{e^{-nt}}{(1 - e^{-t})^{n+1}}.$$

(ii) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \cos(k^2 x)$ とおけば、 f は C^∞ 級で、

$$|f^{(2n)}(0)| \geq (2n)! \frac{e^{-2nt}}{(1 - e^{-t})^{2n+1}}.$$

そこで、具体的にどのような関数がテイラー展開できるのかが問題となるが、これについては次のことが成り立つ。

定理 6.21. 関数 $f(x)$ は、 $x = a$ のまわりでテイラー展開可能であるとする。

- (i) 関数 $g(x)$ が $x = a$ のまわりでテイラー展開可能であれば、その積 $f(x)g(x)$ も $x = a$ のまわりでテイラー展開可能。
- (ii) 関数 $g(x)$ が $x = f(a)$ のまわりでテイラー展開可能であれば、合成関数 $g(f(x))$ は $x = a$ のまわりでテイラー展開可能。とくに、 $g(x) = 1/x$ を考えると、 $f(a) \neq 0$ であれば、 $1/f(x)$ も $x = a$ のまわりでテイラー展開できる。
- (iii) $f'(a) \neq 0$ であれば、 $x = f(a)$ のまわりでテイラー展開可能な f の逆関数が存在する。

この定理の証明のためには幕級数の理論³⁷を用意しておく必要があり、残念ながらここでは、紹介できない。科学する態度に反するのであるが、ここは信じて前に進み、しかるべき段階に至ってから証明を学ぶこと

³⁷ 例えば、<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/complex/complex2013.pdf> を見よ。

を薦める。先達は、膨大な数値計算に基づいた経験により結果の正しさを感覚的に理解し、微積分の適用範囲を押し広げていったものである。

関数の積、合成、逆関数などの操作でテイラー展開可能な関数を次々と作り出すことができる。そして、テイラー展開できることことさえわかれば、その具体的な形を求めるには近似式の計算方法がそのまま使える、ということである。

これまで見てきたように基本公式は、極めて強力なものではあるが、具体的なテイラー展開においては、なおまた別の方法を試すと良い場合もある。そのような例をいくつか見ておこう。

等比数列の和の公式

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=1-x^n$$

から出発する。これを書き直して

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

さらに x を $-x$ で置き換えて

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

両辺を積分して

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x dt (1-t+t^2+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.\end{aligned}$$

これから、剩余項の新たな積分表示

$$R_n(x)=(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

を得る。これを評価することでも、 $\log(1+x)$ のテイラー展開を示すことができる。例えば、 $x=1$ の場合であれば、

$$|R_n(1)|=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

から、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

という等式を得る。

問 73. 上で与えた $\log(1+x)$ についての剩余項と微積分の基本公式に現れるものと比較せよ。両者が同じものであることを直接示すことができるだろうか。ヒント：帰納法と部分積分。

問 74. 正数 $a, b > 0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a=2, b=1$ と取ると具体的にどうなるか。

問 75. 次の等式を利用して、 $\arctan x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を求めよ。

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

注意 11. 関数の幕級数展開の歴史については、様々な数学者が関与していて中々に錯綜しているようである。B. Taylor が Newton 伝来の補間法による考察から、補間点を一点に縮めた極限として、今日の Taylor 級数に相当するものを得たこと (1715) に因んで、Taylor 展開と呼び慣わしている。また、テイラーの結果に触発された形で、原始的なべき級数の議論が J. Stirling によって展開された (1717) ようである。さらに年が下って、C. Maclaurin は、著書の中でテイラー級数を整理した形で取り上げ、その普及に貢献した (1742)。

一方、具体的な関数の幕級数展開については、Newton にまで遡れるようであるが、J. Gregory によって (Newton とは独立に) なされた最初の組織的研究を忘れてはなるまい。Taylor の仕事が公にされる 40 年以上も前で、しかも Newton の微積分発見 (1665) のほんの数年後 (1671) のことであるということからして、Gregory の名前を無視するのは正当とは言い難い。Gregory 自身は Newton に遠慮して発表を控えたらしいが、その謙虚さがあだになったというべきか。

現在の形での Taylor の定理 (=基本公式) が人口に膾炙するきっかけとなったのは、J.-L. Lagrange がそれを解析学の基礎として採用喧伝し (1772)、さらには、A. L. Cauchy が解析学教程 (1821) という本で踏襲したことによるらしい³⁸。

そういった諸々の経緯を踏まえた上で、ここでは、敢えて簡単にテイラー級数・テイラー展開といつて済ませることにする。

以上は、ヨーロッパ圏での話であるが、中世のインドに目を転じると、Madhava³⁹ of Sangamagrama (1350–1425) という天文学者・数学者が幕級数の理論を既に展開し、それが後継する Kerala 学派に伝承され記録にあるという。三角関数のテイラー展開、円周率の級数表示、さらには幕級数の収束半径の計算までなされているという実に驚くべき内容で、それが 14 世紀から 15 世紀にかけて完成されていた。Newton-Gregory の 150 年以上も前に。

7 広義積分

積分

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx, \quad \int_1^\infty x^{-2} dx$$

のように積分される関数の値が有限の範囲になかったり、積分する範囲が有限でない場合も、その積分値を考えることができて、それぞれの図形の面積を表すと解釈することが可能である。こういった種類の積分をとくに強調して異常積分とか広義積分 (improper integral) と呼ぶことが多いが、これらもまっとうな積分である。

注意 12. 区別すべきは、広義積分であるかないかではなく、絶対収束（良い広義積分）か条件収束（悪い広義積分）かである。これについては、実数論の講義ノートを参照。

より一般的に次が成り立つ。

例 7.1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \\ \int_1^\infty x^{-\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

問 76. 正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$$

を求めよ。

³⁸ H.N. Jahnke, A History of Analysis, AMS, 2003.

³⁹ Hindu 教で宇宙の母を意味するという、名前からして大胆かつ伝説的である。

問 77. 関数 $x^{-\alpha}$ と $x^{-1/\alpha}$ が互いに逆関数であることに注意して、等式

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = 1 + \int_1^\infty x^{-1/\alpha} dx$$

を幾何学的に解釈せよ。

例 7.2. 積分

$$\int_0^1 \log x dx$$

の値を求めてみよう。

まず $y = \log x$ のグラフを描いてみて、この積分は $x = 0$ の点で広義積分になっていることを確認する。積分の値そのものは、 $\log x$ の原始関数が $x \log x - x$ であることに注意すれば、

$$\int_0^1 \log x dx = [x \log x - x]_0^1 = -1$$

と求まるのであるが、この最後の計算で、 $x = 0$ を $x \log x$ に代入するところは吟味が必要である。というのは、 $\log x$ の値は $x = 0$ で発散しているので、

$$x \log x \Big|_{x=0}$$

は、 $0 \times \infty$ 型の「不定形」になっている。

この部分を正しく処理するには、いきなり $x = 0$ を代入せずに、まずは $x = a > 0$ を代入しその後、 $a \rightarrow 0$ を計算する。ということで、極限

$$\lim_{a \rightarrow +0} a \log a$$

が問題になるが、これは、 $a = 1/t$ とでもおいて、 $t \rightarrow +\infty$ という極限に書きなおすと、

$$a \log a = -\frac{\log t}{t} \rightarrow 0$$

$(\log t \ll t)$ であることがわかるので、上の計算が正当化された。(答案としては、ここまで書かないといけない。)

例 7.3. べき関数 x^{-a} は $0 < x < \infty$ 全体で広義積分可能とはならないのであるが、それを少し修正した

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^a + x^b)^{1/c}} dx \quad (a < b, c > 0)$$

が有限の値となる必要十分条件は $a < c < b$ となる。というのは、積分範囲を例えば $x \leq 1$ と $x \geq 1$ にわけてそれぞれの範囲で、

$$\frac{1}{(x^a + x^b)^{1/c}} \sim \frac{1}{x^{a/c}} \quad (x \rightarrow +0), \quad \frac{1}{(x^a + x^b)^{1/c}} \sim \frac{1}{x^{b/c}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

に注意すれば、上記広義積分が収束するのは、 $a/c < 1$ かつ $b/c > 1$ すなわち、 $a < c < b$ のときであることがわかるから（それ以外では発散する）。

問 78. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

問 79. 次の広義積分は収束するか。

$$\int_0^1 \frac{1}{\log t} dt, \quad \int_1^\infty \frac{1}{\log t} dt.$$

関数（のグラフ）を正の部分と負の部分の和に書いて、それぞれの部分の面積を比較すると次の結果となる。

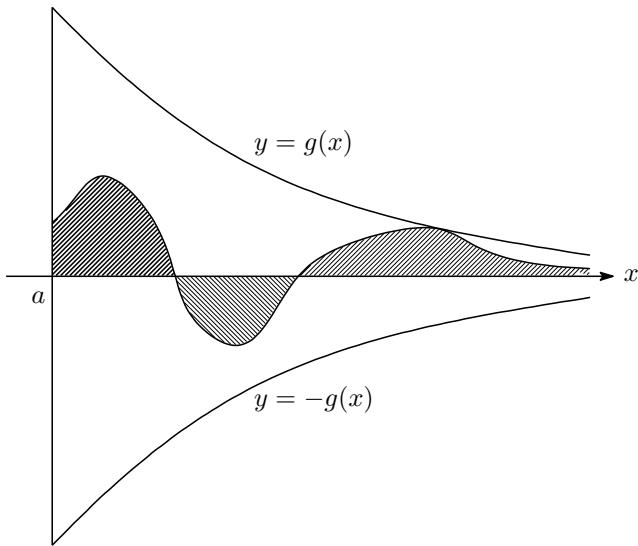


図 12

定理 7.4 (押え込み判定法).

(i)

$$|f(x)| \leq g(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

が成り立つとき、 $\int_0^a g(x) dx < \infty$ ならば

$$\int_0^a f(x) dx$$

が存在する。

(ii)

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \geq a > 0$$

が成り立つとき、 $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$ ならば

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

が存在する。

例 7.5. 広義積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が存在することを確かめ、その値を求めよ。

Proof. まず積分が存在すること。関数 $x^n e^{-x/2}$ は $x \geq 0$ で有界なので、

$$x^n e^{-x} \leq M e^{-x/2} \quad (x \geq 0)$$

となる定数 $M > 0$ が存在し、定理の判定条件が使える。

積分の値は、部分積分から得られる漸化式

$$I_{n+1} = (n+1)I_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

と

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

を使って

$$I_n = n!$$

であることがわかる。 □

例 7.6. 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

の存在を確かめよ。

Proof. これは、 $x \geq 1$ のとき $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x} dx < +\infty \end{aligned}$$

よりわかる。 □

例 7.7 (ガンマ関数). $x > 0$ のとき、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

が存在して $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$. とくに、 $\Gamma(n+1) = n!$.

Proof. 存在は、

$$\int_0^\infty dt = \int_0^1 + \int_1^\infty dt$$

と分けて考える。関数等式は部分積分によりわかる。 □

例 7.8.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

実は、左辺の積分値^{*40}は $\sqrt{\pi}$ であることがわかるので (§9 重積分を見よ)、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となっている。

^{*40} ガウス積分 (Gaussian integral) と呼ばれるも、de Moivre によるものである由。

問 80. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b} dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数により表せ^{*41}。

問 81. $y = -x \log x$ ($x > 0$) のグラフを描き、次を示せ。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

問 82. 広義積分

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^a dx, \quad a > 0$$

が収束するかどうか調べよ。

問 83. 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

が存在するような正数 a の範囲を求めよ。

注意 13. 上で扱った広義積分は、例えば

$$\int_a^\infty |f(t)| dt < \infty$$

であるという意味で「絶対収束」するタイプのもの（良い広義積分）である。一方、絶対値をつけた積分は発散するものの、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

が収束する場合（悪い広義積分）は、「条件収束」すると称される。この後者のみが improper integral というのに似つかわしい。

上の抑え込み判定法は、通常の積分が存在するかどうかの判定でも役に立つ。

例 7.9. 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は、有界区間の上で積分可能である。この証明をいわゆるリーマン積分可能という形で書くのは、イプシロン・デルタ論法というのを学んでからのことになる。ここでは、広義積分風に

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b \sin(1/x) dx$$

の存在が納得できればよい。

問 84. 広義積分 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$ は絶対収束し、条件収束する $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ に値が一致することを示せ。

^{*41} $b = 0$ の場合が、オイラーの元々の積分表示である。

8 級数の収束と発散

数列 (sequence) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して、その形式的な和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

を級数 (series) と呼ぶ^{*42}。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは、極限値

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

が存在することであり、その値も級数と同じ記号で表す^{*43}。また、収束しない級数は、発散するというのだが、その場合でも正の無限大に近づくときは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

のように書く。

ということで、級数とは表面的には特殊な数列ということになるのだが、それがなかなかそうもいい切れぬところがある。級数には数列に含まれる数を全部加えたという意味合いがあり、その全部のところが数列としての極限では見えてこない、少なくとも見えにくいのである。こういった級数特有の性質について、基本的なところを見ていこう。

まずは、最重要級数である等比級数 (geometric series ^{*44}) について復習。基本等式

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

で、 $|x| < 1$ の場合に極限 $n \rightarrow \infty$ を取れば、等比級数の公式

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

を得る。

これは、右辺の関数のテイラー展開を表しているとも考えられるが、様々な使い道がある。一例として、有理数の循環小数表示を取り上げてみよう。

実数 $0 < a < 1$ は、 $a = 0.a_1a_2\dots$ ($a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$) と小数展開 (decimal expansion) できる。これの意味するところは、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

^{*42} sequence は、ただ単に「もの」が並んでいるという意味なので、数以外にも使われる。その場合は、数のところを「もの」で置きかえてベクトル列とか点列とかいうのであるが、困るのは級数の方で、級ベクトルとは言わない。ベクトル級数も変。誤語の選定に問題があったのだが、いまさら代え難い。困ったものだ。なお、sequence も series も語源はラテン語で、「従う」「結ぶ」の意味。ちなみに「級」という漢字の意味は、機織りの際の糸の順番であるという。

^{*43} ひとつの記号に別の意味を与えているので、混乱しないよう注意する

^{*44} 等比数列は、geometric sequence という。ちなみに、等差数列の方は、arithmetic sequence という。これ以外に、相加平均が arithmetic mean、相乗平均が geometric mean といった例もある。arithmetic は「(初等的) 計算」を意味する古代ギリシャ語に由来する。和訳としては、算術・算数が当てられている。

ということである。この式は、数列 $\{a_k\}$ が与えられると、それから実数 a を定義する形になっているが、逆に、与えられた実数 a から各 a_k を復元するための関係式ともなっている。詳しく書くと、

$$10a = a_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}}$$

であるから、もし $a_k = 9 (\forall k \geq 2)$ でなければ、

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-1}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{9}{10^{k-1}} = 1$$

となって、 $a_1 = [10a]$ と定められる^{*45}。次に、

$$10(10a - a_1) = 10^2a - 10a_1 = a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k-2}}$$

を考えると、 $a_k = 9 (\forall k \geq 3)$ でない限り、 $a_2 = [10^2a - 10a_1]$ となる。

以下、帰納的に

$$a_k = [10^k a - 10^{k-1} a_1 - \cdots - 10 a_{k-1}]$$

によって、数列 $\{a_k\}$ は定められる。ただし、 $a_k = 9 (\forall k \geq m)$ となる m は存在しないものとする。

もし、このような m があれば、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{m-1}}$$

であるので、繰り上げることにより、 $a = 0.a_1a_2 \dots a_{m-2}a'_{m-1}$, $a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$ という表示を得る。すなわち、この場合の a は、有限小数で表わされることになる。

つぎのことは、正式に教わらなくても常識的に知っているだろうが、その理由は如何。

命題 8.1. 有理数は循環小数により表され、逆に循環小数で表される実数は有理数である。

Proof. 循環小数ならば有理数のところで、等比級数の式を使う。

逆は、割り算のしくみによれば良くて、 $a = l/m$ (l, m は自然数) であれば、あまりを 10 倍して m で割る操作を続けると、 m で割ったあまりの可能性が $\{0, 1, \dots, m-1\}$ という有限集合であることから、なんどか繰り返すうちに同じあまりが出てきて、くり返しが起こる。あとは、 m などの関係する自然数を 10 進表示して小数表示してやればよい。□

以上の考察は、10 進法に限らず、いわゆる n 進法 (n -adic system) でも成り立つ。すなわち、実数 $0 < a < 1$ は、

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

と表わすことができて、対応する数列 $\{a_k\}$ は、

$$a_k = [n^k a - n^{k-1} a_1 - \cdots - n a_{k-1}]$$

によって復元される。ただし、例外は a が「有限 n 進小数」の場合で、そのときは

$$0.a_1a_2 \dots a_{m-1}(n-1)(n-1) \cdots = 0.a_1a_2 \dots a_{m-2}a'_{m-1}, \quad a'_{m-1} = a_{m-1} + 1$$

なる二重の表示が可能である。

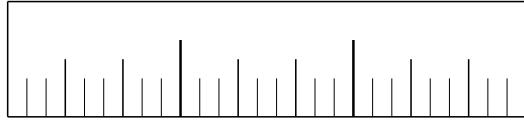


図 13 三進定規

また、有理数の循環小数表示による特徴付けも成り立つ。

さて、級数の話に戻ろう。

命題 8.2. 級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ が収束すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

である。

Proof.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0.$$

□

問 85. 級数 $a_1 + a_2 + \dots$ が収束すれば、そのしつぽ $a_n + a_{n+1} + \dots$ ($n \geq 1$) も収束し、 $n \rightarrow \infty$ のとき、0 に近づく。

例 8.3. $a_n \rightarrow 0$ でも、級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ は発散することがある。正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

とおくとき、広義積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ と比較することで、

$$\zeta(\alpha) < \infty \iff \alpha > 1.$$

とくに、 $\alpha = 1$ の場合は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

上の発散級数についてもう少し詳しく調べておこう。この級数の発散のスピードは、

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1,$$

すなわち $\log n$ 程度である。さらに、その違いについては、

$$\frac{1}{2k(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{x-k}{kx} dx \leq \frac{1}{2k^2}$$

*45 $[x]$ は、 x を越えない最大の整数を表す。

を $k \geq 1$ について加えることで、極限

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

の存在がわかる。この値をオイラー定数 (Euler's constant) という。

問 86.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$$

を利用して、 $1/2 < \gamma < 1$ であることを確かめよ。詳しく計算すると $\gamma = 0.57721\dots$ であるが、これが無理数かどうかは今も分からぬといふ。多分、無理数（それも超越数）なんだろうが。

問 87. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b}$$

が収束するような (a, b) (a, b は実数) の範囲を図示せよ。

問 88. $\int_e^x \frac{1}{t \log t} dt = \log(\log x)$ を利用して、 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} = O(\log(\log n))$ を示せ。

次は、収束の意味^{*46}から明らかであろう。

補題 8.4. 数列 $\{c_n\}_{n \geq 1}$ が、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1}$$

を満たせば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

である。

命題 8.5 (Leibniz). 減少正数列 $\{a_n\}$ が $a_n \rightarrow 0$ をみたせば、それから作られる交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

は収束する。

Proof. 数列 $\{c_n\}_{n \geq 1}$ を

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_1 - a_2, \quad c_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad c_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \quad \dots$$

で定めると、 $c_{2n} \leq c_{2n+1}$ にも注意して、

$$c_2 \leq c_4 \leq c_6 \leq \cdots \leq c_5 \leq c_3 \leq c_1$$

であることがわかる。そこで、 $c_{2n+1} - c_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$ を使うと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+1}$$

となり、上の補題から $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ の存在がわかる。 □

^{*46} 定義からと言わぬが花。そもそも収束の定義はまだしてないんだなあ。

例 8.6.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \quad (\text{N. Mercator, 1668}).$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{G.W. Leibniz, 1682}).$$

ここで、和の記号の一般的な使い方について述べておこう。まず、集合の記号について復習する。数学的に意味のはっきりしたものと集まりを集合と呼び、与えられた集合 S に対して、あるもの a が S に入っていることを $a \in S$ という記号で表し、 a は S の要素あるいは元 (element) というのであった。

とくに、数学的対象を見かけ上区別する目的で使われる集合 I は、添え字集合 (index set) と呼ばれ、添え字 $i \in I$ で区別されるものを a_i といった記号で表わすことが一般的である。見かけ上区別するという意味は、異なる添え字に同じものを割り当てるのも許すということ。すなわち、 $i \neq j$ であっても、 $a_i = a_j$ が起こりえるということである。以下では、見かけ上区別されるものとして、数をもっぱら考えることにする。

添え字集合として、自然数全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ を考えた場合が、数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に他ならない。 I として、平面の格子点 $\{(j, k); j, k = 1, 2, \dots\}$ を取ると、二重数列 $\{a_{(j, k)}\}_{(j, k) \in I}$ が出現する。この場合には、括弧を適宜省略して、 $\{a_{j, k}\}_{j, k \geq 1}$ という表記法もよく使われ、数の2次元的配列と解釈される。「群数列」というのは、この類のものである^{*47}。

添え字集合 I が有限集合であるばあいに、 a_i をすべて加えた結果を $\sum_{i \in I} a_i$ という記号で表す。これが、和の記号の一般的な使い方である。 I が無限集合の場合は、 a_i の総和の意味をはっきりさせた上で、 \sum 記号を使う必要がある。まず、正数 $a_i \geq 0$ の場合を考えよう。 I のさまざまな有限部分集合 F に対して、部分和 $\sum_{i \in F} a_i$ の定める正数が、 F とともにいくらでも大きくなるとき、 $\sum_{i \in I} a_i = \infty$ のように書く。そうでないときは、正数 A が $\sum_{i \in F} a_i$ の限界値として定まるので、 $A = \sum_{i \in I} a_i$ と書き表す。正数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の場合には、

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

のようにも書こう。

注意 14. 正数和 $\sum_{i \in I} a_i$ の正確な定義は、上限 (supremum) の概念を用いて

$$\sup \left\{ \sum_{i \in F} |a_i|; F \text{ は } I \text{ の有限部分集合} \right\}$$

で与えられる。

補題 8.7. 正数和 $\sum_{n \geq 1} a_n$ に関して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

である。

Proof.

$$\sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

は、明らか。一方、 $\{1, 2, \dots, n\} \subset F_0$ となる有限集合 F_0 を考えると

$$a_1 + \cdots + a_n \leq \sum_{k \in F_0} a_k \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$$

^{*47} 群数列の問題のいやらしいところは、本来、2次元的配列として捉えるべきものを敢えて1次元的配列に押しめるところにある。

であるから、 $n \rightarrow \infty$ とすることで逆向きの不等式もわかる。

□

問 89. 上の証明では、 $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$ を暗黙裏に仮定した。 $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \infty$ の場合の議論を補って、証明を完成させよ。

系 8.8. 正数和の値は、和をとる順序によらない。自然数を並べかえたものを $\{n_1, n_2, \dots\}$ とするとき、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

定義 8.9. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| < +\infty$$

であるとき、**絶対収束する** (absolutely convergent *48) という。

また、(広義) 積分 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ は、

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

である場合に絶対収束するという。

幕級数の絶対収束性について最小限のことを見ておこう。幕級数については、組織的な学習が必要であるが、その際は複素変数を中心に行うべきで、複素解析*49 こそ適切な場所である。

補題 8.10. 幕級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が、 $x = a$ で収束すれば、 $|x| < |a|$ で絶対収束する。

Proof. 収束性から、 $\lim_n c_n a^n = 0$ である。とくに、 $|c_n a^n| \leq M$ ($n \geq 0$) となる n に無関係な定数 $M > 0$ が存在する。そこで、 $|x| < |a|$ とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n a^n| \left| \frac{x}{a} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{a} \right|^n = M \frac{|a|}{|a| - |x|} < \infty.$$

□

例 8.11.

(i) 任意の実数 x に対して、

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

は絶対収束。

*48 英語からわかるように、絶対値収束ではなく、絶対的収束の意味である。ちなみに、絶対値は absolute value の直訳で、他に modulus という言い方もある。

*49 たとえば、<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/teaching.html> にある講義ノートを見よ。

(ii) 実数 $|x| < 1$ と任意の実数 a に対して、

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots, \\ (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

は絶対収束。

(iii) 積分 $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$ は絶対収束する。

(iv) 広義積分 (フレネル積分^{*50})

$$\int_0^\infty \sin(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sin(t^2) dt$$

は収束するが、絶対収束しない。

問 90. 正数 $a > 0$ に対して、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \sin(t^2) dt = \frac{\cos(a^2)}{a} - \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$$

を導き、フレネル積分の存在を示せ。

問 91. $a > 0$ のとき、 $(1-t)^a$ の二項展開 (Newton 展開) は、 $t = \pm 1$ で絶対収束することを以下の手順で確かめよ。

(i) a を整数部と小数部にわけることで、 $0 < a < 1$ の場合を示せば十分である。

(ii) $0 < a < 1$ のとき、 $(1-t)^a = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots$ とすると、 $c_k > 0$ である。

(iii)

$$\sum_{k=1}^n c_k = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^n c_k t^k = \lim_{t \rightarrow 1-0} \left(1 - (1-t)^a - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k t^k \right) \leq \lim_{t \rightarrow 1-0} (1 - (1-t)^a) = 1.$$

定理 8.12 (級数の基本定理). 絶対収束する級数に対して、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

は収束し、その値は和をとる順序によらない。さらに、不等式

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ。

Proof. まず、

$$a_n = b_n - c_n, \quad b_n \geq 0, \quad c_n \geq 0, \quad |a_n| = b_n + c_n$$

と表示すれば、絶対収束性から $\sum_n b_n$ と $\sum_n c_n$ が共に存在し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} b_n - \sum_{n \geq 1} c_n$$

となる。正数の和については、加える順序によらないので、この関係式から、 $\{a_n\}$ の和も足す順序によらない。

□

^{*50} Fresnel integral という。前掲の複素解析講義ノートにもあるように、その値は $\sqrt{\pi/8}$ である。

注意 15. 収束はするが絶対収束しない級数をとくに強調して「条件収束する」(conditionally convergent) という言葉をする。

より一般的に、実数の集団 $\{a_i\}_{i \in I}$ が $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ である (summable^{*51} という) とき、その総和を

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in I} c_i$$

で定める。これは、絶対収束級数の和に相当するもので、次の基本不等式をみたす。

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|.$$

命題 8.13. 総和可能な実数の集団 $\{a_i\}_{i \in I}$ と添え字集合 I の分割和 $I = \bigsqcup_{n \geq 1} I_n$ に対して、

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i$$

が成り立つ。

例 8.14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

のとき、

$$I = \{(i = (m, n); m \geq 1, n \geq 1)\}, \quad c_i = a_m b_n$$

と定めると、 $\sum_{i \in I} |c_i| < \infty$ であり、

$$\sum_{i \in I} c_i = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

左辺は、普通、

$$\sum_{m,n \geq 1} a_m b_n$$

と書く。

例 8.15. 幂級数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l,$$

がいずれも $|x| < r$ で絶対収束すれば、 $|x| < r$ で

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

である。

^{*51} このブルバキ好みの概念であるが、その出處は、J. von Neumann, On infinite direct products, Compositio Mathematica, 6(1939), 1–77 であろう。von Neumann はブルバキの先駆者でもあったのだなあ。

例 8.16. $|x| < 1, |y| < 1$ であるとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+y-xy)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)$$

が成り立つ。

定理 8.17 (リーマン^{*52}). 絶対収束しない収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、和の順序を変えることで、どのような実数値にも収束させることができる。

Proof. 絶対収束しないことから、正の項全体および負の項全体の和は $\pm\infty$ に発散すること、および $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) に注意する。

与えられた実数 A に対して、正の項を加えて A より大きくする。次に負の項を加えていき A よりも小さくする。以下これを交互に繰り返していくば、求める配列が得られる。□

ここにきて、絶対収束級数の絶対の意味が明らかになった。すなわち、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が和をとる順番によらずに同一の値に収束する（すなわち絶対的に収束する）ための必要十分条件が、 $\sum_{n \geq 1} |a_n| < \infty$ である。両者は、概念的に区別されるべきもので、数の場合には幸い一致したというのが真相。幸運な一致は、数のみならず、有限次元的ベクトル量についても成り立つ。また、後者から前者を導く証明は、無限次元的ベクトル量についても広く有効であるが、ヒルベルト空間における正規直交展開に見られるように、逆は一般に成り立たない。

絶対収束しない収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ の和の順序を変えることにより、その値がいろいろと変化する様子を具体的に見てみよう。そのために、+ の項を p 個、- の項を q 個順次取りだし、交互に和をとった級数を考える。プラス・マイナスそれぞれを n ブロック足した和

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)p+1} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \cdots - \frac{1}{2nq} \quad (6)$$

すなわち、

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2np-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2nq} \right)$$

を考えると、これは、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{qn} \right)$$

に等しいので、

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

を使うと、

$$\begin{aligned} \log(2pn) + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}(\log(pn) + \gamma_{pn}) - \frac{1}{2}(\log(qn) + \gamma_{qn}) \\ = \log(2p) - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn} \end{aligned}$$

^{*52} Bernhard Riemann (1826–1866) は、西郷隆盛 (1828–1877) と同世代。

となって、これは、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\log(2p) - \frac{1}{2} \log p - \frac{1}{2} \log q = \log(2\sqrt{p/q})$$

に近づく。

例 8.18.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \log 2.$$

問 92. ライブニッツ級数を並べ替えた

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \cdots$$

の値を求めよ。

漸近展開

正規分布の誤差を表わす関数

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$$

は $x \rightarrow \infty$ のとき、0 に近づくのであるがそのスピードを調べてみよう。以下、 $x > 0$ とし、誤差関数を次のように書き直す。

$$\int_0^\infty e^{-(s+x)^2/2} ds = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-(t/x)^2/2-t} dt.$$

ここで、

$$1 - \frac{t^2}{2x^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \left(-\frac{t^2}{2x^2}\right)^{2n} \leq e^{-(t/x)^2/2} \leq 1 - \frac{t^2}{2x^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!} \left(-\frac{t^2}{2x^2}\right)^{2n+1}$$

と $\Gamma(s) = (s-1)!$ ($s > 0$) に注意すれば、

$$\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2k)!}{k!} \frac{(-1)^k}{(2x^2)^k} \leq \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2k)!}{k!} \frac{(-1)^k}{(2x^2)^k}$$

となり、誤差関数の漸近展開

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \sim \frac{1}{x} \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k)!}{k!} \frac{(-1)^k}{(2x^2)^k}$$

ここで、 \sim の意味は、どの $n \geq 0$ についても $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{k!} \frac{(-1)^k}{(2x^2)^k} + O\left(\frac{1}{x^{2n+3}}\right)$$

が成り立つということで、このような表示式を漸近展開 (asymptotic expansion) と呼ぶ。漸近展開はテイラー近似を思い出させ、左辺が $1/x$ の関数としてテイラー展開可能であれば、テイラー近似の特別な場合となるが、上の例が示すように、右辺の級数は一般に収束しない。実際、 $x > 0$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{x^{2n}} = \infty$$

である。こういった場合でも、漸近展開の存在は、関数の挙動について重要な情報を与えてくれる。

問 93. 上の発散を示し、次を確かめよ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 0.$$

問 94.

$$\int_e^x \frac{1}{\log t} dt \sim \frac{x}{\log x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\log x)^k}$$

を示せ。

9 重積分

一変数関数 $f(x)$ の場合、そのグラフは、 xy -平面内の曲線 $y = f(x)$ を表すのであった。同様に、二変数関数 $f(x, y)$ のグラフ^{*53}は、 xyz -空間内の曲面 $z = f(x, y)$ を表す。したがって、 f を調べることは、この曲面を調べることに等しい。

ここで、少しだけ集合の記号を復習しておく。集合の表記方法、和集合 (union)、共通部分 (intersection)。ユークリッド空間 \mathbb{R}^n と超曲面 $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ 、とくに平面曲線 ($n = 2$) と曲面 ($n = 3$)。

注意 16. この段階では、素朴に考えている。素朴という理由は、 $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$ あるは、 $f(x, y) = g(x, y)^2 + h(x, y)^2$ といった場合に、方程式 $f(x, y) = 0$ が規定する図形を考えてみるとわかる。また、曲面とはいうものの、尖っていたり交叉している状況も含むことに注意。後ほど、等位集合の形で、その辺の状況を詳しく調べる。

例 9.1.

- (i) x, y の一次式^{*54} $f(x, y) = ax + by + c$ のグラフは、 $z = ax + by + c$ という平面を表す。
- (ii) 偶関数 $\varphi(x)$ の xz -平面でのグラフ $z = \varphi(x)$ を z 軸のまわりに回転させて得られる曲面は、2変数関数 $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ のグラフ $z = f(x, y)$ である。具体的に、 $\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) であれば、半球面 $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ($x^2 + y^2 \leq r^2$) を、 $\varphi(x) = e^{-x^2}$ であれば、回転面 $z = e^{-x^2 - y^2}$ を表す。

曲面を調べる際の基本は、その切り口（あるいは投影図）を考えてみることである。

いま、 x を $x = a$ に固定して、 $f(a, y)$ を y だけの関数と考えると、そのグラフ $z = f(a, y)$ は、曲面 $z = f(x, y)$ の平面 $x = a$ により切り口に他ならない。同様に、 y を $y = b$ と固定して、 $f(x, b)$ を x だけの関数と考えると、そのグラフ $z = f(x, b)$ は、曲面 $z = f(x, y)$ の平面 $y = b$ により切り口に一致する。例として $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ であれば、それぞれ、

$$z = e^{-a^2} e^{-y^2}, \quad z = e^{-b^2} e^{-x^2}$$

が切り口のグラフを表す。

問 95. 一次式のグラフとして表せない平面は、どのようなものであるか。

問 96. 曲面 $z = x^n y$ ($n = 1, 2, \dots$) の様子を、その切り口を考えることで調べよ。

変数の数が 3 以上の場合でも（幾何学的直感が働きにくくなるものの）同様の取り扱いが可能である。以下では主として 2 变数と 3 变数の場合を扱う。

^{*53} 平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) のグラフは、 $\{(x, y, z); z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ で与えられる。

^{*54} linear expression の意味で使っている。一次多項式と違って、 $a = b = 0$ の場合も許すことに注意。

さて、標題の重積分は体積の計算と密接に関係する。通常の積分が面積と深く結びついていたように。ということで、体積の計算の復習から。

空間の中に直線を用意し、座標 t を入れておく。そして、その直線と直交する平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ で表す。このとき、立体の体積 V は、積分

$$V = \int_a^b S(t) dt$$

で求められる。この積分表示は、右辺の積分を広義積分と解釈することで、立体が無限に広がっている場合にも有効である。

具体例として、関数 $z = e^{-x^2}$ のグラフと x 軸の間にある部分を z 軸のまわりに回転させてできる立体の体積について考えよう。これが、 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ のグラフ $z = f(x, y)$ と xy -平面とで囲まれたものであることに注意する。

まず、切り口の方向を定める直線として x 軸をとると、平面 $x = t$ (x 軸と直交する平面) による切り口の面積は、積分を使って、

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y) dy = e^{-t^2} I, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

と表され、求める体積は

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = I^2.$$

次に、 $z = t$ (z 軸と直交する平面) での切り口を考えると、それは円であり、その半径を r とすると $t = e^{-r^2}$ であるから、この場合の切り口の面積は $\pi r^2 = -\pi \log t$ となる。これから、

$$V = -\pi \int_0^1 \log t dt = -\pi \left[t \log t - t \right]_0^1 = \pi.$$

この 2 つの表示を比較すると、ガウス積分 (Gaussian integral) の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

を得る。

問 97. 正数 a と実数 b に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx$$

を求めよ。

このように、他の方法では得難い（可能だとしても技巧を要する）等式を生み出せる体積計算は、もっと徹底的に調べておく価値がある。

xy 平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) の二重積分 (double integral) を、微小量の和の極限として、次で定義する。

$$\int_D f(x, y) dxdy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) |D_j|.$$

ここで、 $\{D_j\}$ は D の分割^{*55}を、 $|D_j|$ は D_j の面積^{*56}を表す。また、極限は、各 D_j の差し渡し^{*57} (diameter) が 0 に近づくようにとするものとする。

^{*55} $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ かつ $|D_j \cap D_k| = 0$ ($j \neq k$) が成り立つということ。

^{*56} 面積が定義できるような図形だけを考えている。面積が何を意味するかの数学的記述は実に面倒なので、ここでは深入りしない。

^{*57} D_j 内の 2 点間の距離の最大値 (正確には上限) のこと。

注意 17. D が長方形のとき、座標軸の分割による長方形分割 $D_{i,j}$ を採用すれば、

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) |D_{i,j}|$$

となることから、二重積分を

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

のように表すことが多い。また、変数を表す記号には特別の意味はなく、

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D f(s, t) ds dt$$

などであることは一変数の場合と同様である。

定理 9.2 (重積分の基本性質).

(i) 線型性

$$\int_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \int_D f(x, y) dx dy + \beta \int_D g(x, y) dx dy.$$

(ii) 単調性

すべての $(x, y) \in D$ で $f(x, y) \leq g(x, y)$ ならば、

$$\int_D f(x, y) dx dy \leq \int_D g(x, y) dx dy.$$

(iii) 規格化条件

$$\int_D dx dy = |D|.$$

(iv) 加法性

分割 $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, $|D_j \cap D_k| = 0$ ($j \neq k$) に対して

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \dots + \int_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

系 9.3 (積分の基本不等式). 単調性から

$$\left| \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int_D |f(x, y)| dx dy$$

であり、さらに $|f(x, y)| \leq M$ (M は定数) であれば、

$$\left| \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq M |D|.$$

一変数の場合の定積分が符号付き面積を表したのと同様、二重積分は符号付き体積^{*58}を表す。とくに $f(x, y) \geq 0$ のとき、

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

は、関数のグラフ $z = f(x, y)$ と D を底面とする柱体 (cylinder) とで囲まれた立体

$$K = \{(x, y, z); (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

^{*58} 正確には体積の差。

の体積を表す。体積を切り口の面積の積分として表示することで、二重積分の計算を定積分のくり返しに帰着させることができる。例えば、 D が $a \leq x \leq b$ の間にあるとして、

$$D = \{(x, y); \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

のように表せば^{*59}、 $x = t$ での切り口の面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, y) dy$$

となり、求める体積は

$$\int_a^b S(t) dt = \int_a^b \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, y) dy dt = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

のようなくり返し積分^{*60}(repeated integral) で表される。以上の等式は、分割 $D = D_+ \cup D_-$ ($D_\pm = \{(x, y) \in D; \pm f(x, y) \geq 0\}$) を使えば、符号付き体積の場合にも有効である。まとめると、

定理 9.4 (重積分のくり返し積分による表示).

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

などが成り立つ。

問 98. D を $\{\phi(y) \leq x \leq \omega(y); c \leq y \leq d\}$ と表したときのくり返し積分による表示を書き下せ。

次は見かけ以上に重要である。

系 9.5 (くり返し積分の順序交換). $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ のとき^{*61}、二重積分可能な二変数関数 $f(x, y)$ ($a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$) のくり返し積分について、等式

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

が成り立つ。

ここで、ちょっと観察。上の等式は、 $f(x, y) = g(x)h(y)$ のとき、明らかに正しい。したがって、 $f(x, y) = \sum_{k=1}^n g_k(x)h_k(y)$ のときも正しい。一般の $f(x, y)$ についても、この正しい場合からの極限として成り立ちそうだ。こういったセンスは大事である。

例 9.6. 正数 a と $R = [0, 1] \times [1, 2]$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_R (x+y)^a dx dy &= \int_1^2 \int_0^1 (x+y)^a dx dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{a+1} (x+y)^{a+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \frac{1}{a+1} \int_1^2 ((y+1)^{a+1} - y^{a+1}) dy = \frac{1}{(a+1)(a+2)} \left[(y+1)^{a+2} - y^{a+2} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{3^{a+2} - 2^{a+3} + 1}{(a+1)(a+2)}. \end{aligned}$$

^{*59} 関数 $\varphi(x), \psi(x)$ のグラフは、 D の上下の境界を表している。

^{*60} 累次積分、あるいは反復積分とも言う。漢字の使いすぎに注意。

^{*61} このとき、 $D = [a, b] \times [c, d]$ と書く。一般に、2つの集合 A, B の直積を $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ で定める。

問 99. くり返し積分

$$\int_0^1 \int_1^2 (x+y)^a dy dx$$

を計算して、上の結果と一致することを確かめよ。

例 9.7. $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ のとき、

$$\int_D f(x, y) dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy.$$

問 100. 上の D について、

$$\int_D xe^y dxdy$$

を求めよ。

例 9.8. くり返し積分

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy dx$$

の値を求める。悪趣味ながら、よく取り上げられるので。

Proof.

$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

なる平面図形を考えると、

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy e^{x/y} = \int_D e^{x/y} dxdy.$$

一方、

$$D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

という表示を使えば、

$$\int_D e^{x/y} dxdy = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y} dx dy = \int_0^1 [ye^{x/y}]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y) dy = \frac{1}{2}$$

である。 □

問 101. 二重数列^{*62} $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,2}, c_{1,3}, c_{2,3}, c_{3,3}, \dots$ の和

$$\sum_{1 \leq m \leq n} c_{m,n}$$

を二重和として二つの方法で表せ。

注意 18. つぎのような間違った式を書かないこと。

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy dx = \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^1 e^{x/y} dx dy.$$

例 9.9. くり返し積分が可能であっても二重積分可能でないときは、くり返す順番で積分結果が異なることが普通に起こる。

^{*62} 群数列といいういい方が馴染みかも知れない。

空間内の領域 K において、 K 内の電荷の密度分布が関数 $f(x, y, z)$ で与えられているならば、電荷の総量は、三重積分

$$\int_K f(x, y, z) dx dy dz$$

で求められる。この場合にもくり返し積分による計算式が成り立つ。

例 9.10. $K = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq z\}$ であるとき、

$$\int_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx.$$

問 102. 上の K に対して、三重積分

$$\int_K dx dy dz$$

を求めよ。

重積分においても広義積分を考えることができて、くり返し積分の公式が成り立つ。ただし、積分は絶対収束するものとする。丁寧に述べれば次のようになる。

平面内の無限に広がった図形 D は、有限な図形の増大列 $D_n \subset D$ の和集合で表せるものとする。このとき、 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ に対して、極限^{*63}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} |f(x, y)| dx dy$$

は増大列 D_n のとり方によらない。これが有限であるとき、すなわち絶対収束する場合には、 f を正負の値をとる部分の和で表すことで、極限

$$\int_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x, y) dx dy$$

が存在し、増大列 D_n のとり方によらないことがわかる。この極限値をもって、 f の D における二重積分を定める。

さらに、体積の切り口に関する積分を考えると、 $\int_D |f(x, y)| dx dy$ をくり返し積分で表すことが可能で、この値が有限であるとき（絶対収束する場合）は、広義積分

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

に対してもくり返し積分による表示が成り立つ^{*64}。

例 9.11.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2.$$

問 103. 半平面 $D = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y > 0\} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 上の広義二重積分

$$\int_D e^{-(x^2+1)y} dx dy$$

をくり返し積分により計算することで、ガウス積分の公式を導け。

^{*63} 右辺は増加数列の極限として、正または ∞ を値にとると考える。

^{*64} きちんとした証明は、意外に面倒である。この段階で証明に深入りすることは避け、それが必要になった際には、ルベーグ積分の形で理解することを勧める。

問 104. 前に行ったガウス積分の計算は、 $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$ に対する三重積分

$$\int_K dz dy dz$$

をくりかえし積分で計算したものになっている。これを確かめよ。

問 105. 絶対収束しない場合には、仮にくり返し積分が可能であっても、くり返し積分の結果は、積分を行う順序に依存することがある。さほど重要とも思われないが^{*65}、そのような例を一つ。

(i) 次の微分を計算する。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2 + b^2} \right), \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{a^2 + y^2} \right).$$

(ii) 次のくり返し積分を計算する。

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx.$$

(iii) 二重積分

$$\int_{r \leq x, y \leq 1} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

を計算し、 $r \rightarrow +0$ のときの様子を調べる。

ここで、積分記号内の積分変数の場所について一言。数学者好みは、上でも使ったように積分される関数を積分する変数 dx と \int とではさむ、というもので、積分すべき対象が明確に表される利点がある。一方、この問にはさまれる関数式が長くなると、どの変数についての積分であるかの対応が見にくくなり、計算間違いの原因ともなるため、

$$\int_a^b dx f(x)$$

のように $\int dx$ の後に積分すべき関数を書くという表記法もあり、特に長い積分計算が必要となる物理関係者の間で好まれるようである。ただ、この方式の欠点は、積分すべき関数がどこまで続くのかが不明瞭になりがちなことである。以下では、とくに拘りなくどちらも使用する。いずれであるかは、各自忖度せよ。

問 106. 定積分

$$\int_a^b dx x$$

を、数学者の流儀と物理学者の流儀で計算し、その違いを認識せよ。

最後に、重積分と密度の関係を確認しておこう。教科書では正面きって取り上げられないにもかかわらず、いつのまにか「常識」として扱われることが多い。まずは、一変数の微分・積分あるいは積分・微分の公式の復習から。

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

最初の等式を少し書きなおすと、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

この等式は、密度と積分の関係を表しているとみることができ、重積分に対しても意味を成すものである。

これについて調べる前に、重積分の存在を保証する結果について述べておこう。

^{*65} 医者が特異な病理を偏愛するように、病理的な例を好む数学者もまた多い。一種の病気であるか。

定理 9.12. 平面領域 D は有限の範囲にあり、その境界 ∂D の「面積」が 0 であるとする^{*66}。このとき、関数が D の境界も含めたところで連続であれば、

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

が存在する。

通常の平面図形がこの条件をみたすことは感覚的に明らかであるが、厳密に確かめようと思ったら、そもそも「面積」の定義から始める必要があり、意外に面倒でもある。ここでは、直感的理解に止めておく。それよりも、多変数関数の連続性をまだ定義していなかったので、ここで説明しておこう。二変数関数 $f(x, y)$ が、 $(x, y) = (a, b)$ で連続であるとは、 (x, y) が (a, b) に近づくとき、 $f(x, y)$ が $f(a, b)$ に近づくこと。とりあえずは、この素朴な形で先へ進むことにする。

定理 9.13. 関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ の近くで連続であるとする。このとき、 (a, b) を含む領域 D に対して、

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} \frac{1}{|D|} \int_D f(x, y) dx dy = f(a, b)$$

が成り立つ。ここで、 $\delta(D)$ は、 D 上の関数 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ の最大値を表す。とくに、

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{|hk|} \int_a^{a+h} dx \int_b^{b+k} f(x, y) dy = f(a, b)$$

である。

Proof. 関数 $f(x, y)$ の D における最小値・最大値を m_D, M_D で表せば、

$$m_D \leq f(x, y) \leq M_D \quad ((x, y) \in D)$$

であり、これから

$$m_D \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(x, y) dx dy \leq M_D.$$

一方、 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で連続であることから、

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} m_D = \lim_{\delta(D) \rightarrow 0} M_D = f(a, b).$$

□

10 偏微分

ここでは多変数関数の微分について考える。もっとも安直な^{*67}ものは、どれか一つの変数に着目し、残りの変数を固定することで、一変数関数としての微分を実行することである。これを**偏微分** (partial differentiation) という。二変数関数 $f(x, y)$ であれば、 $x = a$ を固定して y について微分したものを

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, y+h) - f(a, y)}{h}$$

^{*66} こう書くからには、 $|\partial D| > 0$ となる場合があるということだ。想像できるか。

^{*67} 安直でない「微分」が何を意味するか、何を表すと考えるべきかは、先達も苦労したところである。結論は後の方で出てくるので、それまでの間、あれこれ思いを廻らすとよい。「古人の跡を求めず、求めたるところを求めよ」だ。

あるいは $f_y(a, y)$ と書く^{*68}。同様に $y = b$ を固定して x について微分したものは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, b) \text{ あるいは } f_x(x, b).$$

いずれの場合も、偏微分を実行したあとで固定しておいたパラメータ a, b を変化させることで二変数の関数

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$$

を得る。これを y あるいは x に関する偏導関数 (partial derivative^{*69}) という。

注意 19. 偏導関数を表す記号 $f_x(x, y)$ に含まれる x のうち、実際に変数であるのは (x, y) の部分である。したがって $(x, y) = (a, y)$ (a は定数) とおいた $f_x(a, y)$ は、 x を変数として含まない。とくに、

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x(a, y) = 0$$

である。

くり返し積分を求める際に、実質的に偏導関数の計算を行っていたことに注意。

命題 10.1 (積分のパラメータ微分). 関数 $f(x, y)$ およびその偏導関数 $f_y(x, y)$ が連続^{*70}であれば、次のパラメータに関する微分の公式が成り立つ。

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

あるいは、 b のところを変数と思って不定積分の形にすれば、

$$\frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Proof. 実際、

$$\int_c^t \int_a^b f_y(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^t f_y(x, y) dy dx = \int_a^b (f(x, t) - f(x, c)) dx$$

の両辺を t で微分すると、

$$\int_a^b f_y(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx$$

である。 □

例 10.2. $\int e^{xy} dx = \frac{1}{y} e^{xy}$ を y について次々と偏微分すると、

$$\begin{aligned} \int x e^{xy} dx &= -\frac{1}{y^2} e^{xy} + \frac{x}{y} e^{xy} \\ \int x^2 e^{xy} dx &= \frac{2}{y^3} e^{xy} - \frac{2x}{y^2} e^{xy} + \frac{x^2}{y} e^{xy} \\ \int x^3 e^{xy} dx &= -\frac{6}{y^4} e^{xy} + \frac{6x}{y^3} e^{xy} - \frac{3x^2}{y^2} e^{xy} + \frac{x^3}{y} e^{xy}. \end{aligned}$$

^{*68} この偏微分を表す記号は、実用的ではあるが、ときには混乱の元となる。変数を表す記号と独立した操作であるから、第一変数に関する偏微分という意味で、 $D_1 f(x, y) = f_1(x, y)$ とでも書くのが、論理的には望ましい。なお、 ∂ は partial (dee) と読んで d と区別する。

^{*69} 偏微分のこととも partial derivative ということが多い。一点だけでの微分を問題にしてもしようがないということなのだろう、とくに多変数においては。

^{*70} 連続性の定義は、このすぐ後にある。連続性を仮定するのは、証明の途中に現れる重積分表示を保証するためである。

問 107. $\int \cos(xy) dx = \frac{1}{y} \sin(xy)$ を y で次々と偏微分してみよ。

偏導関数を再度偏微分したものは、二階の偏導関数 (second order derivative) と呼ばれ、次のような記号で表される。高階の偏導関数 (higher order derivative) についても同様である。

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = f_{xx}(a, b), \quad \frac{\partial f_y}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

例 10.3. 関数 $f(x, y) = \sin(xy + y^2)$ を偏微分してみよう。

$$\begin{aligned} f_x &= y \cos(xy + y^2), & f_y &= (x + 2y) \cos(xy + y^2), \\ f_{xx} &= -y^2 \sin(xy + y^2), & f_{yy} &= 2 \cos(xy + y^2) - (x + 2y)^2 \sin(xy + y^2), \\ f_{xy} &= \cos(xy + y^2) - y(x + 2y) \sin(xy + y^2) = f_{yx}. \end{aligned}$$

いろいろな例で計算してみると、いつでも $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立っているように見える。それについて述べるために、二変数関数が連続であることの定義を 2 つ書いておく。一つは、点列の極限を使うもので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(a, b)$$

が従うとき、 $f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で連続であるという。

もう一つは、あいまいな表現ながら、二点 $(x, y), (a, b)$ の間の距離 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ が小さければ $f(x, y)$ は $f(a, b)$ に近いとする^{*71} ものである。

「近い」あるいは「近づく」という言葉の意味を明確にすることで、この二つの連続性が同じ内容であることを厳密に証明できるのであるが、ここではそれを認めることにして先へ進もう^{*72}。

問 108. 次は、連続性の難しさを味わうための問題である。

(i) $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で連続であるとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = f(a, b)$$

は成り立つか。また、 $f(x, y)$ がすべての点で連続ならば、どうか。

(ii) 条件

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$$

から $(x, y) = (a, b)$ での連続性が言えるか。

定理 10.4. f_{xy}, f_{yx} が存在してどちらも連続関数であるとき $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ。

^{*71} 正確に述べると次のようになる。どのように小さい正数 ϵ に対しても、正数 δ を適切に選ぶことで、 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta$ から $|f(x, y) - f(a, b)| \leq \epsilon$ が従うようにできる。

^{*72} 気になる人は、例えば、<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/set/real2018.pdf> を見よ。

Proof. $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を示す。 $R = [a, a+r] \times [b, b+r]$ とする ($r > 0$)。

$$\begin{aligned}\int_R ds dt f_{yx}(s, t) &= \int_a^{a+r} ds \int_b^{b+r} dt f_{yx}(s, t) \\ &= \int_a^{a+r} ds [f_x(s, b+r) - f_x(s, b)] \\ &= f(a+r, b+r) - f(a, b+r) - f(a+r, b) + f(a, b)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\int_R ds dt f_{xy}(s, t) &= \int_b^{b+r} dt \int_a^{a+r} ds f_{xy}(s, t) \\ &= \int_b^{b+r} dt [f_y(a+r, t) - f_y(a, t)] \\ &= f(a+r, b+r) - f(a, b+r) - f(a+r, b) + f(a, b)\end{aligned}$$

を比較して

$$\int_R ds dt f_{xy}(s, t) = \int_R ds dt f_{yx}(s, t).$$

両辺を r^2 で割って、定理 9.13 に注意して極限 $r \rightarrow 0$ を取ると、 $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ がわかる。 \square

系 10.5. 関数 $f(x, y)$ は、 n 回まで偏微分できて、 n 階以下のすべての偏導関数が連続である^{*73} とすると、偏微分の結果はくり返す順番によらない。

問 109. $f(x, y, z) = e^{y+z} \frac{x}{z^2+1}$ に対して、 $f_{xyz} = f_{yzx}$ であることを確かめよ。また、この等式を一般の関数に対して保証する十分条件を与えよ。

問 110. 関数 $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) に対して、 $\frac{\partial r}{\partial x}$ を求めよ。関数 $f(x, y, z) = 1/r(x, y, z)^d$ が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

を満たすように定数 d を定めよ。また、二変数で同様の問題を考えよ。

空間曲線のパラメータ表示： $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (t はパラメータ) について。時刻をパラメータ t に選んで、点の運動を表しているという解釈も可能。点の運動と思えば、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

は、ある時刻における速度ベクトルを、一般的には、曲線上の点 $\mathbf{r}(t)$ で曲線に接するベクトルを表す。

問 111. 曲線のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ において、 $t = a$ での一次近似式は、点 $(x(a), y(a), z(a))$ を通る接線のパラメータ表示になっていることを確かめよ。

定理 10.6 (Chain Rule^{*74}). 関数 $f(x, y, z)$ が連続な偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ をもつとき、微分の公式

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}(t)) \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

^{*73} このとき、関数 f は C^n 級である (of class C^n) という言い方をする。

^{*74} 鎖則あるいは連鎖律と訳されるが、訳語の落ち着きが悪いようで、通常 chain rule のまま呼ばれる。

が成り立つ。

Proof. 本質的な違いがないので、2変数の場合を示す。 t を固定して $(x(t), y(t)) = (a, b)$ とおき、微小変化 Δt に対する x, y の変化を $\Delta x, \Delta y$ で表す：

$$x(t + \Delta t) = a + \Delta x, \quad y(t + \Delta t) = b + \Delta y.$$

このとき、

$$\begin{aligned} & f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t)) \\ &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) + f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \\ &= \int_b^{b+\Delta y} \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) dy + \int_a^{a+\Delta x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, b) dx \end{aligned}$$

と書きなおし、両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{\Delta y} \int_b^{b+\Delta y} dy \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) + \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_a^{a+\Delta x} dx \frac{\partial f}{\partial x}(x, b).$$

これの $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ としたときの極限が問題となるが、このとき、 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ に注意すれば、積分変数の動く範囲は (a, b) のごく近くに限定され、したがって f_x, f_y の連続性により、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) \doteq \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, b) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

という近似式が成り立ち、

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_b^{b+\Delta y} dy \frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

などから、求める公式を得る。 \square

問 112. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1), (x, y) = (a + \alpha t, b + \beta t)$ のとき、公式が成り立つことを確かめよ。

注意 20. 鎮則の導出で使った近似的議論をより正確にしようと思ったら、次のようにすればよい。関数 f_y の $[a, a + \Delta x] \times [b, b + \Delta y]$ での最大値・最小値をそれぞれ、 M, m で表せば、 f_y の連続性により、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 M, m は $f_y(a, b)$ に近づく。一方、不等式

$$m \leq f_y(a + \Delta x, y) \leq M \quad (b \leq y \leq b + \Delta y)$$

を y について積分すると、

$$m \leq \frac{1}{\Delta y} \int_b^{b+\Delta y} f_y(a + \Delta x, y) dy \leq M$$

を得るので、この2つをあわせて、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_b^{b+\Delta y} f_y(a + \Delta x, y) dy = f_y(a, b)$$

となる。

例 10.7. 点 (a, b, c) を通る直線のパラメータ表示 $r(t) = (a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t)$ を考えると、

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t) \right|_{t=0} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c).$$

問 113. 上の例題で扱った微分を f の方向微分 (directional derivative) という。これの意味について考察せよ。

問 114. 直線の方向を表すベクトル (α, β, γ) として大きさが 1 のベクトル（単位ベクトル）に限定して変化させるととき、方向微分の最大値・最小値をもとめよ。

問 115. 関数 $f(x, y, z) = \frac{3}{1+x^2} \log(1+e^y+z^2) - y$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$) に対して

$$F(t) = f(a \cos t, a \sin t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく。ただし、 $a \in \mathbb{R}$ は定数とする。このとき、 $F'(0) = 0$ となる a をすべて求めよ。

問 116 (Euler's homogeneous function theorem). 原点以外で定義された C^1 関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が次数 α の同次関数であるとは、 $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$ ($t > 0$) となること。このとき、 f は

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f$$

を満たす。逆にこのような f は次数 α の同次関数である。

定義 10.8. 関数 f のすべての偏導関数が存在して連続であるとき、すなわち C^1 級であるとき、 f の微分とは、偏微分を成分とするベクトルと定義する。3 変数の関数 $f(x, y, z)$ であれば、

$$f'(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)).$$

例 10.9. 位置エネルギー (potential energy) と仕事 (work) の関係。位置エネルギー (関数) $U(\mathbf{r})$ に基づく力 (の場) は、 U の微分を使って $\mathbf{F} = -U'(\mathbf{r})$ と表され、微小変位 $d\mathbf{r}$ の間の仕事 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ の総計は線積分を使って

$$\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = - \int_a^b U'(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

で与えられ、この最後の積分は chain rule により

$$-\int_a^b \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) dt = U(\mathbf{r}(a)) - U(\mathbf{r}(b))$$

のように位置エネルギーの差に一致する。

一次の近似式

先の公式 (chain rule) はまた、次のように解釈することもできる。偏導関数 f_x, f_y は、 $(x, y) = (a, b)$ で連続であるとする。このとき、微小量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ に対して、次の近似式が成り立つ⁷⁵。

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) \doteq f(a, b, c) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\Delta z.$$

実際、二変数の場合であれば、

$$\begin{aligned} & f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f(a + t\Delta x, b + t\Delta y) \\ &= \int_0^1 dt \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + t\Delta x, b + t\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a + t\Delta x, b + t\Delta y)\Delta y \right) \\ &\doteq \int_0^1 dt \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y \end{aligned}$$

⁷⁵ 正確には、両辺の差を $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ で割ったものが、 $(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)$ のとき、0 に近づく、という意味である。鎖則の説明の注意書きで述べた方法がここでも有効で、安全な証明を与えることができる。また、このとき、 $f(x, y, z)$ は、 $(x, y, z) = (a, b, c)$ で微分可能である、といった言い方をする。偏微分可能性との違いを強調して全微分可能ともいう。

である。

これはまた、「無限小量」 dx, dy, dz を形式的に導入して

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

とも表記される^{*76}。

例 10.10. 半径 r 、高さ h の円柱の体積を V で表すとき、 r が 1%、 h が 2% 増えた場合、 V はおよそ何% 増えるか。 $V = \pi r^2 h$ に一次近似式を適用すれば、 $\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h \approx 2\pi rh \Delta r + \pi r^2 \Delta h$ より、

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \times 0.01 + 0.02 = 0.04$$

となって、約 4% 増えることがわかる。

問 117. 地球とそれを取り巻く大気圏は、横長の楕円を回転させた、回転楕円体というものに近く、赤道軸の径を x 、回転軸方向の径を y で表すとき、その体積は $V = (4\pi/3)x^2 y$ で与えられる。赤道方向の地球の径が 6278km で大気圏の厚さは 17km、回転軸方向の地球の径は 6357km で大気圏の厚さは 7km であるという。大気圏の体積が地球の体積の何% 程度に相当するか見積もれ。

接平面

公式 (chain rule) の幾何学への応用として、曲面に接する平面の方程式を計算してみよう。まず、3変数の関数 $f(x, y, z)$ を用意して、条件 $f(x, y, z) = h$ (h は定数) をみたす点の集まりを考えよう。この制限により、3つの変数 x, y, z のうち独立に選べるのは 2 つに限られ、3次元空間内の 2 次元的広がりをもった図形すなわち曲面が得られる^{*77}と考えられる。曲面をこのような形で表したとき、 $f(x, y, z) = h$ を曲面の方程式という。

例 10.11. 2変数関数 $\varphi(x, y)$ のグラフを表す式 $z = \varphi(x, y)$ は、3変数関数 $f(x, y, z) = \varphi(x, y) - z$ を使って、曲面の方程式 $f(x, y, z) = 0$ と見ることができる。

例 10.12.

- (i) ベクトル (α, β, γ) と実数 c に対して、 $\alpha x + \beta y + \gamma z = c$ は、 (α, β, γ) と直交する平面を表す。
- (ii) 点 (x_0, y_0, z_0) と正数 $r > 0$ を指定するとき、 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ は、 (x_0, y_0, z_0) を中心とし半径 r の球面を表す。
- (iii) 方程式 $y^2 + z^2 = r^2$ は、 x 軸方向にのびた円柱を表す。

問 118. ななめの円柱の方程式。

- (i) ベクトル (x, y, z) の $(1, 1, 1)$ 方向への正射影を求めよ。
- (ii) 直線 (t, t, t) (t は実数) を中心線とする半径 r の円柱を表す方程式を求めよ。

さて、曲面 $f(x, y, z) = h$ が、点 (a, b, c) で接平面をもつとき、その方程式を求めてみよう。曲面に乗っている曲線で点 (a, b, c) を通るものを、パラメータ t を使って $(x(t), y(t), z(t))$, $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$ と表すと、

$$f(x(t), y(t), z(t)) = h$$

^{*76} 関数 f の微分のもう一つの表わしがこれ。

^{*77} もう少し詳しい説明は、後の等位面のところで。

が t によらずに成り立つ。この等式を t について微分して、左辺に chain rule を使えば、

$$\frac{dx}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) + \frac{dy}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) + \frac{dz}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

が得られる。すなわち、接ベクトル $(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0), \frac{dz}{dt}(0))$ は、ベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right)$$

に直交する。したがって、 $f'(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ であれば、接平面は、 $f'(a, b, c)$ を法線ベクトルとし点 (a, b, c) を通る平面に含まれることになり、一致する。

定理 10.13. 曲面 $f(x, y, z) = h$ 上の点 (a, b, c) における接平面の法線ベクトルは、 f の微分

$$f'(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right)$$

で与えられる。ただし、 $f'(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする^{*78}。

系 10.14. 2 変数関数 $f(x, y)$ のグラフ $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の法線ベクトルは、

$$(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

で与えられる。

問 119. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（二葉双曲面という）と y 軸のまわりに回転させて得られる曲面（一葉双曲面という）の方程式を求めよ。それぞれの場合について、点 $(1, 0, 0)$ を通る接平面の方程式を求め、接平面が元の曲面と $(1, 0, 0)$ 以外の点で交わることがあるかどうか調べよ。

問 120. 二次曲面 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ の接平面の方程式を求めよ。

問 121. 点 (a, b) を通る平面曲線 $f(x, y) = f(a, b)$ とベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

の関係について考察せよ。

例 10.15. 円錐

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

を考えると、原点 $(0, 0, 0)$ での値が

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (0, 0, 0)$$

となって法線ベクトルにならない。このような点は **特異点** (singular point) とよばれ、接平面を定義することができない。特異点については、後で立ち戻ることにする。

問 122. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + a = 0$ が特異点を持つように、定数 a を定めよ。

^{*78} 実は、 $f'(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ と f' の連続性から、点 (a, b, c) における接平面の存在がわかる。後の等位面の項を参照。

11 変数変換

変数 x, y を新たな変数 u, v により、

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

と表すことを考えてみよう。ここで、 $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ は、 (u, v) の C^1 級関数であり^{*79}、変数の動く範囲（変域）をそれぞれ $D = \{(x, y)\}, E = \{(u, v)\}$ とするとき、 $(u, v) \in E$ から $(x, y) \in D$ が決まる^{*80}だけではなく、逆に $(x, y) \in D$ から $(u, v) \in E$ が復元できるものとする。

例 11.1.

(i) $D = E = \mathbb{R}^2$ とする。

$$x = au + bv + x_0, \quad y = cu + dv + y_0$$

は、一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と平行移動を組み合せた変数変換を与える。ただし、 $ad - bc \neq 0$ とする。

(ii) $E = \{(r, \theta); r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, D = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$ および

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

で変数変換を定めることができる。これを**極座標変換** (polar coordinate transformation) と呼ぶ。

問 123. $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ とするとき、対応する極座標の範囲を求めよ。

問 124. 次の式で表される変数変換を考える際に注意すべき点は何か。

$$x = u + v, \quad y = uv.$$

行列式の幾何学的意味

あとでの都合上、行列式を \det で表す。例えば、

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

この 2 次の行列式は、次のような幾何学的意味をもつ：

2 つのベクトル $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ を二辺とする平行四辺形の符号つき面積。ただし、 (a_1, b_1) から (a_2, b_2) への角を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とするとき、 θ の正負に応じて、面積に正負の符号をつけるものとする。

同様に、3 次の行列式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

は、3 つのベクトル $(a_j, b_j, c_j) (j = 1, 2, 3)$ を三辺とする平行六面体の符号つき体積を表す。この幾何学的意味は、「3 つのベクトルが基底を成す \iff 行列式の値が 0 でない」という事実とも符合することに注意す

^{*79} 変数変換を表す関数を明示するのが、数学的には正しい態度であるが、簡便な表記法として、 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ のように書くことが多い。

^{*80} このように、集合 E の要素から集合 D の要素を定める規則のことを数学では写像という。変数変換の場合には、この写像が E の要素と D の要素との間で、漏れなくかつ重なりもないことを要求する。

る。符号の選び方は、ベクトルの3つ組が標準基底から連続的に変形可能なときに正、そうでないときは負とする^{*81}。

問 125. 平行四辺形の面積を保ったまま長方形に変形する操作と行列式の性質とを結びつけることで、上で述べた事実を示せ。

ここで、重積分の意味を復習しておくと、平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x, y)$ に対して

$$\int_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) |D_j|$$

というものであった。

以上を踏まえて、重積分の変数変換について説明しよう。

補題 11.2. 点 $(u, v) \in E$ に対して、 $\Delta E = [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$ とし、それに対応する領域を $\Delta D \subset D$ で表すとき、

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \frac{|\Delta D|}{|\Delta E|} = \left| \frac{d(\varphi, \psi)}{d(u, v)} \right|.$$

ただし、

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

であり^{*82}、これを変数変換のヤコビ行列式 (Jacobian)^{*83} と呼ぶ。

Proof. ΔE 内の点は、 $(u + s\Delta u, v + t\Delta v)$ ($0 \leq s, t \leq 1$) と表すことができるので、 ΔD の点は、

$$(\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v), \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v)), \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

と表される。ここで、 $\Delta u, \Delta v$ はごく小さい数であるとすれば、1次の近似式

$$\begin{aligned} \varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) &\doteq \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)s\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)t\Delta v \\ \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) &\doteq \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)s\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)t\Delta v \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} &(\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v), \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v)) \\ &= (\varphi(u, v), \psi(u, v)) + s\Delta u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \right) + t\Delta v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right) \end{aligned}$$

となる。これは、 $(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ を頂点とし、ベクトル

$$\Delta u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \right), \quad \Delta v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right)$$

を2辺とする平行四辺形のパラメータ表示に他ならない。

^{*81} いわゆる右手系・左手系の区別に対応する。

^{*82} 左辺の意味からは、 $dxdy/dudv$ とでも書くべきものである。

^{*83} この二変数の場合をオイラーが、三変数の場合はラグランジュが示した。Jacobian という名称は、一般の多変数の場合を扱った Carl Gustav Jacobi (1841) に因む。

したがって、 ΔD の面積は近似的に

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{d(\varphi, \psi)}{d(u, v)} \right| |\Delta E|$$

に等しく、比 $|\Delta D|/|\Delta E|$ の極限は、ヤコビ行列式で与えられることがわかる。 \square

例 11.3. 極座標変換において、

$$\lim \frac{|\Delta D|}{|\Delta E|}, \quad \frac{d(x, \theta)}{d(r, \theta)}$$

を別個に計算し、一致することを確かめる。 $|\Delta E| = \Delta r \Delta \theta$,

$$|\Delta D| = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta \theta - \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta = r \Delta r \Delta \theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta \theta.$$

また、

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

定理 11.4. 変数変換 $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ ($(u, v) \in E, (x, y) \in D$) を重積分に施すとき、次の公式が成り立つ。

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{d(\varphi, \psi)}{d(u, v)}(u, v) \right| du dv$$

Proof. E を座標軸に平行な直線で（細かく）分割したものを $E_1 \cup \dots \cup E_n = E$ とし、各 E_j の変数変換による像を重積分の定義における D_j とする。

E_j 内の点 (u_j, v_j) を取り、対応する D_j 内の点を (x_j, y_j) で表せば、上の補題により、

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) |D_j| \doteq \sum_{j=1}^n f(\varphi(u_j, v_j), \psi(u_j, v_j)) \left| \frac{d(\varphi, \psi)}{d(u, v)}(u_j, v_j) \right| |E_j|$$

であるが、極限 $n \rightarrow \infty$ をとることで、この近似式は厳密な等式に移行し、求める公式を得る。 \square

例 11.5. 極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を使う。 $d(x, y)/d(r, \theta) = r$ に注意して、

$$\int_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^a e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

例 11.6. $D = \{(x, y); |x| \leq a, |y| \leq a, x^2 + y^2 \geq a^2\}$ に対して、

$$\int_D e^{-x^2-y^2} dx dy \leq e^{-a^2} |D| = \frac{4-\pi}{4} a^2 e^{-a^2}$$

という評価を使えば、上の例で、 $a \rightarrow \infty$ とすることで、等式

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \pi$$

のより確かな根拠を得る^{*84}。

問 126. $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ のとき、 $\int_D xy dx dy$ を求めよ。

^{*84} 円と長方形を入れ子にした不等式の議論を補えば完璧。

問 127. 4点 $(0, 0), (1, -2), (1, 1), (2, -1)$ を頂点とする平行四辺形とその内部を D とするとき、

$$\int_D \sin(x + y) dx dy$$

を求めよ。

最後に、三重積分の場合の変数変換公式を書き下しておこう。同様のことは、変数の数が4以上でも成り立つ。

xyz 空間内の領域 D を新しい変数 (u, v, w) を使って $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ ($(u, v, w) \in E$) と表すとき、

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y, z) dx dy dz &= \int_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw, \\ \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 11.7. 3次元極座標 $(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) による変数変換の場合、

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

問 128. 3次元極座標変換のヤコビ行列式を求めよ。

例 11.8. 三重積分

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1}{r^a} dx dy dz$$

は、原点で広義積分の形であるが、極座標を使えば、

$$\int_0^1 dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{r^a} = 4\pi \int_0^1 r^{2-a} dr$$

となるので、 $a < 3$ のとき収束し、その値は $4\pi/(3-a)$ となる。

写像の微分

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

の定める写像⁸⁵を $F : (u, v) \mapsto (x, y)$ で表わす。uv-平面内の点 (a, b) の近くでの写像の様子は、1次の近似式

$$\begin{aligned} \varphi(a + \Delta u, b + \Delta v) &\doteq \varphi(a, b) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \\ \psi(a + \Delta u, b + \Delta v) &\doteq \psi(a, b) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \end{aligned}$$

⁸⁵ map あるいは mapping の誤語。点に点を対応させる仕方のこと、「写しかえ」。

を使うと、無限小位置ベクトルの間の一次変換

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

で近似される。ここで、

$$\begin{aligned} \Delta x &= \varphi(a + \Delta u, b + \Delta v) - \varphi(a, b), \\ \Delta y &= \psi(a + \Delta u, b + \Delta v) - \psi(a, b), \end{aligned}$$

とおいた。これを1変数のときの近似式

$$\Delta x = f'(a)\Delta u$$

と比較すれば、写像 F の微分 F' を微分行列

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

(の定める1次変換) であると定義するのが合理的である。 F を変数変換を見たときのヤコビアンが

$$J_F(u, v) \equiv \det(F'(u, v)) = \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)$$

であることに注意。

さらに写像（変数変換）

$$G : (s, t) \mapsto (u, v)$$

を用意して合成写像

$$F \circ G : (s, t) \mapsto (x, y)$$

の微分を計算すると、chain rule から

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}$$

すなわち、

$$(F \circ G)'(s, t) = F'(G(s, t))G'(s, t)$$

であることがわかる（合成写像の微分の公式）。

これから Jacobian についての等式

$$J_{F \circ G}(s, t) = J_F(G(s, t))J_G(s, t)$$

を得る。これは

$$\frac{d(x, y)}{d(s, t)} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(s, t)}$$

と書くと見やすくなる。ただし、次のように置いた。

$$(u, v) = G(s, t), \quad (x, y) = F(u, v).$$

とくに G として F の逆変換をとると、

$$(F \circ G)(s, t) = (s, t)$$

となるので、

$$F'(u, v)G'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$J_{F^{-1}}(x, y) = \frac{1}{J_F(u, v)}$$

であることがわかる。

例 11.9.

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y/x^2 \end{cases}$$

なる逆変換に対して、元の変数変換は、これを x, y について解いて、

$$\begin{cases} x = u^{1/3}v^{1/3}, \\ y = u^{2/3}v^{-1/3} \end{cases}$$

と表わされるので、

$$J_F(u, v) = \frac{1}{3} \frac{1}{v}.$$

一方、

$$J_{F^{-1}}(x, y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -2yx^{-3} & x^{-2} \end{vmatrix} = 3 \frac{y}{x^2}$$

となって、

$$J_F(u, v)J_{F^{-1}}(x, y) = 1$$

が成り立っている。

問 129. 変数変換 $u = xy, v = y/x^2$ を使って解く重積分の計算問題を作れ。

12 微分作用素

関数 f から偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を作り出す操作を偏微分作用素と呼び $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ で表す。また、関数 $h(x, y)$ を掛ける操作 $f(x, y) \Rightarrow h(x, y)f(x, y)$ を掛け算作用素と呼び M_h で表す。あるいは、 M_h と h を同一視して、 $h(x, y)$ そのものを掛け算作用素とみなすことも多い。

偏微分作用素と掛け算作用素の積（合成）と和を何回か繰り返して得られる作用素を**微分作用素** (differential operator *⁸⁶) と呼ぶ。一次変換がベクトルからベクトルを作り出すように、微分作用素は、関数から関数を作り出すものになっている。

例 12.1.

$$(i) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

*⁸⁶ operator の訳語として「作用素」を使うのが数学業界の慣習で、数学以外では「演算子」という。どちらを使うかで出自が明らかとなるのであるが、英語の意味は「操作するもの」である。いずれの場合も、訳語がかたすぎる。原語の感覚だと「働きかけ」といったところ。「微分働き」とか「掛け算働き」とか。

- (ii) $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$.
(iii) $-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y)$.

関数 $h(x, y)$ による掛け算作用素 M_h と微分作用素 $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ に対して、

$$D_x M_h = M_h D_x + M_{h_x} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial}{\partial x} h = h \frac{\partial}{\partial x} + h_x \quad \text{ただし} \quad h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$$

である。これも Leibniz rule というが、その実態は、積の微分の公式である。とくに、 $h_x \neq 0$ のときには、 $M_h D_x \neq D_x M_h$ であるので、微分作用素の積においては交換法則が一般に成り立たないことがわかる。

関数 $f(x, y)$ に変数変換 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ を施して得られる関数を \tilde{f} という記号で表す^{*87}、すなわち

$$\tilde{f}(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

とすると、 $f(x, y)$ に作用する線型作用素 D から、 \tilde{f} に作用する線型作用素 \tilde{D} を

$$\widetilde{Df} = \tilde{D}\tilde{f}$$

によって作りだすことができ、この定義から

$$\begin{aligned} \widetilde{D_1 + D_2} &= \widetilde{D_1} + \widetilde{D_2}, \\ \widetilde{D_1 D_2} &= \widetilde{D_1} \widetilde{D_2} \end{aligned}$$

が従う。

補題 12.2 (微分作用素の変数変換).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} + \frac{\partial y}{\partial u} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)}, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} + \frac{\partial y}{\partial v} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)} \end{aligned}$$

である。これを、チルダを適宜省略して

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y}$$

などと書くことが多い。

とくに、

$$\begin{aligned} \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

となって (J は Jacobian を表す)、微分作用素 D に対して、 \tilde{D} もまた微分作用素であることがわかる。

^{*87} 数学では、関数を「点に数を対応させる規則」と考へるので、 \tilde{f} と f とは、本来明確に区別されるべきものである。一方、自然科学方面では、同じ関数の記号で観測量そのものを表すことも多く、そこでは、座標系のとり方に依らない物理量などを表し、 f を区別するかわりに、変数を表す記号に特別の意味をもたせて、 $f(u, v) = f(x, y)$ といった書き方をするので、注意が必要である。

Proof. 最初の 2 つは、 \tilde{f} に働くとわかるように、chain rule そのものである。

あとの 2 つは、これを $\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}$ と $\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}$ について解いたもので、具体的には次のように（チルダを省いた形で）計算する。 $\partial/\partial x$ について解こうと思ったら、 $\partial y/\partial v, \partial y/\partial u$ を左から掛け算作用させた等式

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

を辺ごとに引くと、 $\partial/\partial y$ が消去され

$$\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial x} = J \frac{\partial}{\partial x}$$

を得る。これに $1/J$ を掛け算作用素として左から掛けると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

がわかる。 $\partial/\partial y$ についても同様。 \square

注意 21. 上では素朴に連立一次方程式を解いたのであるが、組織的に計算するためには、出発点の等式を

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

と書き表わし（右辺の t は転置行列を表わす）、 ${}^t \begin{pmatrix} \partial(x, y) \\ \partial(u, v) \end{pmatrix}$ の逆行列（関数）を左から掛けることで

$${}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

という表示が得られる。

例 12.3. 一次変換 $x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v$ の場合、 $J = \alpha\delta - \beta\gamma$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \beta \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

を $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ について素朴に解けば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(\delta \frac{\partial}{\partial u} - \gamma \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(-\beta \frac{\partial}{\partial u} + \alpha \frac{\partial}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

を得る。

例 12.4. 2 次元極座標変換では、

$$\begin{aligned}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

がわかる（左辺でチルダを省略した）。

問 130. 3次元極座標変換

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

に対してラプラスの微分作用素 (Laplacian)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はどのように変換されるか。計算は少し手間ではあるが、偏微分計算のよい練習になる。

ヒント：3次元極座標変換を円筒座標変換の合成として計算すると楽である。

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = r \cos \theta, \\ \rho = r \sin \theta, \\ \varphi = \varphi \end{cases} .$$

前段から、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

これに、後段から得られる

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

を代入するとよい。

例 12.5. 微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

に対して変数変換

$$u = t + x, \quad v = t - x$$

を施せば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{f} = 4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}.$$

これを使って、関数 $f(t, x)$ に対する方程式（波動方程式）

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0$$

の解を求めてみよう。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0 \iff 4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \tilde{f} = 0$$

より、

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = g(v).$$

そこで、 $g(v)$ の原始関数を $G(v)$ で表せば、

$$\frac{\partial}{\partial v}(\tilde{f} - G) = 0$$

となり、 $\tilde{f} - G = F(u)$, すなわち、

$$f(x, y) = \tilde{f}(u, v) = F(t + x) + G(t - x)$$

という形が得られる（波動方程式の一般解）。

問 131. $F(t + x)$ は x 軸の負の方向へ進行する波を、 $G(t - x)$ は正の方向に進行する波を表す。これを確かめよ。

13 ガンマ関数

オイラーが発見した階乗の積分表示⁸⁸

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

に関連して、**ガンマ関数** (gamma function)

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

とベータ関数 (beta function)

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx, \quad s > 0, t > 0$$

を導入する⁸⁹。この2つの関数の関係について調べてみよう。

まず、ベータ関数の定義式で変数変換 $y = 1 - x$ を行うと、

$$B(s, t) = B(t, s).$$

つぎに変数変換 $x = \sin^2 \theta$ を施すと、

$$B(s, t) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2s-1} \theta \sin^{2t-1} \theta d\theta.$$

一方、ガンマ関数の定義式で変数変換 $x = r^2$ を行うと

$$\Gamma(t) = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2t-1} dr.$$

これから、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ がわかる（ガウス積分の公式）。

問 132. 関係式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を繰り返し使うことで、 $\Gamma(n/2)$ の値を具体的に表せ。

⁸⁸ 積分の変数を $s = e^{-x}$ に変えた $n! = \int_0^1 (-\log s)^n ds$ がオイラーの与えた元々の表示である。

⁸⁹ 指示されたパラメータの範囲において、広義積分が収束することに注意。パラメータを 1 だけずらす理由は、定義域を $t > 0$ としたいためであろうか。余計なことはせずに、 $t! = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx$ でよかったのであるが。

命題 13.1. 次の等式が成り立つ。

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

Proof.

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2s-1} dx, \quad \Gamma(t) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2t-1} dy$$

を掛けて

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2s-1} y^{2t-1} dxdy.$$

ここで極座標変換を施すと、

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} r^{2(s+t)-1} \cos^{2s-1} \theta \sin^{2t-1} \theta dr d\theta \\ &= \Gamma(s+t)B(s, t). \end{aligned}$$

□

例 13.2. 証明の途中の計算から、

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+(m+n)/2)}.$$

ここで、

$$\Gamma(l + 1/2) = (l - 1/2)(l - 3/2) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

に注意すると、 m, n の偶奇で場合分けが必要になるが、いつでも値を計算できる。例えば、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin^6 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{5!} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{3}{2^9} \pi. \end{aligned}$$

問 133. 微分 $(\cos \theta \sin^{n-1} \theta)'$ を利用して、定積分

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$$

のみたす漸化式を導き、 I_n の値を具体的に表せ。その結果を、ガンマ関数を使った表示式と同定せよ。

ガンマ関数あるいは階乗の増大度については Stirling の公式（付録 B）

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$$

が成り立つ。ガンマ関数においては、他にも様々な角度から詳しい研究がなされていて、今もなお興味が尽きない対象となっている。

14 多変数の極値問題

まず、1変数の場合の復習から。関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値 (extremum) をもつとき、 $f'(a) = 0$ でなければならない。そして、このとき、2次の近似式

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

を使えば、 $f''(a) > 0$ のとき極小、 $f''(a) < 0$ のとき極大であることがわかる。 $f''(a) = 0$ のときには3次以上の近似式を調べることになる。

同様のことを2変数関数 $f(x, y)$ についても考えたい。まず、 $f(x, y)$ が (a, b) で極値をもてば、 x の関数 $f(x, b)$, y の関数 $f(a, y)$ それぞれが極値をとることから、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

このような点 (a, b) は、関数 f の停留点 (stationary point)^{*90} と呼ばれる。

例 14.1.

- (i) 関数 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の停留点は、 $f_x = 3x^2 - 3y = 0 = f_y = -3x + 3y^2$ を連立させて解いて、 $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ の2点である。
- (ii) 関数 $f(x, y) = x^n y$ ($n = 1, 2, \dots$) の停留点は、 $f_x = nx^{n-1}y = 0 = x^n$ を連立させて解くと、 $n = 1$ のときは $(0, 0)$ だけである一方で、 $n \geq 2$ のときは y 軸上のすべての点 $(0, y)$ となり、無数にある。

問 134. $f(x, y) = (x + y)^m - ax^n y^n$ (m, n は自然数で $a \neq 0$) の停留点を求めよ。

定理 14.2. 関数 $f(x, y)$ は、二階までの偏導関数が存在し連続であるとすると、 h, k が小さいとき二次の近似式

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &\doteq f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 1変数関数 $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ に対する等式

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \int_0^1 F''(t)(1-t) dt$$

を具体的に書いてみる。そのために、 F の微分を chain rule により計算する。

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k \\ F''(t) &= f_{xx}(a + ht, b + kt)h^2 + 2f_{xy}(a + ht, b + kt)hk + f_{yy}(a + ht, b + kt)k^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$F(1) = f(a + h, b + k), \quad F(0) = f(a, b), \quad F'(0) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

^{*90} 他に、特異点 (singular point)、臨界点 (critical point) という言い方もある。

および h, k が小さいことに由来する近似式

$$\begin{aligned} f_{xx}(a + ht, b + kt) &\doteq f_{xx}(a, b), \\ f_{xy}(a + ht, b + kt) &\doteq f_{xy}(a, b), \\ f_{yy}(a + ht, b + kt) &\doteq f_{yy}(a, b) \end{aligned}$$

を代入することで⁹¹、求める近似式を得る。 \square

問 135. 微分作用素

$$D = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}$$

を使うと、

$$F^{(n)}(t) = (D^n f)(a + ht, b + kt)$$

と書ける。これを確かめよ。

問 136. 近似式

$$x(t) \doteq x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2, \quad y(t) \doteq y(0) + y'(0)t + y''(0)t^2/2$$

と上の定理を組み合わせることで、合成関数 $f(x(t), y(t))$ の $t = 0$ における 2 次近似式を導け。

系 14.3. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点では、

$$f(a + h, b + k) \doteq f(a, b) + \frac{1}{2} (h \quad k) H_f(a, b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

のようになる。ここで、ヘッセ行列 (Hessian) $H_f(a, b)$ を

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

で導入した⁹²。

問 137. 2 次関数 $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ が、 $AC - B^2 \neq 0$ であるとき、停留点が丁度一つ存在することを示せ。また、その停留点を (a, b) とするとき、

$$F(x, y) = F(a, b) + A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2$$

であること（2 次近似式が、正確に成り立つこと）を確かめよ。

例 14.4. 関数 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ が $(0, 0)$ で極値を持つかどうかについて調べる。

Proof. 線型代数における基本結果である二次形式の理論の特別な場合であるが、二次形式そのものがしばしば省略の対象になるということもあり、少し詳しく述べてみよう。

最初に、素朴な方法で。 $y \neq 0$ のとき、

$$f(x, y) = y^2(a(x/y)^2 + 2b(x/y) + c)$$

と書けるので、2 次式 $at^2 + 2bt + c$ の符号の様子が問題。小さい x, y を考えても、比 $t = x/y$ は全ての実数が出てくることに注意。この 2 次式の符号が定まらないとき、すなわち判別式 $b^2 - ac > 0$ のときは、もとの

⁹¹ 微分と異なり、0 に近い関数を積分したものは 0 に近いことに注意。

⁹² 行列らしく大文字で表したが、 f の二階微分でもあるので、 $f''(a, b)$ と書いててもよい。これは、二階の対称テンソルと呼ばれるものになっている。

関数 $f(x, y)$ の符号は、 $(0, 0)$ の近くで一定でなくなるので、極値ではない。一方、判別式 $b^2 - ac < 0$ の時には、符号はつねに一定で、従って $a > 0, a < 0$ に応じて、関数 $f(x, y)$ は原点で極小、極大になる。

判別式 $b^2 - ac = 0$ の時には、 $at^2 + 2bt + c = a(t - \lambda)^2$ と書けるので、

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - \lambda y)^2$$

となって、 $z = f(x, y)$ は放物線を平行移動して得られる曲面を表す。

二つ目の方法として、極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

を使うと

$$f(x, y) = r^2(a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta).$$

そこで、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \cos 2\theta + b \sin 2\theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \sqrt{(a-c)^2/4 + b^2} \sin(2\theta + \alpha) \end{aligned}$$

を書き直すと、 $g(\theta)$ の最大値・最小値は

$$\frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}, \quad \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

また、これらの方向を与える角をそれぞれ θ_+, θ_- とおけば θ_+ と θ_- の差は $\pi/2$ となって直交する。

最後に、 x, y の座標軸を角度 θ だけ回転させて得られる新座標 X, Y を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

で導入すれば、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \cos 2\theta + b \sin 2\theta \right) X^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{c-a}{2} \sin 2\theta + b \cos 2\theta \right) XY \\ &\quad + \left(\frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2} \cos 2\theta - b \sin 2\theta \right) Y^2. \end{aligned}$$

そこで、

$$b \cos 2\theta + \frac{a-c}{2} \sin 2\theta = 0$$

であるように θ を選べば、

$$(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2/4}} \left(\frac{a-c}{2}, b \right)$$

となって、

$$f(x, y) = \lambda_{\pm} X^2 + \lambda_{\mp} Y^2, \quad \lambda_{\pm} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{b^2 + \left(\frac{a-c}{2} \right)^2}$$

を得る。したがって、(i) $\lambda_+ \lambda_- = ac - b^2 < 0$ のときは、原点で極値をとらず、(ii) $\lambda_+ \lambda_- = ac - b^2 \geq 0$ のときには、 $\lambda_+ + \lambda_- = a + c$ の符号に応じて、原点での値が最大または最小となる。

以上の計算はまた、

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (X \ Y) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と比較するとわかるように、行列の対角化

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} & 0 \\ 0 & \lambda_{\mp} \end{pmatrix}$$

を行ったことにもなっていることに注意。 \square

問 138. $\lambda_+ \lambda_- = ac - b^2$ に注意して、 $ac - b^2 > 0$ のとき、次を示せ。

$$a > 0 \iff c > 0 \iff \lambda_{\pm} > 0.$$

定理 14.5. 関数 $f(x, y)$ の停留点 (a, b) において、

- (i) $\det(H_f(a, b)) > 0$ ならば、 $f_{xx}(a, b)$ の正負に応じて、極小または極大になる。
- (ii) $\det(H_f(a, b)) < 0$ ならば、極値にならない ((a, b) を鞍点^{*93}とよぶ)。
- (iii) $\det(H_f(a, b)) = 0$ のときは、色々な場合がある。

例 14.6. 上の例題を使って、点 $(0, 0)$ の附近での様子を図解。

例 14.7. (iii) の場合に、実際、いろいろなことが起こること。 $f(x, y) \doteq (x - y)^2$ となるときは、 $u = x - y$, $v = x + y$ なる変数を使うと、

$$f(x, y) = u^2 + \text{3 次以上の項}$$

となって、

$$f(x, y) = u^2 + v^2 u, \quad f(x, y) = u^2 + v^3$$

等、いろいろな場合が出てくる。

問 139. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値について調べる。

問 140. $f(x, y) = x^2 + 2x^2y - xy^2$ の極値について調べよ。

3 変数（以上）の場合も 2 次の近似式は、同じように計算して停留点のまわりで、

$$f(a + x, b + y, c + z) \doteq f(a, b, c) + \frac{1}{2} (x \ y \ z) H_f(a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$H_f(a, b, c) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b, c) & f_{xy}(a, b, c) & f_{xz}(a, b, c) \\ f_{yx}(a, b, c) & f_{yy}(a, b, c) & f_{yz}(a, b, c) \\ f_{zx}(a, b, c) & f_{zy}(a, b, c) & f_{zz}(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

偏微分の結果が微分する順序によらないことから、Hessian $H_f(a, b, c)$ は対称行列であること、したがってその固有値は全て実数であることに注意。

定理 14.8. 関数 $f(x, y, z)$ の停留点 (a, b, c) において、

^{*93} 英語で、saddle point という。曲面 $z = x^2 - y^2$ の形状に由来する。

- (i) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ の固有値が全て正ならば、 $f(x, y, z)$ は (a, b, c) で極小。
- (ii) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ の固有値が全て負ならば、 $f(x, y, z)$ は (a, b, c) で極大。
- (iii) ヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ が 正の固有値も負の固有値も両方もつときは、極値にならない^{*94}。
- (iv) 上記以外の場合、すなわちヘッセ行列 $H_f(a, b, c)$ が半定値で 0 を固有値を持つときは、いろいろな場合がある。

例 14.9. 3変数の関数

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2}$$

の極大・極小について調べる。

Proof.

$$f_x = (1 - 2x(x + y + z))e^{-x^2-y^2-z^2}$$

であるから、 $f_x = f_y = f_z = 0$ となるのは、 $x = y = z$ のときで、 $1 - 6x^2 = 0$ 、すなわち、 $x = \pm 1/\sqrt{6}$ 。このとき、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2(2x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2x f_x, \\ f_{xy} &= -2xe^{-x^2-y^2-z^2} - 2y f_x \end{aligned}$$

であるから、

$$H_f = -2xe^{-x^2-y^2-z^2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -1 & t-4 & -1 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3)^2(t-6)$$

であるから、 $(x, y, z) = (1, 1, 1)/\sqrt{6}$ のときは極大、 $(x, y, z) = (-1, -1, -1)/\sqrt{6}$ のときは極小。

無限遠点で、 $f \rightarrow 0$ であるから、実は、これらはそれぞれ、最大値、最小値になっている。□

問 141. 関数 $f(x, y) = (1 - x - y)e^{-x^2-y^2}$ の極値について調べよ。

注意 22. 3変数以上の場合に、固有値を求めて上の判定条件を適用するのは、特殊な場合を除いて現実的な方法ではない。(固有方程式を解くのが一般的には難しい。) 必要な情報は、固有値そのものではなくその符号なので、二次形式の正則行列による標準形の存在を示す際に用いるアルゴリズム（付録参照）を活用すべきである。

問 142. LogSumExp 関数 $f(x_1, \dots, x_n) = \log(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ は $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の凸関数である。

最後に一般の多変数の場合の結果をまとめとして書き留めておこう。多変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の関数 $f(x)$ に対して、その微分を

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

で定めると、点 $p = (p_1, \dots, p_n)$ の付近での一次近似式は、微小ベクトル $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ を使って

$$f(p + \Delta x) \doteq f(p) + f'(p)^t \Delta x$$

と表される。ここで、 ${}^t \Delta$ は横ベクトル Δx を縦にした転置を表わす。

^{*94} このうち、すべての固有値が 0 でない場合を鞍点という。

さらに、関数 $f(x)$ に変数変換 $x = \varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ を施した新変数 $u = (u_1, \dots, u_n)$ の関数 $\tilde{f}(u) = f(\varphi(u))$ の微分は、 φ の微分

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} \partial\varphi_1/\partial u_1 & \dots & \partial\varphi_1/\partial u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial\varphi_n/\partial u_1 & \dots & \partial\varphi_n/\partial u_n \end{pmatrix}$$

に chain rule を合わせることで、横ベクトルと行列の積を使って

$$\tilde{f}'(u) = f'(\varphi(u))\varphi'(u)$$

のように表される^{*95}。

次に、 f の二階微分 f'' を二階偏微分を成分とする対称行列により

$$f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

で定めると、二次近似式は

$$f(p + \Delta x) \doteq f(p) + f'(p)^t \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x f''(p) \Delta x$$

のように、 Δx の二次式で表される。

また、 \tilde{f} の二階微分は、chain rule をくり返すことで、

$$\tilde{f}''(u) = {}^t(\varphi'(u)) f''(\varphi(u)) \varphi'(u) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(u)) \varphi_j''(u)$$

と表される。

とくに、 $p = \varphi(a)$ が f の停留点であることと $a = (a_1, \dots, a_n)$ が \tilde{f} の停留点であることは同値であり、このとき、ヘッセ行列は

$$H_{\tilde{f}}(a) = {}^t(\varphi'(a)) H_f(p) \varphi'(a)$$

と変換され、固有値そのものは変わっても、その符号の情報は変化しないことがわかる。(停留点でなければ、変数変換により二階微分の符号の情報も変わり、 $f''(p) \neq 0$ でも $\tilde{f}''(a) = 0$ といったことが起こる。)

注意 23. 最近は、二階微分 f'' そのものを Hessian matrix と呼ぶ風潮もあるが、本来の Hessian は変数変換(座標変換)で安定な性質を記述するためのもので、停留点に限定して使うのが正しい用法である。

15 等高線と陰関数

関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対して、方程式 $f(x_1, \dots, x_n) = h$ (h は定数) を満たす点 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の集まりを等位集合 (level set) という。2変数の場合は、等位線 (level curve) ともよばれ、曲面 $z = f(x, y)$ で表される地形の標高が h の地点を結んだ等高線 (contour line) を表している。また、3変数の場合は空間内の曲面を表すことから等位面 (level surface) と呼ばれる。

レベルを表すパラメータ h とともに等位集合がどのように変化するか調べることは、多変数関数を解析する上での基本である。前節で見た極値の判定も、等高線と結びつけることでより詳しい情報が得られる。なお、レベル h を考える範囲は、関数 f の値域であることに注意。

^{*95} 微分形式で表せば、 $d(f(\varphi(u))) = df(\varphi(u))\varphi'(u)du$ という氣分。

例 15.1. 一次式で表わされる関数 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) の取り得る値は実数全体で、等位線は、ベクトル (α, β) と直交する直線群を表す。

例 15.2. 関数 $f(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2$ について考える。

- (i) $\lambda > 0, \mu > 0$ のとき、取り得るレベルの範囲は、 $h \geq 0$ で、原点 $(h = 0)$ を中心に h の増加とともに、橜円が同心円状に大きくなっていく。
- (ii) $\lambda < 0, \mu < 0$ のとき、取り得るレベルの範囲は、 $h \leq 0$ で、原点 $(h = 0)$ を中心に h の減少とともに、橜円が同心円状に大きくなっていく。
- (iii) $\lambda\mu < 0$ のとき、取り得るレベルの範囲は実数全体で、 $h \neq 0$ は、原点で交差する 2 直線 $(h = 0)$ を漸近線とする双曲線群を表し、 $h \rightarrow 0$ とすると、その 2 直線に近づく。

定義 15.3. 等位集合内の点で、関数 f の停留点になっているものを、その等位集合の**特異点** (singular point) という。特異点でない点を**正則点** (regular point) という。等高線 $f(x, y) = h$ 上の点 (a, b) についてであれば、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となるものが特異点である。

定理 15.4.

- (i) 正則点 (a, b) の付近で、等高線 $f(x, y) = h$ は 1 本のなめらかな曲線を表す。
- (ii) 特異点 (a, b) において、 $\det(H_f(a, b)) > 0$ ならば、関数 f は、 (a, b) で極大か極小である。極大の場合、 (a, b) の付近での等高線 $f(x, y) = h$ は、 $h = f(a, b)$ ならば (a, b) ただ一点であり、 $h < f(a, b)$ ならば (a, b) を囲む閉曲線を表し、 $h > f(a, b)$ となる等高線は、 (a, b) の近くには存在しない。極小の場合も、不等式の向きが反対になるだけで、同様のことが成り立つ。
- (iii) 特異点 (a, b) において、 $\det(H_f(a, b)) < 0$ ならば、 (a, b) は f の鞍点であり、等高線 $f(x, y) = h$ は、 $h = f(a, b)$ ならば、点 (a, b) で交差する 2 本のなめらかな曲線を表し、 $h \neq f(a, b)$ ならばこの 2 曲線で区切られた双曲線状の曲線を表す。

Proof. (i) 1 次の近似式

$$f(x, y) = h + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

より、正則点の近くで $f(x, y) = h$ は近似的に直線

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

を表す。

(ii) $\det(H_f(a, b)) > 0$ のときは、点 (a, b) で極値をとるから、 $f(x, y) = h = f(a, b)$ となる (x, y) は、 (a, b) しかない。

$\det(H_f(a, b)) < 0$ のときは、 $z = f(x, y)$ の曲面は、 (a, b) で鞍点になっているので、等高線は 2 本の曲線の交わりになっている。□

系 15.5. (i) でとくに $f_y(a, b) \neq 0$ ならば、等高線を表す方程式 $f(x, y) = h$ を y についてなめらかに解くことができる。すなわち、微分できる関数 $y = \varphi(x)$ で、

$$f(x, \varphi(x)) = h, \quad b = \varphi(a)$$

となるものが、 $x = a$ の近くで一つだけ存在する。これを方程式 $f(x, y) = h$ の定める**陰関数** (implicit function) と呼ぶ。

同様に、 $f_x(a, b) \neq 0$ ならば、

$$f(\psi(y), y) = h, \quad a = \psi(b)$$

となるなめらかな関数 ψ が存在する。

例 15.6. 関数 $f(x, y) = y^2/2 - \cos x$ の等高線の様子を調べてみよう。(振り子の運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$ の位置エネルギーが $-\cos x$ である。)

Proof. 等高線の方程式

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos x = h$$

を y について解くと、

$$y = \pm\sqrt{2(h + \cos x)}.$$

h の大きさで場合を分ける。

- (i) $h < -1$ ならば、解は存在しない ($f(x, y) \geq -1$)。
- (ii) $h = -1$ となるのは、 $\cos x = 1$ のときで、そのとき $y = 0$ であるから、

$$(x, y) = (2\pi n, 0) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

- (iii) $-1 < h < 1$ ならば、 $h = -\cos \gamma$ ($0 < \gamma < \pi$) と表すことができて、 $h + \cos x \geq 0$ となる x の範囲は、 $[-\gamma, \gamma]$ およびこれを $2\pi n$ だけ平行移動したもの。このときの曲線の様子を描いてみると、下図のようになる。 $(y^2$ と y のグラフを対比させて。)
- (iv) $h = 1$ のときは、 $1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$ となるので、

$$y = \pm 2 \cos \frac{x}{2}.$$

- (v) $h > 1$ のときは、 $h + \cos x \geq h - 1 > 0$ となるので、 x の範囲には制限がつかず、曲線は、下図のようになる。

□

ここで、 $f(x, y)$ の停留点を調べてみると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\sin x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (\pi n, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

で、各停留点でのヘッセ行列は、

$$H_f(\pi n, 0) = \begin{pmatrix} \cos \pi n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって、 $(\pi n, 0)$ は、(i) n が偶数のとき、極小点(実は最小点)、(ii) n が奇数のとき、鞍点、であることがわかる。

問 143. 等高線 $x^2 + y - y^3/3 = h$ の変化の様子を特異点に注意して調べる。

例 15.7. 曲線 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ の特異点である $(0, 0)$ を通る等高線(デカルトの葉⁹⁶という)の様子を詳しく調べてみよう。

極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を代入すると、 $r = 3 \cos \theta \sin \theta / (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$ となる極表示を得るので、 $r > 0$ となる θ の範囲は、 $\cos \theta \sin \theta$ と $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ の符号から、 $-\pi/2 < \theta < -\pi/4$, $0 < \theta < \pi/2$, $3\pi/4 < \theta < \pi$ となり、端の角度では

$$r(0) = r(\pm \pi/2) = r(\pm \pi) = 0, \quad r(-\pi/4 - 0) = \infty = r(3\pi/4 + 0)$$

⁹⁶ The folium of Descartes の訳。folium の訳としては、葉線とか正葉線というのもあるが、漢訳せず、葉(は)でよかろう。

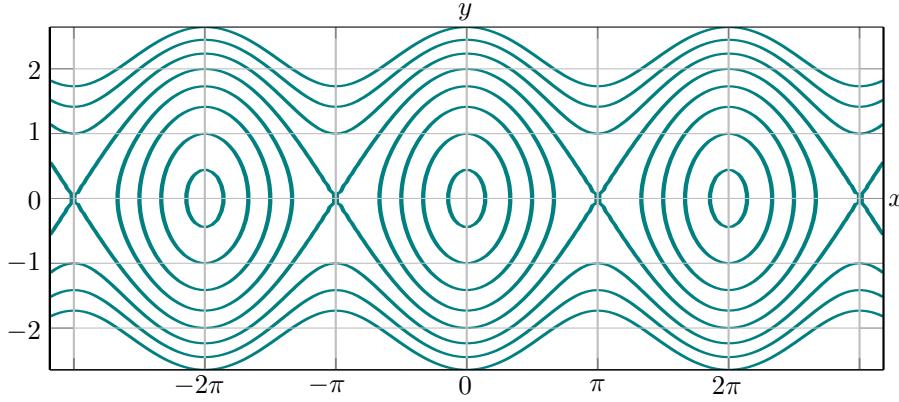


図 14 Pendulum Energy

となる。さらに、 r の増減を詳しく調べると、 $0 < \theta < \pi/4$ で增加 $\pi/4 < \theta < \pi/2$ で減少し、 $\theta = \pi/4$ で極大値 $r(\pi/4) = 3/\sqrt{2}$ を取り、 $-\pi/2 < \theta < -\pi/4$ で増加 $3\pi/4 < \theta < \pi$ で減少することがわかる。 $r = 0$ の付近では、 $\theta = +0$ と $\theta = \pi - 0$ が滑らかにつながり、 $3y = x^2$ で、 $\theta = \pi/2 - 0$ と $\theta = -\pi/2 + 0$ が滑らかにつながり、 $3x = y^2$ で、それぞれ近似される。

同様のことは、有理パラメータ $t = \tan \theta$ ($y = tx$) を使った $x = 3t/(1+t^3)$, $y = 3t^2/(1+t^3)$ という表示からもわかる。

さらに、点 $(a, b) = (3t/(1+t^3), 3t^2/(1+t^3))$ ($t \neq -1$) を通る接線の方程式が

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0 \iff \left(\frac{1+t^3}{3t} - \frac{1}{t} \right) x + \left(\frac{1+t^3}{3t^2} - t \right) y + 1 = 0$$

で与えられ、 $t \rightarrow -1$ とすると、直線 $x + y + 1 = 0$ に近づくことから、これがデカルトの葉の漸近線であり、 $x^3 - 3xy + y^3 + 1 = (x + y + 1)(x^2 + y^2 - xy - x - y - 1)$ であることから、この漸近線自体が極小値 $h = -1$ と同じ高さの等高線となることもわかる。(図 15 では色温度が高いほど標高も高い。)

問 144. 関数 $x^3 - 3xy + y^3$ の特異点のまわりでの等高線の様子を調べ、それをもとに等高線の全体像を推測せよ。またデカルトの葉で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

正則点における考察は、3変数以上でもそのまま成り立つ。例えば、3変数の関数 $f(x, y, z)$ に対して、

$$(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)) \neq (0, 0, 0)$$

となる点を**正則点**と言ふことにすれば、正則点 (a, b, c) の近くで、方程式

$$f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

は滑らかな曲面を表し、もし $f_x(a, b, c) \neq 0$ ならば、 (b, c) の近くで定義されたなめらかな関数 $\varphi(y, z)$ で、

$$f(\varphi(y, z), y, z) = f(a, b, c), \quad \varphi(b, c) = a$$

となるものが、一つだけ存在する。最初の式は、 y, z についての恒等式であるので、 y について偏微分すると

$$f_x(\varphi(y, z), y, z) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) + f_y(\varphi(y, z), y, z) = 0,$$

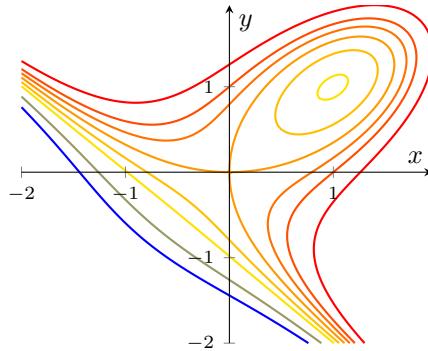


図 15 The folium of Descartes

すなわち、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = -\frac{f_y(\varphi(y, z), y, z)}{f_x(\varphi(y, z), y, z)}$$

を得る。この関係式は、

$$x = \varphi(y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z$$

と略記することで、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

のように表すこともある。

問 145. $f(x, y, z) = 0$ で定められる陰関数について、

$$f_x(x, y, z)f_y(x, y, z)f_z(x, y, z) \neq 0$$

となる点で、次が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

二変数関数のもつ情報を視覚化する手段として、等高線の方法については既に説明したが、日常的に接する機会が多いものに天気図の等圧線がある。地表上の同じ大気圧の地点を結んで得られる曲線群のことである。3次元的状況だと等面を考えることになる。いずれの場合も、等圧線の形状と風向風速との間に密接な関連がある。最も単純なモデルだと、

- (i) 風は、高圧部から低圧部へ等圧線に直交する形で吹く、
- (ii) 等圧線の間隔が密であればあるほど、強い風が吹く。

現実の大気の動きは、地球の自転の影響も含めて極めて複雑ではあるが、この単純化したモデルで得られる風向・風速をベクトルで表すことにしよう。この風のベクトルは、地点ごとに大きさも向きも変化するので、一種の関数になっている。このようなベクトルが「値」として出現する関数のことをベクトル値関数とかベクトル場 (vector field) と呼ぶ。他に、電場 (電界) とか磁場 (磁界) というのもベクトル場の例。

ベクトルであるから、基底を選んでおくことで、成分を使って表せるのであるが、ベクトルの成分表示と点の座標表示は、本来区別されるべきものである。混乱を避けるためには、ベクトル場を表す際に、

$(F(x, y), G(x, y))$ という成分表示ではなく、基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ を明示した

$$F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$$

といった書き方をするとよい。

以上を背景に、点のデカルト座標 (x, y, z) を変数とする関数 $f(x, y, z)$ から作られるベクトル場

$$(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{k}$$

を f の勾配ベクトル場^{*97}(gradient vector field^{*98}) とよび、 $\text{grad } f$ あるいは ∇f という記号で表す^{*99}。勾配ベクトル場は、次のような幾何学的意味をもつ。

- (i) 勾配ベクトルは、等位面に直交し f の値の小さい方から大きい方を指している。
- (ii) 勾配ベクトルの大きさは、等位面の間隔が密であればあるほど大きい（等位面の間隔の逆数に比例する）。

このことを確かめてみよう。(i) は、一次近似式・接平面のところで扱った内容の言い換えである。(ii) を見るために、点 (a, b, c) を通る等位面を $f(x, y, z) = h$ とし、 (a, b, c) に近い点 $(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z)$ を通る等位面を $f(x, y, z) = h + \Delta h$ とする。このとき、各点の付近での等位面は、 $\text{grad } f(a, b, c)$ を法線とする平面で近似されるので、その間の距離 δ は、変位ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ と単位法線ベクトル $\text{grad } f(a, b, c)/|\text{grad } f(a, b, c)|$ との内積

$$\frac{1}{|\text{grad } f(a, b, c)|} (f_x(a, b, c)\Delta x + f_y(a, b, c)\Delta y + f_z(a, b, c)\Delta z) \doteq \frac{\Delta h}{|\text{grad } f(a, b, c)|}$$

で与えられる。等高線の密度は、 $\Delta h/\delta$ に比例するので、 $|\text{grad } f(a, b, c)|$ にも比例していることがわかる。

Maxwell's thermodynamic surface

16 条件付極値

拘束条件 (constraint) $\varphi(x, y) = 0$ のもとで、関数 $f(x, y)$ の極値について考える。これは、関数 f を曲線 $C = \{\varphi(x, y) = 0\}$ に制限したときの極値問題といつてもよい。 C 上の正則点 (a, b) で f が極値をとるとしよう。関数 f の (a, b) の付近での等高線の様子を描いてみる。もし、 (a, b) が f の正則点でもあれば、 f の勾配ベクトル $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ 方向に f は増加する。したがって、 C の点 (a, b) での接線方向の成分が消えなければ、 f は (a, b) で停留状態にはならない。すなわち、極値をとるためにには、勾配ベクトルの接線方向の成分が消える必要がある。この条件は、勾配ベクトルが、 C の法線方向と平行であるといいかえることができる。

$$(f_x, f_y) = \lambda(\varphi_x, \varphi_y)$$

となるような実数 λ (ラグランジュ乗数という) の存在がわかる。この最後の形は、 (a, b) が f の特異点である場合にも $\lambda = 0$ という形で成立つ。

まとめると、拘束条件下での極値を与える点 $(a, b) \in C$ が存在するならば、それは(i) $\varphi_x = \varphi_y = 0$ をみたすか、(ii) 上のラグランジュ乗数の式をみたす。いずれの場合も、拘束条件 $\varphi = 0$ が付け加わるので、前者の

^{*97} 勾配ベクトルは、ベクトル解析で常用される用語であるが、これは f の微分の特別な場合（変数が点のデカルト座標であるという）であるので、 f' あるいは $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ のように表すこともある。

^{*98} gradient の発音に注意。

^{*99} ∇ は、ナブラ (nabla) と呼ぶ。

場合は、2つの未知数 a, b に対して3つの方程式をみたす必要があり、後者の場合でも、3つの未知数 a, b, λ に対して3つの方程式が課せられるので、解が求まるものと期待される。

同様のことは、変数が多くなっても成り立つ。例えば、拘束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ のもとでの、関数 $f(x, y, z)$ の極値問題であれば、関数 f を曲面 $S = \{\varphi(x, y, z) = 0\}$ に制限したときの極値問題を扱うことになる。 S 上の正則点 (a, b, c) で f は極値をとるとしよう。 (a, b, c) を通る曲面 S 上の曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ を考えると、

$$f_x(a, b, c) \frac{dx}{dt} + f_y(a, b, c) \frac{dy}{dt} + f_z(a, b, c) \frac{dz}{dt} = 0.$$

これから、ベクトル $(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c))$ は、 S の (a, b, c) における全ての接ベクトルに直交する。したがって、このベクトルは曲面の法線ベクトル $(\varphi_x(a, b, c), \varphi_y(a, b, c), \varphi_z(a, b, c))$ に比例する。すなわち、

$$(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)) = \lambda(\varphi_x(a, b, c), \varphi_y(a, b, c), \varphi_z(a, b, c))$$

となる実数 λ が存在する。これと、拘束条件

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

を連立させることで、 a, b, c (および λ) を求める方法がラグランジュ乗数法 (the method of Lagrange multipliers) と呼ばれるものである。この方法は、極値をもつ可能性のある点を見つける際に威力を発揮するのであるが、他にも可能性がある点がないかどうか、また実際にそれが極値かどうかの判断の材料を与えるものではないことに注意しよう。したがって、 S が何らかの境界点（無限遠点も境界点と思う）をもつ場合には、そこでの関数 f の値と、上で問題にした特異点あるいは停留点での値とを比較して、最大・最小の判断を下すことになる。(付録の定理 C.3 参照。)

なお、拘束条件下の極値の2次判定方法については、付録 H を参照。

結果をまとめると、

定理 16.1. 拘束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ の下で、関数 $f(x, y, z)$ が (a, b, c) で極値を取れば、

- (i) $(f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)) = \lambda(\varphi_x(a, b, c), \varphi_y(a, b, c), \varphi_z(a, b, c))$ かつ $\varphi(a, b, c) = 0$ であるような実数 λ が存在する、
- (ii) 点 (a, b, c) は、曲面 $\varphi(a, b, c) = 0$ の特異点、すなわち $(\varphi_x(a, b, c), \varphi_y(a, b, c), \varphi_z(a, b, c)) = 0$ かつ $\varphi(a, b, c) = 0$ である、

のいずれかが成り立つ。

例 16.2. 条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の下で、 xyz の最大値と最小値を求めてみよう。

まず、拘束条件が球面を表しており、特異点も境界点ももたないことに注意する。したがって、ラグランジュ乗数法で得られる停留点の中に最大点・最小点が見つかる。 $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 2(x, y, z)$ であるから、

$$f_x = yz = 2\lambda x, f_y = xz = 2\lambda y, f_z = xy = 2\lambda z$$

と条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をみたす (x, y, z) を求めると。

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

または

$$(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1)$$

となって、このうち、 $xyz = (1/\sqrt{3})^3$ となる点で最大値を、 $xyz = -(1/\sqrt{3})^3$ となる点で最小値をとる。ちなみに $xyz = 0$ となる点は、鞍点に相当する。

問 146. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で、 $x^m y^n$ の最大値・最小値を求めよ。ただし、 m, n は自然数とする。

問 147. 三角形 ABC の 3 つの角 A, B, C に対して、 $\cos A + \cos B + \cos C$ の最大値および最小値を求めよ。

問 148. 条件 $x_1 + \dots + x_n = 0$ の下で、 $\cos x_1 + \dots + \cos x_n$ の最大値・最小値を求めよ。

例 16.3. 集合

$$\{(x_1, \dots, x_n); x_j \geq 0, \sum_j x_j = 1\}$$

の上で定義された連続関数

$$H(x) = - \sum_j x_j \log x_j$$

が最大になるのは、どのようなときか？

まず、 H が x の連続関数であることに注意する。つぎにラグランジュ乗数を使った方程式

$$-(\log x_j + 1) = \lambda, \quad j = 1, \dots, n$$

を条件 $x_1 + \dots + x_n = 1$ の下で解くと、 $x_j = 1/n$ ($\lambda = \log n - 1$) となるので、

$$H(1/n, \dots, 1/n) = \log n.$$

以上を踏まえて、これが H の最大値であることを n についての帰納法で示す。 $n = 1$ の場合は、明らかである。 $n - 1$ の場合の最大値が $\log(n - 1)$ であるとする。 n 変数の場合は、上の停留値が境界での最大値よりも大きいことを示す必要がある。境界では、 x_1, \dots, x_n のいずれかが 0 になるので、

$$\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$$

に注意すれば、変数の数が $n - 1$ の場合に帰着する。そこでは、帰納法の仮定により最大値が $\log(n - 1)$ であることから、 H の境界での最大値は、 $\log n$ よりも小さく、したがって H の最大値は、 $\log n$ である。

問 149. 集合

$$\{(x_1, \dots, x_n); x_j > 0, \sum_j x_j = 1\}$$

の上で定義された連続関数

$$f(x) = \sum_j \frac{1}{x_j}$$

の最小値について調べよ。

問 150. 固有値が正の $n \times n$ エルミート行列 A が $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^{-1})$ となるならば、この値は n 以上であることを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

問 151. 条件 $x + y + z = h$ の下で、関数 $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{c^2 + z^2}$ の最小値を求めよ。ただし、 $a, b, c > 0, h \in \mathbb{R}$ は定数である。

さらに、別の拘束条件 $\psi(x, y, z) = 0$ が追加された場合を考えよう。この場合は、2 つの曲面 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ の共通部分としての曲線に制限した極値問題を扱うことになる。まず、曲線 $\varphi(x, y, z) = 0 = \psi(x, y, z)$ 上の点 (a, b, c) が

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_x(a, b, c) & \varphi_y(a, b, c) & \varphi_z(a, b, c) \\ \psi_x(a, b, c) & \psi_y(a, b, c) & \psi_z(a, b, c) \end{pmatrix} = 2$$

をみたすとき正則点であるといい、それ以外の場合を特異点と呼ぶことにはすれば、次が成り立つ。

定理 16.4. 正則点 (a, b, c) の付近における新たな座標変数 (u, v, w) として、 $u = \varphi(x, y, z)$, $v = \psi(x, y, z)$ の形のものを採ることができます。

これは、線型代数における、「2つの一次独立なベクトルが与えられたとき、それにもうひとつのベクトルを追加して、3次元空間 \mathbb{R}^3 の基底を作ることができる」という事実に対応している。厳密な証明はそれなりに面倒かつ工夫を要するのであるが、正則点の付近では関数の一次式による近似が機能する、という「微分の心」でもって納得しよう。

定理 16.5. 2つの拘束条件 $\varphi(x, y, z) = 0 = \psi(x, y, z)$ の下で、関数 $f(x, y, z)$ が点 (a, b, c) で極値を取れば、次のいずれかが成り立つ。

- (i) $\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla \varphi(a, b, c) + \mu \nabla \psi(a, b, c)$ かつ $\varphi(a, b, c) = 0 = \psi(a, b, c)$ となる実数 λ, μ が存在する。
- (ii) 点 (a, b, c) は、曲線 $\varphi = 0 = \psi$ の特異点である。

Proof. 極値を取る点 (a, b, c) が正則点であったとしよう。上の定理で存在することが保証された座標 (u, v, w) による f の表示を g とする。すなわち

$$f(x, y, z) = g(u, v, w).$$

この新たな座標を使えば、拘束条件は、 $u = v = 0$ となるので、 $g(0, 0, w)$ が、 $w_0 = w(a, b, c)$ で極値を取ることから、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0, w(a, b, c)) \\ &= f_x(a, b, c) \frac{\partial x}{\partial w}(0, 0, w_0) + f_y(a, b, c) \frac{\partial y}{\partial w}(0, 0, w_0) + f_z(a, b, c) \frac{\partial z}{\partial w}(0, 0, w_0) \end{aligned}$$

を得る。すなわち、ベクトル $f'(a, b, c)$ は、ベクトル

$$D = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{array} \right) \Big|_{(u, v, w)=(0, 0, w_0)}$$

と直交する。

一方、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \varphi(x, y, z) = \varphi'(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}, \\ 0 &= \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 D と直交するベクトルは、 $\varphi'(a, b, c)$ と $\psi'(a, b, c)$ の一次結合で書くことができて ($\varphi'(a, b, c), \psi'(a, b, c)$ が一次独立であることに注意)、

$$f'(a, b, c) = \lambda \varphi'(a, b, c) + \mu \psi'(a, b, c)$$

となるような実数 λ, μ の存在がわかる。 □

例 16.6. 例題 8.2 に拘束条件 $\psi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ を追加すると、

$$\nabla f = (yz, zx, xy) = \lambda(2x, 2y, 2z) + \mu(1, 1, 1)$$

を拘束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 = x + y + z$ と連立させて解くことで、 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ とその並べ替え、または $(x, y) = (-1/3, 2/3, 2/3)$ を得る。また、それぞれの点での値が、 $f(1, 0, 0) = 0$, $f(-1/3, 2/3, 2/3) = -4/27$ であることから、最大値が 0, 最小値が $-4/27$ であることもわかる。

問 152. 上の 2 つの定理を、拘束条件 $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ の下で関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が極値を取る場合に一般化せよ。

等周多角形問題

与えられた自然数 $n \geq 3$ と正数 l に対して、 n 角形の面積を周囲の辺の長さの合計が l であるという条件の下で最大化せよ。コンパクト性から、面積が最大となる n 角形が存在するので、その形状が問題となる。

- (i) 与えられた底辺と周囲の長さをもつ三角形で面積が最大であるものは二等辺三角形である。
- (ii) 与えられた正数 a, b に対して、四角形で三辺の長さが a で残りの辺の長さが b であるものの中で面積が最大であるものは、 b を底辺とする等脚台形である。

辺 a, b を角 θ でつなないで得られる三角形と、等辺が a で頂角が φ である二等辺三角形を対辺でつなげて得られる四辺形を考える。対辺の長さが等しいことから、 θ, φ は拘束条件

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = 2a^2 - 2a^2 \cos \varphi$$

をみたすので、その条件の下で、 $2S = ab \sin \theta + a^2 \sin \varphi$ の最大化が問題である。 $r = b/a$ とおくと、これは、関数 $f(\theta, \varphi) = r \sin \theta + \sin \varphi$ を条件 $r^2 - 1 - 2r \cos \theta + 2 \cos \varphi = 0$ の下で最大化することに他ならない。未定乗数 λ を使えば、

$$r \cos \theta = 2r \lambda \sin \theta, \quad \cos \varphi = -2\lambda \sin \varphi$$

となるので、 $\sin(\theta + \varphi) = 0$ すなわち、 $\theta + \varphi = \pi$ となり、これから等脚台形性が得られる。実際、幾何学的考察から、 φ と θ は、単調増加の関数関係にあるので、 $\theta + \varphi = \pi$ となるときが、ひとつだけある。一方、等脚台形がこの条件を満たすことは明らかであるので、主張が得られる。特異点に対応する場合は、 $r = 1$ であり、このとき、 $\varphi = \theta = \pi/2$ でなければならない。すなわち正方形の場合で、このときも等脚台形性が成り立つ。

(iii): (i) (ii) から、面積最大の n 角形は、正 n 角形であることがわかる。

樋の問題

与えられた幅の板を $m - 1$ 箇所で曲げて角柱状の樋を作ると、樋の断面積の最大値を求めよ。という問題は、開口部を貼り合わせる形で 2 つの樋を $2m$ 角柱にしたものを考えれば、 $n = 2m$ の場合の等周多角形問題の答えが正 $2n$ 角形であることから、求める樋の形は、それを中心対角線で二等分したものが答えとなる。

17 線積分

座標平面の上で定義されたベクトル値関数

$$(f(x, y), g(x, y)) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

をベクトル場とも呼ぶのであった。ここでは、平面の点を表すために位置ベクトル $\mathbf{r} = xi + yj$ を用い、ベクトル場を $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{i} + g(\mathbf{r})\mathbf{j}$ のようにも表す。平面内の向きが指定された曲線 C に対して、 C のパラメータ表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ を使った積分

$$\int_a^b \left(f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

を考えると、これはパラメータの取り方によらない。そこで、これを

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y)dx + g(x, y)dy)$$

と表して、ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の曲線 C に沿った線積分 (line integral) と呼ぶ。線積分は、なめらかな曲線をいくつか繋いだ折れ線状の場合にも、なめらかな部分の線積分の和として定義される。

ここで線積分の性質:

- (i) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は、 \mathbf{F} について線型。
- (ii) C の向きを反対にしたものを $-C$ で表せば、 $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- (iii) 曲線を $C = C_1 + \dots + C_n$ と分解するとき、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- (iv) $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|^2 = f(x, y)^2 + g(x, y)^2 \leq M^2$ ($M > 0$ は定数) であるとき、

$$\left| \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq M|C|.$$

ただし、 $|C|$ は曲線の長さを表す。

定理 17.1 (Green's Formula). 平面内の領域 D の境界に反時計回りの向きを入れた閉曲線を C で表すとき、

$$\int_C (f(x, y)dx + g(x, y)dy) = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

Proof. $g = 0$ のない場合を扱う。 D を縦に薄切りすると ($f = 0$ のときは、横に薄切り)、 D が $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$ の形の有限和であるので、この特殊な形状のときに公式を示せばよい。このとき問題の線積分は、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x, \varphi(x))dx - \int_a^b f(x, \psi(x))dx &= - \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

となってめでたい。 □

線積分は、何次元でも同様に定義できる。例えば、三次元空間内におけるベクトル場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \mathbf{i} + g(x, y, z) \mathbf{j} + h(x, y, z) \mathbf{k}$$

を向きのついた曲線 C に関して線積分したもの

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz)$$

は、 C のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$) を使って、

$$\int_a^b \left(f(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + h(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

で与えられる。

この線積分を、曲線の分点 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ を使って、

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}_k) \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})$$

と書きなおせば、線積分が曲線を表すパラメータのとり方によらないことがわかる。

次の結果は、証明も含めて変数の個数によらずに成り立つ。

定理 17.2. ベクトル場 $\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ に対して、次は同値。

(i) 曲線 C に沿った線積分の値が C の始点と終点だけで決まる。

(ii) あらゆる閉曲線 C について、その線積分が

$$\int_C (fdx + gdy + hdz) = 0$$

を満たす。

(iii) 匀配ベクトル場である。すなわち、

$$(f, g, h) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

であるような関数 ϕ が存在する。

Proof. (i) \Rightarrow (ii): 閉曲線 C 内の 2 点 p, q をとり、 C を p から q への曲線 C_1, C_2 の差として $C = C_1 - C_2$ と表すと、

$$\int_C (fdx + gdy + hdz) = \int_{C_1} (fdx + gdy + hdz) - \int_{C_2} (fdx + gdy + hdz)$$

である。ここで、(i) より、2つの線積分の値は一致し、したがって、上の閉路積分の値は 0 となる。

(iii) \Rightarrow (i): 曲線 C のパラメータ表示 $(x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$) に対して、

$$\begin{aligned} \int_C (fdx + gdy + hdz) &= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t), z(t)) dt \\ &= \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a)) \end{aligned}$$

となって、この値は、曲線の始点 $r(a)$ と終点 $r(b)$ だけに依存する。

(ii) \Rightarrow (iii): 一点 (a, b, c) を選んできて、

$$\phi(x, y, z) = \int_C (fdx + gdy + hdz)$$

とおく。ここで、 C は、 (a, b, c) を始点とし、 (x, y, z) を終点とする曲線である。(i) の仮定から、これが、曲線 C の選び方によらないことに注意。さて、 (x, y, z) と $(x + \Delta x, y, z)$ を結ぶ線分を ΔC で表せば、

$$\phi(x + \Delta x, y, z) = \phi(x, y, z) + \int_{\Delta C} (fdx + gdy + hdz) = \phi(x, y, z) + \int_x^{x+\Delta x} f(t, y, z) dt$$

であるから、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t, y, z) dt = f(x, y, z)$$

となる。すなわち、 $\phi_x = f$ である。 ϕ_y, ϕ_z についても同様。 \square

上の定理は、ベクトル場が匀配の形になっているかどうかについての必要十分条件を与えていているのだが、あらゆる閉曲線について線積分を調べる必要があり、判定条件としては実用的ではない。簡単にチェックできる必要条件として、次がある。

命題 17.3. ベクトル場 $(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ が、勾配の形になっていれば、

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \quad j \neq k$$

をみたす。

例 17.4. 二変数(二次元)の場合だと、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

である。グリーンの公式を想い出せば、このことから閉曲線 C に対して、いつでも

$$\int_C f dx + g dy = 0$$

が成り立つと結論できそうであるが、落とし穴がある。原点以外で定義されたベクトル場

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

について考えると、 $f_y = g_x$ であるにも関わらず、原点を中心とした円 C に対して、

$$\int_C f dx + g dy = 2\pi$$

となって、消えない。この原因は、グリーンの公式の右辺の二重積分の範囲の中にベクトル場が定義できない点が入っていることがある。そういう不都合な点が含まれない限り、閉曲線に関する線積分は消える。ということで、上の命題は、必要条件を与えるのであるが、ほとんど十分条件になっていて、ただ、定義域に穴などが開いている場合のみ気をつけねばよい。

問 153. 中心力を表すベクトル場 $\mathbf{F} = g(r)\mathbf{r}$ ($r = |\mathbf{r}|$ であり g は $r > 0$ の関数) について、上の必要条件を確かめ、 $\mathbf{F} = \nabla\phi$ となる関数 ϕ を求めよ。

18 変分法

高さの異なる2点を指定したとき、その2点をむすぶ滑り台を作ろう。いま、摩擦を無視して重力だけで滑り台を移動するものとして、その移動に要する時間が最小になるような滑り台の形を問う問題について考える。

座標の符号を簡単にするために重力は下から上に働いているものとし、考える2点の座標は $(0, 0)$, (a, h) であるとする。

関数 $y = f(x)$, $f(0) = 0$, $f(a) = h$ で与えられるスロープに対して、高さ y の点での速さ v はエネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

を満たす。一方

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

でもあるので、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1 + f'(x)^2}}$$

となり、これを書き直してから積分すると、滑り台の所要時間は、

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2gf(x)}} dx$$

となる。右辺の積分は、関数 $f(x)$ だけで決まるので、それを $T[f]$ と書くことにして、 $T[f]$ は、いわば、「関数の関数」（汎関数、functional、という）であり、問題は、関数 $f(x)$ を変化させたときの、 $T[f]$ の最小値を与える f は何かということになる。

このような「関数の関数」に対する極値問題を変分問題といい、「関数の関数」に対する微分法を **変分法** (calculus of variations) と呼ぶ。

上の場合、変化させる関数は、

$$f(0) = 0, \quad f(a) = h$$

となる範囲で考えている。

このような形の、変化させる関数に対する条件を境界条件とよぶ。

一般に、与えられた3変数の関数 $F(x, y, y')$ と2点 (x_j, y_j) ($j = 1, 2$) に対して、汎関数

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x)) dx$$

の境界条件

$$f(x_j) = y_j$$

の下での変分問題の解は、次のように考えて求めることができる。

仮に、関数 $f(x)$ が最小値を与えるものだったとして、勝手な関数 g と小さい実数 s に対して

$$f(x) + sg(x)$$

なる関数 $f + sg$ 、但し境界条件を満たすために $g(x_j) = 0$ を仮定しておく、での汎関数の値 $F[f + sg]$ を考える。 $F[f + sg]$ を s の関数とみると、 $s = 0$ で最小値を与えるから

$$\frac{d}{ds} F[f + sg]|_{s=0} = 0$$

でなければならない。

一方、

$$\frac{d}{ds} F[f + sg] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f + sg, f' + sg')g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f + sg, f' + sg')g'(x) \right) dx$$

より、

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x))g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x))g'(x) \right) dx = 0$$

となる。ここで、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x))g(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x)) \right) g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x))g'(x)$$

を積分して得られる

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x)) \right) g(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x))g'(x) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}g(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

(g の境界条件に注意) を使うと

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) g(x) dx = 0$$

となる。関数 $g(x)$ は自由に選べるので、これから $f(x)$ に対する微分方程式 (Euler-Lagrange's equation)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x)).$$

が得られる。あとはこれを解くことになるのだが、 $F(x, y, y')$ が (y, y') だけの関数の時には、

$$f'(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) = \frac{d}{dx} \left(F - f'(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

となるので、 $f'(x) \neq 0$ である所では、

$$F(f(x), f'(x)) - f'(x) \frac{\partial F}{\partial y'}(f(x), f'(x)) = \text{const.}$$

という方程式と同値になる。

滑り台の問題の場合だと、

$$F(f(x), f'(x)) - f'(x) \frac{\partial F}{\partial y'}(f(x), f'(x)) = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

であるから

$$y(1+y'^2) = 2r$$

という方程式と同値で、これを y' について解くと、

$$y' = \pm \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

これは変数分離型であるから、

$$\pm \frac{y}{\sqrt{r^2 - (r-y)^2}} dy = dx$$

の形に書き直して積分すると、

$$\begin{aligned} x &= r\theta - r \sin \theta \\ y &= r - r \cos \theta \end{aligned}$$

なるパラメータ表示が得られる。これは、いわゆる、cycloid なる曲線を表している。このうち、滑り台を表すのは $0 \leq \theta \leq \theta_0$ の部分で、 $r > 0$ と $0 < \theta_0 \leq 2\pi$ は、

$$a = r\theta_0 - r \sin \theta_0, \quad h = r - r \cos \theta_0$$

で定められる。

問 154. 線分 $[-a, a]$ と二点 $(\pm a, 0)$ をつなぐ上半平面 $y \geq 0$ 内の曲線 C で囲まれた図形の面積を条件 $|C| = l$ の下で最大にせよ。

汎関数

$$F[f] = \int_{-a}^a f(x) dx$$

を条件

$$l = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad f(\pm a) = 0$$

の下で最大化しよう。

$$\int_{-a}^a \delta \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-a}^a \frac{f'(x) \delta f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} dx = - \int_{-a}^a \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) \delta f(x) dx$$

に注意して、変分法に未定乗数法を組合せると、未定乗数を λ として、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = \frac{1}{\lambda} = b.$$

これを積分して、

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = bx + c \iff f'(x) = \pm \frac{bx + c}{\sqrt{1 - (bx + c)^2}}.$$

もう一度積分して、

$$f(x) = \mp \frac{1}{b} \sqrt{1 - (bx + c)^2} + c'.$$

これから、 C は円弧で与えられるだろうことがわかる。

付録A 微分方程式事始め

関数って何だろうか。素朴には、変量の間の等式で表された関係と言ってよいだろう。変量とは何か。通常は、単位を持ち、数（実数）で表されるものと考えてよいだろう。ここで、ちょっと Wikipedia で量 = quantity を引いてみよう。英語版と日本語版でだいぶ違う。英語版は、連続量と離散量の区別に熱心。日本語版は、数値と単位の組み合わせを強調している。（なんとなく、編集している面々が透けて見えるような。）量と数、変量と変数という対応で良さそうだ。しかし変量を表す英語はあるのだろうか。変量も変数も variable 一つで済ませているような。

方程式の三原則を知ってるか^{*100}。

- (i) 変量（変数）を導入する。
- (ii) 変量の間の関係式を導く。
- (iii) 関係式を解く。

この解く作業を重要視しがちであるが、変量の導入から始まって関係式を適切に設定する部分もそれに負けず劣らず大事である。この変量の間の関係式が関数関係で表される場合が、通常の方程式と呼ばれるもので、中学以来、いろいろ経験していることであろう。繰り返すが、最初の変量の設定は、簡単にみえて奥が深い。変量の選び方次第では、それ以降の処理が易しくも難しくなる。どうしてばかにできないステップである。

さて**微分方程式** (differential equation) である。これは、上の二番目の段階で扱う関係式に変量間の微分が現れるものをいう。当然のことであるが、微分を考えるために、変量の間に何らかの関数関係が存在するこ

^{*100} 私が勝手に作りました。

とが前提であるが、今度は、その関数関係が直接的に知られていなくて、それでもそれらの間の微分を介した関係式が成り立つ場合をここでは問題にしている。このように設定した微分関係式をすべてみたす関数関係を見出しが、問題にしている微分方程式を解くという意味である。通常の方程式だと変量の値が決まるのであるが、微分方程式の場合、決まるのは変量そのものではなく、変量間の関数関係である。

と、これだけ言葉を用意して、具体例で以上の手順を確かめてみよう。題して、微分方程式事始め。

ベルトとプーリによる動力の伝達

ベルトは、プーリ（半径 r ）の位置を表す角変数 θ が $\alpha \leq \theta \leq \beta$ を満たす範囲に巻き付いているとする。ある時刻でのベルトの速さを v とし、重力の効果は無視して、ベルトの微小部分 $[\theta - \Delta\theta, \theta + \Delta\theta]$ における力の釣り合いを考える。ベルトの張力を $T = T(\theta)$ で表し、質量の角密度を ρ とすれば、プーリの動径方向の抗力は、

$$(T + \Delta T) \sin(\Delta\theta) - (T - \Delta T) \sin(\Delta\theta) - \rho v^2 (2\Delta\theta) \approx (T - \rho v^2) 2\Delta\theta$$

となる。そこで、ベルトとプーリが滑らない運動を可能ならしめる最大の張力が働いているものとし、ベルトとプーリの間の静止摩擦係数を μ とすれば、プーリの回転方向の力の釣り合いから

$$\rho r 2\Delta\theta \frac{dv}{dt} = (T + \Delta T) - (T - \Delta T) - \mu(T - \rho v^2) 2\Delta\theta$$

となり、これからベルトの運動方程式

$$\rho r \frac{dv}{dt} = \frac{dT}{d\theta} - \mu(T - \rho v^2)$$

を得る。定速度の場合は、微分方程式

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu(T - \rho v^2)$$

を解いて、

$$T(\theta) = (T(0) - \rho v^2) e^{\mu\theta} + \rho v^2.$$

とくに静止している場合は、 $T(\theta) = T(0)e^{\mu\theta}$ となる。これをオイラーのベルト摩擦の公式（法則？）という。ひもの円筒への巻付けを幅の細いベルトの巻きつけと思うと、多重に巻くことで、ひもの両端における張力の比が $e^{\mu\theta}$ で表されることから、 n 回の巻付けでは、その比は $e^{2\pi n \mu}$ のように急激に大きくなることがわかる。

ベーアの法則^{*101}

薄い層を通過するさいの光の減少量は、光の強さと通過する層の厚さに比例するという。

光の通過方向を座標軸に選び、座標が x の地点での光の強度を $I(x)$ とする。 x, I が変量でその間に何らかの関数関係があるものと考えるのは自然である。次にこの変量の間の関係式であるが、 x から $x + \Delta x$ に至る間の減少量 $I(x) - I(x + \Delta x)$ が、 $I(x)\Delta x$ に比例するのというのであるから、比例定数を a とおけば、

$$I(x) - I(x + \Delta x) \doteq aI(x)\Delta x$$

である。これは、近似的に成り立つ関係式であるが、層を薄くすればするほど、近似の精度が増すと考えて、両辺を Δx で割って極限 $\Delta x \rightarrow 0$ を取ると、微分の入った関係式=微分方程式

$$\frac{dI}{dx} = -aI$$

を得る。

^{*101} Beer's law. ついビールを連想してしまうが、ビールのドイツ語は、Bier。

最後のステップとして、これを解くわけであるが、その意味は、この関係式をみたす関数関係、すなわち、関数 $I = I(x)$ の形を決定することである。これは、具体的には、次のようにする。上の微分方程式を

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = -a$$

と書き直して、 I が x の関数であることに注意して x_0 から x まで積分し、さらに置き換え積分を適用すれば、

$$-a(x - x_0) = \int_{x_0}^x \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} dx = \int_{I(x_0)}^{I(x)} \frac{1}{I} dI = \log I(x) - \log I(x_0)$$

となるので、

$$I(x) = I_0 e^{-a(x-x_0)}$$

を得る。ただし、 $I_0 = I(x_0)$ とおいた。

このように、置換積分の公式を経由させて解くのが今の数学の正統な説明方法であるが、実はもっと素朴かつ直接的な方法があって、それは、変数 I と変数 x の間に対等な関数関係 (x が決まれば I がきまり、逆に I を与えると x が決まる) を想定して、

$$\frac{1}{I} \Delta I = -a \Delta x$$

を直接積分に移行させるというもの。 x_1, x_2, \dots, x_n に対応するものが、 I_1, I_2, \dots, I_n であるとすると、上の近似式から

$$\sum_j \frac{1}{I_j} (I_j - I_{j-1}) = -a \sum_j (x_j - x_{j-1})$$

が得られるので、分点の数 n を大きくすれば近似的精度が良くなり（よくなるものと信じて）、極限 $n \rightarrow \infty$ を取った暁には厳密な等式に移行すると考えると、

$$\int \frac{1}{I} dI = -a \int dx$$

という積分の関係式が導かれる。あとは、それぞれの積分を実行すれば良い。

大昔の人（微積分の創業者たちとその直接の後継者たち）は、 n を大きくして等式が成り立つ、という代わりに、無限小量 dI, dx というものを考え、その間に成り立つ等式

$$\frac{1}{I} dI = -a dx$$

とその積分で得られる等式の間を自由に行き来して計算したのであった。なんというおおらかさ。

数学学者には好まれぬ考え方かも知れないが、実は、物理とかの現実の変量を扱う人たちの間では、あるいは密かにあるいは公然と伝承され続けて今に至っている。数学者は何を嫌がるかというと、「近似的精度が良くなるものと信じて」という宗教的な部分であり、信心が足りない彼らは、なんとか頑張って正当化（証明）しようとする。

一方、実際の現象を扱う人々は、実験で検証するという最終兵器があるので（最終兵器だからこそ、実験データを加工したり、ましてや捏造したりしては、科学の神様の罰が当たるのだな）、途中の推論が多少怪しくても平氣というか、推論の前提となる仮説は、現象と合わなくなればいくらでも変更してしまう柔軟性というか、節操がないというか、その違いである。別の具体例も見ていく。

排水時間の微分方程式

これは、昔は高校の教科書の例題によく取り上げられていたもので、その鮮やかさに感心した覚えがある。行列とかやる暇があったら、こういったものを復活させるべきではないのか、発展的内容などと言わずに。

ある形状の容器に水が入っており、容器の底に付けられた排水口（面積 = A ）から水を（重力だけで）自然排出させる。流し終わるまでに要する時間求めよ。

容器の底を座標原点にとり、鉛直方向に座標軸を選んでおく。ある時刻 t での水面の高さを h とし、そのときの水面の面積を S , 容器内の水の体積を V , 排水される水の速さを v で表す。

沢山の変量を導入したが、これらが、時刻 t を媒介として、関数関係をもっていることにまず注意する。知りたいのは、初期水面の高さ H と排水し終わるまでの時間 T との関係である。そのために、必要な関係式を書き下してみる。

まず、容器の形状に関する情報として、高さ h での切り口の面積 $S = S(h)$ は予め与えられているものとする。

$$V = \int_0^h S(x) dx.$$

次に、質量（今の場合は水の体積の）保存則

$$V(t + \Delta t) - V(t) \doteq -Av\Delta t$$

の微分形である

$$\frac{dV}{dt} = -Av.$$

最後に、時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ の間に排出された水の質量を m としたときのエネルギー保存則^{*102}

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \iff v = \sqrt{2gh}.$$

以上の関係式を解いていくわけだが、基本は文字の消去。面積一体積の関係式を t で微分して得られる

$$\frac{dV}{dt} = S(h) \frac{dh}{dt}$$

に、物質保存則とエネルギー保存則の関係式を代入して V, v を消去すると、

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}A \frac{\sqrt{h}}{S(h)}.$$

という h と t に関する微分方程式にたどり着く。これを解くために、

$$\frac{S(h)}{\sqrt{h}} \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}A$$

と書き直して、 h が t の関数であること、右辺は t に依存しない定数であることに注意して $t = 0$ から $t = T$ まで積分し、置換積分を使って書き直せば、

$$\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh = \sqrt{2g}AT$$

を得る。これが H と T の間の求める関係式である。さらに計算を進めるためには、 $S(h)$ の具体的な形が必要である。例えば、 S が一定（ドラム缶を立てた状態）である場合には、

$$S \int_0^H \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \sqrt{2g}AT$$

^{*102} 質量 m の水塊が上面から排水口まで自然落下したと思う。なお、この流出速度の表式は、トリシェリの定理とも呼ばれる。

の積分（広義積分になっている！）を実行して、

$$T = \frac{2S}{\sqrt{2gA}} \sqrt{H}.$$

風呂の水抜きを観察していると、水面の下降速度が徐々に遅くなつて、それでも有限時間で排水が終了する様子が実感できるだろう。最後に幾何学的例を一つだけ。

牽引曲線

曲線 $y = f(x)$ で、 y 軸上の点からこの曲線に引いた接線の長さ a が一定であるようなものを牽引曲線 (tractrix) という。 $(a, 0)$ の地点に止まっている船を長さ a のロープで、牽引しながら、 y 軸上の点をゆっくり移動するときに船が描く軌跡を表す、というのが牽引の由来。この場合の変量は、はっきりしていて、 x と y 。

曲線上の点 (x, y) を通る接線の方程式は $y' = \frac{dy}{dx}(x' - x) + y$ で、 y 軸との交点の座標が $(0, y - \frac{dy}{dx}x)$ となるので、条件は、

$$x^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = a^2$$

となる。これを $\frac{dy}{dx}$ について解けば、

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

という微分方程式を得る。

これを解くことは、単純に積分を実行すればよく、

$$y = \pm \int_a^x \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \pm \left(a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2} \right)$$

となる。この最後の形を導くところで、置換積分を二度使う。まず、 $u = a \sin \theta$ と置けば、

$$a \int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)} \frac{1}{\sin \theta} d\theta - a \int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)} \sin \theta d\theta = a \int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)} \frac{1}{\sin \theta} d\theta - a \sqrt{a^2 - x^2}.$$

次に、 $\sin \theta = 2t/(1+t^2)$, $d\theta = 2dt/(1+t^2)$ とおけば、 $\theta = \pi/2 \iff t = 1$, $x/a = \sin \theta \iff t = (a + \sqrt{a^2 - x^2})/x$ に注意して、

$$a \int_{\pi/2}^{\arcsin(x/a)} \frac{1}{\sin \theta} d\theta = a \log t = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

付録B ガンマ関数の漸近展開

ガンマ関数が階乗を補完していることからもわかるように、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \infty$$

であるが、その増大度のスピードはどうであろうか。

まず、ガンマ関数の定義式における被積分関数は、 $x = t - 1$ でただ一つのピークをもち、 x の増大とともに値が急激に減少する (0 に近づく)。 $t \rightarrow \infty$ のとき、ピークの位置が無限のかなたに移動してしまうので、 $x = (t - 1)u$ なる変数変換を施して、積分範囲を固定したままピークの位置がいつでも $u = 1$ であるように書きなおし、さらに u に無関係な部分を括り出すと、

$$\Gamma(t+1) = t^{t+1} e^{-t} \int_0^\infty u^t e^{t-tu} du.$$

関数 $g(u) = u^t e^{t-tu}$ の $u = 1$ の付近での様子を調べるために、 $\log g(u)$ を $u = 1$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$\log g(u) = t(\log u - u + 1) = -\frac{t}{2}(u-1)^2 + \frac{t}{3}(u-1)^3 + \dots$$

これから、大きい t に対するピークの幅の目安として、

$$1 - \frac{1}{\sqrt{t}} < u < 1 + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

を得るので、 $t \rightarrow \infty$ のとき、積分の値はピークの極狭い範囲からの寄与だけで良い近似が得られるであろう。

そこで、ピークを幅 $0 < \epsilon < 1$ の範囲で取り出して、

$$\int_0^\infty g(u) du \doteq \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-t(u-1)^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx$$

に注意すれば、

$$t^{-t-1/2} e^t \Gamma(t) \doteq \int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

という公式が得られた。とくに、

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

(Stirling の公式) である。

以上の議論は大筋では正しいのであるが細部で不正確である。それは、近似式

$$\Gamma(t+1) \doteq t^{t+1} e^{-t} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-t(x-1)^2/2} dx$$

で落とした項が $t \rightarrow \infty$ ではたして 0 にいくかどうかの吟味に欠けるため。

ここでは次のような工夫を行う。本体の積分で、変数を -1 だけずらすと

$$\int_0^\infty u^t e^{t-tu} du = \int_{-1}^\infty e^{-t(x-\log(1+x))} dx$$

である。ここで、

$$y = \begin{cases} \sqrt{x - \log(1+x)} & \text{if } x \geq 0, \\ -\sqrt{x - \log(1+x)} & \text{if } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

なる変数変換を導入すれば、 $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ ともに微分可能（実は x の解析関数）であり、

$$\int_{-1}^\infty e^{-t(x-\log(1+x))} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-ty^2} \frac{dx}{dy} dy$$

となる。

関係式 $y^2 = x - \log(1+x)$ を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2(1+x)} \frac{1}{y} = \frac{|x|}{2(1+x)\sqrt{x - \log(1+x)}} > 0$$

であるから、

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{dx}{dy} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1+x)\sqrt{x - \log(1+x)}}{|x|} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \frac{dx}{dy} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1+x)}{x} = 2$$

となっていることに注意。

さて、こうして得られた積分表示において、 $t \rightarrow \infty$ での振る舞いを調べるために、 $g(y) = \frac{dx}{dy}$ とおいてさらに変数変換 $z = \sqrt{t}y$ を行うと、

$$\int_0^\infty u^t e^{t-tu} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) dz$$

となって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \int_0^\infty u^t e^{t-tu} du = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) dz = \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} g(0) dz = \sqrt{\pi} g(0)$$

がわかる。最後の等号ではガウス積分の公式を使った。(実は、2番目の等号で、 $g(y) = \frac{dx}{dy}$ の増大度が多項式程度であることを使う。)

最後に、 $|x| < 1$ のとき、

$$y = \pm \sqrt{x - (x - x^2/2 + x^3/3 - \dots)} = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2}{3}x + \dots}$$

に注意して、

$$g(0) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(0)} = \sqrt{2}(1+x) \sqrt{1 - \frac{2}{3}x + \dots} \Big|_{x=0} = \sqrt{2}$$

であることがわかるので、公式が示された。

さらに詳しい情報を得るには、

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) = g(0) + g'(0) \frac{z}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} g''(0) \frac{z^2}{t} + \dots$$

と幕級数展開し、

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} z dz = 0, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} z^2 dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

などに注意すれば、

$$\sqrt{t} \int_0^\infty u^t e^{t-tu} du = \sqrt{\pi} \left(g(0) + \frac{g''(0)}{4} \frac{1}{t} + \dots \right)$$

と漸近展開 (asymptotic expansion) される。具体的な係数の値は、

$$x = \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3 + \dots$$

を使えば、

$$g(0) = \sqrt{2}, \quad g''(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \dots$$

と求めることができる。

問 155. 関係式

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots}$$

を x について解くと、

$$x = \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3 + \dots$$

となることを示せ。(ヒント： $x = ay + by^2 + cy^3 + \dots$ とおいて、関係式に代入し、 y の幕の係数を比較する。)

付録C 関数の定義域

多変数関数においても、1変数の場合と同様、変域を明示しないで話を進めることもあるが、変域（変数の動く範囲）を認識しておくことは、関数の意味を明確にする上で重要である。とりあえず2変数の場合を扱う。（変数が増えても同様の扱いが可能である。）さて、開区間・閉区間はもっとずっと複雑になる。平面内の図形（部分集合）で、すべての境界点を含むものを閉集合、境界点を一切含まないものを開集合という。（この説明は、実は不十分である。というのは、境界点が何を意味するのかはっきりさせていないから。それでも、直感的には明らかであろう。）閉集合・開集合だけでも十分複雑であるが、平面内の図形としては、開集合でも閉集合でもないものが多数存在する。1次元の場合でも、 $(a, b]$, $[a, b)$ といった区間がそうであるし、他にもいろいろある。2次元になれば、その多様性はさらに増す。

一般的に、開集合の補集合は閉集合、閉集合の補集合は開集合であることを注意しておこう。以下では、変域 D は、開集合か閉集合の場合を考える。

例 C.1.

$$\{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}, \quad \{(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

は開集合と閉集合を表し、その間にある勝手な集合は、開集合でも閉集合でもない。

開集合と閉集合との共通部分は、一般に開集合でも閉集合でもない。

問 156. 平面の部分集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ の境界点をどのように定義すべきか検討してみよ。

よく使われ、また重要でもあるので、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

という記号を用意しておく。これは、実数を n 個並べたもの全体の集合を表す。既に知っているように、 \mathbb{R} = 直線、 \mathbb{R}^2 = 座標平面、 \mathbb{R}^3 = 座標空間であり、 \mathbb{R}^n = n 次元座標空間という意味をもつ。 \mathbb{R}^n における2点間の距離を

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

で定める。距離を使って、 \mathbb{R}^n における点列 $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ ($k = 1, 2, \dots$) が $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するという意味を、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = a \iff \lim_{k \rightarrow \infty} |x(k) - a| = 0$$

で定める。

$|x_j - y_j| \leq |x - y| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ であるので、これは、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j(k) = a_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と言い換えることができる。点列の収束を使えば、 $D \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合であることを次のように表す（定義する）ことができる。「 D から取ってきた点列がある点 $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するならば、 $a \in D$ である。」

再び平面内の D にもどって、数学では、 D の各点 (x, y) を選ぶごとに実数 $f(x, y)$ が決まっている状況を関数という言葉で表し、

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

という記号が好んで使われる。あるいは、省略した形で、関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) のようにも書く。

例 C.2. (i) 理想気体の圧力 P は、温度 T と体積 V の関数であり、

$$P = R \frac{T}{V}, \quad T > 0, V > 0$$

と表される。ここで、 $R > 0$ は気体定数。

(ii) ばねの先に取り付けた質量 m 質点の力学的エネルギー E は、質点の平衡点からのずれ x と質点の運動量 p を使って、

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} x^2, \quad x, p \in \mathbb{R}$$

と表される。ここで、 $k > 0$ はバネ定数。

(iii) 直方体の箱の中の物質の密度分布

$$\rho = \rho(x, y, z), \quad a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2.$$

関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) が $(a, b) \in D$ で連続であるとは、 (a, b) に収束する点列 $(x_k, y_k) \in D$ に対していつでも

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = f(a, b)$$

が成り立つこと、と定義する。

次は、最大値・最小値問題を扱う際の基本的な結果である。それを述べるために、用語を一つ導入しておく。部分集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ が有界である (bounded) とは、

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in D \implies |x| \leq R$$

となるような $R > 0$ があること。要するに、 D は無限に広がっていないということ。

定理 C.3. 有界閉集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ の上で定義された連続関数は、最大値・最小値をもつ。

Proof. 唐突ではあるが、二進展開の幾何学的意味を知ってるだろうか。実数 $0 < t < 1$ の二進展開はつきのようになっている。区間 $[0, 1]$ を二等分する。 t が左半分に入っていれば $t_1 = 0$, 右半分に入っていれば $t_1 = 1$ とおく。次に t を含む半区間をさらに二等分し、やはり、 t が左半分に入っていれば $t_2 = 0$, 右半分に入っていれば $t_2 = 1$ とする。以下、この操作を繰り返して二進数列 t_1, t_2, \dots を定めると、これが t の二進展開を与える。すなわち、

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^n}.$$

これだけの準備をしておいて、定理の証明を述べよう。これが有名な Bolzano の絞りだし論法^{*103}である。

簡単のために $D \subset [0, 1] \times [0, 1]$ とする。さて、 f の取り得る値の範囲の上端に近づくように点列 $(x_k, y_k) \in D$ を用意する。このとき f の最大値が存在するならば、その値は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k)$$

で与えられることになる。そこで、問題は、この極限値を実現する $(a, b) \in D$ が見つかるかどうか。 $[0, 1] \times [0, 1]$ の縦横を二等分することで、 D を4つの部分に分ける。各 (x_k, y_k) は、この4つのうち、どれかに含まれる。そこで、4つのうち、少なくとも一つは、無限個の (x_k, y_k) を含む。それを D_1 とする。 D_1 を含む小正方形をさらに4分割し、同様の考え方で無限個の (x_k, y_k) を含む D_2 を選ぶ。以下、これを繰り返すと、

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$$

*103 実は、ここだけの呼び方である。

という D の部分集合が定まり、各 D_n は、無限個の (x_k, y_k) を含むことになる。そこで、 $\{(x_k, y_k)\}$ の部分列 $\{(x_{k'}, y_{k'})\}$ を、 $(x_{k'}, y_{k'}) \in D_k$ であるように選んでおけば、上の二進展開議論により、実数 $a, b \in [0, 1]$ が

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k'} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k'} = b$$

で定められる。ここで、 D が閉集合であることを使うと $(a, b) \in D$ がわかり、さらに f が連続関数であることから、

$$f(a, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k'}, y_{k'})$$

は、 f の最大値に一致する。 \square

付録D 重積分あれこれ

重積分の定義は難しい。二重積分であれば、体積と結びつけての説明が可能であるし、三重積分だと、 $D \subset \mathbb{R}^3$ の体積を $|D|$ で表して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) |D_k|$$

とでもすればよい。しかし、こういった直感に頼る方法では、変数が4以上の場合の説明に窮する。上の素朴な方法を数学的に正当化するためには、高次元图形の「体積」の意味をはっきりさせる必要があると誰でも思うことだろう。これは実際に可能で、糸余曲折はあったものの、測度論というものに落ち着いた。この測度論の成果の一つに、すべての部分集合に対して面積とか体積を付与することには注意を要するということが明らかになった点を指摘しておく。面積とか体積を定めがたい「图形」というものが存在しうるということである。

重積分に対するもう一つの現実的な対処方法として、くり返し積分を利用するというものがある。歴史的にも、重積分はこの形で現れたものであるらしい^{*104}。ただ、現在においては、このやり方で重積分を説明することはほとんどないようだ。十分意義のある方法のように思えるのだが。

ある意味で折衷案的なものに^{*105} リーマン・ダルブル方式というのがあって、重積分の定義をこれで行うのが伝統的な方法である。伝統的とはいながら意外と新しい。これは、積分範囲を矩形領域に限定し、その分割方法も区間分割の積に限定して考えるというもので、測度に基づいた積分を導入するまでの間の暫定版という評価をする人も多い。ただ、この暫定版が連続関数に対して有効であるという事実は、測度の構成のところでも実質的に必要となる。先に書いたくり返し積分を出発点にする方法というのは、この実数の連続性に由来する性質がくりかえし積分の形でも取り込まれていて、しかも直接積分の拡張を行う際に十分な形になっているため、無駄が少ないという利点がある。

ということで、数学は道具と心得ている人のための折衷案：

- (i) 二重積分・三重積分までは、面積・体積が素朴にあるものとして導入し、具体的な計算方法として、くり返し積分の公式を納得する。その結果、矩形積分において、くり返しの順序によらないことを認識する。
- (ii) その次の段階として、一般的矩形領域上の連続関数の積分の定義を、くり返し積分で導入する。そして、収束定理が成り立つように積分可能な関数の範囲を拡張する。その際に、くり返し積分の公式が何らかの意味で成り立つことを確認しておく。一般的領域上の積分を

$$\int_D f(x) dx = \int 1_D(x) f(x) dx$$

^{*104} V.J. Katz, A History of Mathematics, によれば、重積分が使われ出したのは、Euler-Lagrange の辺りだった由、体積計算だけでなく表面積の公式もあり、さらには二重積分の変数変換の公式まで得られていたという。

^{*105} 折衷案的であるのは、矩形領域で積分を定義して、「图形のかさ」をその支持関数の積分と捉えるため。

によって定める。ただし、 D としては、右辺の関数が積分可能であるもののみを考える。

以上が個人的に薦める方法で、(i) は、この講義ノートの説明がそのようになっている。(ii) については、<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/teaching/topics/integral2018.pdf> を見よ。

付録E くり返し積分から

ここでは、くり返し積分から得られる級数表示にまつわる話を紹介する。

補題 E.1.

$$\int_0^x dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 f^{(n)}(t_1) = f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1}.$$

Proof. n についての帰納法。 □

補題 E.2.

$$\int_0^x dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 f(t_1) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Proof. これも、 n についての帰納法。

$$\begin{aligned} & \int_0^x dt_{n+1} \int_0^{t_{n+1}} dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 f(t_1) \\ &= \int_0^x dt_{n+1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{t_{n+1}} dt (t_{n+1} - t)^{n-1} f(t) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x ds \int_0^s dt (s-t)^{n-1} f(t) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x dt \int_t^x ds (s-t)^{n-1} f(t) \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t) dt. \end{aligned}$$

□

以上を合わせることで、次の de Prony の公式^{*106}を得る。なお、この証明は、コーシーによるものである。

定理 E.3.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

話題を変えて、 n 次正方行列に値をもつ連続関数 $A(t)$ に対して、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

の解の表示について考える。ここで、

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

^{*106} 微積分 I で示した部分積分のくり返しによるのが、de Prony の与えた証明であるらしい。

は、ベクトルに値をとる t の連続関数である。上の微分方程式を積分すると、

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1) x(t_1)$$

を得る。この右辺の $x(t_1)$ に、

$$x(t_1) = x(0) + \int_0^{t_1} dt_2 A(t_2) x(t_2)$$

を代入すると、

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1) x(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) x(0)$$

以下、この代入を繰り返すと、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1) x(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) x(0) \\ &\quad + \cdots + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_n) x(0) \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} dt_{n+1} A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_{n+1}) x(t_{n+1}) \end{aligned}$$

この最後の項は、

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} dt_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

であり、

$$A(t_1) \cdots A(t_{n+1}) x(t_{n+1}) = O(M^n)$$

と評価できることに注意すれば、 $n \rightarrow \infty$ のとき、0 に近づくことが分かる。結論として、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t dt_1 A(t_1) x(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) x(0) \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 A(t_1) A(t_2) A(t_3) x(0) + \cdots \end{aligned}$$

という級数表示を得る。右辺に共通するベクトル $x(0)$ をくくり出した、行列級数

$$\begin{aligned} U(t) &= I + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 A(t_1) A(t_2) A(t_3) + \cdots \end{aligned}$$

をダイソン級数 (Dyson series) と呼ぶ。とくに、散乱理論における摂動展開で威力を発揮する。

付録F 二次形式の符号

実変数 x_1, \dots, x_n の二次同次式

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を x_1, \dots, x_n の実二次形式 (real quadratic form) という。二次形式 $Q(x)$ は、対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を使って、

$$Q(x) = (x_1 \ \dots \ x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示されるので、これを $Q_A(x)$ と書くことにする。正則行列 $T = (t_{ij})$ を使って、変数 x_1, \dots, x_n に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

という変数変換を施せば、 $Q_A(x) = Q_B(y)$, $B = {}^t T A T$ となる。

定理 F.1 (Lagrange-Sylvester). 任意の実対称行列 A に対して、正則行列 T で、 ${}^t T A T$ が対角行列になるものが存在する。

また、このようにして得られた対角行列の対角成分に現れる、正数の個数、負数の個数、零の個数は、それぞれ、 A の正固有値の個数、負固有値の個数、零固有値の個数に一致する。但し、固有値の個数は重複度も含めて数える。

Proof. 行列 A のサイズに関する帰納法による。対称行列 A の対角成分に零でないものが現れる、例えば、 $a_{11} \neq 0$ 、とすると、

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + 2x_{11}(b_2x_2 + \dots + b_nx_n) + R(x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 + R(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 \end{aligned}$$

となって、変数変換

$$y_1 = a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad y_j = x_j \ (2 \leq j \leq n)$$

を施せば、

$$Q(x) = \frac{y_1^2}{a_{11}} + R(y_2, \dots, y_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2y_2 + \dots + b_ny_n)^2$$

となって、帰納法が機能する。

全ての対角成分が消えていてなおかつ $A \neq 0$ であるときには、 $a_{ij} \neq 0$ となる $i \neq j$ が存在する、例えば $a_{12} \neq 0$ である、ときには、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変数変換を施せば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、対角成分に零でないものが含まれる場合に帰着する。

次に、「符号数」が変化しないことを見るために、正則行列 T, T' に対して、

$${}^t TDT = A = {}^t T'D'T', \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_n \end{pmatrix},$$

$d_1 > 0, \dots, d_l > 0, d_{l+1} < 0, \dots, d_{l+m} < 0, d_{l+m+1} = \dots = d_n = 0$ などであったとする。ここで、 $l < l'$ と仮定して矛盾を導こう。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \vdots & \\ t_{l1} & \cdots & t_{ln} \\ t'_{l'+1,1} & \cdots & t'_{l'+1,n} \\ & \vdots & \\ t'_{n1} & \cdots & t'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

を考える。 $l + (n - l') < n$ であるから、自明でない解 x が存在する。 $y = Tx, y' = T'x$ とおく。

一方、作り方から $Q(x) = {}^t y D y \leq 0$ かつ $Q(x) = {}^t y' D' y' \geq 0$ で、

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Q(x) = d'_1(y'_1)^2 + \dots + d'_{l'}(y'_{l'})^2 = 0$$

となって、 $y'_1 = \dots = y'_{l'} = 0$ となる。すなわち、 $T'x = y' = 0$ となって、これは $x \neq 0$ に反する。

以上により、 $l = l'$ であることがわかる。同様にして、 $m = m'$ も導かれる。□

付録G 対称行列の対角化

行列の対角化は、通常、線型代数の守備範囲であるが、極値問題の二次判定法で必要となるのは、実対称行列で、ベクトルも成分が実数の場合である。特殊であるが故に、代数の枠内の扱いでは、どうしても後の方の話題になってしまい、授業として取り上げられないこともある。ここでは、多変数関数の微分の手法を使って直接的に処理してみよう。使う道具は、ラグランジュ乗数法と連続関数の性質であるので、こちらも单刀直入というわけにはいかないが、微積分の中での処置という一貫性の利点はあるだろう。なお、本文では、極値の二次判定の節の後で説明したのであるが、ラグランジュ乗数法そのものは、二次判定とは独立な内容であることを注意しておく。

実対称行列 $A = (a_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ に付随した二次形式

$$Q(x) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_{jk} x_j x_k$$

を $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の関数と思う。この関数の最小値を、条件 $|x|^2 = (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1$ の下で求める。まず、拘束条件は \mathbb{R}^n の有界閉集合 S (n 次元球面) を定めるので、連続関数 $Q(x)$ を S に制限した

ものを最小にする点 $c = (c_1, \dots, c_n) \in S$ が存在する。

$$x \in S \implies \nabla(|x|^2 - 1) = 2(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

であるので、 S 上の点はすべて正則点であり、したがってラグランジュ乗数法により、

$$\nabla Q(c) = \lambda \nabla(|x|^2 - 1)|_{x=c}$$

をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。両辺の微分を計算すると

$$A^t c = \lambda^t c$$

がわかるので、 ${}^t c$ は、 λ を固有値とする A の固有ベクトルである。

あとは、通常の線型代数と同じ議論を繰り返す。すなわち、 ${}^t c$ を含む正規直交基底 $\{{}^t c, \dots\}$ を選び、これを直交行列と思ったものを T で表せば、

$${}^t T A T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

となるので、問題は、大きさがひとまわり小さくなった行列 B の処理に帰着し、数学的帰納法が扱える。

同様の方法で、エルミート行列の対角化を行うこともできる。また、次の形の一般化は mini-max 原理と呼ばれ、固有値を評価する際に威力を発揮する。

定理 G.1. A の固有値を小さい順に重複度も含めて、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ と並べるととき、

$$\lambda_k = \min_{\dim E=k} \max_{0 \neq x \in E} \frac{(x|Ax)}{(x|x)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ただし、 E は \mathbb{R}^n の部分空間を表す。

付録H 条件付き極値の二次判定

関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ の拘束条件 $\varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($1 \leq m \leq r$) の下での極値を考える。拘束条件をみたす点の集合を S とおく。点 $(a_1, \dots, a_n) \in S$ は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

の階数が r であるとき、正則点と呼ばれる。正則点 $(a_1, \dots, a_n) \in S$ が f の停留点であれば、ラグランジュ乗数法により、

$$df(a) = \sum_{m=1}^r \lambda_m d\varphi_m(a)$$

をみたす実数 λ_m (Lagrange multiplier) が存在する。正則点の付近では、陰関数定理により S のパラメータ表示

$$x_j(t_1, \dots, t_{n-r}), \quad 1 \leq j \leq n$$

が可能であるので、合成関数

$$F(t_1, \dots, t_{n-r}) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

を考えることで拘束条件なしの場合に帰着する。 F の 2 次微分は、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j}$$

である。このうち、第二項は、

$$\sum_m \lambda_m \sum_k \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j}$$

に等しく、拘束条件を二度微分して得られる関係式

$$\sum_{k,l} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j} + \sum_k \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \quad (m = 1, \dots, r)$$

を使えば、

$$-\sum_m \lambda_m \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \frac{\partial x_l}{\partial t_j}$$

となるので、これから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_i \partial t_j} = \left(f'' - \sum_m \lambda_m \varphi_m'' \right) \left(\frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j} \right)$$

を得る。ここで、 f'' は、 f の 2 次微分（すなわち、対称双線型形式）を表す。

したがって、対称双線型形式 $f''(a) - \sum_m \lambda_m \varphi_m''(a)$ を部分空間 $\ker d\varphi(a)$ に制限したもの (reduced Hessian と呼ぼう) が、拘束条件下での Hessian を与える。とくに、これが正定値であれば (a_1, \dots, a_n) は極小点を、負定値であれば極大点を与える。

以上で要点は尽くされているのであるが、次のような見方も示唆的である。もとの関数 f の変数 x_1, \dots, x_n に新たに変数 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を付け加えた関数

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{m=1}^r \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

を考えると、この停留点に対する方程式が、ラグランジュ乗数等式に拘束条件を合わせたものに一致する。この停留点におけるヘッセ行列と reduced Hessian との関係はどうであろうか。これに関して次が成り立つ。

定理 H.1. Φ のヘッセ行列の符号数は、reduced Hessian のそれに、 (r, r) を加えたものに一致する。

Proof.

$$H = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right), \quad K = - \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \right)$$

と置くと、 Φ のヘッセ行列は、

$$\begin{pmatrix} H & K \\ {}^t K & 0 \end{pmatrix}$$

であり、reduced Hessian は、 H を $\ker {}^t K$ で縮小したものになっている。行列 K の階数が r であるから、 n 次の正則行列 U と r 次の正則行列 V を適切に選べば、

$$UKV = \begin{pmatrix} 0 \\ I_r \end{pmatrix}$$

とできるので、

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^t V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & K \\ {}^t K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ {}^t B & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad UKV = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & C \end{pmatrix}$$

と書き直すことで、reduced Hessian は、 A で与えられる。さらに、

$$\begin{pmatrix} I & 0 & -B \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ {}^t B & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ -{}^t B & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & I_r \\ 0 & I_r & 0 \end{pmatrix}$$

と書きなおせば、 Φ のヘッセ行列の符号数は、reduced Hessian である A の符号数に、行列

$$\begin{pmatrix} C & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & C/2 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ C/2 & I_r \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$$

の符号数である (r, r) を加えたものになっている。

□

付録I 曲率と曲率半径

曲率半径 (radius of curvature) とは、大きくカーブしている道路に $R = 300m$ などと書いてある R のことである。曲線を円で二次近似したときの円の半径を表すというのが、その意味である。ここでは、簡単のために平面曲線について考える。また、よくあるような接線の正接角の変化率ではなく、座標変換を利用した解説を試みる。この方法は、曲面の曲率を調べる際にも有効であり、他にもいろいろ使えるのがその理由。

陰関数表示された曲線 $\varphi(x, y) = 0$ 上の正則点 (a, b) における曲率について調べてみよう。法線ベクトル $(\varphi_x(a, b), \varphi_y(a, b))$ を

$$\sqrt{\varphi_x(a, b)^2 + \varphi_y(a, b)^2} (\sin \theta, \cos \theta)$$

と表しておく。そして、法線方向を Y 軸とする新たな直交座標系 (X, Y) を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で導入する。また、関数 $\Phi(X, Y)$ を

$$\Phi(X, Y) = \varphi(X \cos \theta + Y \sin \theta, -X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

で定める。新たな関数記号を導入せずに、 $\varphi(X, Y) = \varphi(x, y)$ と書くことが多いのであるが、この左辺と右辺で φ の関数としての意味が異なり論理的には正しくないことに注意。こういう省略をなぜするかというと、座標を取り替えるたびに新たな関数記号を導入するのが煩雑なため。座標の取り方から、 $\Phi_X(A, B) = 0$, $\Phi_Y(A, B) > 0$ である。そこで、陰関数定理を適用して、 $\Phi(X, Y) = 0$ を (A, B) の付近で Y について解いて、 $Y = f(X)$ ($B = f(A)$) と表しておくと、

$$\Phi(X, f(X)) = 0$$

が恒等的に成り立つ。これを X について微分することで、

$$\begin{aligned} \Phi_X(X, f(X)) + \Phi_Y(X, f(X))f'(X) &= 0, \\ \Phi_{XX}(X, f(X)) + 2\Phi_{XY}(X, f(X))f'(X) + \Phi_{YY}(X, f(X))(f'(X))^2 + \Phi_Y(X, f(X))f''(X) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。これもしばしば

$$\begin{aligned} \Phi_X(X, Y) + \Phi_Y(X, Y) \frac{dY}{dX} &= 0, \\ \Phi_{XX}(X, Y) + 2\Phi_{XY}(X, Y) \frac{dY}{dX} + \Phi_{YY}(X, Y) \left(\frac{dY}{dX} \right)^2 + \Phi_Y(X, Y) \frac{d^2Y}{dX^2} &= 0 \end{aligned}$$

と略記される。今の場合、 $\Phi_X(A, B) = 0$ であるから、

$$f'(A) = 0, \quad f''(A) = -\frac{\Phi_{XX}(A, B)}{\varphi_Y(A, B)}$$

がわかり、 $Y = f(X)$ に対する二次近似式として、

$$Y = B - \frac{\Phi_{XX}(A, B)}{2\Phi_Y(A, B)}(X - A)^2$$

を得る。ここで、同じ二次近似式を与える円の方程式を求めてみよう。そのためには、 $\Phi_{XX}(A, B)/\Phi_Y(A, B)$ の符号で場合を分ける必要があるが、どちらでも違いがないので、これが負である場合を考えよう。点 (A, B) で直線 $Y = B$ に接することから、 $(X - A)^2 + (Y - B - R)^2 = R^2$ の形であることがわかり、これを Y について解いて近似項を求めるとき、

$$Y = B + R - \sqrt{R^2 - (X - A)^2} = B + \frac{1}{2R}(X - A)^2 + \dots$$

となる。そこで両者を比較して、曲率半径が

$$R = \left| \frac{\Phi_Y(A, B)}{\Phi_{XX}(A, B)} \right|$$

で与えられることがわかる。

最後に、これを φ の微分を使って書きなおす。

$$\begin{aligned} \Phi_X(X, Y) &= \varphi_x(x, y) \cos \theta - f_y(x, y) \sin \theta, \\ \Phi_Y(X, Y) &= \varphi_x(x, y) \sin \theta + f_y(x, y) \cos \theta, \\ \Phi_{XX}(X, Y) &= \varphi_{xx}(x, y) \cos^2 \theta - 2\varphi_{xy}(x, y) \cos \theta \sin \theta + \varphi_{yy}(x, y) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

に、 $\sin \theta = \varphi_x(a, b)/\sqrt{\varphi_x(a, b)^2 + \varphi_y(a, b)^2}$, $\cos \theta = \varphi_y(a, b)/\sqrt{\varphi_x(a, b)^2 + \varphi_y(a, b)^2}$ を代入すると、曲率を表す公式

$$-\frac{\varphi_y^2 \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_x^2 \varphi_{yy}}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{3/2}}$$

が得られた。曲率半径は、この絶対値の逆数である。