

積分の技法

山上 滋

2019年1月30日

1 はじめに

「微分は手続き、積分は手探り」

具体的に与えられた関数の微分は、手間さえ惜しまなければ、確実に計算することができる。コンピュータでも処理可能な「手続き」に過ぎない。これに比して、積分の方は、具体的な計算が可能であるものは、むしろ限られており、「うまく行けばラッキー」の試行錯誤の世界である。この意味で、より「人間らしい」と言えるかも知れない。

積分を具体的に計算する上でまず知っておくべきは、具体的な関数を微分した結果としてどのような関数が得られるのか、という点である。これは、もちろん、際限がないのであるが、基本的な微分の公式を積分の公式に転化させるという考え方方が重要である。

2 微分の復習

高校レベルで覚えるべき微分の基本公式は次の通り。

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\log|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

たったの5種類に過ぎない。あとは、これらを組み合わせて計算するだけである。そのためには、2つの「微分の計算技法」を知っておかなければならない。

「合成関数の微分」と「積の微分」である。欲を言えば、これに「逆関数の微分」が加わると完璧である。

$$\frac{d}{dx} \left(f(g(x)) \right) = f'(g(x))g'(x), \quad \frac{d}{dx} \left(f(x)g(x) \right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

例題 2.1. $\frac{1}{f(x)}$ であれば、 $\frac{1}{t}$ に $t = f(x)$ を代入した合成関数であると見て、

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \left(\frac{d}{dt} t^{-1} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

と計算する。こういった計算は基本的であるので、一々置き換えなくても

$$\frac{d}{dx} (f(x))^{-1} = -(f(x))^{-2} f'(x)$$

程度の暗算で処理できるように慣れておくべきである。負のべきも含めて

$$\frac{d}{dx} (f(x))^n = n f(x)^{n-1} f'(x)$$

である、という認識は重要である。例えば、 $(x^2 + x + 1)^5$ の微分は、展開することなく、

$$\frac{d}{dx} (x^2 + x + 1)^5 = 5(x^2 + x + 1)^4 (2x + 1)$$

と計算する。

例題 2.2. 合成関数の微分と積の微分の公式を組み合わせると、「商の微分公式」が出現する。

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x) \left(-(g(x))^{-2} g'(x) \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

この公式は覚える必要はなく、例えば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x+2}{x^2+1} \right) &= \frac{d}{dx} \left((x+2)(x^2+1)^{-1} \right) = (x^2+1)^{-1} + (x+2) \left(-(x^2+1)^{-2}(2x) \right) \\ &= \frac{(x^2+1) - 2x(x+2)}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

のように計算できれば十分である。他に、「準公式」である

$$(\tan x)' = \frac{d}{dx} (\sin x (\cos x)^{-1}) = (\sin x)' (\cos x)^{-1} - \sin x (\cos x)^{-2} (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

のようなものもこの範疇に入るか。

例題 2.3. 正数 $a > 0$ に対して、 $a = e^{\log a}$ であるから、合成関数の微分により、

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = (\log a) e^{x \log a} = a^x \log a$$

と計算できる。

他の組み合わせ例として、

$$(e^{ax} \cos x)' = ae^{ax} \cos x - e^{ax} \sin x$$

といったものもある。

原始関数と不定積分の関係

$$f(x) = F'(x) \iff F(x) = \int f(x) dx$$

から、微分の結果は、即、積分の結果に読み替えることができる。

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1), \\ \int \frac{1}{x} dx &= \log |x|, \\ \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax}, \\ \int \cos x dx &= \sin x, \\ \int \sin x dx &= -\cos x.\end{aligned}$$

3 置換積分

合成関数の微分の公式

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))g'(t)$$

を積分の形に書き直せば、

$$\int F'(g(t))g'(t) dt = F(g(t)).$$

ここで、 $f(x) = F'(x)$ とおいて、 $F(x) = \int f(x) dx$ に注意して書き改めると、

$$\int f(g(t))g'(t) dt = \left(\int f(x) dx \mid x = g(t) \text{ を代入したもの} \right)$$

となる。言い換えると、不定積分 $\int f(x) dx$ で、変数 x を $x = g(t)$ に置き換えたものは、

$$\int f(g(t))g'(t) dt$$

という形の積分に等しい。これを「置換積分」(の公式)という。

$g'(t)$ の部分を $\frac{dx}{dt}$ と (少し愛昧に) 書くと、

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt$$

という形になって、記憶するのに便利である。

例題 3.1.

(i) 不定積分

$$\int x \sqrt{2x - 1} dx$$

の変数に $x = (t + 1)/2$ を代入した結果を t に関する積分の形で書いてみると、

$$\int \frac{t+1}{2} \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^{3/2} + t^{1/2}) dt.$$

(ii) 不定積分

$$\int f(x) dx$$

の変数に $x = t^2$ を代入したものを t についての積分の形に書いてみると、

$$\int f(t^2) \frac{dx}{dt} dt = 2 \int f(t^2) t dt.$$

また、 $x = \sin t$ という「変数変換」を施すと、

$$\int f(\sin x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(\sin t) \cos t dt.$$

(iii) 不定積分

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

に $x = g(t)$ を代入すると、

$$\log |g(t)| = \int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{g'(t)}{g(t)} dt$$

となる。具体的には、

$$\int \tan t dt = - \int \frac{(\cos t)'}{\cos t} dt = - \log |\cos t|$$

のように使う。

以上のような計算を成功させる際のこつは、塊で出てくる量は、塊を新たな変数と見て書き直してみる、ことである。例えば、

$$\int e^{\sin t} \cos t dt$$

という積分を何とかしようと思ったら、とりあえず、「塊」に見える $\sin t$ を $x = \sin t$ とおいて、積分の変数を t から x に変更するとどうなるかと考える。 $\frac{dx}{dt} = \cos t$ であるから、上の積分は

$$\int e^x \frac{dx}{dt} dt = \int e^x dx = e^x$$

とほぐれて、

$$\int e^{\sin t} \cos t dt = e^{\sin t}$$

と（運良く）求まる。

例題 3.2. 不定積分

$$\int t \sqrt{2t-1} dt$$

で、 $x = 2t - 1$ すなわち $t = (x+1)/2$ という置き換えを試みると、

$$\int t \sqrt{2t-1} dt = \int \frac{x+1}{2} \sqrt{x} \frac{dt}{dx} dx = \int \frac{x+1}{2} \sqrt{x} \frac{1}{2} dx.$$

置換積分の関係式

$$\int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(x) dx$$

は、あたかも

$$\frac{dx}{dt} dt = dx$$

が成り立つが如く計算してよいことを示唆している。このことは、1次の近似式

$$\Delta x \doteq \frac{dx}{dt} \Delta t$$

と密接に関連しており、無限小 dx, dt の間に成り立つ等式であるとみることも可能。微積分発展の初期の段階では、このような「無限小」の扱いによるものが主流であったのだが、その解釈をめぐる混乱を避けるという意味合いもあって、正式の内容から排除され、現在に至っている。高校数学においては、唯一、置換積分の計算において、 $x = g(t)$ という変数変換に対して、

$$dx = g'(t) dt \iff dt = \frac{1}{g'(t)} dx$$

と表示するところに、その遺風を見出すのみ。

簡単な置換積分は、一々変数の置き換えをせずに、

$$\int (x^2 + 1)^3 x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^3 d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4$$

と計算するのも一法。

4 部分積分

積分の次なる技法は、積の微分の公式に由来するもので、「部分積分」と称される。積の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を

$$\int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)$$

と書き直しただけのものである。これを、さらに

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

と言い換えたものを、「部分積分の公式」として厳(おごそ)かに学習することが多いようであるが、これをそのまま覚えることは、まったく必要ない。もっと過激に「百害あって一利なし」と断言しておこう。この「部分積分法」なるものは、積の微分の公式を積分計算に転用するための技法と思うべきで、上に掲げたような「公式」を暗記しても使いこなせるようにはならないのである。

それでは、どのような技法かというと、積分を求めたい関数があったとして、ただし、即座にはその原始関数が見えてこない場合に、苦肉の策として、その原始関数を求めたいと思っている関数が「積の微分の片割れ」として出現する場合を調べ、積分計算に利用する、というものである。

たとえば、 $\log x$ という関数。微分が $\log x$ となるものは、基本公式の中には出てこない。そこで、積の微分の公式を思い描いて、試みに、

$$(x \log x)' = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1$$

と計算してみる。この右辺に、問題の関数 $\log x$ が現れるところがポイント。さらに、もう一方の片割れが $x \times x^{-1} = 1$ と、かわいらしいものになっているところがもう一つの

ポイント。ラッキーなのである。たまたまなのである。さて、全体を x で積分すれば、

$$x \log x = \int \log x \, dx + \int 1 \, dx = \int \log x \, dx + x$$

となるので、これから、

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

を得る。合っているかどうか心配であれば、右辺を微分して $\log x$ が復活することを確かめてみればよい。この当たり前の検算をしない（知らない？）輩が多すぎるような。

部分積分が活躍するもう一つの状況として、積分の間の相互関係がある。例として、

$$f(x) = \int e^x \sin x \, dx, \quad g(x) = \int e^x \cos x \, dx$$

を求める、という問題を考える。まず、積の微分の片割れに $e^x \sin x$ が出現するものとして、

$$(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$$

を積分すると、

$$e^x \cos x = g(x) - f(x)$$

を得る。同様に、

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

を積分すると、

$$e^x \sin x = f(x) + g(x)$$

を得るので、この 2 つの関係式を連立させて、 $f(x), g(x)$ について解くと、

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x), \quad g(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

問 1. 不定積分

$$\int x \sin x \, dx$$

を「部分積分の方法」で求めてみよ。さらに、2 つの不定積分

$$\int x^2 \cos x \, dx, \quad \int x \sin x \, dx$$

を「部分積分の方法」により結びつけることで、不定積分

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

を求めてみよ。

5 定積分の技法

置換積分と部分積分の技法は、定積分に適用することで、応用範囲がさらに増す。置換積分の関係式

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t))$$

を $a \leq t \leq b$ という範囲の定積分の計算に利用すると、

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

となる。ここで、右辺の量は

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

と書き直せるので、結局

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

を得る。積分の範囲が変化していることに注意。これをそのまま覚えようとしても、積分範囲の変化の違いまで認識するのは大変である。ここは、「積分の変数変換」であるという視点に立って、 t 変数が $t = a$ から $t = b$ に変化するとき、 x 変数は、 $x = g(a)$ から $x = g(b)$ に変化すると考えると良い。

例題 5.1. 変数変換 $x = \tan t$ を用いて、定積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

を求めてみよ。

このような変数変換をどうして思いついたかは、話すと長くなるので、とりあえず詮索せずに素直に計算してみよう。準備の計算は、

$$x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

であり、これだけでも少しからくりが見えて来るだろう。さらに x が 0 から 1 に変化するとき、 t は、0 から $\pi/4$ まで変化することに注意すると、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/4} 1 dt = \frac{\pi}{4}$$

のように意外とあっさり計算できてしまった。

部分積分の技法を定積分に適用して、定積分の値を相互に関連付ける等式を導くこともある。

例題 5.2. 自然数 n ごとに、定積分

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

を考える。まず、 $n = 0$ のときは、

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

である。次に、

$$(x^n e^x)' = nx^{n-1} e^x + x^n e^x$$

を x で積分すると、

$$nI_{n-1} + I_n = [x^n e^x]_0^1 = e \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となるので、

$$I_1 = e - I_0 = 1, \quad I_2 = e - 2I_1 = e - 2, \quad I_3 = e - 3I_2 = 6 - 2e$$

などと、順繰り求めることができる。このような関係式を「積分の漸化式」という。

問 2. 定積分

$$\int_0^\pi \frac{\cos t}{1 + (t - \pi/2)^2} dt$$

に変数変換 $x = t - \pi/2$ を施してみて、その積分値を求めよ。

例題 5.3. 定積分

$$\int_{-1}^1 x^2 dx$$

で $t = x^2$ という置換を考えると、 x が -1 から 1 まで変化する間に t は 1 から 1 へと変化し、 $dt = 2x dx$ であるから、

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_1^1 \frac{t}{2x} dt = 0$$

である、としては大たわけである。問題点を指摘せよ。

6 不定積分と定積分

不定積分

$$\int f(x) dx$$

は、 x の関数である。一方、定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

の方は単なる数であり、その結果に x が現れることは決してない。関数 f と積分の上下端 a, b だけで決まる量なので「積分変数」として、他の、たとえば t を使っても同じ結果となる。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

ということである。

受験生がよくやる間違いの一つに、次のようなものがある。

$$(x^n \log x)' = nx^{n-1} \log x + x^{n-1}$$

を $1 \leq x \leq e$ で（定）積分して、

$$x^n \log x = n \int_1^e x^{n-1} \log x dx + \int_1^e x^{n-1} dx.$$

右辺に見える x は「見かけの変数」で、実際には含まれていない。それが左辺に x の式として堂々と現れて、全然変とも思わない態度の答案があれば、採点者（數学者）は怒り心頭に発し、「無礼者」と叫び、手打ちにするかも知れない。真剣勝負の場で欠伸（あくび）をするようなものである。失礼なのである。首がいくつあっても足りない。

—気楽に始め、執念で終える