

問題 1 3 は解答用紙の表に、問題 2 4 は裏に解答すること。

1 次のノルム空間のうち、完備でないものを挙げ、その理由を述べよ。

- (i) 連続関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xf(x) = 0$  となるもの全体に、ノルムを  $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$  で定めたもの。
- (ii) 連続関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  で  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  となるもの全体に、ノルムを  $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$  で定めたもの。
- (iii) 連続関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  全体の作るベクトル空間に、ノルムを

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$$

で定めたもの。

2  $\mathbb{R}$  上の周期  $2\pi$  の可測周期関数  $f(x)$  で

$$(f|f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

をみたすもの全体の作るヒルベルト空間を  $\mathcal{H}$  で表す。実数  $a$  に対して、 $\mathcal{H}$  におけるユニタリー作用素  $T_a$  を  $(T_a f)(x) = f(x-a)$  で定める。以下の問に答えよ。

- (i)  $f \in \mathcal{H}$  に、そのフーリエ係数を対応させることで得られるユニタリー写像  $U: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  を具体的に与えよ。
- (ii)  $UT_a U^*$  を  $\ell^2(\mathbb{Z})$  における掛け算作用素として表示せよ。
- (iii) 実数  $a$  に対して、有界作用素  $e^{ia}T_0 + T_{2a}$  のノルムを求めよ。(ヒント:  $a/\pi$  が有理数か否かで場合分けする。)

3 複素数  $z \neq 0$  に対して、 $k \in \mathbb{Z}$  の関数を

$$\varphi(k) = \begin{cases} z^k & \text{if } k \geq 0, \\ \bar{z}^{|k|} & \text{if } k < 0 \end{cases}$$

で定める。 $\{\varphi(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が、群  $\mathbb{Z}$  上の正定値関数となる  $z$  を全て求めよ。

4 エルミート作用素のスペクトル分解とはどういうものであるかを有限次元の場合に説明し、それを無限次元に拡張する際の問題点について述べよ。