2012/7/19

問 1. 次のノルム空間は完備でない。これを確かめよ。

(i) 微分可能関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ で $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ となるもの全体に、ノルムを $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$ で定めたもの。

(ii) 複素数列 $x = (x_n)_{n\geq 1}$ で $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |x_n| < \infty$ となるもの全体に、ノルムを $\|x\| = \sup\{|x_n|; n \geq 1\}$ で定めたもの。

問 2. $\mathbb{R}$ 上の複素数値可測関数 $f(x)$ で、$f(x + 2\pi) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ かつ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

をみたすもの全体の作るヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ で表す。ただし、V の内積は

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

で定め、ルベーグ測度に関してほとんどいたるところ等しい関数は同一視するものとする。

また、$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $e_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ に付随したユニタリー写像 $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$ を $U\xi = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k e_k$ で定める。

以下の問に答えよ。

(i) $U^* T_a U$ を $\ell^2(\mathbb{Z})$ における掛け算作用素として表示せよ。

(ii) 有界作用素 $e^{i\theta} T_0 + T_{2\theta}$ のノルムを求めよ。ただし、θ は実数で、T_a は (i) で定義した作用素である。（ヒント：θ/π が有理数か否かで場合分けする。）

問 3. 有界区間 (a, b) 上の自乗可積分な関数の作るヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における有界作用素 T を $T : f(t) \mapsto tf(t)$ で定める。

(i) T は固有値を持たないことを示せ。

(ii) T のスペクトルを求めよ。