

ルベーグ積分 2018

山上 滋

2018 年 11 月 15 日

以下の内容は、2007年版「ルベーグ積分速講」そのものと言って良いのだが、相も変わらず「測度」が蔓延している積分論の業界にあって、その見直しもままならぬまま早10年余、店じまいの前に一彫なりとも手を入れて、人の迷惑も顧みぬ置土産となさん。——— 2018 年如月の望月のころ

とうとうやって来ました「ルベーグ積分」。避けていたわけではないのですが、できればあまりしたくないというのが本音でした。こういった類の授業を積極的に担当したいと思う人は、きっと良心的な先生なのでしょう。不良教師の一人としては、「教えて身につくものでなし」という縦言をつぶやくだけです。ただささやかな救いは、以前から、そういう状況に立ち至った場合に試してみたいと思っていたアイデアがあったことでしょうか。

いわゆるルベーグ積分の構成を Peano-Jordan-Borel 路線の流れのなかで Lebesgue が達成したように、「測度」の概念自体はとても素朴な感じがします。できるだけ沢山の図形に面積を付与したいということなので。技術的なレベルの違いはあっても、Archimedes の昔からあった発想の自然な延長線上にあるわけで、ある意味正統な方法でもあったと言えるでしょう。

一方で、積分なるものは、Gallilei, Pascal, Torricelli, Fermat 等の錚々たる達人の手を経て Newton・Leibniz によって最初の集大成がなされました。その後も、微積分の発展に伴って概念の精密化への要求が高まり、Cauchy によって、今ある微積分の内容がほぼ確立しました。もちろん、その中には、和の極限としての積分の定義も含まれています。

さて、測度（面積・体積）と積分ですが、「にわとりと卵」の例えにも似て、お互いが他を規定するといった表裏一体の関係にあります。面積を計算しようと思ったら積分に訴えるのが常道ですし、一方、積分は、対象となる関数のグラフの与える図形の面積とみなせるわけで、どちらがより本質的であるとは一概に言えません。

現在広く行われているルベーグ積分の導入方法は、測度論から入り積分の諸性質に至るという、測度優先論が多数派を占めているようです。これは、ひとつには、現代確率論が、測度論を基礎に据えることで長足の進歩を遂げた、という事情が反映していることに理由があるのでしょう。実際、世にある積分論の教科書は、確率論の専門家の手になるものが多いように思われます。

翻って、もうひとつの方向性である「積分から測度」ですが、これも実は、ルベーグ積分論の比較的初期の段階で Daniell 等によって確立されています。この方法の特色は、積分の諸定理に至る道程をかなり短縮できる点にあります。「積分の計算・評価が効率的かつ安全にできれば、測度論はあってもなくても良い」といった利用者には、福音となり得るものでしょう。そこまで功利的にならなくても、関数主体の方法は、測度を導入する上でも教育的に優れた点があるように思っておりました。この「積分から測度へ」というスローガンの下、用意したのが以下の講義ノートです。

参考書をいくつか挙げておきます。

- 伊藤清三「ルベーグ積分入門」、裳華房 (1963) (¥4,200)
- 吉田洋一「ルベーグ積分入門」、培風館 (1965) (¥2,600)
- 溝畠 茂「ルベーグ積分」、岩波全書 (1966)
- 山崎圭次郎「現代微積分」、現代数学社 (1972) (¥2,700)
- 竹之内脩「ルベーグ積分」、培風館 (1980)
- 垣田高夫「ルベーグ積分しょーと・こーす」、日本評論社 (1995)
- 洲之内治男「ルベーグ積分入門」、内田老鶴舎 (2000) (¥2,500)
- 志賀徳造「ルベーグ積分から確率論」、共立出版 (2000) (¥3,200)
- 盛田健彦「実解析と測度論の基礎」、培風館 (2004) (¥3,600)
- 小谷眞一「測度と確率」、岩波書店 (2005) (¥4,000)
- 吉田伸生「ルベーグ積分入門」、遊星社 (2006) (¥4,000)
- P. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand (1950)
- L.H. Loomis, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand (1953)
- N. Bourbaki, Intégration, Hermann (1965)
- W. Rudin, Real and Complex Analysis, Academic Press (1970)
- A. Weir, General Integration and Measures, Cambridge University Press (1975)
- H.L. Royden, Real Analysis, 3rd ed., Prentice-Hall (1988)
- F. Riesz and B. Nagy, Functional Analysis, Dover (1990)
- E. Pap, Handbook of Measure Theory, vol. I, vol. II, Elsevier (2002).

[伊藤] は定番であるが、今となっては少し重い感じもする。しかし、いつの間に、こんなに値が上がったのだろう。隔世の感である。

[吉田(洋)] は、ユークリッド空間のルベーグ積分を中心に、点集合論から説き起こしてあって、「入門」にふさわしい内容であろうか。ただ、反例は押さえてあるのだが具体的な積分の計算例に乏しい。

[溝畠] もユークリッド空間の場合を中心であるが、測度よりも積分に力点をおいた構成 (F. Riesz 方式) になっていて、積分論の利用者には便利かも知れない。

[山崎] 数学者養成のための微積分続論といった趣のものであるが、その中で Bourbaki 方式の積分 (ちなみに本の著者は、これを「Daniel」方式と呼んでいる) が簡にして要領を得た形で述べてある。しばらく版が絶えていたのだが、最近めでたく復刊された。

[竹之内] は、短いながらも歴史的な背景も含めて実に良くまとめられており、お薦めである。ただ、積分の定義の仕方 (W.H. Young 方式) が他書と比べて少うし分かり難い（線型性が明白でない）のが玉に瑕。

[垣田] も Riesz 方式が要領よくまとめられており悪くないと思うのだが、現在絶版とはこれいかに。世に偏見の蔓延すること甚だし、ということであろうか。

[洲之内] は、[溝畠] あるいは [垣田] をより易しくした、微積分の続編といった感じの本である。リーマン積分・ルベーグ積分に拘らずに積分計算の経験を積むのに良いかもしれない。具体的な積分計算の経験に乏しい者が、測度を気にしてもしようがないではないか、という著者の声が聞こえてきそうで、最近の状況を見るにつけ、先見の明ありと思うのだが、さて。

[志賀] も基本事項 (収束定理 + Fubini + Riesz-Fisher) のみであるが、100ページ程度にコンパクトにまとめられていて、速習向けといったところ。

[小谷] は、[志賀] をより本格的にした感じの教科書。ただ、具体的な積分の計算例は含まれていない。あくまで、確率論を目指したということか。

[盛田] は、細部に拘った格調高い内容で、ルベーグ積分のセカンドブックとして良いかも知れない。

[吉田（伸）] は、さまざまな具体例が特徴の良心的な内容の本である。ルベーグ積分は理解しただけではだめで使いこなせないといけない、という至極もつともなしかし意外に見過ごされがちな方針に基づいているようで、随所に見られる歴史的コメントも面白い。

[Halmos] は、英語の本としての定番であるか。測度論の応用としての確率論関係の話題も多く含み、内容的には「測度と確率」にぴったりなのであるが、多分に高踏的なところがどうも好みに合わぬ。

[Loomis] むかしむかし、[伊藤]・[溝畠]・[Rudin] の後に読んで、目からうろこの思いをした本。タイトルからもわかるように、具体的な例は一切なかったと記憶しているが、これはこれでとても潔く、Daniell 積分の流儀が簡潔に明確に記述されている。簡潔すぎてロジックが少しふらついているところもあるようであるが、まあ、困るほどのことではない。

[Bourbaki] ブルバキの積分である。極端に一般的でしかも特殊であるという、奇妙な感覚の構成ではあるが、いわゆる Riesz-Radon の路線を徹底的に一般化してあり、どうも好きになれなかった記憶がある。しかしながら、今、改めて読み直してみると、Daniell 方式と最も親和性が高い教科書という気がする。

[Rudin] は、実解析としての積分論と複素解析それとフーリエ解析の基本が簡潔にしかも不足なくまとめられていて、お薦めである。具体的な積分の計算は、複素解析で行うのが簡明であることがしばしばである。縄張りにこだわる必要はないといったことを知る上でも役に立つ。

[Royden] これにも Daniell 積分の導入解説があるものの、ほんの付け足しの感じで印象深いものではない。本 자체は良いのであるが。

目次

1	実数からリーマン積分へ	4
2	コンパクト集合と連続関数	7
3	連続関数と一様収束定理	12
4	ベクトル束と積分	14
5	可積分関数と積分の延長	19
6	積分の収束定理	23
7	単調完備化	26
8	可測集合と可測関数	29
9	零関数と零集合	35
10	繰り返し積分の公式	41

A	測の細道	45
B	測の拡張工事	47

自然数の集合 \mathbb{N} には 0 は含めないでおく。他に良く使われる集合の記号として、

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \mathbb{R} = \text{実数全体}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty], \quad \mathbb{C} = \text{複素数全体}.$$

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad a_n \downarrow a, \quad a_n \uparrow a.$$

実数値関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$[a < f < b] = \{x \in X; a < f(x) < b\}.$$

X が位相空間であるとき、

$$[f] = \overline{[f \neq 0]}, \quad [f \neq 0] = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$$

* 印のついた項目は省略しても一通りのことが学べるようになっている、はずである。

1 実数からリーマン積分へ

微積分をはじめとする解析学を深く理解しようと思ったならば実数の何たるかを避けて通ることはできない。現代数学における実数の性質として重要なものは次の 3 つ。

- 加減乗除の代数演算。
- 大小関係に基づく順序構造。
- 極限に関する連続性（完備性）

代数構造は、まあ良いであろう。順序構造に関連して、 $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ という記号を導入する。これは、いわゆる二項演算になっており、結合法則と交換法則をみたす。とくに、 $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ といったものが括弧のつけ方によらずに定まる。実際、

$$a_1 \vee \dots \vee a_n = \max\{a_1, \dots, a_n\}, \quad a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \min\{a_1, \dots, a_n\}.$$

実数からなる集合 A を考える。それが有界であれば、その上下の限界点として上限・下限という 2 つの実数 $\sup A$, $\inf A$ が決まることは、「実数論」で学んだ。限界点が A に属していれば A の最大値・最小値という言い方ができるのであるが、そうでない場合も、実質的な最大値あるいは最小値という意味で、上限・下限が便利に使われる。

A が有界でない場合、例えば A が上に有界でなければ $\sup A$ は存在しないのであるが、その場合でも $\sup A = \infty$ という量があたかもあるが如く扱えると何かと便利である。 ∞ は $+\infty$ とも書く。同様に、 A が下に有界でなければ、 $\inf A = -\infty$ と書くことにする。この $\pm\infty$ は、一見、有限の存在を超えたものではあるが、視覚的に認識することは容易である。例えば、 $y = \arctan x$ のグラフを思い描いてみよ。そこでは、 $x = \pm\infty$ が有限の境界点 $y = \pm\pi/2$ に対応することが見て取れる。実数直線 \mathbb{R} にこのような仮想的点を付け加えた集合を拡大実数直線 (extended real line) と言って、 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ という記号で表わす。

まとめると、 A が有界であるなしに問わらず $\sup A$, $\inf A$ が $\overline{\mathbb{R}}$ の元として定まるということである。次は、定義から明らか。

$$A \subset B \implies \sup(A) \leq \sup(B), \quad \inf(A) \geq \inf(B).$$

この大小関係の対応を考慮して、 $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$ と定める。

実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$\sup\{a_n; n \geq 1\} \geq \sup\{a_n; n \geq 2\} \geq \dots$$

であるから、その極限値を $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ という記号で表わし、数列 $\{a_n\}$ の上極限 (upper limit) と呼ぶ。同様に、下極限 (lower limit) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ を極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \geq n\}$ によって定める。これらも、 $\overline{\mathbb{R}}$ の元として確定する。

命題 1.1. 実数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ であり

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{for } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

一般に、実数列 $\{a_n\}$ で、 $a_j \leq a_k$ ($j \leq k$) であるものを増加列 (increasing sequence)、 $a_j \geq a_k$ ($j \leq k$) であるものを減少列 (decreasing sequence) という。増加列 $\{a_n\}$ の極限が a であるとき $a_n \uparrow a$ と書く。同様に、減少列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき、 $a_n \downarrow a$ と書く。

注意 1. 増加列・減少列の意味を「厳しく」とって、 $a_j < a_k$ ($j < k$) などを指すことに使い、上の意味での増加列を「非減少列」などと呼ぶことも多い（とくに欧州系の言語では）のであるが、論理的にいって好ましいとは思えない。似たようなものとして「非負」というのもあるが。

次に級数について考えよう。本質を把握するために、実数族 $\{a_i\}_{i \in I}$ を扱う。まずは、

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sup\left\{\sum_{i \in F} |a_i|; F \subset I \text{ is finite}\right\} \in [0, \infty]$$

と定める。この値が有限である $\{a_i\}_{i \in I}$ は総和可能 (summable) であると言う。総和可能である場合に、その総和 (sum) を

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i \vee 0 - \sum_{i \in I} (-a_i) \vee 0 \in \mathbb{R}$$

と定義する。

総和はその作り方から和をとる順序によらない。添え字集合 I が

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$$

と分割されているならば、各 $j \in J$ ごとに $\{a_i\}_{i \in I_j}$ は総和可能で、さらに $\{\sum_{i \in I_j} a_i\}_{j \in J}$ も総和可能となり、次の分割和公式が成り立つ。

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right).$$

問 1. $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ であるならば、 $\{i \in I; a_i \neq 0\}$ は可算集合である。これを確かめよ。仮に可算集合だけを扱うにしても、表示の自由度を確保しておくことは意味がある。例えば、二重級数の和とか。

絶対収束級数は総和を表わすのであるが、条件収束級数は和というよりも数列の極限と理解すべきである。

ここで、いわゆるリーマン積分の復習をしておこう。（以下で必要となるのは、連続関数の場合であるから、コーシーの積分と言った方が正確かも知れない。）有限区間 $[a, b]$ の上で定義された関数の定積分について考える。まず、区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ に対して、その最大幅を $|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ で表す。そして

$$\bar{f}_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \underline{f}_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

とし、次なる量を考える。

$$\overline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \bar{f}_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{S}(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1}).$$

補題 1.2. Δ を Δ' , Δ'' の細分割とすると、

$$\underline{S}(f, \Delta') \leq \underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f, \Delta'').$$

そこで、

$$\overline{S}(f) = \inf\{\overline{S}(f, \Delta); \Delta\}, \quad \underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}(f, \Delta); \Delta\}$$

とおいて Darboux の上積分・下積分 (upper and lower integrals) と呼ぶ。不等式 $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$ が常に成り立つことに注意する。

定義 1.3. 関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が、 $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ なる条件を満たすとき、リーマン積分可能であるといい、この共通の値を

$$\int_a^b f(x) dx$$

という記号で表わし、関数 f の積分 (integral) という。

注意 2. 上の定義は、Riemann が与えた定義 (1857) の Darboux による言い換え (1875) である。

同様の考え方は、2 变数以上の場合にも有効で、矩形領域上のリーマン重積分の定義に到達する。

Riemann による積分可能条件の分析はそれなりにややこしく、後ほど展開するルベーグ積分論に吸収されてしまうことを思えば、この段階で深入りするのは得策ではない。以下のアプローチで必要なのは、関数 f が連続関数の場合があるので、その結果を先取りしてここで述べておこう。

定理 1.4. 連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は、リーマン積分可能で、次が成り立つ。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_j)(x_j - x_{j-1}).$$

リーマン積分自体は、変域も値域も有界である場合に意味がある概念であるが、さすがにそれだけでは何かと不便もあり、有界な場合からの極限として広義積分 (improper integral) なるものも併用される。後ほど検討するルベーグ積分においては、この広義積分の内で「絶対収束」する場合、すなわち、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

である場合は、通常の積分と同等に扱うのが自然である。

一方で、一変数積分においては、 $\int_0^\infty |f(x)| dx = \infty$ かつ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$$

が存在するといった状況にも、しばしば遭遇することになるのだが、この場合の広義積分は、上の絶対収束する場合と概念的に区別されるべきものである。

例 1.5. (i) 良い広義積分 (普通に積分と呼ぶべきもの) と (ii) 悪い広義積分 (普通の意味での積分とはならないもの) の例。

(i)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x} dx.$$

2 コンパクト集合と連続関数

次の定理は実数の連続性と同等の内容のもので、その証明の要点は「絞り出し論法」^{*1}にある。

定理 2.1 (Bolzano). 有界実数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束する部分列を取り出すことができる。ここで部分列とは、 \mathbb{N} から \mathbb{N} への強増加関数 $k \mapsto n_k$ を使って、 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ と表わされる数列のこと。

系 2.2. ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の有界閉集合 K は次の性質をもつ： K 内の点列は、 K の点に収束する部分列を含む。

定義 2.3. 距離空間 (X, d) の部分集合 K で、上の性質をもつものをコンパクト (compact) であるという。 X 自身がコンパクトであるとき、距離空間はコンパクトであるという。

また、 $a \in X$ ごとに、閉球 $\overline{B}_r(a)$ がコンパクトであるような $r > 0$ が存在するとき、局所コンパクト (locally compact) であるという。ユークリッド空間 \mathbb{R}^n がその典型例。なお、距離空間の記号については、後にある説明を参照。

ここで距離空間 (metric space) の用語について復習しておこう。以下、より抽象的な状況に出くわしても、距離空間あるいはもっと具体的にユークリッド空間 (それも 1・2 次元) を思っておけば十分である。ユークリッド空間では当たり前と思える主張に遭遇したなら、先へ進むことも可能であり、そうすることで準備工作的な部分をかなり省略できるはずである。

距離関数 (metric) $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ とは、次を満たすものをいう。

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) [三角不等式] $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

例 2.4.

- (i) $X = \mathbb{R}^n$ の距離 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$.
- (ii) * 集合 X の上で定義された有界関数全体 $B(X)$ の上の距離

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}.$$

- (iii) * 集合 X の上の距離

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y, \\ 1 & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

これは、埋め込み $X \ni x \mapsto \delta_x \in B(X)$ から誘導される距離に他ならない。

^{*1} 基本的かつ汎用性のある論法であるにもかかわらず、不思議なことに名前がない。「追い込み」と言ってもよいか。

例 2.5. * 距離空間 (X, d) は、 $\sup\{d(x, y); x, y \in X\} < \infty$ であるとき、有界であるという。正数 $M > 0$ に対して、 $M \wedge d$ は有界な距離関数を与える。有界距離空間 (K, d_K) に対して、 $X = K^{\mathbb{N}}$ は距離空間：

$$d_X(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} d_K(x_n, y_n).$$

問 2. * K がコンパクトであれば、 X もコンパクトであることを対角線論法により示せ。

問 3. * $K = \{0, 1, \dots, p-1\}$ に対して、 $K^{\mathbb{N}}$ と実数 $t \in [0, 1]$ の p 進展開とを関連付けよ。

命題 2.6. * 距離空間 X において

- (i) A, B が X のコンパクト部分集合であれば、 $A \cup B$ もコンパクト。
- (ii) コンパクト部分集合 $K \subset X$ の閉部分集合もコンパクト。

問 4. * 上の性質を確かめよ。

距離空間 (X, d) において、

$$B_r(a) = \{x \in X; d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}$$

によって $a \in X$ を中心とした半径 $r > 0$ の開球 (open ball) と閉球 (closed ball) を表わす。

注意 3. 定義により $B_r(a)$ は開集合であり、さらに $\overline{B}_r(a)$ は閉集合になるので、 $B_r(a)$ の閉包 $\overline{B_r(a)}$ を含むが、例 2.4

(iii) からわかるように、一般には一致しない。

問 5. * 距離空間の局所コンパクト性の条件は、各 $a \in X$ がコンパクトな近傍をもつことと同値。

距離空間の部分集合 $A \neq \emptyset$ に対して、

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$

とおき $x \in X$ と $A \subset X$ との間の距離 (distance) と呼ぶ。 $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$ である。また三角不等式から

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X$$

がわかるので、 $x \mapsto d(x, A)$ は連続関数である。

問 6. 上の不等式を確かめよ。

補題 2.7. * 正数 $r > 0$ と部分集合 K に対して、 $K_r = \{x \in X; d(x, K) \leq r\}$ とおく。 K が局所コンパクト距離空間 X のコンパクト部分集合であれば、 K_r がコンパクトになるような $r > 0$ が存在する。

Proof. まず、

$$\exists r > 0, \forall x \in K, \overline{B}_r(x) \text{ is compact}$$

を示す。そうでなければ、 K 内の点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ で $\overline{B}_{1/n}(x_n)$ がコンパクトでないようなものが取れる。部分列に移行して $x_n \rightarrow x \in K$ として良い。局所コンパクト性により、 $\overline{B}_r(x)$ がコンパクトであるような $r > 0$ が存在する。そこで、 n を $d(x_n, x) \leq r/2$ および $1/n \leq r/2$ を満たすように選ぶと、

$$\overline{B}_{1/n}(x_n) \subset \overline{B}_{r/2}(x_n) \subset \overline{B}_r(x)$$

より閉球 $\overline{B}_{1/n}(x_n)$ の非コンパクト性と $\overline{B}_r(x)$ のコンパクト性が矛盾する。

本題に戻って、上で存在が確かめられた $r > 0$ について、 $K_{r/2}$ がコンパクトであることを示す。与えられた点列 $y_n \in K_{r/2}$ に対して、点列 $x_n \in K$ を $d(x_n, y_n) \leq 2r/3$ であるように選び、さらに部分列に移行して $x_n \rightarrow x \in K$ とする。このとき、 $d(x_n, x) \leq r/3$ である n について、 $d(y_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, x) \leq r$ となるので、 $\overline{B}_r(x)$ のコンパクト性により、収束する部分列 $\{y_{n'}\}$ が取れる。あとは、 $K_{r/2}$ が閉集合であることに注意すればよい。□

つぎに距離空間の完備性を復習する。まず、距離空間内の点列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset X$ が $a \in X$ に収束する (converge) とは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$$

であることと定める。このとき、 a を点列 $\{a_n\}$ の極限点 (limit point) と呼び $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書く。収束する点列は、Cauchy の条件を満たす : $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) = 0$ 。正確には、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq N, d(a_m, a_n) \leq \epsilon$$

ということ。

問 7. * 点列の極限点は、存在すれば一つ。すなわち、 $\lim_n a_n = a, \lim_n a_n = a'$ ならば $a = a'$ である。

距離空間は、すべてのコーネー列 (Cauchy 条件を満たす点列をこう呼ぶ) が極限点をもつとき、完備 (complete) であるという。ユークリッド空間 \mathbb{R}^n がその典型例。

距離空間が完備でない場合でも、コーネー列に対する仮想的な極限点を付け加えることで、完備距離空間に一意的に拡充できる。これを距離空間の完備化 (completion) という。例 : \mathbb{R} は \mathbb{Q} の完備化。

ここで、遅ればせながら実数値連続関数の定義を。

- (i) 局所的な定義 : $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, y \in B_\delta(x) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.
- (ii) 大域的な定義 : $\forall a, b \in \mathbb{R}, [a < f < b] \equiv \{x \in X; a < f(x) < b\}$ は開集合。

問 8. 上の (i) と (ii) の同値性を確かめよ。

連続関数 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ と連続関数 $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、合成関数 $\Phi(f, g) : x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$ も連続であるから、

$$f + g, \quad fg, \quad f \vee g, \quad f \wedge g$$

は連続関数。

問 9. 関数 $(a, b) \mapsto a \vee b, a \wedge b$ が連続であることを確かめよ。

距離空間 (より一般的に位相空間) の上で定義された関数 f の支え (support) を、 $[f] \equiv \overline{[f \neq 0]}$ で定義する。定義により支えは閉集合であり、 $f(x) = 0$ ($x \notin [f]$) をみたす。次の包含関係がなりたつ。

$$[f + g] \cup [f \vee g] \cup [f \wedge g] \subset [f] \cup [g], \quad [fg] \subset [f] \cap [g].$$

問 10. (i) 支えについての包含関係を確かめよ。 (ii) \mathbb{R} 上の連続関数 f, g で $[fg] \neq [f] \cap [g]$ となる例を作れ。

問 11. f の支えは、 $f(x) = 0$ ($x \notin F$) となる最小の閉集合 F に一致する。

局所コンパクト距離空間 X に対して、 X 上の実数値連続関数でその支えがコンパクトであるものの全体の集合を $C_c(X)$ という記号で表わす。 $C_c(X)$ はベクトル空間であり、

$$f, g \in C_c(X) \implies f \vee g, f \wedge g, fg \in C_c(X)$$

という性質をもっている。

問 12 (F. Riesz). * 距離空間 (X, d) のコンパクト集合 F 上で定義された連続関数 $h : F \rightarrow [0, \infty)$ に対して、

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{if } x \in F, \\ d(x, F) \sup \left\{ \frac{h(y)}{d(x, y)} ; y \in F \right\} & \text{if } x \notin F \end{cases}$$

は X 上の連続関数となる。

定義 2.8. 距離空間 (X, d) 上の関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ と正数 $\delta > 0$ に対して、 f の一様連続度 (the degree of uniform continuity) を

$$C_f(\delta) = \sup \{|f(x) - f(y)| ; d(x, y) \leq \delta\}$$

で定義する。

問 13. 微分可能関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $M = \sup \{|f'(x)| ; x \in \mathbb{R}\}$ とおくと、 $C_f(\delta) \leq M\delta$.

定理 2.9 (Heine). コンパクト距離空間上の連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ について、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} C_f(\delta) = 0.$$

この性質を一様連続性 (uniform continuity) という。

Proof. 一様連続性を否定すると、

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in X, d(x, y) \leq \delta, |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

とくに、 $\delta = 1/n$ と取ると、

$$\exists x_n, y_n \in X, d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

そこで、部分列 $\{x_{n'}\}_{n' \geq 1}$ を $x_{n'} \rightarrow a$ るように選ぶと、 $y_{n'} \rightarrow a$ である。そうすると、 f の連続性により

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} f(x_{n'}) = f(a) = \lim_{n' \rightarrow \infty} f(y_{n'})$$

であるが、これは $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \epsilon$ に反する。 \square

問 14. \mathbb{R} 上の有界連続関数で一様連続でないものを一つ挙げよ。

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の直方体 (rectangular solid) $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ を細分割して、連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ の一様連続度を抑えることで、リーマン積分

$$\int_{[a, b]} f(x) dx$$

の存在がわかる。実際、 $[a, b]$ の分割 Δ に対して、

$$\bar{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) \leq C_f(|\Delta|)(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

という不等式が成り立つ。

問 15. * 直方体 $[a, b]$ の分割 Δ およびその最大幅 $|\Delta|$ の定義を与える。

関数 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対しては、その支え $[f]$ を含む十分大きい直方体 $[a, b]$ を用意して

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(x) dx$$

とおくと、これは $[a, b]$ の取り方によらない。さらに次が成り立つ。

(i) $C_c(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ は線型である。

(ii) $f \geq 0$ ならば $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \geq 0$.

(iii) $y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

(iv) 正則一次変換 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Tx) dx = \frac{1}{|\det(T)|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

問 16. * 重積分の繰り返し積分による表示と正則行列の基本変形行列による積表示を使って、(iv) を示せ。

問 17. * 閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の上で定義された増加関数 $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を用意する。連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、極限

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_j)(\Phi(x_j) - \Phi(x_{j-1})) = \int_a^b f(t) d\Phi(t)$$

が存在することを示せ。この極限値を右辺のように書いて Stieltjes 積分と呼ぶ。

最後に少しだけ測度論的な話題を。集合 X の部分集合 A に対して、その支持関数^{*2}(indicator function)を次のように定義する。

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 18. $1_A \vee 1_B = 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$, $1_A \wedge 1_B = 1_{A \cap B} = 1_A 1_B$ である。

有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、その「 n -次元体積」 $|A|$ が素朴にあるものと考えよう。部分集合 A の支持関数がリーマン積分可能であるときには

$$|A| = \int 1_A(x) dx$$

となるはずである。

例 2.10. * 距離空間 X において、点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ と正数列 $\{r_i\}_{i \geq 1}$ を用意して、これから開集合

$$U = \bigcup_{i \geq 1} B_{r_i}(x_i)$$

およびその補集合としての閉集合 F を作ると、「変な集合」がいろいろとできる。具体的に、 $X = \mathbb{R}$ で有理数全体を一列に並べた数列を $\{x_i\}$ とし、 $r_i = r/2^i$ とおくと、

$$|U| \leq \sum_i |(x_i - r_i, x_i + r_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r}{2^{i-1}} = 2r$$

^{*2} もとの意味は指示だが、その実態 (indicate というよりも support) を汲んで支持の文字を当てた。

この意味をよく考えてみる。

3 連続関数と一様収束定理

集合 X 上で定義された関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ および関数列 $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ について、

$$\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

であるとき、 f_n は f に各点収束する (converge point-wise) という。各点収束のことを単に収束とも言う。また f を関数列 $\{f_n\}$ の極限関数 (limit function) という。関数列 $\{f_n\}$ が増加列 (減少列) であるとは、すべての x で、 $\{f_n(x)\}$ が増加列 (減少列) であること。増加列と減少列をまとめて単調列 (monotone sequence) という。増加列 $\{f_n\}$ が関数 f に収束するとき、 $f_n \uparrow f$ という記号で表わす。同様に $f_n \downarrow f$ は、 $\{f_n\}$ が減少列でその極限関数が f であることを意味する。

関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\} \in [0, \infty]$$

とおく。関数 f の有界性は $\|f\|_\infty < \infty$ と記述できる。関数列 f_n が関数 f に一様収束する (converge uniformly) とは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となること。 $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ であるから、一様収束するならば各点収束する。

一様収束の概念はリーマン積分と相性が良い。逆に言うと、一様収束でない場合は、積分と極限の順序交換に注意を要するということでもある。

注意 4. 記号 $\|\cdot\|_\infty$ の ∞ は、

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p} = |a_1| \vee \cdots \vee |a_n|$$

に由来する。

命題 3.1. 積分の基本不等式：リーマン積分可能な関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \|f\|_\infty.$$

系 3.2. $f_n \rightarrow f$ (uniformly) のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

定理 3.3. *位相空間 X の上で定義された連続関数列 f_n が一様収束するならば、その極限関数は連続である。

例 3.4. 連続関数 $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ で $f(0) = f(1) = 0$ となるものに対して、

$$f_n(t) = \begin{cases} f(nt) & \text{if } nt \in [0, 1], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置くと、連続関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ は 0 に各点収束する一方で、その積分値 $\int_0^1 f(t) dt$ は一定でありつづける。

定理 3.5 (Dini). コンパクト集合 K の上で定義された連続関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が、 $\forall x \in K, f_n(x) \downarrow 0$ を満たすならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = 0$ である。

Proof. 仮に $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ でないとすると、

$$\exists r > 0, \forall N \geq 1, \exists n \geq N, \|f_n\|_\infty > r.$$

とくに、 $n_1 < n_2 < \dots$ で $\|f_{n_j}\|_\infty > r$ ($j \geq 1$) となるものが存在する。このとき、条件 $\|f_{n_j}\|_\infty > r$ から、 $\exists x_j \in X, f_{n_j}(x_j) > r$ である。そこで、部分列 $\{x_{j'}\}_{j' \geq 1}$ を $x_{j'} \rightarrow x \in X$ であるように取って矛盾を導こう。

各 $m \geq 1$ に対して、 $j \geq 1$ を $n_{j'} \geq m$ を満すように限定しておくと、

$$f_m(x) = f_m(x) - f_m(x_{j'}) + f_m(x_{j'}) \geq f_m(x) - f_m(x_{j'}) + f_{n_{j'}}(x_{j'}) > f_m(x) - f_m(x_{j'}) + r.$$

ここで、 f_m は連続関数であり $x_{j'} \rightarrow x$ ($j \rightarrow \infty$) に注意して極限を取ると $f_m(x) \geq r$ を得る。これが全ての $m \geq 1$ について成り立つから矛盾である。□

系 3.6. コンパクトな支えをもつ連続関数列 $f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ が、 $f_n \downarrow 0$ であれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n(x) dx = 0.$$

注意 5. コンパクト集合の有限被覆性を使えば、証明は次のように一文で済む。正数 ϵ に対して、開集合の増加列 $[f_n < \epsilon]$ を考えると、仮定から $K = \cup_{n \geq 1} [f_n < \epsilon]$ があるので、 $K = [f_N < \epsilon]$ となる $N \geq 1$ が存在し、 $\|f_n\|_\infty \leq \epsilon$ ($n \geq N$) が成り立つ。同様のことは、既に見てきた一様連続性などにも有効であった。

問 19. 連続性かコンパクト性の一方を外すだけで Dini は成り立たなくなる。そのような反例を作れ。

定義 3.7. * 距離空間上の関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が次の同値な条件を満たすとき下半連続(lower semicontinuous) であるという。

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ならば、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x)$.
- (ii) $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, y) \leq \delta \implies f(y) \geq f(x) - \epsilon$.
- (iii) 實数 $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $[f > a]$ は開集合。

また、 f が上半連続 (upper semicontinuous) であるとは、 $-f$ が下半連続であることと定義する。

問 20. * 上の 3 つの条件が同値であることを確かめ、上半連続関数について対応する条件を書き下せ。

命題 3.8. * 下半連続関数列の増加極限は下半連続であり、上半連続関数列の減少極限は上半連続。

Proof. 下半連続関数列 f_n が関数 f に増加収束するとき、 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、 $[f > \alpha] = \bigcup_{n \geq 1} [f_n > \alpha]$ は開集合である。□

問 21. 区間の支持関数 $1_{[a,b]}, 1_{(a,b)}, 1_{[a,b)}, 1_{(a,b)}$ を連続関数列の極限として書き表わせ。

定理 3.9 (Baire). * 距離空間 X の上で定義された関数 $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ で下に有界であるものに対して、関数列 $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \inf\{f(x') + nd(x, x'); x' \in X\}$$

で定める。

*3 「かはんれんぞく」と読むのであろうか。いっそ、下連続（しもれんぞく、したれんぞく）で良いような。

- (i) $|f_n(x) - f_n(y)| \leq nd(x, y)$ ($x, y \in X$). とくに f_n は Lipschitz 連続。
- (ii) さらに f が下半連続であれば、 $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$).

Proof. (i) $x, y \in X$ とする。

$$\forall \epsilon > 0, \exists x' \in X, \quad f(x') + nd(x, x') \leq f_n(x) + \epsilon.$$

このとき

$$f_n(x) - f_n(y) \geq f_n(x) - (f(x') + nd(y, x')) \geq -nd(y, x') + nd(x', x) - \epsilon \geq -nd(x, y) - \epsilon.$$

$\epsilon > 0$ を 0 に近づけて、 $f_n(x) - f_n(y) \geq -nd(x, y)$ となり、 x, y についての対称性から求める不等式を得る。

- (ii) 定義から $f_n \uparrow$ かつ $f_n \leq f$ である。さらに、 $f(x)$ が $x = a$ で下連続であると、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad d(x, a) \leq \delta \implies f(x) \geq f(a) - \epsilon.$$

とくに、

$$f(a) - \epsilon \leq \inf\{f(x) + nd(x, a); d(x, a) \leq \delta\}.$$

そこで $n > 0$ を $n\delta + \inf_{z \in X} f(z) \geq f(a) - \epsilon$ るように取ると、

$$d(x, a) \geq \delta \implies f(x) + nd(a, x) \geq \inf_{z \in X} f(z) + n\delta \geq f(a) - \epsilon.$$

二つを併せると

$$f_n(a) \geq f(a) - \epsilon \quad \text{if } n \geq \frac{f(a) - \epsilon - \inf f(z)}{\delta}.$$

これから $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq f$ が得られる。 □

問 22. * (ii) の証明では、暗黙の裡に $f(a) < \infty$ を仮定した。 $f(a) = \infty$ の場合の処理を補え。

問 23. * 定理の状況の下、 $f \geq 0$ ならば $[f_n] \subset [f]$ ($n \geq 1$) であり、 $\inf f < 0$ ならば

$$[f_n] \subset \{x \in X; d(x, [f]) \leq -(\inf f)/n\}.$$

4 ベクトル束と積分

集合 X の上で定義された実数値関数の作る実ベクトル空間 L で

$$f, g \in L \implies f \vee g, f \wedge g \in L$$

という性質をもつものを X 上のベクトル束^{*4}(vector lattice) という。ただし、

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

ベクトル束 L に対して、

$$L^+ = \{f \in L; f \geq 0\}$$

とおく。

^{*4} 束という語は、lattice と bundle の両方の訳に当てられており、困ったものである。lattice を束と意訳したのが問題であったか。菱(ひし)でもあてておけばよかったものを。格子に菱ということ。

例 4.1.

- (i) ヨークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の連続関数で支えがコンパクト（有界閉集合）であるもの全体 $C_c(\mathbb{R}^n)$. あるいは、局所コンパクト距離空間 X 上の連続関数でその支えがコンパクトであるもの全体 $C_c(X)$.
- (ii) * 自然数 $N \geq 1$ に対して、積集合 $X = \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ 上の関数で、その値が有限個の成分だけに依存するもの全体 L .
- (iii) * 集合 X 上の関数 f で $[f \neq 0]$ が有限集合であるもの全体 L .
- (iv) * 球面 $S^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_0)^2 + (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1\}$ 上の連続関数全体 $C(S^n)$.

問 24. $f = f \vee 0 - (-f) \vee 0, |f| = f \vee 0 + (-f) \vee 0$ である。とくに、 L の元は L^+ の元の差で表される。

問 25. 集合 X 上の実数値関数の作るベクトル空間 L について、次は同値。

- (i) L はベクトル束である。 (ii) $f \in L$ ならば、 $f \vee 0 \in L$. (iii) $f \in L$ ならば、 $|f| \in L$.

定義 4.2. ベクトル束 L 上の汎関数 $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ で、次の条件を満たすものを L 上のダニエル積分 (Daniell integral) あるいは単に積分と呼ぶ。

- (i) [Linearity] $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in L$.
- (ii) [Positivity] $f \geq 0 \implies I(f) \geq 0$.
- (iii) [Continuity] $f_n \downarrow 0 \implies I(f_n) \downarrow 0$. ($f_n \downarrow 0 \iff \forall x \in X, f_n(x) \downarrow 0$.)

ベクトル束 L とその上の積分 I の組 (L, I) を積分系 (integration system) と呼ぶ。

例 4.3. 以下の例で、積分の「連續性」は、いずれの場合も Dini の定理と正線型性からの帰結である。

- (i) $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ に対し、通常のリーマン積分

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

- (ii) * 与えられた有限確率分布 $\{p_1, \dots, p_N\}$ に対して、

$$I(f) = \sum_{k_1, \dots, k_n} f(k_1, \dots, k_n, *) p_{k_1} \dots p_{k_n}.$$

- (iii) * 集合 X を離散位相空間と見て、 $L = C_c(X)$ 上の積分を

$$I(f) = \sum_{x \in X} f(x)$$

で定めることができる。

- (iv) * $L = C(S^n)$ 上の積分をリーマン積分

$$I(f) = \int_{0 < |x| \leq 1} f\left(\frac{x}{|x|}\right) dx$$

で定めることができる。球面上の不变積分^{*5}という意味である。

^{*5} 多様体とその上の密度形式 (density form) を知っていれば、回転不变な密度形式に関する積分と言っても良い。

問 26. * 増加関数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $L = C_c(\mathbb{R})$ 上の積分を Stieltjes 積分により

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\Phi(t)$$

と定めることができることを確認。

問 27. 正値性から次が従うことを見よ。

$$f \geq g \implies I(f) \geq I(g).$$

問 28. 連続性から次が従うことを見よ。

$$f_n \uparrow f \implies I(f_n) \uparrow I(f).$$

問 29. * 積分の連続性は次の条件と同値である。 L^+ における関数 f と 関数列 $\{h_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$f \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n \implies I(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n)$$

(和 $\sum_n h_n$ が L に属することは仮定しない) が成り立つ。

問 30. * 局所コンパクト距離空間 X に対して、ベクトル束 $C_c(X)$ 上の正線型汎関数は自動的に連続であることを示せ。ヒント： $f_n \downarrow 0$ とせよ。 $K = [f_1]$ とし $g(x) = 1 - 1 \wedge Nd(x, K)$ とおくと、 g は連続で $g|_K = 1$ である。さらに N を十分大きくとると、補題 2.7 により $g \in C_c(X)$ となる。不等式 $0 \leq f_n \leq \|f_n\| g$ を使う。

定義 4.4. 集合 X 上のベクトル束 L に対して、

$$\begin{aligned} L_{\uparrow} &= \{f : X \rightarrow (-\infty, \infty]; \exists \text{ a sequence } f_n \in L, f_n \uparrow f\}, \\ L_{\downarrow} &= \{f : X \rightarrow [-\infty, \infty); \exists \text{ a sequence } f_n \in L, f_n \downarrow f\} \end{aligned}$$

とおく。また、次の記号もよく使われる。

$$L_{\uparrow}^+ = \{f \in L_{\uparrow}; f \geq 0\}.$$

命題 4.5.

- (i) $L_{\downarrow} = -L_{\uparrow}$ かつ $L \subset L_{\uparrow} \cap L_{\downarrow}$.
- (ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, f, g \in L_{\uparrow} \implies \alpha f + \beta g, f \vee g, f \wedge g \in L_{\uparrow}$.
- (iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, f, g \in L_{\downarrow} \implies \alpha f + \beta g, f \vee g, f \wedge g \in L_{\downarrow}$.

注意 6.

- (i) $f(x) = \pm\infty$ となる場合も含めて、 $0f(x) = 0$ と定める。左辺の 0 は極限ということではなく、完全な 0 という意味で。
- (ii) L_{\uparrow} あるいは L_{\downarrow} の定義で、関数の値に $\pm\infty$ を許すことは、最初、奇異に見えるかも知れないが、このように広げておくのが後々便利なのである。

問 31. 上の命題の主張を確認。

問 32. 関数 $f(x) = x/(x^2 + 1)$ は $C_c(\mathbb{R})_{\uparrow}$ にも $C_c(\mathbb{R})_{\downarrow}$ にも属さないことを確認。

例 4.6. * ベクトル束 $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ を考える。部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ について、

- (i) $1_A \in L_\uparrow \iff A$ は開集合、(ii) $1_A \in L_\downarrow \iff A$ は有界閉集合。

問 33. * $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ のとき、 $L_\uparrow = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]; f$ は下半連続かつ $[f < 0]$ は有界集合 }。 L_\uparrow が右辺に含まれることは簡単にわかるので、右辺に属する関数 f が L_\uparrow の元であることを以下の手順で示せ。

- (i) 定数関数 1 に増加収束する正值関数列 $h_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$ で $f_1 = 1$ on $[f < 0]$ となるものを用意する。
- (ii) Baire を fh_n に適用して、 m についての増加列 $f_{n,m} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ で $f_{n,m} \uparrow fh_n$ となるものを作る。
- (iii) $f_m = \vee_{1 \leq n \leq m} f_{n,m}$ とおくと、 $f_m \uparrow f$ である。 $fh_n \uparrow f$ に注意。

問 34. * X が距離空間で、 L が連続関数からなるとき、 $L_\uparrow \cap L_\downarrow \subset C(X)$ であることを確認。とくに X が局所コンパクト距離空間で、 $L = C_c(X)$ のとき、 $L_\uparrow \cap L_\downarrow = L$ である。

補題 4.7. ベクトル束 L における増加列 f_n, g_n に対して、極限関数が不等式

$$\lim_n f_n \leq \lim_n g$$

を満たせば ($\lim_n f_n, \lim_n g_n$ が L に属することは仮定せず、 ∞ を値に取ってもよい>)

$$\lim_n I(f_n) \leq \lim_n I(g_n)$$

が成り立つ。

Proof. 仮定から、 $f_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ であり、したがって $f_m = \lim_{n \rightarrow \infty} f_m \wedge g_n$. 積分の連続性を $(f_m - f_m \wedge g_n \downarrow 0)$ に適用して、

$$I(f_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_m \wedge g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n).$$

最後に、 m についての極限を取れば良い。 \square

定義 4.8. 汎関数 $I_\uparrow : L_\uparrow \rightarrow (-\infty, \infty]$ を

$$I_\uparrow(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad f_n \uparrow f, \quad f_n \in L$$

で定義する。同様に、 $I_\downarrow : L_\downarrow \rightarrow [-\infty, \infty)$ を

$$I_\downarrow(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad f_n \downarrow f, \quad f_n \in L$$

で定める。

問 35. 補題を使って、上の定義が「うまくいってる」(well-defined) ことを確認。

例 4.9. $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ における通常の積分 I を考えるとき、

$$I_\uparrow(1_{(a,b)}) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) = I_\downarrow(1_{[a,b]}).$$

問 36. * 増加関数 $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に伴った Stieltjes 積分 $I : C_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ について、

$$I_\uparrow(1_{(a,b)}) = \Phi(b - 0) - \Phi(a + 0), \quad I_\downarrow(1_{[a,b]}) = \Phi(b + 0) - \Phi(a - 0).$$

命題 4.10.

- (i) $I_\downarrow(-f) = -I_\uparrow(f)$ ($f \in L_\uparrow$) である。 $-L_\uparrow = L_\downarrow$ に注意。

(ii) 汎関数 I_\uparrow, I_\downarrow は I の拡張になっている。すなわち、 $f \in L$ に対して $I_\uparrow(f) = I(f) = I_\downarrow(f)$ 。とくに、 $I_\uparrow(0) = I_\downarrow(0) = 0$ である。

(iii) 汎関数 I_\uparrow, I_\downarrow は半線型である。すなわち、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ 、 $f, g \in L_\uparrow$ （または $f, g \in L_\downarrow$ ）に対して、

$$I_\uparrow(\alpha f + \beta g) = \alpha I_\uparrow(f) + \beta I_\uparrow(g)$$

（または I_\uparrow を I_\downarrow で置き換えた等式が成り立つ）

(iv) $f, g \in L_\uparrow$, $f \leq g$ ならば $I_\uparrow(f) \leq I_\uparrow(g)$ 。

Proof. (i)–(iii) は定義から。(iv) は $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$ のとき $f_n \vee g_n \uparrow f \vee g = g$ に注意すればよい。□

補題 4.11.

(i) L_\uparrow における増加列 f_n に対して、その極限関数 f も L_\uparrow に属し $I_\uparrow(f_n) \uparrow I_\uparrow(f)$ が成り立つ。

(ii) L_\downarrow における減少列 f_n に対して、その極限関数 f も L_\downarrow に属し $I_\downarrow(f_n) \downarrow I_\downarrow(f)$ が成り立つ。

Proof. (i) を示す。各 $f_n \in L_\downarrow$ に対して、 $\{f_{n,m}\}_{m \geq 1}$ を $f_{n,m} \uparrow f_n$ と取る。これだけでは、 $\{f_{n,m}\}_{n \geq 1}$ の間の単調性が保証されないので、次のように押し上げる。

$$g_{n,m} = f_{1,m} \vee f_{2,m} \vee \cdots \vee f_{n,m}.$$

ただし、 $g_{1,m} = f_{1,m}$ とおく。明らかに、 $g_{n,m}$ は n について単調増加であり、 $f_{n,m}$ は m について単調増加を選んでるので、 $g_{n,m}$ は m についても単調増加。のみならず、

$$f_{n,m} \leq g_{n,m} \leq f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_n = f_n$$

であるから、各 n に対して、 $g_{n,m} \uparrow f_n$ である。

これだけの下ごしらえをしておいて、対角線 $\{g_{n,n}\}_{n \geq 1}$ を考えると、 $g_{n,n} \in L$ かつ $g_{n,n} \uparrow$ であり、不等式

$$f_{n,m} \leq g_{n,m} \leq g_{m,m} \leq f_m, \quad m \geq n$$

において極限 $m \rightarrow \infty$ を取ると、

$$f_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_{m,m} \leq f$$

を得るので、さらに極限 $n \rightarrow \infty$ を取って、

$$f = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{m,m} \in L_\uparrow$$

がわかる。

また、積分を施した

$$I(f_{n,m}) \leq I(g_{m,m}) \leq I_\uparrow(f_m), \quad m \geq n$$

において極限 $m \rightarrow \infty$ を取ると、

$$I_\uparrow(f_n) \leq I_\uparrow(f) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} I_\uparrow(f_m)$$

が導かれ、さらに極限 $n \rightarrow \infty$ を取ると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\uparrow(f_n) = I_\uparrow(f)$$

が分かる。□

系 4.12. 関数列 $f_n \in L_{\uparrow}^+$ に対して、 $\sum_{n \geq 1} f_n \in L_{\uparrow}^+$ かつ $I_{\uparrow}\left(\sum_{n \geq 1} f_n\right) = \sum_{n \geq 1} I_{\uparrow}(f_n)$.

Proof. この系は上の (i) と同じことであるが、積分の収束定理の核となる部分でもあり（収束定理の本質は総和法にあり！）和の形の証明も書き留めておこう。まず、定義から分かる次の言い換えに注意する。関数 f に対して $f \in L_{\uparrow}^+$ であるための必要十分条件は、関数列 $\{f_n \in L^+\}_{n \geq 1}$ が存在して $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ と書けること。また、このとき

$$I_{\uparrow}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$$

である。

この注意から、関数列 $\{f_{n,m} \in L^+\}$ を取ってきて $f_n = \sum_m f_{n,m}$ と表示すると、 $I_{\uparrow}(f_n) = \sum_m I(f_{n,m})$ である。再び上の注意により、 $\sum_n f_n = \sum_{m,n} f_{n,m} \in L_{\uparrow}^+$ であり、

$$I_{\uparrow}\left(\sum_n f_n\right) = \sum_{m,n} I(f_{n,m}) = \sum_n \left(\sum_m I(f_{n,m}) \right) = \sum_n I_{\uparrow}(f_n)$$

が分かる。 \square

例 4.13. $L = C_c(\mathbb{R})$ の場合。 $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n \geq 1}$ と並べておいて、 $\epsilon > 0$ に対して

$$A = \bigcup_{n \geq 1} (q_n - \epsilon/2^n, q_n + \epsilon/2^n)$$

とおくと、これは \mathbb{R} の開集合であり、したがって $1_A \in L_{\uparrow}$. さらに、

$$1_A \leq \sum_{n \geq 1} 1_{(q_n - \epsilon/2^n, q_n + \epsilon/2^n)}$$

より、

$$I_{\uparrow}(1_A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^n} = 2\epsilon$$

である。この意味をあれこれ考えてみる。

5 可積分関数と積分の延長

定義 5.1. 関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して、その上積分 (upper integral) および下積分 (lower integral) を

$$\bar{I}(f) = \inf\{I_{\uparrow}(g); g \in L_{\uparrow}, f \leq g\}, \quad I_{\downarrow}(f) = \sup\{I_{\downarrow}(g); g \in L_{\downarrow}, g \leq f\}$$

で定める。これらは、拡大実数直線 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ の元である。 $\inf(\emptyset) = \infty$, $\sup(\emptyset) = -\infty$ に注意。例えば $f \leq g$ となる $g \in L_{\uparrow}$ が存在しないときは、 $\bar{I}(f) = \infty$ である。

注意 7. 何も考えずに、じょうせきぶん、かせきぶん、と言うようであるが、音の上で可積分と区別ができない。これらは、本来想定される積分の値を上と下から詰めたものなので、うえせきぶん、したせきぶん、と読むのが妥当かも。

例 5.2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の支持関数 $1_{\mathbb{Q}}$ を Dirichlet 関数 (Dirichlet function) と言う。 $\bar{I}(1_{\mathbb{Q}}) = 0$ である。

問 37. (i) $1_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m!x))^{2n}$ を示せ。2 回の極限で、既にこの状況。

(ii) Darboux の上積分・下積分について、 $\underline{S}(1_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}) = 0$, $\overline{S}(1_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}) = b - a$ を示せ。

命題 5.3. 関数 $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ について、以下が成り立つ。

- (i) $\underline{I}(f) = -\overline{I}(-f)$ 。
- (ii) $\overline{I}(\lambda f) = \lambda \overline{I}(f)$ ($0 \leq \lambda < \infty$)。とくに、 $\overline{I}(0) = 0$ である。
- (iii) $f \leq g$ ならば $\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$ 。
- (iv) 和 $f + g$ が定義できるとき、すなわち $f(x) = \pm\infty$ かつ $g(x) = \mp\infty$ となる $x \in X$ が存在しないとき、 $\overline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$ 。
- (v) $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$ 。
- (vi) $f \in L_{\uparrow} \cup L_{\downarrow}$ ならば $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ 。この値は、 $f \in L_{\uparrow}$ あるいは $f \in L_{\downarrow}$ に応じて $I_{\uparrow}(f)$ あるいは $I_{\downarrow}(f)$ に一致する。

Proof. (i)–(iv) は定義からすぐわかる。

(v) は (iv) で $g = -f$ とおいて、(ii) の特別な場合である $\overline{I}(0) = 0$ と (i) を使う。

(vi) は、まず $\overline{I}(f) = I_{\uparrow}(f)$ ($f \in L_{\uparrow}$), $\underline{I}(f) = I_{\downarrow}(f)$ ($f \in L_{\downarrow}$) に注意する。とくに、 $f \in L$ に対して、 $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$ 。

さて、改めて $f \in L_{\uparrow}$ とすると、 $f_n \uparrow f$ であるような $f_n \in L$ が取れるので、

$$I_{\uparrow}(f) = \lim_n I(f_n) = \lim_n \underline{I}(f_n) \leq \underline{I}(f).$$

一方、 $f \in L_{\uparrow}$ に対して、 $\overline{I}(f) = I_{\uparrow}(f)$ は上で見たとおり。よって、 $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ 。 \square

問 38. (i)–(iv) を確かめよ。また、 \overline{I} の性質について書いてある部分を \underline{I} の性質として述べよ。

定義 5.4. 関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ がルベーグ可積分 (Lebesgue integrable) あるいは単に可積分であるとは、 $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$ となること (上下積分が一致し有限の値であること)。可積分関数全体の集合を L^1 という記号で表わす。また、 $f \in L^1$ に対して、 $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$ を出発点となった積分の記号を流用して $I(f)$ と書く。このようにしても問題ないことは、命題 4.10 (ii)、命題 5.3 (vi) による。 $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ 上のコーシー・リーマン積分を I として採用した場合の L^1 を $L^1(\mathbb{R}^n)$ と書く。

問 39. 有限区間 $[a, b]$ の上で定義された関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であればルベーグ可積分であり、次が成り立つ。

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

ヒント : $\forall \epsilon > 0$, $\underline{S}(f) - \epsilon \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f) + \epsilon$.

補題 5.5. 関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が可積分であるための必要十分条件は、

$$\forall \epsilon, \exists f_+ \in L_{\uparrow}, \exists f_- \in L_{\downarrow}, \quad f_- \leq f \leq f_+, \quad I_{\uparrow}(f_+) - I_{\downarrow}(f_-) \leq \epsilon.$$

このとき、 $f_- \leq f \leq f_+$ を維持したまま、 $I_{\uparrow}(f_+) - I_{\downarrow}(f_-) = I_{\uparrow}(f_+ - f_-) \geq 0$ が 0 に近づくように f_{\pm} が増減するならば、

$$I_{\downarrow}(f_-) \uparrow I(f), \quad I_{\uparrow}(f_+) \downarrow I(f).$$

Proof. 不等式 $I_{\downarrow}(f_-) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq I_{\uparrow}(f_+)$ による。 \square

定理 5.6.

- (i) L^1 は X 上の実数値関数の成すベクトル束で、 $L_\uparrow \cap L_\downarrow$ を含む。
- (ii) $I : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ は正線型汎関数で、 $I(f) = I_\uparrow(f) = I_\downarrow(f)$ ($f \in L_\uparrow \cap L_\downarrow$)。とくに、汎関数 $I : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ は積分 $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ の拡張になっている。

Proof. $f, g \in L^1$ とし、 $f_+, g_+ \in L_\uparrow$ および $f_-, g_- \in L_\downarrow$ は $f_- \leq f \leq f_+, g_- \leq g \leq g_+$ をみたすとする。このとき、 $f_- + g_- \leq f + g \leq f_+ + g_+$ であり、

$$I_\uparrow(f_+ + g_+) - I_\downarrow(f_- + g_-) = (I_\uparrow(f_+) - I_\downarrow(f_-)) + (I_\uparrow(g_+) - I_\downarrow(g_-))$$

は任意に小さくできる。すなわち、 $f + g \in L^1$ で $I(f + g) = I(f) + I(g)$ 。

次に、 $\lambda > 0$ とすると、 $\lambda f_- \leq \lambda f \leq \lambda f_+$ に注意して、

$$I_\uparrow(\lambda f_+) - I_\downarrow(\lambda f_-) = \lambda(I_\uparrow(f_+) - I_\downarrow(f_-))$$

を小さくできる。すなわち、 $\lambda f \in L^1$ で $I(\lambda f) = \lambda I(f)$ 。

さらに、 $-f_+ \leq -f \leq -f_-$ ($-f_+ \in L_\downarrow, -f_- \in L_\uparrow$) に注意して、

$$I_\uparrow(-f_-) - I_\downarrow(-f_+) = I_\uparrow(f_+) - I_\downarrow(f_-)$$

も小さい。すなわち、 $-f \in L^1$ で $I(-f) = -I(f)$ 。

以上により、 L^1 はベクトル空間で、 I はその上の線型汎関数であることがわかった。

L^1 が束演算で閉じていることは、 $f \in L^1 \implies f \vee 0 \in L^1$ を確かめればよい。これは、 $f_- \vee 0 \leq f \vee 0 \leq f_+ \vee 0$ と不等式

$$0 \leq f_+ \vee 0 - f_- \vee 0 \leq f_+ - f_-$$

に注意して、

$$0 \leq I_\uparrow(f_+ \vee 0) - I_\downarrow(f_- \vee 0) = I_\uparrow(f_+ \vee 0 - f_- \vee 0) \leq I_\uparrow(f_+ - f_-)$$

を小さくする。とくに $f \geq 0$ のときは、 $I(f) = I(f \vee 0)$ は、 $I_\uparrow(f_+ \vee 0) \geq 0$ の極限として $I(f) \geq 0$ である。

最後に、 $f \in L_\uparrow \cap L_\downarrow$ とすると、 $f_- \leq f \leq f_+$ となる $f_\pm \in L$ が存在するので、これと命題 5.3 (vi) から $I_\downarrow(f) = I(f) = \bar{I}(f) = I_\uparrow(f) \in [I(f_-), I(f_+)]$ が有限であるとわかる。□

例 5.7. 連続関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |f(t)| dt < \infty$$

をみたすならば、 $f \in L^1$ であり、

$$I(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt$$

となる。これは良い広義積分の例である。これを確かめるためには $f \geq 0$ としてよく、このとき、 $f_n \uparrow f$ となる $f_n \in C_c(\mathbb{R})^+$ を $f_n(t) = f(t)$ ($|t| \leq R_n$) かつ

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt - \int_{-R_n}^{R_n} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{n}$$

と取れば良い。

一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

は条件収束級数に相当する広義積分で、ルベーグ可積分でない例となっている。

問 40. 正数 $\alpha > 0$ について、積分

$$\int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) dt$$

が可積分であるかどうか調べよ。

問 41. * 次を示せ。

$$\forall \epsilon > 0, \forall f \in L^1, \exists g \in L, I(|f - g|) \leq \epsilon.$$

次は、変数変換など多くのものを含む。

定理 5.8. 集合 X 上の積分系 (L, I) , 集合 Y 上の積分系 (M, J) および写像 $\phi : X \rightarrow Y$ があって、 $M \circ \phi \subset L$ かつ $I(f \circ \phi) = J(f)$ ($f \in M$) を満たすとする。このとき、 $M^1 \circ \phi \subset L^1$ であり $I(f \circ \phi) = J(f)$ ($f \in M^1$) となる。

Proof. $M_\uparrow \circ \phi \subset L_\uparrow$, $I_\uparrow(f \circ \phi) = J_\uparrow$ といったことを一步一步確かめていくだけである。 \square

問 42. これまでの復習も兼ねて確かめよ。言われてすることではないが、言われてなおせぬ者は度し難し。

系 5.9.

- (i) $\phi : X \rightarrow Y$ が全単射で $L = M \circ \phi$ であるとき、 $L^1 = M^1 \circ \phi$ および $I(f) = J(f \circ \phi)$ ($f \in M^1$) が成り立つ。
- (ii) 集合 X 上の積分系 (L, I) , (M, J) が $L \subset M$, $J|_L = I$ を満たすとき、すなわち、 (M, J) が (L, I) の拡張になっているとき、 $L^1 \subset M^1$ であり、 M^1 上の積分を L^1 に制限したものは I に一致する。

例 5.10. 開集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $C_c(A) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ と思って得られる積分系に付随するものを $L^1(A)$ と書くと、 $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ であり、 $L^1(A)$ 上の積分は $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上のそれの制限になっている。

とくに、1 次元の場合、 $A = (a, b)$ に対して、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) 1_A(x) dx$$

である。

注意 8. §8 で、より一般の集合 A に対しての積分 $\int_A f(x) dx = \int f(x) 1_A(x) dx$ を導入する。

例 5.11. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x + y)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として可積分であり

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

問 43. 関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と正数 $\lambda > 0$ について、等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

が成り立つことを確かめる。正則一次変換についてはどうか。

6 積分の収束定理

補題 6.1 (上積分の劣加法性). 関数列 $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ に対して、

$$\bar{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}(f_n).$$

Proof. $\bar{I}(f_n) = \infty$ となる n があれば、上の不等式は自明となる。そこで、 $\bar{I}(f_n) < \infty$ ($n \geq 1$) とする。勝手な正数 $\epsilon > 0$ に対して、 $g_n \in L_{\uparrow}^+$ を

$$f_n \leq g_n, \quad I_{\uparrow}(g_n) \leq \bar{I}(f_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

であるように選ぶと、 $\sum_n f_n \leq \sum_n g_n$ である。ここで、系 4.12 から分かる $\sum_n g_n \in L_{\uparrow}^+$ かつ $I_{\uparrow}(\sum_n g_n) = \sum_n I_{\uparrow}(g_n)$ および命題 5.3(vi) に注意すれば、

$$\bar{I}\left(\sum_n f_n\right) \leq \bar{I}\left(\sum_n g_n\right) = I_{\uparrow}\left(\sum_n g_n\right) = \sum_n I_{\uparrow}(g_n) \leq \sum_n \bar{I}(f_n) + \epsilon$$

となって、めでたい。 \square

定理 6.2 (単調収束定理). 可積分関数の増加列 $f_n \in L^1$ の各点極限になっている関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ について、 f が可積分であるための必要十分条件は $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) < \infty$ となること。そしてこのとき、次が成り立つ。

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

Proof. $I(f_n) = \bar{I}(f_n) \leq \bar{I}(f)$ ゆえ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \infty$ ならば $\bar{I}(f) = \infty$ となるので、 $f \notin L^1$ である。

そこで $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) < \infty$ とする。 $f - f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ ゆえ、上の補題により、

$$\bar{I}(f - f_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}(f_n - f_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n - f_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (I(f_n) - I(f_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) - I(f_0).$$

これから

$$\bar{I}(f) \leq \bar{I}(f_0) + \bar{I}(f - f_0) = I(f_0) + \bar{I}(f - f_0) \leq \lim_n I(f_n)$$

が分かる。一方、 $f_n \leq f$ および $f_n \in L^1$ から従う不等式

$$I(f_n) = \underline{I}(f_n) \leq \underline{I}(f)$$

において極限を取れば、

$$\lim_n I(f_n) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \lim_n I(f_n)$$

となって、めでたい。 \square

系 6.3. 正線型汎関数 $I : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。すなわち、減少列 $f_n \in L^1$ が $f_n \downarrow 0$ を満たせば、 $I(f_n) \downarrow 0$ 。結論として、 (L^1, I) は (L, I) の拡大としての積分系となっている。

定理 6.4 (押え込み収束定理). 関数列 $f_n \in L^1$ と関数 $g \in L^1$ が $|f_n| \leq g$ ($n \geq 1$) を満たせば、 $\inf_{n \geq 1} f_n$, $\sup_{n \geq 1} f_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ は全て可積分で、

$$I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n) \leq \limsup I(f_n) \leq I(\limsup f_n)$$

が成り立つ。とくに、極限関数 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ が存在するならば、 $f \in L^1$ であり、次が成り立つ。

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n).$$

Proof. 自然数 m に対して、

$$-g \leq \inf_{n \geq m} f_n \leq f_m \wedge \cdots \wedge f_n \leq f_m \vee \cdots \vee f_n \leq \sup_{n \geq m} f_n \leq g$$

および

$$f_m \wedge \cdots \wedge f_n \downarrow \inf_{n \geq m} f_n, \quad f_m \vee \cdots \vee f_n \uparrow \sup_{n \geq m} f_n$$

であるから、単調収束定理と I の正値性により、 $\inf_{n \geq m} f_n, \sup_{n \geq m} f_n \in L^1$ であり

$$\begin{aligned} I(\inf_{n \geq m} f_n) &= \lim_n I(f_m \wedge \cdots \wedge f_n) \leq \lim_n I(f_m) \wedge \cdots \wedge I(f_n) = \inf_{n \geq m} I(f_n) \\ I(\sup_{n \geq m} f_n) &= \lim_n I(f_m \vee \cdots \vee f_n) \geq \lim_n I(f_m) \vee \cdots \vee I(f_n) = \sup_{n \geq m} I(f_n). \end{aligned}$$

すなわち、

$$-I(g) \leq I(\inf_{n \geq m} f_n) \leq \inf_{n \geq m} I(f_n) \leq \sup_{n \geq m} I(f_n) \leq I(\sup_{n \geq m} f_n) \leq I(g)$$

となるので、再び単調収束定理により、 $\liminf_n f_n, \limsup_n f_n \in L^1$ かつ

$$-I(g) \leq I(\liminf_n f_n) \leq \liminf_n I(f_n) \leq \limsup_n I(f_n) \leq I(\limsup_n f_n) \leq I(g)$$

である。 □

注意 9. dominated^{*6}convergence theorem の日本語訳としては、優収束定理が多く使われているようであるが、これだと「優れた収束定理」という誤解を与えるかねないので、ここでは内容を汲み取って「押え込み収束定理」と呼ぶことにする。なお、不等式部分は Fatou's lemma とも呼ばれる。

系 6.5. 実数 t をパラメータとする可積分関数 $f(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) に対して、 $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dx$ とおく。

- (i) 各 $x \in \mathbb{R}^n$ ごとに $f(x, t)$ が $t \in [a, b]$ の連続関数であり、 t によらない可積分関数 g により、
 $|f(x, t)| \leq g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n, t \in [a, b]$) と評価されるならば、 $F(t)$ は $t \in [a, b]$ の連続関数。
- (ii) 各 $x \in \mathbb{R}^n$ ごとに $f(x, t)$ が $t \in (a, b)$ について微分可能であり、 t によらない可積分関数 g により、
 $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n, a < t < b$) と評価されるならば、 $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ は x の関数として可積分であり、

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

が成り立つ。

^{*6} 支配的という意味であるが、遺伝学での優性 (dominant) という言い方に引きずられたものか。なお優性・劣性は顯性・潜性に見えるのだと。日本語へのさらなる虐待であることが分からんらしい。

Proof. (i) $F(t)$ の連続性は、列 $(t_k) \rightarrow t$ に関する $F(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k)$ を使う。

(ii) 有限増分の不等式

$$\left| \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right| \leq g(x)$$

を使って押さえ込み収束定理に持ち込む。 \square

問 44. もとの定理は列に関するもので、上の系は連続パラメータに関するものである。両者の関係を確認。

例 6.6. (i) は定理 6.2、(ii) は系 6.5 に該当する。

(i) 實数 t に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+tx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

(ii) 正数 $t > 0$ に対して、

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx = (-1)^n \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx.$$

問 45. (ii) における押さえ込み関数を具体的に与えよ。

問 46. 正数 $s > 1$ に対して、ゼータの積分表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

を示せ。ここで、 $\Gamma(s) = (s-1)!$ である。

問 47. 連続関数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) に対して、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} dx$$

を求めよ。

問 48. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して、 $\int |f(x+y) - f(x)| dx$ は $y \in \mathbb{R}^n$ の連続関数であること及び $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int |f(x+y) - f(x)| dx = 2 \int |f(x)| dx$ を示せ。

問 49. 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と \mathbb{R}^n 上の有界連続関数 g に対して、 fg は可積分関数であることを確認。

問 50. 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ と正数 $a > 0$ に対して、

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-a(t-x)^2} dt$$

とおくと、 f_a は可積分な連続関数で、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f_a(x) = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

を満たすことを示せ。

7 単調完備化

ベクトル束 L^1 は、積分の拡張という点からは申しだいであるが、拡張しすぎの感もある。上下積分の定義では、実質的に非可算集団についての操作が行われていることに注意しよう。一方でまた、正值関数については、 ∞ を値として許す場合も扱うのが何かと便利であることが後程（ファイバー積分の項）わかる。さらに、単調関数列については積分の収束定理の成立が広く期待される。以上を勘案して、次の概念を導入する。

定義 7.1. 集合 X 上の実数値関数の作る集合 $M \subset \mathbb{R}^X$ が単調族 (monotone class) であるとは、単調列極限に関して閉じていること。すなわち、 M に属する関数からなる増加列 $f_n \uparrow$ および減少列 $g_n \downarrow$ に対して、極限関数 $f(x) = \lim_n f_n(x)$, $g(x) = \lim_n g_n(x)$ が有限値に留まるならば、 $f, g \in M$ となること。

命題 7.2. 部分集合 $S \subset \mathbb{R}^X$ に対して、次の性質をもつ単調族 $M \supset S$ が存在する。

$$S \text{ を含む単調族 } M' \text{ は } M \text{ を含む。}$$

このような M は一つしかない。これを S によって生成された単調族 (the monotone class generated by S) といい、 $M(S)$ という記号で表わす。

Proof. S を含む単調族全体の共通部分を取ればよい。 \square

注意 10. 与えられた $S \subset \mathbb{R}^X$ に対して、 S に属する関数の増加列の極限として表わされる関数全体を S_1 、さらに S_1 に属する関数の減少列極限として表わされる関数全体を S_2 、以下同様に、 S_3, S_4, \dots を定義する。明らかに $S_n \subset M$ ($n = 1, 2, \dots$)。これらで、 M が尽くされるならば話は簡単であるが、そうは問屋が卸さない。例えば、拡張のレベル n を変化させつつ増加する単調列を考えると、その極限関数は一般に、 $S_\infty = \cup_n S_n$ に留まる保証はない。ということで、 S_∞ から再び

$$(S_\infty)_1, (S_\infty)_2, (S_\infty)_3, (S_\infty)_4, \dots$$

といった操作をさらに続けていく必要がある。正確には可算順序数に関する帰納法を使うことになる。むしろ、このような状況の分析を通じて順序数 (ordinal number) なる概念が抽出された、というのが正確なところであろう。天上から網をかぶせる上のような方法は、何かしら悪魔的な不安を覚えるものの、ドライな現代的感覚の論法ではある。形而上学的証明 (metaphysical proof) と称すべきか。

定理 7.3. 集合 X 上のベクトル束 L に対して、 L から生成された単調族 $M(L)$ はベクトル束であり、かつ各点収束列の極限に関して閉じている。

Proof. 例えば $f, g \in M(L) \implies f + g \in M(L)$ を示そう。二段階に分けて上の命題を使う。

- (i) $[L + M(L) \subset M(L)]$ $f \in L$ に対して、 $\{g \in M(L); f + g \in M(L)\}$ は L を含む単調族故 $M(L)$ に一致する。
- (ii) $[M(L) + M(L) \subset M(L)]$ $g \in M(L)$ に対して、 $\{f \in M(L); f + g \in M(L)\}$ は、先のステップから L を含み、明らかに単調族を成す。したがって $M(L)$ に一致する。

他の性質も同様の論法で示される。

ベクトル束において、各点収束の極限関数は、増加極限と減少極限の繰り返しで書ける (\limsup または \liminf) ことに注意すれば最後の主張もわかる。 \square

問 51. スカラー倍、束演算についての証明を与えてよ。

系 7.4. $L^1 \cap M(L)$ もベクトル束であり、 $I : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を制限することで積分系を得る。

問 52. X 上のベクトル束 L , X' 上のベクトル束 L' が与えられ写像 $\phi : X \rightarrow X'$ が $L' \circ \phi \subset L$ を満たすならば、 $M(L') \circ \phi \subset M(L)$ であることを確認。

定義 7.5. 単調収束定理が成立する積分系を単調完備 (monotone-complete) であると呼ぶ。すなわち、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $f_n \in L$, $f_n \uparrow f$ かつ $\lim_n I(f_n) < \infty$ ならば、 $f \in L$ であり $I(f_n) \uparrow I(f)$ が成り立つものを言う。積分系 $L^1 \cap M(L)$ は単調完備であり、これを L の（積分 $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ に関する）単調完備化 (monotone-completion) と称する。

注意 11. 上で「単調完備」といっているものは、厳密には「単調列完備」とすべきであろうが、そうすると、「単調収束定理」も「単調列収束定理」と言い換えなければならず煩わしいので、「列」を省略する習慣に従っておく。今の場合、一般的の単調収束まで許してしまうと、あらゆる関数が単調極限の繰り返しで書けることにもなってしまい、役に立たない。

補題 7.6. 関数 $f \in L_{\downarrow}$, $g \in L_{\uparrow}$ に対して、 $[f, g] = \{h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; f \leq h \leq g\}$ と書く。

- (i) このとき、 $M(L) \cap [f, g] = M(L \cap [f, g])$ が成り立つ。
- (ii) 積分系 (L, I) が単調完備であれば、 $f, g \in L$ に対して、 $M(L) \cap [f, g] = L \cap [f, g]$.
- (iii) $M(L) = \bigcup_{f \in L_{\downarrow}, g \in L_{\uparrow}} [f, g] \cap M(L)$. すなわち、 $f \in M(L)$ に対して $f_{-} \in L_{\downarrow}$, $f_{+} \in L_{\uparrow}$ で $f_{-} \leq f \leq f_{+}$ となるものが存在する。とくに $M(L)^+ = M(L^+)$ である。

Proof. 実質的に意味のあるのは $f \leq g$ の場合があるので、そのように仮定する。

- (i) まず $f_n \downarrow f$, $g_n \uparrow g$ ($f_n, g_n \in L$) と表示しておく。そして、

$$M = \{h \in M(L); (f \vee h) \wedge g \in M([f, g] \cap L)\}$$

を考える。等式 $(f \vee h) \wedge g = f \vee (h \wedge g)$ が成り立つことに注意。

さて、 M が単調族を形成することは見易い。さらに $h \in L$ のとき、

$$(f \vee h) \wedge g = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (f_m \vee h) \wedge g_n \in ([f, g] \cap L)_{\downarrow \uparrow}$$

より $L \subset M$ である。したがって $M = M(L)$ がわかり、さらに $f \leq h \leq g$ ($h \in M$) であれば、 $h = (f \vee h) \wedge g \in M([f, g] \cap L)$ となる。すなわち、 $M(L) \cap [f, g] \subset M(L \cap [f, g])$. 逆の包含関係は明らかである。

- (ii) 単調完備性により $L \cap [f, g]$ は単調族となるので、(i) より

$$M(L) \cap [f, g] = M(L \cap [f, g]) = L \cap [f, g].$$

- (iii) 条件

$$h \in M(L), \quad \exists f \in L_{\downarrow}, g \in L_{\uparrow}, f \leq h \leq g$$

を満たす関数 h 全体 H は、下で見るよう単調族であり、 L を含むので、 $M(L)$ に一致する。とくに、 $h \in M(L)^+$ に対して、 $h \leq g$ となる $g \in L_{\uparrow}$ が存在する。そこで (i) を適用すれば、

$$h \in M(L) \cap [0, g] = M(L \cap [0, g]) \subset M(L^+)$$

となる。逆の包含関係 $M(L^+) \subset M(L)^+$ は、 $M(L)^+$ が L^+ を含む単調族であることからわかる。

最後に H が単調族であること。実際 $h_n \in [f_n, g_n]$ が単調減少であれば、 $\lim_n h_n \leq g_1$ であり、一方 $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \in L_\downarrow$ も下から h_n を支えるので $f_n \downarrow$ であるとしてよい。そうすると、補題 4.11(ii) から $f = \lim_n f_n \in L_\downarrow$ がわかるので、 $\lim_n h_n$ は f によって下から支えられる。 h_n が単調増加の場合も同様。□

問 53. $1_X \in L_\uparrow^+$ の場合には、 $M(L)^+ = M(L^+)$ は、(i) の特別な場合であることを確認。とくに $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ の場合には。

定理 7.7. 単調完備な積分系 (L, I) において、 $M(L)_\uparrow^+ = L_\uparrow^+$ であり $L^1 \cap M(L) = L$ が成り立つ。とくに単調完備な積分系の単調完備化は、それ自身に一致する。

Proof. $f \in M(L)_\uparrow^+$ とすると、 $f_n \uparrow f$ ($f_n \in M(L)^+$) と書ける。上の補題 (iii) により $f_n \leq g_n$ となる $g_n \in L_\uparrow$ が存在する。 L_\uparrow は増加列極限について閉じていることから

$$h \equiv \sup_{n \geq 1} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \vee \cdots \vee g_n$$

は L_\uparrow に属し、 $f \leq h$ を満たす。そこで、 $h_n \uparrow h$ となる $h_n \in L^+$ を取ってきて $f_n = f \wedge h_n$ とおくと、上の補題 (ii) により $f_n \in M(L) \cap [0, h_n] = L \cap [0, h_n] \subset L^+$ であり、 $f_n \uparrow f$ となる。すなわち $f \in L_\uparrow^+$.

次に $f \in L^1 \cap M(L)$ とする。既に確かめたことから $(\pm f) \vee 0$ は $L^1 \cap M(L)^+ \subset L_\uparrow^+$ に含まれるので、 $g_n, h_n \in L^+$ を

$$g_n \uparrow (f \vee 0), \quad h_n \uparrow (-f) \vee 0$$

となるように取ることができる。一方

$$I(g_n) \leq I(f \vee 0) < \infty, \quad I(h_n) \leq I((-f) \vee 0) < \infty$$

であるので、単調完備性により

$$f \vee 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \quad (-f) \vee 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

は L^+ の元であり、したがって $f = f \vee 0 - (-f) \vee 0 \in L$. □

系 7.8. 一般の積分系 (L, I) において、 $M(L)_\uparrow^+ = (L^1 \cap M(L))_\uparrow^+$. とくに $f \in M(L)_\uparrow^+$ に対して $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ であり、 $f_n \uparrow f$ なる $f_n \in L^1 \cap M(L)^+$ が存在する。また、このような全ての増加列 f_n に対して $I(f_n) \uparrow \bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ である。

問 54. 等式 $M(L)_\uparrow = (L^1 \cap M(L))_\uparrow$ に対する反例を挙げよ。

定義 7.9. 積分 I を次の式によって $M(L)_\uparrow^+$ の部分にまで拡張する。

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad f_n \uparrow f, \quad f_n \in (L^1 \cap M(L))^+.$$

これは、 $L^1 \cap M(L)_\uparrow^+$ の上では積分値と、 L_\uparrow^+ の上では I_\uparrow と一致する。

注意 12. 一般の関数 f に対しては、 $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ であってもその値が $\pm\infty$ である場合には、危い関数も入ってきてしまう。そのような場合に、積分値 $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \pm\infty$ が存在すると考えてはいけない。

例 7.10. 実数直線上の関数 $f_{\alpha, \beta}$ を、

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha} e^{-|x|^\beta} & \text{if } 0 < |x|, \\ \infty & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

で定めると、 $f \in M(C_c(\mathbb{R}))_+^+$ であり、

$$I(f) = \begin{cases} \frac{2}{\beta} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) & \text{if } \alpha < 1, \\ \infty & \text{if } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

8 可測集合と可測関数

定義 8.1.

- (i) 部分集合 $A \subset X$ が L 可測 (L -measurable) であるとは、 $1_A \in M(L)$ となること。 L 可測集合全体を $\mathcal{M}(L)$ で表わす。
- (ii) ベクトル束 L は、 $X \in \mathcal{M}(L)$ すなわち $1_X \in M(L)$ であるとき、 σ 有限 (σ -finite) と呼ばれる。積分系 (L, I) は、 L が σ 有限のとき、 σ 有限であるという。

命題 8.2. 局所コンパクト距離空間 X について考える。

- (i) X のコンパクト部分集合 K は、 $C_c(X)$ 可測である。
- (ii) ベクトル束 $C_c(X)$ が σ 有限であるための必要十分条件は、 $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ (X_n は X のコンパクト部分集合) と書けること。このような局所コンパクト距離空間は、 σ コンパクト (σ -compact) と呼ばれる。

Proof. (i) 十分大きい自然数 $n \geq 1$ に対して、 $K_{1/n}$ はコンパクトであり (補題 2.7)、連続関数 $1 - 1 \wedge (nd(\cdot, K))$ の支えを含む。さらに

$$1_K = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1 \wedge nd(\cdot, K))$$

であるから、 K は $C_c(X)$ 可測。

- (ii) 十分条件であることは (i) からわかるので、必要条件であることを示せばよい。

$$M = \{f \in M(L)^+; [f \neq 0] \subset \bigcup_{n \geq 1} K_n\}$$

とおく。ここで、 $\{K_n\}$ は f に依存して存在するコンパクト集合の列を表わす。すると、 M は $C_c(X)^+$ を含む単調族であるので、 $M = M(L^+) = M(L)^+$ となる。したがって、 $1_X \in M(L)^+$ であれば、 $[1_X] = X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$. \square

系 8.3. $X = \mathbb{R}^n$ または可算離散空間であるとき、 $C_c(X)$ は σ 有限である。

以下では、とくに断らない限り σ 有限なベクトル束だけを扱う。

命題 8.4. ベクトル束 L が σ 有限であるとき、 $\mathcal{M}(L)$ は σ ブール代数 (σ -Boolean algebra) を成す。すなわち、次が成り立つ。

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{M}(L)$.
- (ii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(L) \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n, \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}(L)$.
- (iii) $A \in \mathcal{M}(L) \implies X \setminus A \in \mathcal{M}(L)$.

問 55. 上の命題を確かめよ。

注意 13. σ ブール代数という代わりに、 σ 体 (σ -field) あるいは σ 環 (σ -ring) と呼ぶのが一般的である。しかしながら、これは代数学における体あるいは環とは一応別の概念であるため、より紛れのない用語をここでは採用した。ただし、和集合のかわりに対称差をとることで、実際に「環」と見ることは可能である。

例 8.5. $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ のとき、 $\mathcal{M}(L)$ は、すべての開集合と閉集合を含む。

定義 8.6. 可測集合 $A \in \mathcal{M}(L)$ に対して、その I 測度 (I -measure) $|A|_I \in [0, \infty]$ を $|A|_I = I(1_A)$ で定める。すなわち、

$$|A|_I = \begin{cases} I(1_A) & \text{if } 1_A \text{ is integrable,} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$L = C_c(\mathbb{R}^n)$ 上のリーマン積分から作られる I -測度のことをルベーグ測度 (Lebesgue measure) という。ルベーグ測度については、 I を省略して $|A|$ などと書き表わす。

例 8.7. 直方体 $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ のルベーグ測度は、

$$|[a, b]| = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

問 56. ルベーグ測度は、(i) 平行移動で不变であり、(ii) 正則一次変換 T について、 $|T(A)| = |\det(T)| |A|$ なる変換性を示す。とくに、ルベーグ測度は、ユークリッド空間の直交座標の取り方よらず意味をもつことがわかる。

命題 8.8. I 測度は、次の性質をもつ。

$$(i) \quad |\emptyset|_I = 0.$$

$$(ii) \quad A = \bigsqcup_{n \geq 1} A_n \implies |A|_I = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|_I.$$

定義 8.9. 一般に、 σ ブール代数 $\mathcal{B} \subset 2^X$ の上で定義され $[0, \infty]$ 値をとる関数 μ が測度 (measure) であるとは、(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ かつ $A_m \cap A_n = \emptyset$ ($m \neq n$) ならば

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(これを σ 加法性という) が成り立つこと。

測度 μ は、 $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ ($\mu(X_n) < \infty$) であるとき、 σ 有限であるという。また $\mu(X) < \infty$ である場合に有限測度 (finite measure)、 $\mu(X) = 1$ となるものを確率測度 (probability measure) という。集合 X 、 σ ブール代数 $\mathcal{B} \subset 2^X$ および \mathcal{B} 上の測度 μ の組 (X, \mathcal{B}, μ) を測度空間 (measure space) と称する。

注意 14. 2^X は X の幂集合 (power set)、すなわち X の部分集合全体の集合 (何という表現であるか) を表わす。

問 57. 減少列 $A_n \in \mathcal{B}$ が $A_n \downarrow \emptyset$ および $\mu(A_1) < \infty$ を満たすならば、 $\mu(A_n) \downarrow 0$ である (測度の連続性)。

問 58. σ 有限なベクトル束 L 上の積分 I から作られた $\mathcal{M}(L)$ 上の測度は、 σ 有限である。[ヒント：補題 7.6 (iii) を使う。]

補題 8.10. 集合 X 上に σ ブール代数 \mathcal{B} が与えられたとき、関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ に対して、以下の 4 条件は同値である。(i) $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f > a] \in \mathcal{B}$. (ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f \geq a] \in \mathcal{B}$. (iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f < a] \in \mathcal{B}$. (iv) $\forall a \in \mathbb{R}$, $[f \leq a] \in \mathcal{B}$.

ここで、 $\{x \in X; f(x) > a\} = [f > a]$ などに注意。

問 59. これを確かめよ。

定義 8.11. 与えられた σ ブール代数 $\mathcal{B} \subset 2^X$ に対して、関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が上の同値な条件を満たすとき、 \mathcal{B} 可測 (\mathcal{B} -measurable) であるという。確率測度空間の場合、可測関数は確率変数 (random variable) とも呼ばれる。

関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は、その取り得る値の集合 $\{f(x); x \in X\}$ が有限集合であるとき、単純関数 (simple function) という。

命題 8.12. 可測な単純関数全体を S で表わすと、 S は関数の積について閉じているベクトル束であり、それから生成された単調族 $M(S)$ は有限な値をとる \mathcal{B} 可測関数全体と一致する。

Proof. 単純関数 f に対して、 $f(X) = \{a_1 < \dots < a_m\}$ とすると

$$A_i \equiv [f = a_i] = [f \geq a_i] \cap [f \leq a_i] \in \mathcal{B}$$

であり、

$$f = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}, \quad \bigsqcup_i A_i$$

となる。逆に、このように書ける単純関数は可測である。さて、 $g \in S$ についても

$$g = \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j}, \quad \bigsqcup_j B_j$$

と表示して $\bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j$ に注意すると

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j}, & fg &= \sum_{i,j} a_i b_j 1_{A_i \cap B_j}, \\ f \vee g &= \sum_{i,j} (a_i \vee b_j) 1_{A_i \cap B_j}, & f \wedge g &= \sum_{i,j} (a_i \wedge b_j) 1_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

となるので、これらは単純関数。

次に、有限値可測関数全体を M とすると、 M は単調族をなす。実際、有限値可測関数列 $\{f_n\}$ に対して、

$$\begin{aligned} f_n \downarrow f &\implies [f \geq a] = \bigcap_{n \geq 1} [f_n \geq a] \in \mathcal{B}, \\ f_n \uparrow f &\implies [f \leq a] = \bigcap_{n \geq 1} [f_n \leq a] \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

以上により、 $M(S) \subset M$ である。逆に $f \in M$ であるとき、関数のグラフの横分割により

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} m & \text{if } f(x) > m, \\ -m + 2mj/n & \text{if } -m + 2m(j-1)/n < f(x) \leq -m + 2mj/n \text{ for } 1 \leq j \leq n, \\ -m & \text{if } f(x) \leq -m \end{cases}$$

とおくと、

$$|f_{m,n}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{if } -m < f(x) \leq m$$

であるので、極限を取って、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}(x) = f(x) \quad \text{if } -m < f(x) \leq m.$$

さらに極限を取ると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}(x) = f(x) \quad \text{for any } x \in X$$

となって $M \subset M(S)$ がわかる。 \square

問 60. \mathcal{B} 可測関数列 $\{f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{n \geq 1}$ に対して、 $\{x \in X ; \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ が存在する}\} \in \mathcal{B}$ である。

さて、測度 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ が与えられたとき、可測単純関数 f は、 $\mu([f = a]) < \infty$ ($0 \neq \forall a \in \mathbb{R}$) であるとき、 μ 有限であると呼ぶことにする。 μ 有限な可測単純関数全体を S_μ で表わせば、これもベクトル束となり、さらに μ が σ 有限であれば、 $M(S) = M(S_\mu)$ となる。 $f \in S_\mu$ を $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ ($\mu(A_i) < \infty$) と表わして

$$I_\mu(f) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

とおくと、この値は右辺の表示によらず、したがって正線型汎関数 $I_\mu : S_\mu \rightarrow \mathbb{R}$ を定める。さらに、測度の σ -加法性から I_μ の連続性が従うので（下の問を参照）、積分系 (S_μ, I_μ) が得られた。このようにして測度 μ から構成された積分は、しばしば

$$\int f(x) \mu(dx)$$

という記号で表わされる。また、可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して、

$$\int_A f(x) \mu(dx) = \int 1_A(x) f(x) \mu(dx)$$

という書き方もよく使われる。

問 61. * 減少列 $f_n \in S_\mu$ が $f_n \downarrow 0$ を満たすとき、 $\forall \epsilon > 0$,

$$I(f_n) = I(1_{[f_n \leq \epsilon]} f_n) + I(1_{[f_n > \epsilon]} f_n) \leq \epsilon I(f_1) + \|f_1\|_\infty \mu([f_n > \epsilon])$$

であり、 $[f_n > \epsilon] \downarrow \emptyset$ に注意すれば、 μ の連続性から $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \leq \epsilon I(f_1)$ ($\forall \epsilon > 0$) がわかる。

定理 8.13. 集合 X 上の σ 有限な積分系 (L, I) に対して、

$$\text{関数 } f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ が } \mathcal{M}(L) \text{ 可測である} \iff f_\pm = (\pm f) \vee 0 \in M(L)_\uparrow^+.$$

また、 $f \in M(L)_\uparrow^+$ であるとき、次が成り立つ。

$$I(f) = \lim_{r \rightarrow 1+0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n \left| [r^n < f \leq r^{n+1}] \right|_I.$$

Proof. $f_\pm = 0 \vee (\pm f) \in M(L)_\uparrow^+$ とすると、 $r \geq 0$ に対して、

$$1_X \wedge (n(f_\pm - f_\pm \wedge r)) \uparrow 1_{[f_\pm > r]}$$

であるから (σ 有限性 $1_X \in M(L)$ に注意)、 $[f_\pm > r] \in \mathcal{M}(L)$ となる。これから $[f > a] \in \mathcal{M}(L)$ ($a \in \mathbb{R}$) がわかる。

逆に $[f > a] \in \mathcal{M}(L)$ ($\forall a \in \mathbb{R}$) とせよ。このとき、 $h = f_{\pm}$ に対して $[h > r] \in \mathcal{M}(L)$ ($0 \leq r < \infty$) である。従って $r > 1$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対して $[r^n < h \leq r^{n+1}] \in \mathcal{M}(L)$ であり、

$$h_r \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n 1_{[r^n < h \leq r^{n+1}]} \in M(L)^+$$

となる。一方、 $h_r \uparrow h$ ($r \downarrow 1$) であるから、 $h \in M(L)_+^+$ ($h = f_{\pm}$) が従い、単調収束定理により、求める表示式を得る。 \square

問 62. $h_r(x) = r^n \iff r^n < h(x) \leq r^{n+1}$ に注意して、以下を確かめよ。

- (i) $\lim_{r \rightarrow 1} h_r(x) = h(x)$ ($x \in X$).
- (ii) $1 < s < r$ ならば $h_r \leq h_s$.

系 8.14. 積分系 (L, I) から測度空間 $(X, \mathcal{M}(L), \mu)$ を作り、この測度空間からさらに積分系 (S_μ, I_μ) を作ると、 (L, I) および (S_μ, I_μ) の単調完備化が一致する。とくに $M(S_\mu) = M(L)$ である。

系 8.15.

- (i) $\mathcal{M}(L)$ 可測関数 f に対して $|f|^\alpha \in M(L)_+^+$ ($\alpha > 0$) である。
- (ii) ベクトル束 $M(L)$ は、関数の積に関して閉じている。すなわち、 $f, g \in M(L)$ ならば $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2 \in M(L)$.

問 63. 上の系 (i) を確かめよ。

以上の考察から、積分 I と測度 μ とは同等の情報を与えるものであることがわかる。そこで、 L^1 で使われる積分を明示する際に、 $L^1(X, \mu)$ といった書きかたをする。

これまでの議論の応用として、ルベーグ測度の特徴づけを与えてみよう。

定理 8.16. * $C_c(\mathbb{R}^n)$ 上の積分で、平行移動に関して不变であるものは、リーマン積分の定数倍に一致する。

Proof. 移動で不变な積分から作られる測度 μ を考え、 $C = \mu((0, 1] \times \cdots \times (0, 1])$ とおく。測度 μ も平行移動に関して不变であるから、 $m = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\mu((0, 1/2^m] \times \cdots \times (0, 1/2^m]) = \frac{C}{2^{mn}} = |(0, 1/2^m] \times \cdots \times (0, 1/2^m)|$$

となる。したがって、これらの平行移動の分割和で表示される単純関数 f に対して、等式

$$\int f(x) \mu(dx) = C \int f(x) dx$$

が成り立つ。任意の $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ はそのような単純関数の一様極限（ただし、支えは、極限に依存しない共通の有界集合に含まれるようにして）で書けるので、上の等式は、 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ についても成り立つ。 \square

問 64 (Chebyshev's inequality). 次の不等式を示せ。

$$\int_X |f(x)|^\alpha dx \geq r^\alpha \mu(|f| \geq r).$$

例 8.17. * 非可測集合の構成。 \mathbb{R} を加法群と思って、その可算密部分群 T で \mathbb{Z} を含むものを考える。例えば、 $T = \mathbb{Q}$ とか $T = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ ($\theta \notin \mathbb{Q}$)。次に商群 \mathbb{R}/T の代表系 W を $W \subset [0, 1)$ となるように取ってくる。（ここで選択公理を使う。）これが「悪い」集合（wild set）を与える。

仮に、 W ガルベーグ可測であったとすると、

$$|(W + t + \mathbb{Z}) \cap [0, 1]| = |W| \quad (t \in T)$$

が成り立つ。実際、 $n \in \mathbb{Z}$ を $n \leq t < n + 1$ るように選べば、

$$(W + t + \mathbb{Z}) \cap [0, 1] = (W + t - n - 1) \cap [0, t - n] \bigsqcup (W + t - n) \cap [t - n, 1)$$

となって、

$$|(W + t + \mathbb{Z}) \cap [0, 1]| = |(W + t) \cap [n + 1, t + 1]| + |(W + t) \cap [t, n + 1]| = |W + t| = |W|$$

がわかる。

さて、 $\mathbb{R} = \bigsqcup_{t \in T/\mathbb{Z}} (W + t + \mathbb{Z})$ であるから、

$$[0, 1) = \bigsqcup_{t \in T/\mathbb{Z}} (W + t + \mathbb{Z}) \cap [0, 1)$$

より、

$$1 = \sum_{t \in T/\mathbb{Z}} |W|$$

であるが、右辺は 0 または ∞ であるので、これで矛盾となる。

定義 8.18. 局所コンパクト距離空間 X に対して、 X の開集合全体から生成される σ ブール代数に属する集合をボレル集合 (Borel set) と呼ぶ。ボレル集合の上で定義された測度をボレル測度 (Borel measure) と呼ぶ。

定理 8.19 (Riesz-Radon-Banach-Markov-Kakutani). * コンパクト距離空間 X における有界ボレル測度と $C(X)$ 上の正汎関数との間に一対一の対応が存在する。

Proof. 連続関数はボレル可測であるので、有界測度から正汎関数が積分により与えられる。一方、ここで測度の構成方法から、正汎関数にボレル測度が対応し、そのボレル測度から積分によって得られる正汎関数は、最初のものと一致する。あとは、測度の一意性のみが問題である。2つの有界測度 μ, μ' から得られる正汎関数 I, I' が、 $C(X)$ の上で一致したとする。Baire (定理 3.9) により、 μ と μ' は、 X の開集合の上で一致する。したがって、系 8.14 により、ボレル集合の上でも一致する。□

注意 15. この定理は、Riesz-Markov の定理として引用されることが多いのであるが、有界閉区間 (F. Riesz)、ヨークリッド空間の有界閉集合 (Radon)、コンパクト距離空間 (S. Banach)、正則空間 (A.A. Markov)、コンパクト空間 (S. Kakutani) という流れなので、Banach あるいは角谷に言及しないのは片手落ちというべきであろう。もう少し補足すると、Riesz は有界線型汎関数を Stieltjes 積分により表示した。これをルベーグ積分的に解釈しなおせば、符号付き測度による積分表示ということになる。Radon は Riesz の構成の多次元化に相当する Stieltjes 表示を測度論的な解釈と併せて与えた。Banach, Markov, Kakutani は、正汎関数についてのものである。Banach は Saks による積分の本の付録という形で、Daniell 風の拡張が可能であることを示した。ただし、前提となる正汎関数についての連続性が強い形になっていて、それを関数解析的に示す都合上、コンパクト距離空間という制限がついている。また拡張の方法も Daniell のそれとは異なっている（もちろん、拡張そのものは一致する）。Markov は正則空間の場合の有界正汎関数と exterior density との対応を論じていて、とくにコンパクト空間の場合には exterior density が Caratheodory の外測度の性質をみたすことを示している。したがって測度の構成は Caratheodory に投げたかたちになっている。一方、Kakutani は、vector lattice の表現定理について、コンパクト空間の場合のいわゆる Riesz-Markov を今あるように完璧に論じている。

一般的のコンパクト空間の場合には、測度が位相と良い関係にあること（測度の正則性）を要求することで、一対一の関係が維持される。この意味での正則な測度は、ラドン測度 (Radon measure) と呼ばれる。（ただし、Radon が測度の正則性を議論したわけではない。）距離空間の場合は、この正則性が自動的に成り立つので、結果の言い表し方が簡単になる。（正則性については、W. Arveson, Notes on measure and integration in locally compact spaces に詳しい解説あり。）

9 零関数と零集合

定義 9.1. 可測関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ が、 $I(|f|) < \infty \iff I((\pm f) \vee 0) < \infty$ 、という条件を満たす場合にも、可積分であるという表現を使う。この意味で可積分な関数に対して、その積分を

$$I(f) = I(f \vee 0) - I((-f) \vee 0) \in \mathbb{R}$$

で定める。

確率測度空間の場合、可積分な確率変数 ξ の積分を期待値 (expectation) あるいは平均値 (mean) と呼び、しばしば $\langle \xi \rangle$ という記号で表わされる。

複素数値関数 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ が可測（可積分）であるとは、その実部 $\Re f$ および虚部 $\Im f$ がともに可測（可積分）であることと定義する。可積分な複素数値関数 f に対してその積分を $I(f) = I(\Re f) + iI(\Im f)$ で定める。

問 65. 可積分な複素数値関数全体は複素ベクトル空間をなし、積分はその上の複素線型汎関数を与える。

命題 9.2. 可測関数 $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 $|f|$ も可測であり、 f が可積分であるための必要十分条件は、 $|f|$ が可積分であること。このとき不等式

$$|I(f)| \leq I(|f|)$$

が成り立つ。

Proof. 不等式の証明は、例えば、極表示 $I(f) = |I(f)|e^{i\theta}$ を使って

$$|I(f)| = I(\Re f) \cos \theta + I(\Im f) \sin \theta = I((\Re f) \cos \theta + (\Im f) \sin \theta) \leq I(|f|)$$

と計算する。 □

例 9.3. ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+itx} dx = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$$

の実解析学的計算。

問 66. 可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と正数 $a > 0$ に対して、 $x \in \mathbb{R}$ の関数

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2} dt$$

は、複素平面 \mathbb{C} 全体に延長できる解析関数である。

定義 9.4. 可測関数 $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ で $I(|f|) = 0$ であるものを零関数 (null function) と呼ぶ。可測集合 A が零集合 (null set) であるとは、その支持関数 1_A が零関数であること、すなわち $1_A \in M(L)$ かつ $I(1_A) = 0$ となること。零集合全体を $\mathcal{N}(I)$ という記号で表わす。

例 9.5. (i) \mathbb{R} の可算部分集合。

(ii) Cantor 集合。

(iii) ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の超曲面。

問 67. \mathbb{R}^n の超曲面が零集合であることを確かめよ。ヒント：陰関数定理。

命題 9.6. 零集合の性質。

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}(I)$.

(ii) 零集合 $N \in \mathcal{N}(I)$ に対して、その可測部分集合は零集合。

(iii) 零集合の可算列 $\{N_n\}_{n \geq 1}$ に対して、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ も零集合。

問 68. 上の性質を確かめよ。

命題 9.7.

(i) 可測関数 $f \in M(L)$ に対して、 $[f \neq 0] \in \mathcal{M}(L)$ が零集合であるための必要十分条件は、 $I(|f|) = 0$ となること。

(ii) 可測関数 $f \in M(L)_+^+$ に対して、 $I(f) < \infty$ ならば $[f = \infty] \in \mathcal{M}(L)$ は零集合である。

Proof. (i) 単調収束定理を使う。 $|f| \wedge (n1_{[f \neq 0]}) \uparrow |f|$ より、

$$I(|f|) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(|f| \wedge (n1_{[f \neq 0]})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nI(1_{[f \neq 0]})$$

であり、また $(n|f|) \wedge 1 \uparrow = 1_{[f \neq 0]}$ より、

$$I(1_{[f \neq 0]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I((n|f|) \wedge 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nI(|f|).$$

(ii) $A = [f = \infty]$ とおくと、 $n1_A \leq f$ ($n = 1, 2, \dots$) より $n|A|_I \leq I(f)$. □

系 9.8.

(i) 有限値零関数全体 $N(I)$ は $M(L)$ のイデアルをなす。

$$f \in N(I), g \in M(L) \implies fg \in N(I).$$

(ii) 可積分関数 $f, g \in L^1$ に対して、 $I(|f - g|) = 0$ であるための必要十分条件は、ある零集合 N があって、 $f(x) = g(x)$ ($x \notin N$) であること。

以上からわかるることは、零関数の違いは、積分の値に一切効いてこないということである。実際これは、積分についての感覚とも合致している。誰も

$$\int_{(0,1]} f(x) dx, \quad \int_{[0,1]} f(x) dx$$

の 2 つの積分の違いを問題にしたいとは思わないであろう。

定義 9.9. 2 つの関数 $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ がほとんど至るところ等しい⁷（積分論的に同一である）とは、集合 $[f \neq g]$ が零集合に含まれること。このとき $f = g$ (a.e.) と書く。「a.e.」とは、almost everywhere の略。

⁷ このしゃれた言い方は、ルベーグの 1910 年の論文で presque partout として現れたのが最初である由。

これは同値関係である。この同値類を事実上の関数とみなす。関数の和、積、スカラー倍、束演算は事実上の関数に対する演算として定義がうまくいくことが容易に確かめられる。

例えば、零集合 N_1, N_2 以外で定義された関数 $f_j : X \setminus N_j \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) に対して、その和 $f_1 + f_2$ を $X \setminus (N_1 \cup N_2)$ 上で、 $f_1(x) + f_2(x)$ と定義すれば、除外集合の取り方によらずに定まる。

問 69. スカラー倍、束演算についても確かめよ。

例 9.10. Dirichlet 関数の積分を分析。

問 70. 可積分関数 f に対して、関数 $g \in L^1 \cap M(L)$ で $f = g$ (a.e) であるものが存在する。積分論的には、 L^1 の代わりに $L^1 \cap M(L)$ を考えれば十分であるということである。

これから、 $f(x) = \pm\infty$ となり得る関数を扱っていても、そのような x 全体が零集合に含まれるならば、そこでの値を適当な有限値（例えば 0）に置き換えてその積分について論じて何ら問題がないことがわかる。

ほとんど至るところの収束、ほとんど至るところ定義された可測関数、各種収束定理の「ほとんど至るところ」版などが成り立つ。例えば、

定理 9.11. ほとんど至るところ定義された可積分関数 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が、

$$\sum_{n \geq 1} I(|f_n|) < \infty$$

を満たすならば、零集合 N が存在して、(i) すべての n について、 $X \setminus N$ は f_n の定義域に含まれる、(ii) $x \in X \setminus N$ ならば $\sum_n |f_n(x)| < \infty$ 。

したがって、 $f(x) = \sum_n f_n(x)$ ($x \notin N$) とおくと、 f はほとんど至るところ定義された可積分関数であり、

$$I(f) = \sum_n I(f_n)$$

が成り立つ。

Proof. 各 f_j は、零集合 N_j 以外で定義されているとする。このとき、 $\tilde{f}_j(x) = f_j(x)$ ($x \notin \cup_j N_j$) かつそれ以外では 0 と定めると \tilde{f}_j は可測として良く（上の問参照）

$$\sum_{n \geq 1} |\tilde{f}_n| \in M_\uparrow^+$$

となる。さらに

$$I\left(\sum_{n \geq 1} |\tilde{f}_n|\right) = \sum_{n \geq 1} I(|\tilde{f}_n|) = \sum_{n \geq 1} I(|f_n|) < \infty$$

であるから、

$$\sum_{n \geq 1} |\tilde{f}_n(x)| = \infty$$

となる x 全体 N_0 は零集合である。そこで、 $N = \cup_{n \geq 0} N_j$ とおくと、 $x \notin N$ に対して

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \tilde{f}_n(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$$

は絶対収束し、ほとんどいたるところ定義された可積分関数を定め、収束定理が成り立つ。 \square

問 71. 他についても確かめよ。

例 9.12. 有理数全体を $\{q_n; n \geq 1\}$ と一列に並べると、可測関数

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^3(x-q_n)^2}$$

は、ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して有限値を取り

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \sqrt{\frac{\pi}{n^3}} < \infty.$$

問 72. 関数列 $\{f_n \in L^1\}$ が、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(|f_n|) = 0$ を満たせば、部分列 $\{n'\}$ を $I(|f_{n'}|) \leq 1/n^2$ と取ることで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n'}(x) = 0 \quad \text{for almost all } x \in X$$

を示せ。ヒント： $\sum_{n \geq 1} I(|f_{n'}|) < \infty$ を使う。

上掲収束定理の理論的な応用として、次を挙げておこう。

命題 9.13. (i) ベクトル空間 L^1 は、 L のノルム $\|f\|_1 = I(|f|)$ に関する完備化に一致する。

(ii) どのような $0 \leq f \in L^1$ についても、列 $f_n \in L^+$ で $\sum_n I(f_n) < \infty$ となるものを取ってきて $f = \sum_n f_n$ が零関数の違いを除いて成り立つようにできる。とくに可積分関数 $f \in L^1$ に対して、関数 $f_{\pm} \in L^1 \cap L_{\uparrow}$ および零集合 N が存在して $f(x) = f_+(x) - f_-(x) (x \notin N)$ となる。

Proof. 証明は書くと長くなるが、その方針さえ定まれば単純なものである。

まず (ii) を示そう。 L_{\uparrow} の減少関数列 $f_n \geq f$ を $I(f_n - f) \leq 1/2^n$ であるように取る。この段階で $\lim_n f_n - f \geq 0$ は零関数であることに注意。次に $f_{n,m} \in L^+$ を

$$f_{n,m} \uparrow f_n (m \rightarrow \infty), \quad I(f_n - f_{n,m}) \leq \frac{1}{2^{m+n}}$$

であるように選ぶ。このとき、

$$0 \leq I(f_{n,m} - f_{n,m-1}) = I(f_n - f_{n,m-1}) - I(f_n - f_{n,m}) \leq \frac{1}{2^{m+n-1}} + 0 = \frac{2}{2^{m+n}}$$

であるから、 $\sum_{m,n \geq 1} (f_{n-1,m} - f_{n-1,m-1})$ は、ほとんど至るところ絶対収束する。さて、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= f_0 + \sum_{n \geq 1} (f_n - f_{n-1}) \\ &= f_{0,0} + \sum_{m \geq 1} (f_{0,m} - f_{0,m-1}) + \sum_{n \geq 1} (f_{n,0} - f_{n-1,0}) \\ &\quad + \sum_{m,n \geq 1} (f_{n,m} - f_{n,m-1}) - \sum_{m,n \geq 1} (f_{n-1,m} - f_{n-1,m-1}) \end{aligned}$$

で、絶対収束性が未確認の部分は、

$$I(|f_{n,0} - f_{n-1,0}|) \leq I(|f_{n,0} - f_n|) + I(|f_n - f_{n-1}|) + I(|f_{n-1} - f_{n-1,0}|) \leq \frac{6}{2^n}$$

に注意すれば、やはり、ほとんどいたるところ絶対収束することがわかる。

(i) (ii) により L は L^1 で密であるから、 L^1 の完備性を示す。そこで、改めてコーシー列 $f_n \in L^1$ をとる。すなわち、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} I(|f_m - f_n|) = 0.$$

このとき、部分列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ を $I(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|) \leq 1/2^k$ となるように取ることができるので、極限関数

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f_{n_0} - \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$$

がほとんどいたるところ収束する形で定義できる。さらに、

$$|f_n - f_{n_k}| \leq |f_n - f_{n_0}| + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \in L^1$$

であるから、押え込み収束定理とコーシー列の性質から

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I(|f_n - f_{n_k}|) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(|f_n - f|)$$

となって、めでたい。

□

例 9.14. $L = C_c(\mathbb{R}^n)$ 上のリーマン積分を I として得られる L^1 を $L^1(\mathbb{R}^n)$ で表すと、 $L^1(\mathbb{R}^n)$ は、ノルム $\|f\|_1 = I(|f|)$ に関してバナッハ空間であり、 $C_c(\mathbb{R}^n)$ はその密部分空間となる。

注意 16. 上の命題を逆手に取れば、Riesz 方式のルベーグ積分の定義に到達する。すぐわかるように、

$$L^1 \cap L_\uparrow = \{f; f_n \in L, f_n \uparrow f, \sup_{n \geq 1} I(f_n) < \infty\}, \quad I(f_n) \uparrow I(f)$$

であるから、上の命題 (ii) を L^1 の定義と思えば、 $f = f_+ - f_-$ の積分を、 $I(f) = I(f_+) - I(f_-)$ によって定義できる。ほとんど至る所の同一視を早い段階から取り込むことで、関数列の極限操作を 1 回で済ませられる利点がある。詳しくは、[Riesz-Nagy]、[溝畑]、[洲之内]、[山崎] を見よ。

定理 9.15 (大数の法則 (the law of large numbers)). * 確率測度空間 (X, μ) において、可積分確率変数の列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ が以下の条件をみたすとする。(i) 期待値列 $\{\langle \xi_n \rangle\}_{n \geq 1}$ の Cesaro 平均が収束する。(ii) 各確率変数の分散 $\sigma_n^2 = \langle (\xi_n - \langle \xi_n \rangle)^2 \rangle$ が有限であり、分散列 $\{\sigma_n^2\}_{n \geq 1}$ の Cesaro 平均は有界である。(iii) $\langle \xi_k \xi_l \rangle = \langle \xi_k \rangle \langle \xi_l \rangle$ ($k \neq l$) である。(iv) 零集合の点を除いて数列 $\{\xi_n(x) - \langle \xi_n \rangle\}_{n \geq 1}$ は有界である(各点有界)。

このとき、確率変数列 $\{\xi_n\}$ の Cesaro 平均は定数関数にほとんど至るところ収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(x) + \cdots + \xi_n(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \xi_1 \rangle + \cdots + \langle \xi_n \rangle}{n} \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X).$$

Proof. $\eta_n = \xi_n - \langle \xi_n \rangle$ とおく。次を示せばよい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_n(x)}{n} = 0 \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int (\eta_1(x) + \cdots + \eta_n(x))^2 \mu(dx) &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \int \eta_j(x) \eta_k(x) \mu(dx) \\ &= \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n} \leq \sup_{n \geq 1} \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n} < \infty \end{aligned}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int \left(\frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_{k^2}(x)}{k^2} \right)^2 \mu(dx) < \infty.$$

これから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} (\eta_1(x) + \cdots + \eta_{k^2}(x))^2 < \infty \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X),$$

とくに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_{n^2}(x)}{m^2} = 0 \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

である。最後に、任意の $n \geq 1$ については、 $m^2 \leq n < (m+1)^2$ なる $m \geq 1$ を用意して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_n(x)}{n} \right| &\leq \left| \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_n(x)}{m^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_{m^2}(x)}{m^2} \right| + \frac{|\eta_{m^2+1}(x)| + \cdots + |\eta_n(x)|}{m^2} \\ &\leq \left| \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_{m^2}(x)}{m^2} \right| + \frac{|\eta_{m^2+1}(x)| + \cdots + |\eta_{(m+1)^2}(x)|}{m^2} \\ &\leq \left| \frac{\eta_1(x) + \cdots + \eta_{m^2}(x)}{m^2} \right| + \frac{(m+1)^2 - m^2}{m^2} \sup_{k \geq 1} |\eta_k(x)| \end{aligned}$$

と評価して $n \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) とすればよい。

□

注意 17. 大数の法則については、これ以外にも様々なバリエーションがある。

例 9.16 (Borel's normal number theorem). * 与えられた自然数 $N \geq 2$ に対して、コンパクト距離空間 $X = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}}$ を考え、確率分布 $\{p_j = 1/N\}_{0 \leq j \leq N-1}$ に付随した X 上の確率測度を μ とする。

実数の N 進展開に対応して、可測関数

$$X = \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_k)_{k \geq 1} \mapsto \bar{x} = \sum_{k=1}^{\infty} N^{-k} x_k \in [0, 1]$$

について考える。 $d_1, d_2, \dots, d_{m-1} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $d_m \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ とするとき、 $x_k = d_k$ ($1 \leq k \leq m$) となるための必要十分条件は

$$N^{-1}d_1 + \cdots + N^{-m}d_m \leq \bar{x} < N^{-1}d_1 + \cdots + N^{-m+1}d_{m-1} + N^{-m}(d_m + 1).$$

(このことから、 μ は $[0, 1]$ のルベーグ測度に対応するものであることがわかる。)

さて、確率変数 $\xi_k^{(j)} : X \rightarrow \{0, 1\}$ ($0 \leq j \leq N-1$, $k \geq 1$) を

$$\xi_k^{(j)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_k = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めると、 $\langle \xi_k^{(j)} \rangle = 1/N$

$$\langle f_k^{(j)} f_{k'}^{(j')} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{N^2} & \text{if } k \neq k', \\ \frac{1}{N} & \text{if } k = k', j = j', \\ 0 & \text{if } k = k', j \neq j'. \end{cases}$$

$$\langle (\xi_k^{(j)} - 1/N)(\xi_{k'}^{(j')} - 1/N) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } k = k', \\ \frac{N-1}{N^2} & \text{if } k = k', j = j', \\ -\frac{1}{N^2} & \text{if } k = k', j \neq j'. \end{cases}$$

各 $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ について、確率変数列 $\{\xi_k^{(j)}\}_{k \geq 1}$ は、大数の法則のための条件を満たし、したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1^{(j)}(x) + \dots + \xi_n^{(j)}(x)}{n} = \frac{1}{N} \quad (\mu\text{-a.e. } x \in X)$$

である。

問 73. * 例えば、 $N = 10$ として、この意味を考えてみよ。

10 繰り返し積分の公式

この節でも引き続き、積分系は σ 有限であるものとする。

全射 $\pi : \Omega \rightarrow X$ を考える。 Ω 上の σ 有限なベクトル束 F および X 上の積分系 (L, μ) が与えられ、さらに各 $x \in X$ ごとに、 $\pi^{-1}(x)$ 上の積分系 (L_x, μ_x) が定められ、以下の性質を満たすとする。

関数 $f \in F$ に対して、

- (i) $\forall x \in X, f|_{\pi^{-1}(x)} \in L_x$ であり、
- (ii) 積分 $\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega)$ が x の関数として L に属す。

このとき、 $(F, (L, \mu), \{(L_x, \mu_x)\})$ をファイバー積分系 (fibered integration system) と呼ぶ。単調収束定理を繰り返し使えば、ファイバー積分系において、

$$I(f) = \int_X \mu(dx) \int_{\pi^{-1}(x)} \mu_x(d\omega) f(\omega)$$

は F 上の積分を定めることがわかる。

二つの (σ 有限な) 積分系 $(L_X, I_X), (L_Y, I_Y)$ を用意し、対応する測度を μ_X, μ_Y で、積分可能な可測単純関数の作るベクトル束をそれぞれ S_X, S_Y で表わす。さらに

$$S_X \otimes S_Y = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i; f_i \in S_X, g_i \in S_Y \right\}$$

とおく。ここで、 $f \otimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ は $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ なる関数を表わす。

命題 10.1.

- (i) $S_X \otimes S_Y$ は $X \times Y$ 上のベクトル束である。
- (ii) $f \in S_X \otimes S_Y$ とすると、すべての $x \in X$ に対して $Y \mapsto f(x, y)$ は S_Y に属する関数であり、その I_Y に関する積分

$$\int_Y f(x, y) \mu_Y(dy)$$

は x の関数として S_X に属する。同様のことが X と Y の役割を入れ換えて成り立つ。

(iii) $f \in S_X \otimes S_Y$ に対して、次が成り立つ。

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \mu_Y(dy) \right) \mu_X(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu_X(dx) \right) \mu_Y(dy).$$

(iv) 上の繰り返し積分の値を $I(f)$ で表わせば、 $I : S_X \otimes S_Y \rightarrow \mathbb{R}$ は $S_X \otimes S_Y$ 上の積分を与える。

問 74. 上を確かめよ。また $L_X \otimes L_Y$ が束演算で閉じていない例を挙げよ。

このようにして得られるファイバー積分系を繰り返し積分系 (repeated integration system) と呼ぶ。 X, Y の積分の順序の取り方で、二種類の繰り返し積分系が付随することに注意。

命題 10.2. * X, Y が局所コンパクト距離空間で $L_X = C_c(X)$, $L_Y = C_c(Y)$ のとき、次の包含関係が成り立つ。

$$C_c(X \times Y) \subset M(S_X \otimes S_Y).$$

Proof. 積空間 $X \times Y$ の距離関数として、

$$d(x, y; x', y') = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

を採用する。 $B_r(x, y) = B_r(x) \times B_r(y)$ に注意。

さて $f \in C_c(X \times Y)$ の支えを K とする。まず、次を示す。

$$\forall r > 0, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K, \quad K \subset \bigcup_{j=1}^n B_r(x_j).$$

もしこれを否定すると、

$$\exists r > 0, \forall \text{finite } F \subset K, \quad K \not\subset \bigcup_{y \in F} B_r(y).$$

これから、 K 内の点列 $\{x_j\}_{j \geq 1}$ を

$$x_1 \in K, x_2 \notin B_r(x_1), x_3 \notin B_r(x_1) \cup B_r(x_2), \dots$$

であるように取ることができる。条件から、 $d(x_i, x_j) \geq r$ ($1 \leq i < j$) であるので、点列 $\{x_j\}$ の部分列は決して収束しない。これは、 K がコンパクトであることに反する。

さて、今確かめたことと関数 f の一様連続性により、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in K, \forall x \in K, \exists i \geq 1, d(x, x_i) < \delta, |f(x) - f(x_i)| \leq \epsilon.$$

そこで、 $B_i = B_\delta(x_i)$ と置いて $X = (B_1 \sqcup B_1^c) \cap \dots \cap (B_n \sqcup B_n^c)$ を展開して

$$X = \bigsqcup_{j=2}^{2^n} A_j \sqcup (B_1 \cup \dots \cup B_n)^c$$

と分解する。各 $2 \leq j \leq 2^n$ ごとに $a_j = x_i$ ($x_i \in A_j$) であるように選んで、

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} f(a_j) & \text{if } x \in A_j (2 \leq j \leq 2^n), \\ 0 & \text{if } x \in (B_1 \cup \dots \cup B_n)^c \end{cases}$$

とおくと、 $f_\epsilon \in S_X \otimes S_Y$ であり、 $\|f - f_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$ となる。 \square

定理 10.3. ファイバー積分系 $(\pi : \Omega \rightarrow X, F, (L, \mu), \{(L_x, \mu_x)\})$ を考える。

(i) $f \in M(F)_\uparrow^+$ とすると、すべての $x \in X$ について $f|_{\pi^{-1}(x)} \in M(L_x)_\uparrow^+$ であり、さらにファイバー積分

$$\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega)$$

は x の関数として $M(L)_\uparrow^+$ に属し、次が成り立つ。

$$I(f) = \int_X \left(\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega) \right) \mu(dx).$$

(ii) 可積分関数 $f \in M(F) \cap F^1$ に対して、零集合 $N \subset X$ が存在し、 $x \in X \setminus N$ ならば $f|_{\pi^{-1}(x)} \in M(L_x) \cap L_x^1$ であり、さらに関数

$$X \setminus N \ni x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega)$$

は $M(L) \cap L^1$ に属し、次が成り立つ。

$$I(f) = \int_X \left(\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega) \right) \mu(dx).$$

Proof. (i) F の σ 有限性 $1_\Omega \in M(F)^+$ より、関数 $\phi \in F_\uparrow^+$ で $1_\Omega \leq \phi$ となるものが存在する（補題 7.6 (iii)）。そこで、 $\phi_n \in F^+$ を $\phi_n \uparrow \phi$ るように取り、 $\varphi_n = 1_\Omega \wedge \phi_n$ とおくと、 $\varphi_n \in M(F) \cap F^1$ かつ $\varphi_n \uparrow 1_\Omega$ である。

主張の結論部分を満たす関数で $[0, \varphi_n]$ に含まれるもの全体を M_n とすると、 M_n は $F \cap [0, \varphi_n]$ を含む単調族である。実際、増加列に関する収束性は即座にわかる。減少列については、 $\varphi_n \leq \phi_n$ に注意して $\phi_n \in F^+$ との差を考えて増加列の場合に帰着させることができる。

したがって、補題 7.6 により、 $M_n \supset M(F) \cap [0, \varphi_n]$ である。

次に $f \in M(F)_\uparrow^+$ に対して、 $f_n = f \wedge \varphi_n$ とおくと、 $f_n \in M(F) \cap [0, \varphi_n]$ は、(i) での結論を満たし、さらに $f_n \uparrow f$ と単調収束定理により、 f も同じ性質をもつ。

(ii) 分解 $f = f \vee 0 - (-f) \vee 0$ により、 $f \in M(L)^+$ の場合に帰着される。この場合は (i) の一部である

$$\left(\int_{\pi^{-1}(x)} f(\omega) \mu_x(d\omega) \right) \mu(dx) = I(f) < \infty$$

と命題 9.7 (ii) からわかる。 \square

例 10.4. $\Omega = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$, $\pi : \Omega \ni (t, x) \mapsto t \in X$, $F = C_c(\Omega)$, $L = C_c(X)$, $\pi^{-1}(t) = \{t\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ 上の積分系 $L_t = C_c(\{t\} \times \mathbb{R}) \cong C_c(\mathbb{R})$,

$$\mu_t(dx) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} dx & \text{if } t > 0, \\ \delta(x) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \mu_t(dx).$$

定理 10.5 (Lebesgue-Fubini-Tonelli). 繰り返し積分系において、 $F = S_X \otimes S_Y$ 上の繰り返し積分 I を考える。

(i) $M(L_X) \otimes M(L_Y) = M(S_X) \otimes M(S_Y) \subset M(F)$ である。

(ii) $f \in M(F)_\uparrow^+$ とすると、 $x \in X$ に対して $f(x, \cdot) \in M(L_Y)_\uparrow^+$ であり、 $\int_Y f(x, y) \mu_Y(dy)$ は x の関数として $M(L_X)_\uparrow^+$ に属し、さらに次が成り立つ。

$$I(f) = \int_X \mu_X(dx) \int_Y \mu_Y(dy) f(x, y).$$

同様のことが X と Y の役割を換えて成り立つ。

(iii) $f \in M(F) \cap F^1$ とすると、零集合 $N_X \subset X$ が存在し、 $x \in X \setminus N_X$ に対して、 $f(x, \cdot) \in M(L_Y) \cap L_Y^1$ であり、 $\int_Y f(x, y) \mu_Y(dy)$ は x の関数として $M(L_X) \cap L_X^1$ に属し、さらに次が成り立つ。

$$I(f) = \int_X \mu_X(dx) \int_Y \mu_Y(dy) f(x, y).$$

同様のことが X と Y の役割を換えて成り立つ。

系 10.6 (ルベーグ測度の再生性). 可積分関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ に対して、零集合 $N \subset \mathbb{R}^m$ が存在し、 $x \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ならば、零関数の違いを除いて $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり、関数

$$\mathbb{R}^m \setminus N \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

は零関数の違いを除いて $L^1(\mathbb{R}^m)$ に属し、次が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.$$

例 10.7.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} e^{-tx^2} dt dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t} e^{-tx^2} dx dt = C \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2C^2.$$

ここで、

$$C = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

問 75. 正数 $t > 0$ を経数とする二重積分

$$\int_t^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx dy$$

に繰り返し積分の公式が適用できることを確かめて、

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

を導け。

問 76. * $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ とするとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x|^\beta}}{|x|^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{2\pi^{n/2}}{\beta \Gamma(n/2)} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) & \text{if } \alpha < n, \\ \infty & \text{if } \alpha \geq n. \end{cases}$$

問 77.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha} dx dy < \infty$$

であるような実数 α の範囲を求めよ。

問 78. 可積分関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ と正数 $a > 0$ に対して、

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2} dt$$

は、可積分な解析関数で $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = f(x)$ であることを既に確かめた。ここでは、次を示す。

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_a(x)| dx = 0.$$

Postscript

元々このノートは「数学が不得意な数学科の学生」をイメージして用意したものであるが、いみじくも過去の授業アンケートで指摘されたように、工夫が空回りしているのかも知れぬ。一般的の位相空間ではなく、敢えて距離空間に限定したのもそういうことの反映である。かつて Dieudonne で学んだ際、その構成に泥縄式の印象を持ったものであるが、今は、深い意図があったのやも知れぬと思っている。

上で数学が不得意云々と書いたのは、皮肉でも何でもなく、本心から同情ないしは共感を覚えるからである。数学が得意というか好きで好きでたまらないような人は、私が相手を務めるまでもない、勝手にするだけである。

しかし、ここで少し欲を吐き出すと、待てよ得意な学生がこれを読んだって悪くはないのではないか、そういう連中は位相空間なんかも好きでたまらないはずであるから、距離空間という限定詞を位相空間に置き換えて、ついでに証明なんかも好みの形に書き直して行けば、多少は楽しんで貰えるのではないか。測度論の証明を自ら考え出すこと（そういうとんでもないことを実行してしまう人が必ずいるのです）を思えば、楽勝ではないかと。ついでに Radon-Nikodym なんかも積分論的に格調高く書き直して貰えると、数学が不得意な数学教員としては、教師冥利に尽きるというものである。

付録A 測の細道

Elliot Blackstone and Piotr Mikusiński, The Daniell Integral, arXiv:1401.0310v2.

積分の収束定理を扱った §6 から測度へは、単調族経由で行うのが王道というべく、本文ではそれにしたがつたのであるが、もっと直接的な道筋も可能である。こここのところは、関数の可測性をいかに捉えるかということにも係わり、位相的可測性連続関数による可測性など、いろいろ考えられる所であるが、測度零の違いを除いてすべて同等とはなる。用語のみを紹介すると、条件が強い順に、Baire 可測、Borel 可測、そして Lebesgue 可測という関係である。ここではルベーグ可測を扱うことでの積分から測度、そしてその逆についての近道を紹介しよう。

X の部分集合 A が（ルベーグ）可積分 (integrable) とは $1_A \in L^1$ であるときをいう。また（ルベーグ）可測 (measurable) とは、どのような可積分集合 $B \subset X$ に対しても $A \cap B$ が可積分であること。可積分集合が可測であることは、 $1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B$ からわかる。

可積分集合全体は、有限和、差、可算共通部分について閉じている。 $A = \bigcap_n A_n$ とすると、 $1_{A_n} \downarrow 1_A$ であるから、押え込みあるいは単調収束定理により、 A も可積分。

また、可測集合全体 \mathcal{L} は、これに加えて補集合を取る操作について閉じている、すなわち σ ブール代数を成す。 $(X \setminus A) \cap B = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ であるから $1_{(X \setminus A) \cap B} = 1_B - 1_A \wedge 1_B \in L^1$

例 A.1. $L^1(\mathbb{R}^d)$ において、有界閉集合、有界開集合は可積分であり、開集合・閉集合は可測。

定義 A.2. \mathcal{L} 上の関数 $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\mu(A) = \begin{cases} I(1_A) & A \text{ が可積分のとき,} \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定めると、 μ はいわゆる測度となる。

測度が与えられると、単純関数からの一様近似として、積分

$$\int_X f(x) \mu(dx)$$

が定義され、単調収束定理の結果、 $L^1(X, \mu) \subset L^1$ および $I(f) = \int_X f(x) \mu(dx)$ が成り立つ。

逆の包含関係は一般に成り立たない。その理由は、可積分集合が $f \in L$ を近似するだけ沢山あるかどうかがわからないため。それを保証する便利な条件に $f \in L$ ならば $1 \wedge f \in L$ というのがある。これを Stone 条件 (Stone's condition) という。このとき、 L^1 についても Stone 条件が成り立つことが、Daniell 拡張の各過程を見ることで確かめられる。

この Stone 条件があれば、 $\alpha \wedge f = \alpha(1 \wedge (f/\alpha))$ ($\alpha > 0$) となり、 $x \in [f > \alpha]$ であるか否かに応じて $(f - \alpha \wedge f)(x)$ が正か零であること、および

$$1_{[f > \alpha]} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \wedge n(f - \alpha \wedge f)$$

となることから、 $[f > \alpha]$ ($\alpha > 0, f \in L^1$) は可積分である。

そして $0 \leq f \in L^1$ であるとき、 $n \geq 1$ に対して、 $A_k = [f > k/2^n]$ ($k = 1, 2, \dots$) とし、

$$f_n = \sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^n} (1_{A_k} - 1_{A_{k+1}}) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^n} 1_{A_k}$$

と置けば、 $f_n \uparrow f$ となることから、

$$\int_X f_n(x) \mu(dx) = \sum_k \frac{1}{2^n} \mu(A_k) = I(f_n) \uparrow I(f)$$

となり、 $f \in L^1(X, \mu)$ および積分の値の一一致がわかる。一般的の $f \in L^1$ については正関数の差で表せば同じ結論を得る。

例 A.3. 支持関数と異なる $h : X \rightarrow [0, \infty)$ に対して、 $L = \mathbb{R}h$, $I(h) = 1$ とおくと、 $L^1 = L$ であり、 $\mathcal{L} = 2^X$, $\mu(A) = \infty$ ($A \neq \emptyset$) となって、 $L^1(X, \mu) = \{0\}$ は L^1 に一致せず。

付録B 測の拡張工事

ダニエル積分は、局所コンパクト空間上の連続関数の場合が Bourbaki によって Radon 測度の名の下喧伝されたこともあり、位相的でない場合には使えない誤解する向きもあるがさに非ず、ということを測度の拡張定理を例に確かめてみる。

まずは用語の補充から。 σ ブール代数の定義で可算操作を有限操作に限定したものをブール代数 (Boolean algebra) と呼び、ブール代数における演算のうち、補集合を取る操作を差集合で置き換えた演算で閉じたものをブール環 (Boolean ring) ということにする。それぞれ semi-ring, ring とも呼ばれる。

ブール環 $\mathcal{B} \subset 2^X$ の上で定義され $[0, \infty]$ に値をとる関数 μ で、(i) $\mu(\emptyset) = 0$ かつ(ii) $A \in \mathcal{B}$ の可算分割 $A = \bigsqcup_n A_n$ ($A_n \in \mathcal{B}$) に対して $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$ ($A_n \in \mathcal{B}$) となるものを測度前 (pre-measure) という。測度前 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ は、 $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ となる $X_n \in \mathcal{B}$ があるとき、 σ 有限^{*8} という。

測度前 μ があると、 X における実数値単純関数 f で $\mu([f = t]) < \infty$ ($0 \neq t \in \mathbb{R}$) であるもの全体 L は、ベクトル束をなし、その上の正線型汎関数 $I : L \rightarrow \mathbb{R}$ が $I(f) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t\mu([f = t])$ で定められる。

補題 B.1. 測度前の連続性から I の連続性がしたがう。さらに μ が σ 有限であれば、 I も σ 有限である。

Proof. $f_n \downarrow 0$ とする。 $[f_n > 0] \downarrow \emptyset$ であり、 f_1 の最大値を $\|f_1\|$ とすると、 $f_n \leq \|f_1\| 1_{[f_n > 0]}$ より、 $I(f_n) \leq \|f_1\| \mu([f_n > 0])$ は零に近づく。 \square

補題 B.2. すべての $A \in \mathcal{B}$ は可測であり、それが可積分であるための必要十分条件は $\mu(A) < \infty$ である。

Proof. $\mu(A) < \infty$ であれば、 $1_A \in L \subset L^1$ であるから、 A は可積分である。

そこで、 $\mu(A) = \infty$ とする。可積分な $B \in \mathcal{L}$ については、どのように小さい $\epsilon > 0$ についても、 $f \leq 1_B \leq g$, $I_\uparrow(g - f) \leq \epsilon$ かつ $I_\uparrow(g) < \infty$ となる $g \in L_\uparrow$, $f \in L_\downarrow$ が存在する。一方で $f_n \downarrow f$, $g_n \uparrow g$ となる $f_n, g_n \in L$ があり、 $1_A f_n \downarrow 1_A f$, $1_A g_n \uparrow 1_A g$ および $1_A h \in L$ ($h \in L$) となることから $1_A f \in L_\downarrow$, $1_A g \in L_\uparrow$ である。したがって、 $1_A(g - f) \leq g - f$ および $1_A g \leq g$ に注意して $I_\uparrow(1_A g - 1_A f) \leq I_\uparrow(g - f) \leq \epsilon$, $I_\uparrow(1_A g) \leq I_\uparrow(g) < \infty$ と評価すれば、 $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$ が可積分であるとわかる。

最後に、 A が可積分であったとすると、 $1_A \leq g$, $I_\uparrow(g) < \infty$ となる $g \in L_\uparrow$ があるので、 $g_n \uparrow g$ ($g_n \in L^+$) と近似して、 $\mu([g_n > 0]) < \infty$ に注意すれば、 $[g > 0] = \bigcup_n [g_n > 0]$ より $A \subset \bigcup_n [g_n > 0]$ がわかり、 $A_n = A \cap [g_n > 0] \uparrow A$ となることから、測度前の連続性により $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$ である。一方で、 $1_{A_n} \uparrow 1_A$ に押え込み収束定理を使えば、 $I(1_A) = \lim_n I(1_{A_n}) = \lim_n \mu(A_n) = \mu(A) \in \mathbb{R}$ を得る。対偶により言い換えると、 $\mu(A) < \infty$ となる $A \in \mathcal{B}$ については 1_A は可積分とならないので、 I 測度と μ の値はともに無限大となって、一致する。 \square

つぎは Caratheodory とか Hopf の名を冠して呼ばれる測度の拡張定理であるが、ダニエル拡張の特別な場合になっている。

定理 B.3. X におけるブール環 \mathcal{B} から生成された σ ブール代数を \mathcal{B}^σ とすると、 \mathcal{B} の上で定義された測度前は、 \mathcal{B}^σ 上の測度への拡張をもつ。さらに σ 有限であれば、拡張は一つしかない。

Proof. 拡張の存在は I 測度を $\mathcal{B}^\sigma \subset \mathcal{L}$ に制限するだけ。ただし、 $\mu(A) = \infty$ のときに I 測度が ∞ であると

^{*8} この用語は、本文では少し違う意味で使われている。

ところで、上の補題を使う。

単調収束定理により、 μ の拡張と I 測度が一致する集合の範囲が、 σ プール環の操作について閉じていて、さらに σ 有限性があれば、補集合を取る操作でも閉じているため、 \mathcal{B}^σ の上で一致する。 \square