問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上の複素数値可測関数 $f(x)$ で、$f(x+2\pi)=f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ かつ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

をみたすもの全体の作るヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ で表す。ただし、$V$ の内積は

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

で定め、ルベーグ測度に関してほとんどいたるところ等しい関数は同一視するものとする。

また、$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $e_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ に付随したユニタリー写像 $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$ を $U\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k e_k$ で定める。

以下の問に答えよ。

(i) 実数 $a$ に対して、$(T_a f)(x) = f(x-a)$ で定められる作用素 $T_a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ はユニタリー作用素であることを示せ。

(ii) $U^* T_a U$ を $\ell^2(\mathbb{Z})$ における掛け算作用素として表示せよ。

(iii) 有界作用素 $e^{i\theta} T_0 + T_{2\theta}$ のノルムを求めよ。ただし、$\theta$ は実数で、$T_a$ は (i) で定義した作用素である。（ヒント：$\theta/\pi$ が有理数か否かで場合分けする。）

$\boxed{2}$ 正数 $a > 0$ に対して、関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

で定める。

(i) 関数 $f$ のフーリエ変換

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \, dx$$

を求めよ。

(ii) 実数 $c \neq 0$ に対して、関数 $g(x) = \frac{1}{x+ic}$ のフーリエ変換を求め、等式 $(\widehat{g}|\widehat{g}) = 2\pi(g|g)$ が成り立つことを直接確かめよ。