

# ベクトルあれこれ —古人の求めたるところを

山上 滋

2016年1月27日

## 目次

1	見通しなど	2
2	実数と複素数の幾何学	4
3	重心座標	7
4	ベクトル空間	7
5	ユークリッド空間	9
6	直交群	10
7	ユークリッド変換	11
8	四元数は予言する	12
	付録 A ぶつぶつ交感	16

解析学特論（基礎解析） 大学院

目的：ベクトルは、日常語としても使われる程、人口に膾炙したものとなっているが、その数学教育の中における位置づけについて、発展の歴史的流れにも配慮しつつ理解を深める。

到達目標：ベクトルの概念の自然科学における発展の流れを知る。その背景の下、数学

概念としてのベクトルの確かな理解とその運用方法を修得する。

以下の項目のいくつかについて演習もまじえて学習し、ベクトルの考え方に対する理解を深める。

- (i) ベクトルの歴史
- (ii) 座標とベクトル
- (iii) ベクトル空間とアフィン空間
- (iv) ユークリッド空間と剛体運動
- (v) 平面の回転と複素数
- (vi) 空間の回転と四元数
- (vii) ベクトルの内積と外積
- (viii) 極性ベクトルと軸性ベクトル
- (ix) 角速度とベクトル
- (x) 座標変換とベクトル
- (xi) 回転群とその表現
- (xii) 群の表現とテンソル圏
- (xiii) テンソル圏と分岐則代数
- (xiv) 平面図式とテンソル圏
- (xv) Temperley-Lieb 圈の構造

教科書等：教科書は使わない。参考文献は授業の中で提示する。

評価方法：演習に対する取り組みと提出レポートによる。

## 1 見通しなど

ベクトルの歴史については、別途、スライドで見たとおりである。そこでは、座標による解析がまず先行し、しかるのちに座標と独立な概念としてのベクトルが確立された。座標の歴史は、生まれも素性も比較的はっきりしているのであるが、現代的立場から少しだけ補っておこう。

まずはデカルト座標である。英語で Cartesian coordinates という。ていねいに、デカルト座標系 (Cartesian coordinate system) とも言う。17世紀を代表するフランスの思想家・科学者で、強烈な自我の持ち主であったルネ・デカルトにちなむ。デカルトの時代のフランスは、宗教戦争（内乱）から絶対王政へ移行する時期でもあった。空間の点の位置を3つの数の組で表すアイデアを、ハエの動きをベッドで寝転んで追っているうち、思

いついたという。逸話の真偽はべつにしても、寝転んで考えることの有効性は、いたるところに実例があり、奈良にゆかりの深い岡潔にもその手の逸話（嗜眠性脳炎）が残されている。大事なことは目に見えない、ということでもある。愚かな人間ほど、形あるものを作りがたがるものだ。今話題の東芝もその類。教育に、目に見える効果だけを求めたらどういうことになるか。

今思えばどうということもないアイデアにも見える。土地を四角く区分けして使うということの必然的な結果として、場所を2つの数字で表すことは、ほとんど無意識的に行われていたはずである。肝腎なことは、それを意識的に取り出して、利用の方法に思いを巡らすこと。あと知恵では想像できない、特別の人だけがなし得るひと押しが必要ということ。

デカルトが扱ったのは、もっとも素直な座標系 = 直交座標系であった。座標原点という基準点があって、そこからの点の位置の偏りを互いに直交する3方向への成分として表す。この位置を表す3成分 = 直交座標であるが、その仕組みから、これもあとづけながら、位置ベクトルの成分 = 座標、と言っても同じことである。これはやがて、一般的のベクトルの成分表示につながって行くことになる。

一方で、極座標とかのいわゆる曲線座標というものもある。こちらは、とにかく、点に数を対応させて、点の位置を識別すればよいということで、ある意味、融通無碍、節操のない方法でもある。一方で、自然科学に目を向けると、観測対象があって、その状態を識別するために様々な物理量が使われるのと様子が似ている。様々な物理量を測定することで、扱っている物質の状態を記述するということなので、これも一種の座標と呼んでよからう。その背景には、素朴な実在論がある。観測対象が、観測行為とは独立に存在し、実験ないし観測は、それに対して数量を対応させることなので。この意味での「座標系」に、偶然要因による変動を許したものが、確率論でいうところの確率変数に他ならない。素朴な実在論は、量子論によって否定されることになるのであるが、では、量子論的な座標の概念が確立したかというと、それがなかなか。根源的な問は、とりあえず置いて、道具の使い方にひたすら磨きをかけてきたのが、この100年間の状況である。ただ、非常に面白いところは、直交座標系の背後にある「直交ベクトル空間」をとことん追求したものは、量子論の数学的構造そのものにたどり着くという不思議。できうるならばその辺りまでを。

quantum counting とか。Gibbs の統計力学。

Exercise 1. 力の分解に関する「ダビンチ則」が成り立つ条件を求めよ。ヒント：

$P = (1 - t)A + tB$  とするとき、

$$\overrightarrow{OP} \parallel (1 - t)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + t\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

となる条件を考える。

## 2 実数と複素数の幾何学

まず、数（実数）と量の関係について。量 = 数 + 単位、と見るのがよからう。この辺、国語辞典も曖昧であるが。なお、ベクトル量という言い方も可能なので、正確には、数量 = スカラー量と数の関係という意味である。逆にいふと、共通の単位をもつ量の比として実数が定まるということでもある。

数は、比較可能な単位を換算する際にも用いられる。分 = 60 秒 など。通常、比較可能な単位をもつ量は、単位換算を通じて同一視する。5 分 = 300 秒 のように。比較可能な単位の同値類を次元 (dimension) という。長さの次元、面積の次元、時間の次元のように。

数学においては、このような数と量の区別は意外と新しく、デカルト（17世紀半ば）以降のことである。例えば、デカルトと同時代のフェルマーなどは、2 次式を表す際に、 $x^2 + ax + bc$  のような書き方をしていた。 $x, a, b, c$  が長さを表すのであれば、面積を表す次元にそろえておく必要があるというわけである。このように、量の代数演算（加減乗除）が、次元の束縛を受けて自由に行えないのは不便極まりないため、次元あるいは単位を取り去ったあとの数を専ら扱うという暗黙の了解がデカルト以降に普及した。ということで、たとえば、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

という表示が可能になる。逆にいふと、 $e^x$  の肩の  $x$  は無次元量でなければならず、物理なんかで、 $e^{-kL}$  のような式が出てきたら、 $k$  の次元と  $L$  の次元は、互いに逆数の関係でないといけない。

なお、次元があるのかないのか曖昧な単位（多分ないのでしょう）というのもあって、角を表す際の  $60^\circ$  など。化学で使われるモルというのもその類いか。

さらに、ついでに、数学でいうところの次元というのは、物理的次元とは区別されるべきもので、ベクトル空間の自由度に由来するものを指す。ユークリッド空間の変位ベクトルというのは長さの次元をもつ量であり、それに付随して、平面だと面積の次元、空間だ

と体積の次元を表す際の長さの肩の指數そのものも次元と呼んだ（3 D のように）ことに由来する。

実数直線というのは、直線から長さの次元（単位）を剥ぎとて実数と同一視したものという意味で、1次元座標といつてもよい。直線上の点（原点）と直線の方向を表す単位ベクトルを指定してはじめて、実数との対応が意味をもつことに注意。

さて、平面においても、同様の考えに基づいて、原点と互いに直交する2つの単位ベクトルを指定すると、直交座標系が得られ、平面が  $\mathbb{R}^2$  と同定される。この状況で、実数の積の演算を  $\mathbb{R}^2$  にまで拡張できないかと考える人たちが現れた。アイデアは単純で、-1倍する操作を座標平面の180度回転と同一視しようというもの。別の言い方をすると、 $u = (1, 0)$  に 180 度回転を施して得られるのが  $(-1, 0)$  という点であれば、 $(1, 0)$  に 90 度回転を施して得られる点  $v = (0, 1)$  を二度かけると  $(-1, 0)$  と等値されるべき、ということである。あとは、ベクトル的な和とスカラー倍に対して、分配法則の成立を要求すれば、積の一般形は、

$$(a, b)(c, d) = (au + bv)(cu + dv) = (ac - bd, ad + bc)$$

となり、この積に対して、交換法則、分配法則および結合法則が成立することは、単純な計算でわかる。また  $u$  はこの積に関する単位元で、 $(a, b) \neq (0, 0)$  は、逆元  $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$  をもつこともわかる。以上のことから、 $(a, b)$  を複素数  $a + ib$  と同定することができた。それでもって、極形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

これが、Wessel にはっきり出てくる。そもそも、直線を実数と同定する作業を平面にまで推し進めたら、虚数単位がそして複素数が出てきたよ、というのが Wessel さんの論文の内容である。Caspar Wessel を忘れるでない。もっとも、同じ頃にガウスも同じようなことを考えていたらしいことが、ガウスの遺稿の中から見つかっているようではあるが。他にも何人かが、遅れて再発見している。まあ、ガウス平面あるいは中立に複素平面 (complex plane) でよかろう。日本の高校数学では、高名な数学者の意向で複素数平面と呼ばれるようになったという。日本人は権威に弱いというか権威によりかかりたがる人種であるか。

高校の教育内容がまたまた変更され、長らく扱われてた行列がいよいよ姿を消すという。これを危惧する声多いのであるが、それはそのとおりなれど、問題点は行列の有無にあるのではなく、平面の方程式の有無にあり。行列のなかった大昔には、平面の方程式がしっかりとあって、連立一次方程式の幾何学的意味を実感することができた。（代数に幾何学的直感を。）そういった下地があれば、大学入学後に行列でも一次変換でも間を埋め

るのは、少なくとも理系人間には可能であった。（個人的には、平面の方程式と行列の二者択一を迫られたら、躊躇することなく、平面の方程式を残す。）ところが、行列の導入と引き換えに平面の方程式がなくなり、今まで行列の消滅に際して、当然復活されるべき平面の方程式が削除されたままであるという。まったくもって、どういう人たちが決めたことか、亡国の行いという他ない。どうやら、回転の行列の代わりに、複素数の掛け算で平面の回転をやれ、ということのようであるが、複素数は、行列の回転の代わりにはなれない。複素数の回転性は、複素数を幾何学的に理解する上で利用すればよいのであって、複素数を使って平面幾何を行うなどは、本末転倒である。上位の立体幾何にも使えないし。（ただし、あとで触れる四元数と立体幾何とのつながりはある。）複素数は、それ自体を詳しく調べるに値する対象であると認識すべきである。たとえば、

$$1 + i < 2 + i$$

が怪しい不等式であること。怪しくとも間違ったとは言わない順序構造かな。

共役複素数と絶対値。本来、 $i = \sqrt{-1}$  なわけで、 $i$  と  $-i$  は、どちらがどちらかは、便宜的なものに過ぎない。ということで、 $i$  と  $-i$  を入れ替える対称性が、複素数には常に内在する。それが複素共役の正体であり、幾何学的には、実軸に関する対称移動（折り返し）ということ。複素数の実に有難いことは、数の計算規則（結合法則、交換法則、分配法則）がそのまま成り立つこと。

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

**Exercise 2.** 平方和等式を導け。

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

Lagrange (1773)、ベクトル積

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2.$$

Cauchy (1821)、 $V \wedge V$

$$\sum_j a_j^2 \sum_j b_j^2 = \left( \sum_j a_j b_j \right)^2 + \sum_{j < k} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

これがコーチーの不等式の出どころであった。不等式のもとは等式にあり。

ちなみに、内積の不等式のよくある証明はシュワルツによるもので、そこでも等式がもとになっている。

### 3 重心座標

Möbius (1827)

点と点を足すことは、通常はできない。しかしながら点と点から新たな点を作り出すことは可能である。2点の中点、3点の重心など。これを一般化して、 $n$ 個の点  $P_1, \dots, P_n$  と実数  $t_1, \dots, t_n$  で  $t_1 + \dots + t_n = 1$  を満たすものに対して、点  $P$  を

$$\overrightarrow{OP} = t_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + t_n \overrightarrow{OP_n}$$

を定めることができる。点  $P$  は、 $O$  のとり方に依存しないので、これを  $P = \sum t_j P_j$  と書くことにすれば、いろいろな望ましい性質が成り立つ。例えば、重心結合の等式。

空間であれば、4つの、平面であれば3つの独立な点に対して、重心座標が定まる。たとえば、3点  $A, B, C$  の上に重さが  $a, b, c$  のおもりを置いたときの重心は

$$P = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C$$

**Exercise 3.** 空間内の4点  $A, B, C, D$  に対して、 $\triangle BCD$  の重心を  $A'$  などとすると、直線  $AA', BB', CC', DD'$  は一点  $P$  で交わること。 $AP$  と  $A'P$  の比を求めよ。

今では位置ベクトルがあるので、あえて重心座標にこだわる必要もないわけであるが、直感は、平面でも空間でも基準点があるわけがないこと。その基準点によらないベクトル計算としての重心座標である。逆に、何故に基準点がない世界なのか、という疑問は愚問だろうか。

### 4 ベクトル空間

形式的なベクトル空間の定義は、あまた\*ある線型代数の教科書に書いてあることなので省略して、数の範囲 = 係数体、についてだけ補足を。そもそもの出どころだけを賄うのであれば、数の範囲は実数全体 = 実数体にしておけばよい。それを何をすきこのんで一般的の体を持ち出すかというと、ひとつは代数学的応用。高等代数学(?)の華であるガロア理論は、その一般的な体上のベクトル空間こそが住まうに相応しい場所であると分かったので。ただ、代数方程式論はとりあえずどうでも良いといふのであれば、数の範囲は、せいぜい複素数全体 = 複素数体、としておけば、それほど不自由はしない。ということで、

---

\* 漢字を当てると数多となる。こんなものはいらんだろうという本が多すぎ。

使ってなんぼの線型代数、という立場の本では、実数体または複素数体に限定するとするのも多い。ただ、線型代数の一般的なところは、数の範囲が何であるかに依らない形式的な内容がかなりの部分を占めるのもまた事実。一方で、実数に限定してしまわるのは、実数は、複素数にまで広げてみることで、その数学的な実体が見えるという認識に基づく。まあ、多少の複雑さを厭わなければ、実数だけでやりくりすることも可能であるが、普通の人には適さないとしたものである。以下、このひよった立場で、数と言えば複素数、ときには実数とか有理数に限定することも。区別するときは、 $\mathbb{R}$  上のベクトル空間、といった言い方をする。

基本的な用語の復習をしておこう。

数ベクトル空間とは、数を並べたものの全体、 $\mathbb{R}^n$  とか  $\mathbb{C}^n$  とか。

一次独立。これは、独立な方向のベクトルの集まりを差す言葉である。

次に基底。一次独立なベクトルを、可能な限り並べ立てたものをいう。単に一次独立なベクトルの集団というだけでなく、それを並べる順番も問題にしている。より正確には、並べるということではなく、個々のベクトルを区別するためのラベルを対応付けるということ。たまたま、ラベルとして自然数  $\{1, 2, \dots\}$  最初の部分を使っただけというのが本当のところである。この識別可能性は、量子論を考える上で重要な点である。2枚のコインを投げた結果は何通り？というやさしい問題で既に違いがわかる。

基底とくれば、成分。これは、ラベルごとに数を定めることに他ならない。

なお、基底を構成するラベルの個数は一定であるという定理がある。その共通の個数を次元という。あるいは、 $n$  次元ベクトル空間は、 $\mathbb{R}^n$  とか  $\mathbb{C}^n$  と同型ということ。

ベクトル空間は、線型空間とも称され、平らであること、一様であることの数学的表現の元となる。

ベクトル空間には、様々な構造を附加して論じることが多い。ユークリッド的距離の構造として、内積がある。複素ベクトル空間の場合には、線型性と正値性との折り合いで、両線型性 (sesquilinearity) を要求する。実数の場合には、素直に双線型性 (bilinearity) すなわち分配法則でよい。この共役線型性を左右どちらに取るかで、2通りの流儀がある。どちらも実質的に変わらない（同等）ゆえ、好きにして良いのだが、数学者と数学利用者（代表として物理学者）の間で異なるという慣行は、悩ましいところ。ただ写像を左右いずれに配置するかに応じて、整合的な選択が定まる仕組みになっていて、通常するように写像の左配置には、右変数を線型に取るのがよい。この点、数学者の流儀は、整合性を見誤ったというべき。

Exercise 4. 内積の両線型性と正値性から、エルミート性  $(x, y) = \overline{(y, x)}$  を導け。

Exercise 5. 2つの内積空間の構造が同一である（同型という）ことを、写像の言葉で表わせ。また、2つの有限次元内積空間が同型であるための必要十分条件は、次元が一致すること。

## 5 ユークリッド空間

高校では、Bellavitis 風に、有向線分の同値類として幾何ベクトルを導入しているようである。しかし、同値関係の概念を表に出さない形での同値類であるから不親切なことこの上なし。

Weyl 風に有向線分の表す平行移動をベクトル（変位ベクトル）と称する、と教えることはできないか。具体的なイメージは風向と風量。ただし、風は、場所によらず一様である場合。ベクトルの和は平行四辺形則であるが、北の風と東の風が同時に吹けば、北東の風、と理解する。変位ベクトルの三角形則と思ってもよい。

変位ベクトルの基本法則：点  $O$  を指定すれば、点  $P$  から変位ベクトル  $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$  がきまる。逆に、与えられた変位ベクトル  $\mathbf{p}$  に対して、 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$  となる点  $P$  が丁度一つ存在する。

基準点  $O$  からの変位ベクトルの形で点を表したものを、位置ベクトル (position vector) という。

高校での幾何ベクトルの扱いで不思議な点は、点とベクトルの和が扱われていないこと。点  $A$  を変位ベクトル  $\mathbf{v}$  によって平行移動した結果を  $A + \mathbf{v}$  と書く<sup>†</sup>。そうすると、位置ベクトルの関係式は、 $P = O + \overrightarrow{OP}$  となる。ただ、そそかしい人が、 $\overrightarrow{OP} = P - O$  と書いたりするのを恐れているのか。しかし、これは、重心座標の記法とも合致する正統なものである。変位ベクトルの和の定義 = 三角形則

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

は、

$$B - A + C - B = C - A$$

という自明とも見える等式になる。

大げさではあるが、点の一次結合全体を関係

$$\overrightarrow{OP} = \sum_j t_j \overrightarrow{OA_j} \implies P = \sum_j t_j A_j + (1 - \sum_j t_j)O$$

---

<sup>†</sup>  $\mathbf{v} + A$  と書いても良いのであるが、異質なものの間の和であることから、順序を指定した書き方のほうが混乱しない

で割った(同一視した)空間を考えてみると、その上の線型汎関数

$$\sum_j t_j A_j \mapsto \sum_j t_j$$

が意味をもち、その kernel ( $\sum_j t_j = 0$  の場合) は、対応

$$\sum_j t_j A_j \mapsto \sum_j t_j \overrightarrow{OA_j}$$

によって、幾何ベクトル空間と同一視される。ここで、右辺のベクトルが点  $O$  のとり方によらないことに注意。

ここで、ユークリッド空間の正体を、Weyl にしたがって明らかにしておこう。

集合  $E$  がユークリッド空間であるとは、内積空間  $V$  と和の記号で表わされる写像  $E \times V \ni (a, v) \mapsto a + v \in E$  で以下の条件を満たすものが与えられたものをいう。

- (i) 結合法則  $(a + v) + w = a + (v + w)$ .
- (ii) 二点  $a, b \in E$  に対して、 $b = a + v$  となる  $v \in V$  がちょうど一つ存在する。

**Exercise 6.**  $a + 0 = a$  を示せ。

ベクトル空間  $V$  の次元  $\dim V$  をユークリッド空間の次元という。

2つのユークリッド空間が同じ構造をもつための必要十分条件は、その次元が一致することである。この意味で、ユークリッド空間は、次元の数だけ異なるものが存在する。具体的には、座標空間  $\mathbb{R}^n$  を考えればよい。

## 6 直交群

構造をもった集合  $S$  に対して、その構造を保つ写像全体は、写像の合成に関して群をなす。内積空間の場合には、それを  $O(V)$  という記号で表し、 $V$  上の直交群という。 $V = \mathbb{R}^n$  の場合には、直交行列の作る群に一致するからである。 $n = 2, 3$  の場合に、これがどのようなものか調べておこう。

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が直交行列であるための条件  ${}^t S S = I$  を書き下してみれば、

$$a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2, ab + cd = 0$$

となる。 $a = \cos \theta$ ,  $c = \sin \theta$  とおくと、 $(b, d) = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$  がわかるので、

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

前者は、角  $\theta$  の回転を表し、後者は、直線  $y = x \tan(\theta/2)$  に関する折返しを表す。

3次の実行列は、実数の固有値  $\epsilon$  をもつ。そこで、その固有ベクトル  $e_3$  を含む正規直交基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  をとれば、

$$T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

直交行列は、ベクトルの長さを保つので、 $\epsilon = \pm 1$ .  $\det S = 1 = \epsilon$  のとき、 $T$  は  $e_3$  を回転軸とした回転であり、 $\det S = -1 = -\epsilon$  のときは、 $e_3$  を含む平面に関する折返しとなる。 $\epsilon = -1 = \det S$  の場合は、ある直線のまわりの角  $\pi$  の回転である。 $\epsilon = -1 = -\det S$  の場合は、 $e_3$  を回転軸とした回転と  $e_3$  と直交する平面に関する折返しの組合せとなる。

まとめると、 $\det T = 1$  の場合は、ある直線のまわりの回転、 $\det T = -1$  の場合は、ある直線のまわりの回転とその直線と直交する平面に関する折返しの組合せ。

**Exercise 7.** 以上を確かめよ。

## 7 ユークリッド変換

ユークリッド空間においては、2点間の距離が  $\sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$  で定められる。この距離を保つ変換をユークリッド変換と呼ぶ。すなわち、写像  $\Phi : E \rightarrow E$  で、 $(\Phi p - \Phi q, \Phi p - \Phi q) = (p - q, p - q)$  ( $p, q \in E$ ) であるもの。ユークリッド変換  $\Phi$  の具体的な形は、

$$\Phi(p) = o + T(p - o) + u, \quad u \in V, \quad T \in O(V).$$

$o$  を  $o'$  に変えると、

$$o + T(p - o) + u = o' + T'(p - o') + u' = o' + T'(p - o) + T'(o - o') + u'$$

より、

$$T = T', \quad u' = u + T(o' - o) - (o' - o).$$

直交変換部分  $T$  は、 $o$  のとり方に依らないが、平行移動部分  $u$  は、 $o$  に依存する。

**Exercise 8.** ユークリッド変換は上記の形であることを以下の手順で示せ。

- (i) 平行移動で調整して  $\Phi(o) = o$  としてよい。また、 $o$  を  $0 \in V$  と同一視することで、 $\Phi(0) = 0$  としてよい。
- (ii)  $2(v, w) = (v, v) + (w, w) - (v - w, v - w)$  より、 $(\Phi(v), \Phi(w)) = (v, w)$ .
- (iii)  $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  に対して、 $(\Phi(\lambda v + w) - \lambda \Phi(v) - \Phi(w), \Phi((\lambda v + w) - \lambda \Phi(v) - \Phi(w)))$  を展開し、 $\Phi$  を取り除くと 0 になることから、 $\Phi(\lambda v + w) = \lambda \Phi(v) + \Phi(w)$ .
- (iv)  $\Phi(v) = Tv$  with  $T \in O(V)$ .

標準形： $u$  の  $o$  依存性を利用して、 $u$  の標準化を試みよう。 $v = o' - o$  とおくと、

$$u' = u + Tv - v.$$

(i)  $\det T = 1$  のとき。

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という表示を使えば、

$$T - I = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \theta)$$

より、 $u$  を  $T$  の回転軸成分のみにすることができる。これを Chasles の定理という。回進 (screw translation)

(ii)  $\det(T) = -1$  のとき。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という表示を使えば、 $T - I = \text{diag}(0, 0, -2)$  より、 $u$  から反射面に垂直な成分を取り除くことができる。転進 (glide plane operation と呼ぶようであるが、mirror translation とでもいいくべきもの)

## 8 四元数は予言する

四元数発見の追体験をしてみようではないか。

先節で見たように、平面を複素数と同一視するためには、実軸をまず選択しないといけない。この段階で、平面の等方性を破ることになる。さらに、実軸を実数と対応付けるた

めには、0 と正の向きが必要。ということで、長さ 1 の有向線分を指定して、はじめて数との対応が意味をもつようになる。言いかえると、直交座標系を入れるということで、何のことではない、 $\mathbb{R}^2$  を複素数と同定しているに過ぎない。同様のことは、3 次元空間についても言える。そこで、発想を転換して、内積空間の等方性を維持した代数系の構成に思い至ることになる。これは、四元数発見のうちに、Clifford によってなされたことで、3 次元実内積空間  $V$  の元から線型に生成される代数に次の条件を科すことで得られる。

$$v^2 = -(v, v), \quad v \in V.$$

右辺のマイナスは、複素数の場合の  $i^2 = -1$  の類似を求めるために入れたもので、つけなければ、別種の代数系が出現することになる。代数系であるから、内積の正値性も定義そのものには無関係で、いわゆる不定計量でもよい。さらには、退化する部分があってもよく、もっと極端に完全退化あってもよい。実際、グラスマンが考えた代数系というのが、この極端な場合である。さて、 $(v+w)^2 - v^2 - w^2 = -(v+w, v+w) + (v, v) + (w, w)$  の両辺に分配法則を適用して計算してみると、 $vw + wv = -(v, w)$  を得る。とくに、 $v \perp w$  のときには、 $vw + wv = 0$  となって、積の交換法則が成り立たないことがわかる。そこで、交換法則はあきらめて、積の結合法則のみを要求して代数系を考える。これをクリフォード代数という。

3 次元内積空間であれば、その正規直交基底  $(e_1, e_2, e_3)$  を用意することで、これらのさまざまな積とその一次結合を考えることになる。その際に、 $e_j e_k = -e_k e_j$ ,  $e_j^2 = -1$  が成り立つので、単項式は無制限に出てくるのではなく、

$$1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_2 e_3, e_1 e_3, e_1 e_2 e_3$$

で全てである。ちょうど  $1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$  だけある。そこで、これらを基底とするベクトル空間に、積をクリフォードの関係式に従って定義してみよう。たとえば、

$$e_1 e_2 e_1 e_2 e_3 = -e_1 e_1 e_2 e_2 e_3 = -e_3$$

のように。少し実験すればわかるように、このようにして定めた積が結合法則をみたすことがわかる。(きちんと確かめるのは多少手間かかる。)

*Remark 1.*  $e_1 e_2 e_3 \in C(V)$  は中心に属し、 $(e_1 e_2 e_3)^2 = 1$  である。したがって、下で出てくる quaternion 部分を  $Q$  で表せば、 $C(V) = Qc_+ + Qc_- \cong Q \oplus Q$  となり、 $C(V)$  の代数構造は  $Q$  のそれに帰着させられる。ここで、 $c_{\pm} = (1 \pm e_1 e_2 e_3)/2$  である。一方、パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の交換関係

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1, \sigma_j^2 = I$$

と  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を比べると、

$$\mathbf{i} = -i\sigma_1, \quad \mathbf{j} = -i\sigma_2, \quad \mathbf{k} = -i\sigma_3$$

という四元数の行列表現を得る。

先を急ごう。偶数次数の項だけを取り出すと、それだけで積が閉じている。

$$(e_1e_2)(e_2e_3) = -e_1e_3$$

のように。また、 $(e_1e_2)^2 = -1$  であるから、これらは虚数単位のようにふるまう。そこで、

$$e_1e_2 = \mathbf{k}, \quad e_2e_3 = \mathbf{i}, \quad e_3e_1 = \mathbf{j}$$

という新たな記号を導入すれば、

$$\mathbf{ijk} = -1 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2$$

なる実4次元の代数系を得る。これを quaternion という。

**Exercise 9.** 上の  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  についての関係式から、 $\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}$  を導け。また、0でない quaternion の元は、逆元をもつことを示せ。

Grassmann, Hamilton, Clifford をめぐって。

Quaternion の発見者であるハミルトンは、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を  $e_1, e_2, e_3$  に相当するものとしていたのであるが、いまから思えば、上記の対応がより整合的である。

経緯はともあれ、quaternion を  $w + xi + yj + zk$  と表したとき、 $w$  をスカラー（部分） $xi + yj + zk$  をベクトル（部分）とハミルトンは名づけた。ここで、ベクトル部分の積を計算する。

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k}.$$

結果のスカラー部分には、内積にマイナスをつけたもの、ベクトル部分には、規則的な組合せの成分が現れる。そこで、 $V$  におけるベクトル積を

$$(xe_1 + ye_2 + ze_3) \times (x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3$$

で定める。これは、座標系に付随した積であるが、実は、座標系にはほとんど依存しない。正確に述べると、2つの正規直交基底を結ぶ直交行列の行列式の値を掛けるという変化が

生じる。したがって、とくに、右手系あるいは左手系を固定して、その範囲での座標変換を考える限りにおいては、座標系のとり方に依存しないことになる。

ベクトル積の幾何学的意味は、面積ベクトルである。これは、ベクトル積の意味を追求する過程でハミルトン自身により明らかにされたところであるが、グラスマンは別のより広汎な観点から同等以上の内容に達していた。

グラスマンは、まず、変位ベクトルの概念をものにし、それを使ってニュートン力学の記述を現代風に改める。その過程で、ベクトルの内積を導入する。面白いことに、グラスマンが導入した内積の記号は、上で導入したベクトル積の記号（これは、ギップスによる）とそっくりである。何はともあれ、グラスマンは、幾何学量の代数化を早い段階から考えていた。方向量としての（変位）ベクトルの次は、方向量としての面積ベクトルさらには方向量としての体積ベクトルである。2つの変位ベクトルが与えられたとき、その作る平行四辺形の符号付き面積を、3つの変位ベクトルが与えられたとき、その作る平行六面体の符号付き体積をひとつの幾何学量として代数系の中で理解しようとした。グラスマンは、3次元空間固有の次元による特殊性からの脱却をはかるために、一般次元ベクトル空間をも考察の対象とした。とくに3次元に限定することで、ベクトル積を面積ベクトルの成分表示という形で捉えるにいたった。グラスマンのたどった思考の軌跡は明らかではないが、面積ベクトルあるいは体積ベクトルの成分表示が行列式の諸性質と似ていることを手がかりにしたのではと推測する。行列式の交代性を代数系として取り込む過程で、グラスマン代数の外積構造に思い至ったというのが、近いところではないか。グラスマン代数は90年の時を経て、量子物理におけるフォック空間の形で新たな生命を得ることになる。

さて、あらためてグラスマン代数である。クリフォード代数を知った身としては、もはや理解することはたやすい。

$$v^2 = 0$$

とおくだけでよい。ただし、積を同じ記号で書くと混乱するので、 $v \wedge w$  のように書くのが慣例。（グラスマンは、 $[vw]$  のように書いた。）したがって、 $v \wedge v = 0$  が基本関係であるり、交代性  $v \wedge w = -w \wedge v$  が成り立つ。クリフォード代数の場合と同様に（ある意味簡単に）結合則の成り立つ代数系を得る。変位ベクトル  $a, b$  の定める面積ベクトルは、したがって、 $a \wedge b$  と表わされ、成分表示  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ,  $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  と分配法則、それと  $e_j \wedge e_k = -e_k \wedge e_j$  を使えば、

$$\begin{aligned} & (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2 + (a_1b_3 - a_3b_1)e_1 \wedge e_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

ベクトル積の定義にならって、 $e_1 \wedge e_2$ ,  $e_2 \wedge e_3$ ,  $e_3 \wedge e_1$  をそれぞれ、 $e_3, e_1, e_2$  と同定すれば、面積ベクトルの 3 成分が、ベクトル積の 3 成分に他ならないことがわかる。

さらに、

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

であることから、体積ベクトルの成分が 3 次行列式と同定される。

## 付録 A ぶつぶつ交感

高校数学の内容にいろいろ不満あれど、まずは用語の問題：

整式とはなんという言いぐさであるか。誰がこのような言い方を決めたのか。文科省的には、「多項式」とは整式のうち複数以上の項からなるものを指し、単項式と「多項式」をあわせて、整式と呼ぶらしい。しかしながら、数学の専門家でこういうくだらない使い分けをしている人はいないはずである。世間というか世界の常識は、単項式は多項式の特別な場合。専門家・非専門家問わず、多項式と称していて、それで何の問題もないものを、整式などと意味不明の言いよう。責任者出てこい！もしかしてフランス語由来かと調べてみたが、かの国でも polynome である。もともとラテン語なので、当然であるか。

数学的な問題点の指摘を。このように単項式と「多項式」を区別するのであれば、零は単項式であってはならず（単項式には零を含めないのが国際標準なのでこの点は矛盾なし）。そうすると、零は整式ではないことになり、整式の和が、整式とは限らなくなる。こういう非合理的用語（法）は速やかに抹殺すべきかと思う。

- 複数の文字の積に零でない数を掛けたものを単項式。
- 多項式とは、零、単項式または単項式の和で書ける式のこと。
- 多項式の和、差、積の定義。計算規則。

などと、とやればよい。簡単なことなんだ。

次に直交。2つのベクトルが直交するという言い方が排除してあって、2つのベクトルは垂直であると言わないといけないらしい。これは、直交という言葉の「交」<sup>‡</sup>の字の影響を避けたのであろうか。図形の場合、交わらないと具合が悪いということで。

<sup>‡</sup> 交という漢字の成り立ちは、足を交差させるということなので、必ずしも交わる必要はない。交換とか交通とか。英語のクロスに近いかも。和語の「まじわる」と漢語の「交」の意味には、当然ながらずれがある。

直交と垂直は、英語でいうところの *orthogonal* と *perpendicular* (か *vertical*) の訳語である。この二つは由来が異なる。英語（もとはラテン語）も日本語（漢語）も、一方は直角を意味し、一方は鉛直を意味する。鉛直とは、測量の道具に由来するいいかたで、水平方向に対して直交するという意味の垂直である。だから垂れるの漢字が入っている。本来は、水平とセットで使うべき用語である。一方で *orthogonal* の方には、交わるという意味は含まれていない。したがって、交点をもたない2つの直線が *orthogonal* であるということが可能。訳語の選定に難があったというべきか。ちなみに、直角に相当する英語は、*right angle* ないし *rectangle* である。一般的には、直交でよからう。ただし、意味は *orthogonal* と合わせておく。交点の存在も要求する場合は、「直角にまじわる」と言えばよい。直行と紛れる場面もなさそうであるし。また、直交だと、直交である、という形容詞的な表現の他に、直交するという動詞的表現も可能で、より柔軟に使える。

複素平面。これは、有名な話なので略す。さる高名な数学者に引きづられたのだなあ。えらい学者が立派な人とは限らぬこと、理研スキャンダルを見てもわかる。あ、その前からわかってたことであるか。

次は、扱うべき内容について。

複素平面が理系数学として復活したのはよい。ただし、あくまでも複素数に慣れるために使用すべきであって、なくなった一次変換の代わりを務めさせるべきではない。一次変換は、大学に入ってからしっかり勉強すれば十分。ただ、大学方面から、線型代数のカリキュラムの見直しの議論がなかなか出てこないのは、大いなる怠慢というべき。

一番の不満は、平面の方程式がないこと。これを是非復活させる。ついでに、正射影を取り上げる。ベクトルの内積があるので、どうってことはない。というよりは、是非入れるべきである。その上で、2平面の交わりとしての直線の方程式、さらには、3変数の連立一次方程式の解の様子を、3つの平面の位置関係と関連づけて教える。これは、大学での線型代数の内容を理解する上で必須の準備となる。これをやらないと、線型代数が単なる代数で終わってしまい、その背後に控える幾何学的直感が身につかぬままになりかねない。