

問題 1 3 は解答用紙の表に、問題 2 4 はその裏に解答すること。

1 2 次および 3 次行列式の定義を述べ、それらの幾何学的意味を説明せよ。

2 連立一次方程式

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 2x + y + z &= c \\ 4x + z &= c^2 \end{aligned}$$

が解をもつように定数 c を定め、その解がどのような図形を表すか調べよ。

3 パラメータ a, b を含んだ行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

が逆行列をもつかどうか調べよ。

4 誤りを伴った伝言のくり返しによる情報の変化の様子を記述するために、次のようなモデルを考える。

伝言の内容は T か F の 2 種類とし、 T という伝言を受け取ったとき F を次に伝えてしまう確率が $0 < f < 1$, F という伝言を受け取ったとき T を次に伝えてしまう確率が $0 < t < 1$ であるとする。また、 n 回目に伝言された内容が T である確率を p_n 、 F である確率を q_n とする。

(i) n に依らない 2×2 行列 C で $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$ となるものを求めよ。

(ii) 行列 C の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(iii) 初期の確率を $p_0 = p$, $q_0 = 1 - p$ とするとき、ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix}$ を固有ベクトルの一次結合で表し、 $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ を具体的に求めよ。