

問題 [1] [3] は解答用紙の表に、問題 [2] [4] はその裏に解答すること。

[1] 複素数列 $(x_n)_{n \geq 0}$ 全体からなるベクトル空間を V とし、線型作用素 $S : V \rightarrow V$ を $S(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ で、 V の部分空間を $W = \{(x_n); x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \ (n = 0, 1, \dots)\}$ で定める。

(i) W に含まれる S の固有ベクトルをすべて求めよ。

(ii) 初期条件 $x_0 = x_1 = 1$ をみたす漸化式 $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \ (n = 0, 1, \dots)$ の解を求めよ。

[2] 実数全体で定義され、繰り返し微分可能な関数 $f(t)$ 全体から成るベクトル空間を V とし、線型作用素 $D : V \rightarrow V$ を $f(t) \mapsto f'(t)$ で、 V の部分空間を $W = \{f(t); f''(t) + f'(t) - f(t) = 0\}$ で定める。

(i) W に含まれる D の固有ベクトルをすべて求めよ。

(ii) 微分方程式 $f''(t) + f'(t) - f(t) = 0$ の解で、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$ となるものをすべて求めよ。

[3] エルミート行列

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化するユニタリー行列を求めよ。

[4] 実対称行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ。