

微積分宿題

宿 1. 正数 $a > 0$ と実数 $|x| < 1$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a x^n = 0$ であることを確かめよ。

宿 2. つぎの関数のグラフの概形を、定義域の境界での様子に注意して描け。

(i) $y = x^2 e^{-x}$.

(ii) $y = x \log x$ ($x > 0$).

宿 3. $\arctan x$ の微分の公式を導け。

宿 4. 関数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ について、

(i) グラフの概形を描け。

(ii) 逆関数 $g(y)$ の導関数を求めよ。

(iii) 逆関数 $g(y)$ を y の式として具体的に表わせ。その式をみて何か思い出さないか。

宿 5. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad \int x e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

宿 6. 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\int x^n e^{-x} dx$$

を求めよ。

宿 7. 微分 $(x\sqrt{a^2 - x^2})'$ を利用して、

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

を示せ。また定積分

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

を扇方の面積と結びつけることで、公式を幾何学的に解釈せよ。

宿 8. 双曲線の有理パラメータ表示 $y = t(x+1)$, $y^2 = x^2 - 1$ におけるパラメータ t の動く範囲に注意し、不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

を有理関数の不定積分に還元する方法で求めよ。

宿 9. 誤差を表す積分を評価する際に $a < x$ を暗黙裡に仮定したが、最後に得られた評価式は $x < a$ の場合でも成り立つ。これを確かめよ。

宿 10. $\sin 1^\circ$ の一次近似計算の誤差を見積もれ。

宿 11. テイラー近似式を利用して、 e の値を小数点以下 5 術まで正確に求めよ。

宿 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

であるような a, b, c を求めよ。

宿 13. 等比数列の和の積分から得られる $\log(1+x)$ についての剩余項と微積分の基本公式に現れるものと比較せよ。両者が同じものであることを直接示すことができるだろうか。ヒント：帰納法と部分積分。

宿 14. 正数 $a, b > 0$ に対して、

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$$

を示せ。とくに $a = 2, b = 1$ と取ると具体的にどうなるか。

宿 15. 次の計算の誤りについて説明せよ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

宿 16. 実数 $a > 0$ と $b < 1$ に対して、広義積分

$$\int_0^1 \frac{(-\log x)^a}{x^b} dx$$

が収束することを示し、その値をガンマ関数により表せ。

宿 17. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b}$$

が収束するような (a, b) (a, b は実数) の範囲を図示せよ。