

Presentazione esercitazioni MSSF

esame finale per l'A.A. 24/25

Lorenzo Casavecchia, matricola 0350001
lorenzo.casavecchia@students.uniroma2.eu

Ingegneria dell'Automazione

24/07/2025



TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

1 Assignment 2 - Ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria

Ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria

Obiettivi

Usare l'algoritmo di `fminsearch` e implementare l'algoritmo di Gauss-Newton per la ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria, considerando il modello con tutte le resistenze e compliances e il modello ridotto, cioè con il numero minimo di parametri che definisca le `tf` univocamente

Organizzazione dell'esercitazione

- `main_analysis.m` salva su file `output_data.mat` e `parms.mat` P_{ao}, Q, Q_A, V, V_A simulati dal modello Simulink e i valori dei parametri R_*, C_*
- i main files per la ricostruzione sono
`main_id_<metodo>_<variabile>_<all/red>parms.m` con
 - ▶ `<metodo>` l'algoritmo d'ottimizzazione usato
`fminsearch` vs Gauss-Newton
 - ▶ `<variabile>` la variabile $x \in \{Q, Q_A\}$ con relativa stima \hat{x} nella funzione obiettivo
$$E = \frac{1}{2}(\hat{x} - x)^2$$
 - ▶ `<all/red>` il tipo di modello su cui effettuare il fit
tutti i parametri R_*, C_* vs l'insieme minimo che univocamente identifica la $\frac{x}{P_{ao}}$

Ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria

Nota sulla cartella di lavoro

Nota

I file `main_id_<metodo>_<variabile>_<all/red>parms.m` condividono, per stessi `<variabile>` e `<all/red>`

- il file per la funzione obiettivo

`obj_fun_<variabile>_<all/red>parms.m`

- il file per la parametrizzazione e simulazione della corrente stima della `tf`

`predicted_model_<variabile>_<all/red>parms.m`

Quindi le uniche differenze tra i main files sono l'algoritmo d'ottimizzazione usato e la stampa a schermo dei parametri ottimizzati di fatto i file sono in origine un copia-e-incolla dello stesso file, con diverso corpo per l'algoritmo d'ottimizzazione e label per la stampa

Ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria

Descrizione degli algoritmi: `fminsearch`

Dalla documentazione di `fminsearch`

`fminsearch` (...) is a direct search method that does not use numerical or analytic gradients (...).

The algorithm is not guaranteed to converge to a local minimum.

L'algoritmo modifica la stima corrente \hat{x} di x creando un semplice (i.e. un poliedro in \mathbb{R}^n) centrato in \hat{x} ed effettuando diverse operazioni geometriche

Gli aspetti chiave dell'algoritmo sono

- ottimizzatore locale, con ogni passo che riduce il valore del costo E
- garanzia di convergenza dimostrata a basse dimensioni $n \leq 2$
- indipendente da gradienti del costo E
- non è vincolato

$x \in \mathbb{R}^n$ senza restrizioni di norma o di appartenenza $x \in D$, al contrario e.g. di algoritmi genetici o proiettivi

Ricostruzione parametrica nel modello della meccanica respiratoria

Descrizione degli algoritmi: Gauss-Newton

- Data la funzione obiettivo $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ si considera l'espansione di Taylor del secondo ordine trocando i termini $o(\|h^2\|)$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x)h + \frac{1}{2}h^\top \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h$$

- si sceglie h per ottimizzare $f(x+h)$
- la condizione di stazionarietà impone

$$\frac{\partial f(x+h)}{\partial h}(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)h = 0$$

- che è possibile scegliendo

$$h = - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right]^{-1} (x) \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^\top (x)$$

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Convergenza di Gauss-Newton

Teorema 14 (Convergenza metodo di Newton)

Sia $\{x_k\}$ la successione generata dal metodo di Newton. Se esiste $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ è non singolare, allora esiste un intorno $B(x^*; \rho)$ di x^* tale che, se $x_0 \in B(x^*; \rho)$, allora $\{x_k\}$ converge a x^* con rapidità superlineare, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0.$$

Inoltre, se $\nabla^2 f$ è Lipschitz continua, la rapidità di convergenza è quadratica, cioè esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2 \quad \forall k \geq 0.$$

Figure 1: Convergenza di Gauss-Newton (da Metodi di Ottimizzazione per Big Data)

Nota

La non singolarità di $\nabla^2 E(R_*, C_*)$ **non** è garantita in un intorno dei parametri veri R_*, C_* perchè questi non identificano univocamente il comportamento di alcuna tf tra Q, V, Q_A, V_A

Complessivamente Gauss-Newton

- è un algoritmo di ricerca di punti stazionari

$\nabla f(x) \rightarrow 0$ ma $\nabla^2 f(x) \not\rightarrow k^2 > 0 \implies x^*$ potrebbe essere un massimo locale

- dipende dal gradiente e dall'Hessiano della funzione obiettivo

o una loro stima (vedi Gauss-Southwell, Gauss-Seidel, metodi a blocchi, etc)

- non è vincolato

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Note preliminari alle simulazioni con `fminsearch`

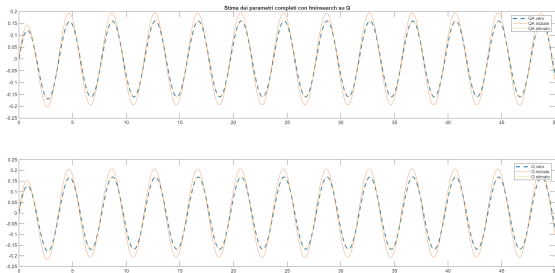
Nota

- Per le identificazioni su parametri completi sono presenti i grafici della ricostruzione di Q e Q_A , a prescindere se l'identificazione fosse basata su Q o Q_A
avendo i parametri completi possiamo costruire e simulare sia Q che Q_A , mentre con i soli parametri ridotti e.g. della *tf* di Q non possiamo costruire e simulare anche la *tf* di Q_A a meno di inversioni (non necessariamente univoche)
- La sensibilità dei parametri varia da param. a param. e da modello a modello
è naturale che alcuni parametri variino di meno o si allontanino dal valore reale; e.g. in queste simulazioni le compliances migliorano e le resistenze peggiorano
- i parametri iniziali θ_{init} sono scelti con un rumore additivo dell'80% di quelli veri

$$\theta_{\text{init}} = \left(1 + \frac{8}{10} \left(\text{rand}(\text{size}(\theta_{\text{predict}})) - \frac{1}{2} \right) \right) .* \theta_{\text{predict}}$$

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_fminsearch_Q_allparms



fminsearch su Q tutti i parametri

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
Rc	11	7.314	9.991	0.3351	0.09169
Rp	2.5	3.359	3.729	0.3435	0.4917
Cs	0.005	0.006103	0.005065	0.2206	0.01306
CL	0.2	0.1979	0.2082	0.01057	0.04119
Cw	0.2	0.1897	0.1837	0.05131	0.08153

No. iterazioni

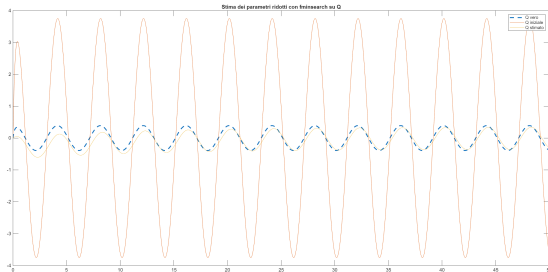
100

Valore funzione obbiettivo

2.47769e-06

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_fminsearch_Q_redparms



fminsearch su Q parametri ridotti

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
a2	0.0025	0.001564	0.001777	0.3745	0.289
a1	1.55	1.273	1.93	0.1785	0.2449
a0	10	6.369	0.1418	0.3631	0.9858
b1	-0.5	-0.3389	-0.3583	0.3223	0.2835

No. iterazioni

87

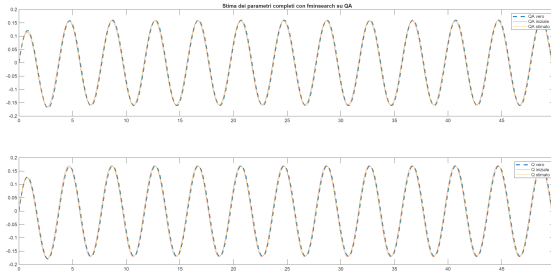
Valore funzione obbiettivo

43.78

$$\frac{Q}{P_{ao}} = \left(a_0 + \frac{b_1}{s} \right) \frac{s}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_fminsearch_QA_allparms



fminsearch su QA tutti i parametri

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
Rc	11	10.74	12.39	0.02326	0.1265
Rp	2.5	1.961	1.215	0.2156	0.5141
Cs	0.005	0.006377	0.004058	0.2754	0.1883
CL	0.2	0.1512	0.1878	0.2442	0.06083
Cw	0.2	0.1561	0.1964	0.2193	0.01797

No. iterazioni

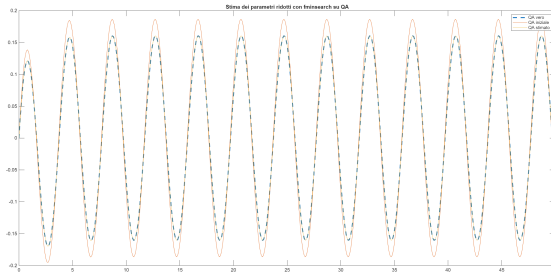
100

Valore funzione obbiettivo

2.88864e-06

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_fminsearch_QA_redparms



fminsearch su QA parametri ridotti

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori	relativi
a2	0.1375	0.1316	0.02931	0.04257	0.7869
a1	14.05	11.87	14.13	0.1549	0.005851
a0	10	10.07	10.34	0.006807	0.03401

No. iterazioni

100

Valore funzione obbiettivo

2.2517e-06

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

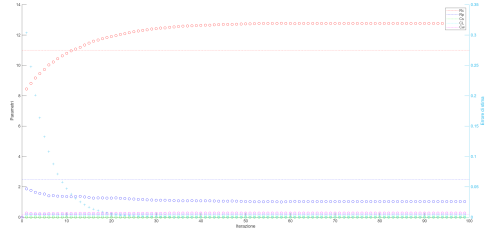
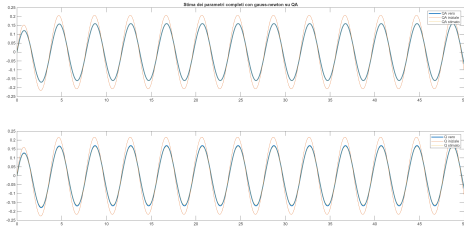
Note preliminari alle simulazioni con Gauss-Newton

Nota

- Un grafico aggiuntivo con l'evoluzione nel tempo dei parametri è stato inserito
- L'identificazione basata su Q non è stata svolta
avendo uno zero in più, Q tende a presentare problemi in più nel definire un insieme di parametri minimi che derivano dal scegliere quale termine nel numeratore o del denominatore debba essere preso $= 1$ (lo stesso problema è presente anche su `id_fminsearch` e non avevo intenzione di riaffrontarlo)

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_gaussnewt_QA_allparms



GN su QA tutti i parametri

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
Rc	11	8.102	12.76	0.2634	0.1601
Rp	2.5	1.955	1.037	0.2179	0.5852
Cs	0.005	0.004743	0.002526	0.05144	0.4948
CL	0.2	0.1698	0.1492	0.1511	0.2539
Cw	0.2	0.2677	0.274	0.3387	0.3699

No. iterazioni

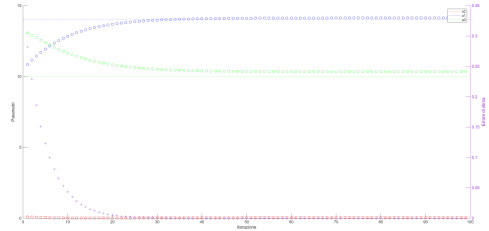
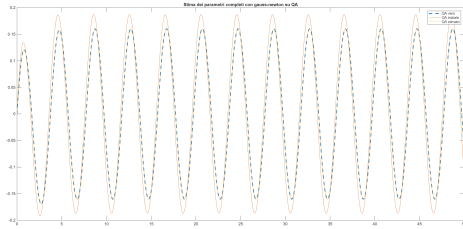
101

Valore funzione obiettivo

2.28587e-06

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

main_id_gausnewt_QA_redparms



GN su QA tutti i parametri

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
a2	0.1375	0.1298	0.029	0.05583	0.7891
a1	14.05	10.51	14.13	0.2521	0.005845
a0	10	13.24	10.34	0.3239	0.03397

No. iterazioni

101

Valore funzione obiettivo

2.2518e-06

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Problema delle ricostruzioni

Problema

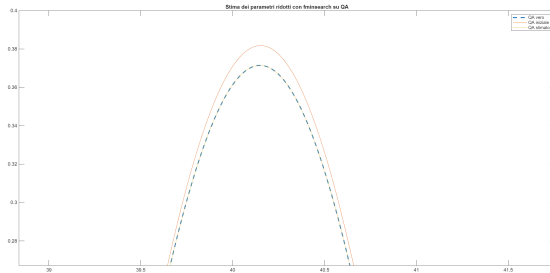
Nonostante i parametri stimati fittino meglio Q, Q_A rispetto a quelli iniziali, anche nei modelli a parametri ridotti i parametri non convergono a quelli reali
potrebbe essere una coincidenza, ma resta molto sospichoso

Ponendo $\theta_{\text{init}} = \theta_{\text{true}}$ ci aspettiamo che i parametri non cambino

perchè $E = 0$ è il valore al minimo globale di E

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Non stazionarietà dei parametri veri



fminsearch su QA parametri ridotti

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori	relativi
a2	0.0025	0.0025	0.002476	0	0.009481
a1	1.55	1.55	1.562	0	0.007424
a0	10	10	10.29	0	0.02898

No. iterazioni

41

Valore funzione obbiettivo

1.19381e-05

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Qualcosa nel modello è sbagliato

Nota

Chiaramente qualcosa è sbagliato nel modello simulink, nelle `main_id` o nelle `predicted_model`

Investigando molto profondamente negli algoritmi di simulink, nelle tolleranze e lo step size la risposta a cui sono giunto è la seguente:

- i dati di simulink sono prodotti con algoritmi di integrazione di odes

il modello è convertito in un sistema dinamico e le equazioni vengono integrate con metodi alla Eulero, Runge-Kutta, etc

- la simulazione per il fit dei parametri è svolta in MATLAB con `lsim` su delle `tf`

la `tf` è convertita nella sua rappresentazione di stato $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ con matrici A, B, C, D calcolate con una rappresentazione canonica;

e le equazioni vengono integrate usando la formula per sistemi LTI

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Spiegazione del problema

Nota

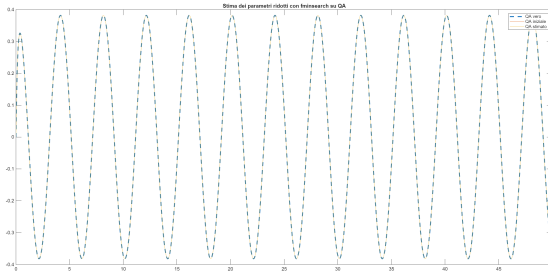
La derivazione, le applicazioni e le implementazioni di questi 2 metodi sono **complementante distinte**

Infatti se generassimo Q, Q_A per il fit usando `lsim` invece dei dati prodotti da `simulink` l'algoritmo converge subito

ponendo $\theta_{\text{init}} = \theta_{\text{true}}$

Ricostruzione parametrica del modello della meccanica respiratoria

Conferma della spiegazione del problema



fminsearch su QA parametri ridotti

Report sul fitting dei parametri

Parametri

	veri	iniziali	stimati	errori relativi	
a2	0.0025	0.0025	0.0025	0	0
a1	1.55	1.55	1.55	0	0
a0	10	10	10	0	0

No. iterazioni

29

Valore funzione obiettivo

0