Controllo e stabilizzazione del pendolo inverso

Progetto di Controlli Automatici

lorenzo.casavecchia@students.uniroma2.it

Ingegneria Informatica
Robotica e automazione

A.A. 22 / 23

TOR VERGATA
UNIVERSITY OF ROME
School of Engineering

Indice

Descrizione dell'impianto

Variabili del sistema e diagramma

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{L_1}{2}\sin(\theta_1) \\ y_1 = \frac{L_1}{2}\cos(\theta_1) \end{cases}$$

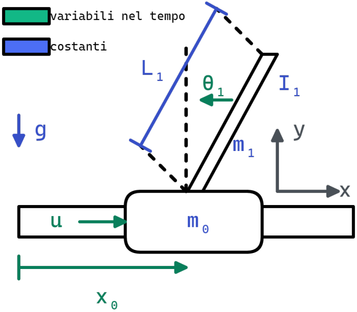

Figura 1: u è una forza esterna (attuabile) che agisce sul carrello

Descrizione dell'impianto

Derivazione della dinamica del sistema via Lagrange

$$
\begin{cases}
\text{Energia cinetica} = \mathscr{K} = \frac{1}{2}\left(m_0\dot{x}_0^2 + m_1\dot{x}_1^2 + m_1\dot{y}_1^2 + I_1\dot{\theta}_1^2\right) \\
\text{Energia potenziale} = \mathscr{P} = m_1 g y_1 \\
\text{Forze esterne} = u \text{ sul carrello, 0 sul pendolo}
\end{cases}
$$

Per ottenere la dinamica risolviamo

$$
\begin{cases}
\mathscr{L} = \mathscr{K} - \mathscr{P} \\
\partial_t \partial_{\dot{x}_0} \mathscr{L} - \partial_{x_0} \mathscr{L} = u \\
\partial_t \partial_{\dot{\theta}_1} \mathscr{L} - \partial_{\theta_1} \mathscr{L} = 0
\end{cases}
$$

rispetto a $\ddot{x}_0, \ddot{\theta}_1$

Descrizione dell'impianto

Equazioni della dinamica del sistema

$$\ddot{x}_0 = \frac{\sin(\theta_1)L_1^3 m_1^2 \dot{\theta}_1^2 - 2g\cos(\theta_1)\sin(\theta_1)L_1^2 m_1^2 + 2uL_1^2 m_1 u}{2(-L_1^2 m_1^2 \cos(\theta_1)^2 + L_1^2 m_1^2 + m_0 L_1^2 m_1 + 4I_1 m_1 + 4I_1 m_0)} + \frac{4I_1 \sin(\theta_1)L_1 m_1 \dot{\theta}_1^2 + 8I_1}{2(-L_1^2 m_1^2 \cos(\theta_1)^2 + L_1^2 m_1^2 + m_0 L_1^2 m_1 + 4I_1 m_1 + 4I_1 m_0)}$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{L_1 m_1 (L_1 m_1 \cos(\theta_1)\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + 2u\cos(\theta_1))}{-L_1^2 m_1^2 \cos(\theta_1)^2 + L_1^2 m_1^2 + m_0 L_1^2 m_1 + 4I_1 m_1 + 4I_1 m_0} + \frac{L_1 m_1 (-2gm_0 \sin(\theta_1) - 2gm_1 \sin(\theta_1))}{-L_1^2 m_1^2 \cos(\theta_1)^2 + L_1^2 m_1^2 + m_0 L_1^2 m_1 + 4I_1 m_1 + 4I_1 m_0}$$

Introducendo variabile di stato $Q = [x_0, \theta_1, \dot{x}_0, \dot{\theta}_1]$, si può descrivere il modello con un sistema del primo ordine $\dot{Q} = f(Q, u)$

Indice

Linearizzazione dell'impianto

Scelta del punto di lavoro

Il sistema è **fortemente non lineare**: linearizziamo la dinamica attorno un punto di equilibrio

$$\begin{cases} x_0 = \star \\ \theta_1 = 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{\theta}_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ \ddot{x}_0 = \dfrac{2um_1{L_1}^2+8I_1u}{2\left(m_0m_1{L_1}^2+4I_1m_0+4I_1m_1\right)} \\ \ddot{\theta}_1 = -\dfrac{2L_1um_1}{m_0m_1{L_1}^2+4I_1m_0+4I_1m_1} \end{cases} \xrightarrow{u=0} \begin{cases} \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ \ddot{x}_0 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases}$$

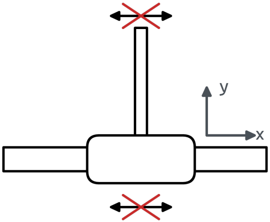

Figura 2: Configurazione d'equilibrio

Calcolo delle matrici del sistema lineare

Dato il punto di lavoro $[\tilde{Q}, \tilde{u}]$, la linearizzazione del sistema $\dot{Q} = f(Q, u)$ è data da

$$\dot{Q} \approx \nabla_Q f(\tilde{Q})(Q - \tilde{Q}) + \nabla_u f(\tilde{u})(u - \tilde{u})$$

Per il nostro sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{{L_1}^2 g {m_1}^2}{m_0 m_1 {L_1}^2 + 4 I_1 m_0 + 4 I_1 m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1 m_1 (2 g m_0 + 2 g m_1)}{m_0 m_1 {L_1}^2 + 4 I_1 m_0 + 4 I_1 m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2 m_1 {L_1}^2 + 8 I_1}{2(m_0 m_1 {L_1}^2 + 4 I_1 m_0 + 4 I_1 m_1)} \\ -\frac{2 L_1 m_1}{m_0 m_1 {L_1}^2 + 4 I_1 m_0 + 4 I_1 m_1} \end{bmatrix}$$

Linearizzazione dell'impianto

Parametri scelti

Scegliamo le stesse costanti usate qui

- $m_0 = 0.455\,\mathrm{kg}$
- $m_1 = 0.21\,\mathrm{kg}$
- $L_1 = 0.61\,\mathrm{m}$
- $I_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 = 0.0427\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$
- $g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

e scegliamo che la misura in uscita dal sistema sia θ_1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.5339 & 0 & 0 \\ 0 & 15.9259 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7391 \\ -2.4437 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

Linearizzazione dell'impianto

Dallo spazio di stato alla funzione di trasferimento

Note le matrici dello spazio di stato A, B, C, D la funzione di trasferimento $P(s)$ dell'impianto è data da

$$P(s) = C(s \cdot 1 - A)^{-1} B + D$$

Con i nostri dati

$$P(s) = \frac{-2.444}{s^2 + 4.41\,\mathrm{e}{-16} s - 15.93}$$

che quindi possiede due poli in $\approx \pm 4$

Indice

Design del controllore

Requisiti

- **Requisiti a regime**
  - errore nullo a riferimenti costanti ($r(t) = R \in \{0, 2\pi, \dots\}$)
- **Requisiti nel transitorio**
  - Sovra-elongazione O_S inferiore al 20%
  - Tempo d' assestamento S_T al 5% inferiore a $2\,s$

Affinché i requisiti a regime siano soddisfatti scegliamo di inserire nel controllore $C_0(s) = \frac{\mu N_C^*}{s^\rho D_C^*}$ un polo all'origine ($\rho = 1$)

$$\lim_{t\to+\infty} |r(t) - y(t)| = \lim_{s\to+\infty} \left| s \frac{s^\rho D_C^* D_P}{D_C^* D_P + N_C^* N_P} \frac{R}{s} \right| \sim \lim_{s\to+\infty} |\alpha s^\rho|$$

dove $\alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \rho \geq 1$

Design del controllore

Controllore PID

Per stabilizzare il sistema usiamo un **controllore PID** con parametri K_P, K_I, K_D, N

$$C(s) = K_P + K_D \cdot \frac{s}{\frac{s}{N} + 1} + \frac{K_I}{s}$$

I parametri

- $K_P = -10$
- $K_I = -15$
- $K_D = -2$
- $N = 100$

stabilizzano l'impianto

$$\begin{bmatrix} 36.7 & 4.73 & 0.01 \\ 8.51 & 1.0 & 0 \\ 0.422 & 0.01 & 0 \\ 0.798 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella di Routh del denominatore di

$${}_yW_r(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

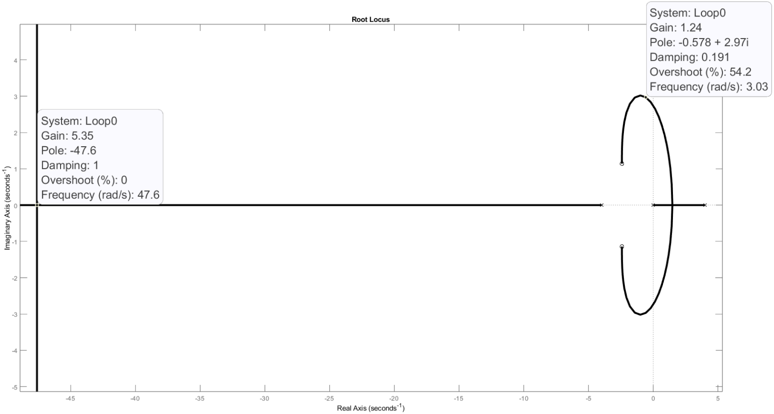

Figura 3: Un guadagno di 5.36 rende i modi più veloci e preserva la stabilità

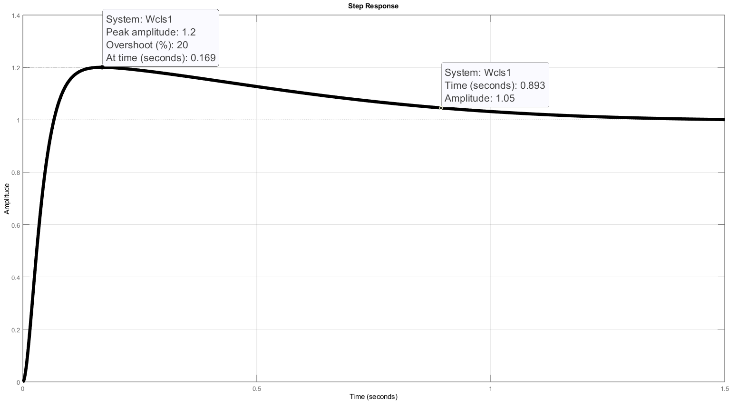

Figura 4: Risposta allo scalino del sistema

Indice

Altri elementi dello schema di controllo

Massimo ritardo ammissibile

Un **puro ritardo** $e^{-s\varpi}$ ruota in senso orario il diagramma di Nyquist della funzione ad anello $C(s)P(s)$ di ϖ radianti

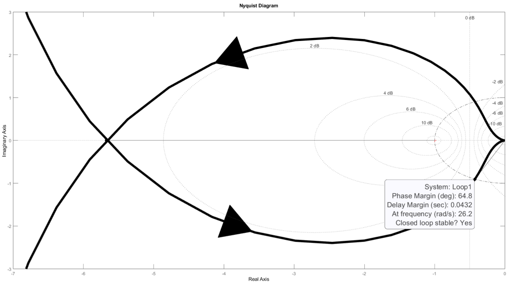

Figura 5: Diagramma di Nyquist della funzione ad anello

$$\varpi < \frac{\mu_\phi}{\omega_\tau} \approx 0.0432\,s$$

- $\mu_\phi \approx 64.76\,\text{deg}$ è il margine di fase
- $\omega_\tau \approx 26.18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ è la pulsazione di taglio

Altri elementi dello schema di controllo

Filtro sul riferimento

Per migliorare le prestazioni del controllore applichiamo un **filtro sul riferimento** $F_r(s)$

$$F_r(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega} + 1}$$

dove $\omega = \frac{3}{T_S} \approx 3.356\,\frac{1}{s}$

Filtro in feed-forward

Con un **filtro in azione feed-forward** tentiamo di rimpiazzare i poli lenti, ma stabili, dell'impianto (polo in -4) con dei poli più veloci (avendo usato un polo in -100 per il PID, suppongo di essere in grado di applicare poli fino a -100)

$$F_f(s) = \frac{\frac{s}{4} + 1}{\frac{s}{75} + 1}$$

Altri elementi dello schema di controllo

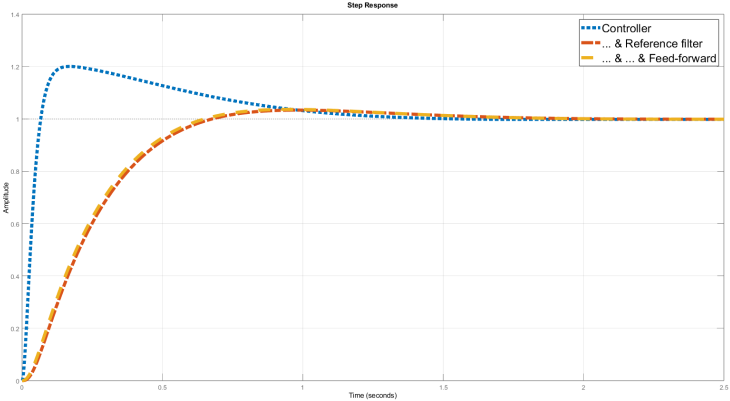

Figura 6: Risposte allo scalino

Indice

Modello Simulink e la swing-up-maneuver

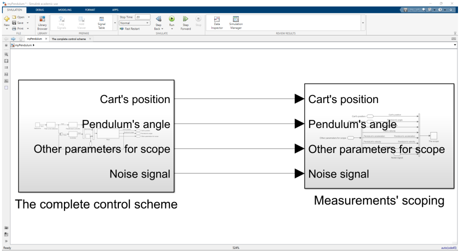

Figura 7: `myPendulum`

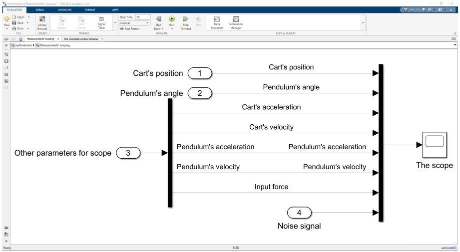

Figura 8: `myPendulum/Measurements' scoping`

Modello Simulink e la swing-up-maneuver

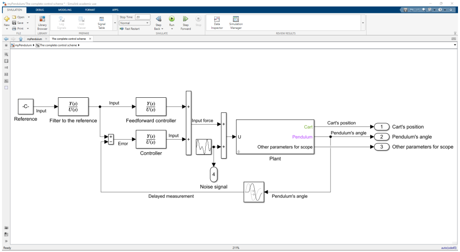

Figura 9: `myPendulum/The complete control scheme`

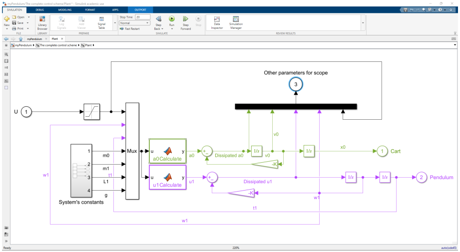

Figura 10: `myPendulum/The complete control scheme/Plant`

Modello Simulink e la swing-up-maneuver

Parametri per l'istanza d'esecuzione

Per una simulazione fruttuosa della **swing-up-maneuver** impostiamo i seguenti parametri:

- $\theta_1(0) = \pi$ (pendolo verso il basso)
- $r(t) = 2\pi$ (pendolo verso l'alto)
- $\varpi = 0.02\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Altri parametri:

- $u(t) \leq 100\,\mathrm{N}$ (saturazione)
- rumore di ampiezza $10\,\mathrm{N}$ e frequenza a piacere
- $d_0 = 1\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}, d_1 = 1\,\mathrm{Ns}$ (dissipazioni)

Modello Simulink e la swing-up-maneuver

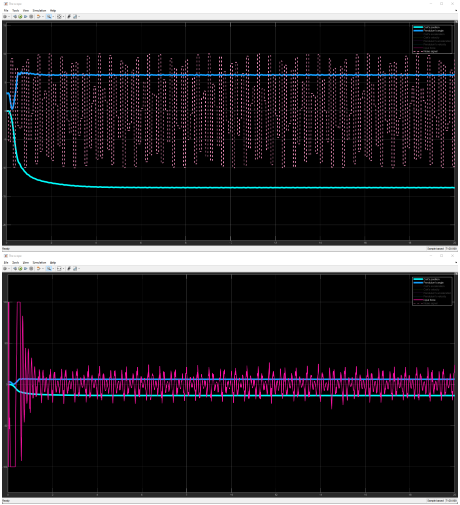

Figura 11: Simulazione della swing-up-maneuver

Indice

File e risorse utilizzate

- **Derivazione e studio del modello:** `mainForProject.m`
- **Modello Simulink:** `myPendulum.slx`
- **Utilities e file generati:**
  - `myRouth.m` di Ismail Ilker Delice
  - `drawEverythingButSignalResponse.m`
  - `a0Funct.m`
  - `u1Funct.m`
- **Ispirazione per il progetto:**
  - Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation
  - Control Theory: Double Pendulum Inverted on a Cart