МЕТОД ПРОГОНКИ РЕШЕНИЯ СЛАУ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Правая прогонка. Прямая прогонка. Обратная прогонка. Прогоночные коэффициенты. Вычислительная сложность прогонки. Левая прогонка. Встречная прогонка. Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки. LU-разложение трехдиагональной матрицы. Решение нескольких систем с одной и той же матрицей. Матричная прогонка.

Метод Гаусса является универсальным прямым методом решения систем линейных алгебраических уравнений. В то же время, как мы уже видели на примере решения СЛАУ с симметричной матрицей, учет специфики задачи позволяет построить алгоритмы с меньшими, по сравнению с универсальными, вычислительными затратами. Рассмотрим метод прогонки – один из важнейших для приложений методов решения СЛАУ. Метод прогонки есть метод исключения Гаусса без выбора главного элемента, примененный к системе уравнений с трехдиагональной матрицей.

Правая прогонка

Пусть требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 && = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 && = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&\qquad a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} && = b_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
&\qquad\qquad a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n && = b_n.
\end{aligned} \tag{0}$$

Такие системы возникают в приложениях. Рассмотрим, например, на оси Ox теплопроводящий стержень с концами в точках a и b. Пусть $u(x)$ – температура стержня в точке x, $x\in[a;b]$. Известно, что $u(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$u''(x)-p(x)u(x)=f(x),\ \ x\in(a;b),$$

с краевыми условиями $u(a)=A$, $u(b)=B$; здесь $p(x)$ – коэффициент теплоотдачи, $f(x)$ – плотность источника тепла, A и B – температура концов стержня.

Пусть N – целое положительное число. Обозначим $h=\dfrac{b-a}{N}$, $x_i=ih$, $y_i=u(x_i)$, $p_i=p(x_i)$, $f_i=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,N$. Значения y_i можно приблизительно найти, если решить систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$y_0=A,$$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-p_iy_i=f_i,\ \ i=1,\dots,N-1,$$

$$y_N=B.$$

Если, например, $h = \frac{1}{10}$, $p(x) = 1$, то i-е уравнение системы примет вид

$$100y_{i-1} - 201y_i + 100y_{i+1} = f_i.$$

Именно в связи с использованием в приложениях элементы правой части и матрицы системы часто обозначают и нумеруют по-другому, чем в системе (0). Будем неизвестные обозначать через y_0, y_1, … , y_N, число уравнений и неизвестных примем равным $N+1$:

$$\begin{array}{lr} c_0y_0 - b_0y_1 = f_0, & \\ -a_1y_0 + c_1y_1 - b_1y_2 = f_1, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ -a_iy_{i-1} + c_iy_i - b_iy_{i+1} = f_i, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -a_Ny_{N-1} + c_Ny_N = f_N. & \end{array}$$

или, если записывать отдельно по уравнениям,

$$\begin{array}{lr} c_0y_0 - b_0y_1 = f_0, & \\ -a_iy_{i-1} + c_iy_i - b_iy_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, & (1') \\ -a_Ny_{N-1} + c_Ny_N = f_N. & \end{array}$$

Для решения системы уравнений (1) воспользуемся методом исключения Гаусса.

Рассмотрим один из вариантов прямого хода метода Гаусса и приведем систему уравнений (1) к верхней двухдиагональной системе уравнений вида

$$\begin{array}{lr} y_0 - \alpha_1 y_1 = \beta_1, & \\ y_1 - \alpha_2 y_2 = \beta_2, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ y_i - \alpha_{i+1}y_{i+1} = \beta_{i+1}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_N = \beta_{N+1}. & \end{array}$$

Обозначим

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

и перепишем систему (1) отдельно по уравнениям в виде (преобразовалось только первое уравнение, и оно приняло требуемый системой (2) вид)

$$\begin{array}{lr} y_0 - \alpha_1 y_1 = \beta_1, & \\ -a_iy_{i-1} + c_iy_i - b_iy_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, & (3) \\ -a_Ny_{N-1} + c_Ny_N = f_N. & \end{array}$$

Для исключения ниже главной диагонали y_0 возьмем в получившейся системе (3) два первых уравнения (другие уравнения не содержат y_0):

$$y_0 - \alpha_1 y_1 = \beta_1,$$
$$-a_1y_0 + c_1y_1 - b_1y_2 = f_1.$$

Прибавим ко второму уравнению первое уравнение, умноженное на a_1:

$$y_0 - \alpha_1 y_1 = \beta_1,$$
$$(c_1 - a_1\alpha_1)y_1 - b_1 y_2 = f_1 + a_1\beta_1.$$

Обозначим

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1}$$

и перепишем систему (3) в виде (преобразовалось только второе уравнение, и оно приняло требуемый системой (2) вид)

$$\begin{aligned} y_0 - \alpha_1 y_1 &= \beta_1, \\ y_1 - \alpha_2 y_2 &= \beta_2, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} &= f_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N. \end{aligned} \tag{4}$$

Для исключения ниже главной диагонали y_1 возьмем в получившейся системе (4) второе и третье уравнения (другие уравнения не содержат y_1 ниже главной диагонали):

$$y_1 - \alpha_2 y_2 = \beta_2,$$
$$-a_2 y_1 + c_2 y_2 - b_2 y_3 = f_2.$$

Прибавим ко второму из этих двух уравнений первое, умноженное на a_2:

$$y_1 - \alpha_2 y_2 = \beta_2,$$
$$(c_2 - a_2\alpha_2)y_2 - b_2 y_3 = f_2 + a_2\beta_2.$$

Тогда и третье уравнение исходной системы (и систем (3), (4)) можно записать в требуемом системой (2) виде

$$y_2 - \alpha_3 y_3 = \beta_3,$$

где

$$\alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2\alpha_2}, \quad \beta_3 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{c_2 - a_2\alpha_2}.$$

Можно заметить: после последовательного исключения ниже главной диагонали y_{i-1}, $i = 1, 2, \dots, N-1$, получим преобразованную систему, в которой N уравнений (кроме последнего, $(N+1)$-го) имеют требуемый системой (2) вид:

$$y_i - \alpha_{i+1} y_{i+1} = \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$
$$-a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N.$$

Рассмотрим последние два уравнения преобразованной системы (последнее уравнение еще не преобразовано):

$$y_{N-1} - \alpha_N y_N = \beta_N,$$
$$-a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N.$$

Исключением y_{N-1} из последнего уравнения получим

$$y_{N-1} - \alpha_N y_N = \beta_N,$$
$$(c_N - a_N\alpha_N)y_N = f_N + a_N\beta_N.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$y_N = \beta_{N+1},$$

где

$$\beta_{N+1} = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}.$$

Трехдиагональная система уравнений (1) приведена к верхней двухдиагональной системе уравнений вида (2). Обратный ход метода исключений – решение этой системы:

$$y_N=\beta_{N+1},\ y_{N-1}=\beta_N+\alpha_N y_N,\ y_{N-2}=\beta_{N-1}+\alpha_{N-1}y_{N-1},\ \ldots,\ y_0=\beta_1+\alpha_1 y_1.$$

Таким образом, алгоритм метода прогонки для решения системы (1) имеет следующий вид:

• прямая прогонка – вычисление прогоночных коэффициентов по формулам

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0},$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i},\ \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{5}$$

$$\beta_{N+1} = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N};$$

• обратная прогонка – вычисление решения по формулам

$$y_N=\beta_{N+1},\ \ y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\ i= N-1, \ldots, 1, 0. \tag{6}$$

Формулы прямой прогонки (5) и обратной прогонки (6) называют формулами правой прогонки. Такое название объясняется тем, что компоненты y_i вектора решений находятся «справа налево», т.е. последовательно от $(i+1)$-го к i-му.

Подсчет количества арифметических операций в (5), (6) показывает, что для реализации метода прогонки (если $c_i-\alpha_i a_i$ вычислять один раз, а не два раза) требуется примерно $2N$ делений, примерно $3N$ умножений, примерно $3N$ сложений и вычитаний. Таким образом, при классификации по вычислительной сложности, прогонка относится к алгоритмам с линейной сложностью.

В формулах прямого хода присутствуют пары делений на одно и то же выражение. Их можно заменить вычислением обратных чисел и последующим умножением на эти числа.

Замечание 1. В случае, когда требуется решение нескольких СЛАУ с одной и той же матрицей, прогоночные коэффициенты α_i можно вычислить один раз и многократно использовать при вычислении β_i и y_i.

Левая прогонка. Встречная прогонка

Аналогично формулам правой прогонки (5), (6) можно получить формулы левой прогонки. Прямой ход осуществляется «снизу вверх», система уравнений (1) приводится к нижней двухдиагональной системе уравнений вида

$$\begin{aligned}
&y_0 &&= \eta_0,\\
&-\xi_1 y_0 + y_1 &&= \eta_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad -\xi_{i+1} y_i + y_{i+1} &&= \eta_{i+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\qquad\qquad -\xi_N y_{N-1} + y_N &&= \eta_N.
\end{aligned}$$

Из этой системы значения y_i находятся последовательно от i-го к $(i+1)$-му.

Алгоритм метода левой прогонки для решения системы (1) имеет следующий вид:

• прямая прогонка – вычисление прогоночных коэффициентов по формулам

$$\xi_N = \frac{a_N}{c_N},\ \ \eta_N = \frac{f_N}{c_N},$$

$$\xi_i = \frac{a_i}{c_i - b_i\xi_{i+1}},\ \ \eta_i = \frac{f_i + b_i\eta_{i+1}}{c_i - b_i\xi_{i+1}},\ \ i = N-1, N-2, \dots, 1, \tag{7}$$

$$\eta_0 = \frac{f_0 + b_0\eta_1}{c_0 - b_0\xi_1};$$

• обратная прогонка – вычисление решения по формулам

$$y_0 = \eta_0,\ \ y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1},\ \ i = 0, 1, \dots, N-1. \tag{8}$$

Получим теперь формулы так называемого метода встречных прогонок. Для этого рассмотрим следующее комбинированное выполнение правой и левой прогонок.

Зафиксируем некоторое m, $1 \le m \le N-1$. Пусть по формулам (5) найдены $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, а по формулам (7) найдены $\xi_N, \dots, \xi_m$, $\eta_N, \dots, \eta_m$. Тогда

$$y_{m-1} = \alpha_m y_m + \beta_m,$$
$$y_m = \xi_m y_{m-1} + \eta_m,$$

откуда

$$y_m = \frac{\eta_m + \xi_m\beta_m}{1 - \xi_m\alpha_m}.$$

Используя найденное y_m можно по формулам (6) для $i = m-1, \dots, 0$ последовательно найти $y_{m-1}, \dots, y_0$, а по формулам (8) для $i = m, \dots, N-1$ вычислить оставшиеся $y_{m+1}, \dots, y_N$.

Таким образом, алгоритм метода встречных прогонок для решения системы (1) имеет следующий вид:

• зафиксировать m, $1 \le m \le N-1$;

• вычислить прогоночные коэффициенты по формулам

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0},$$

$\alpha_{i+1}=\dfrac{b_i}{c_i-a_i\alpha_i}$, $\beta_{i+1}=\dfrac{f_i+a_i\beta_i}{c_i-a_i\alpha_i}$, $i=1, 2, \ldots, m-1$,

$\xi_N=\dfrac{a_N}{c_N}$, $\eta_N=\dfrac{f_N}{c_N}$,

$\xi_i=\dfrac{a_i}{c_i-b_i\xi_{i+1}}$, $\eta_i=\dfrac{f_i+b_i\eta_{i+1}}{c_i-b_i\xi_{i+1}}$, $i=N-1, N-2, \ldots, m$;

• вычислить решения по формулам

$y_m=\dfrac{\eta_m+\xi_m\beta_m}{1-\xi_m\alpha_m}$,

$y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1}$, $i=m-1, \ldots, 0$,

$y_{i+1}=\xi_{i+1}y_i+\eta_{i+1}$, $i=m, \ldots, N-1$.

Этот метод целесообразно применять, если надо найти только одно неизвестное.

Замечание 2. В алгоритмах правой прогонки и левой прогонки неизвестные y_i находятся последовательно при движении в сторону уменьшения или увеличения индекса i. При этом y_i выражается только через соседнее неизвестное. Такая структура алгоритма дает основание называть правую и левую прогонки монотонными прогонками.

Замечание 3. Помимо рассмотренных выше разновидностей прогонки существуют и другие ее варианты. Так, метод немонотонной прогонки базируется на использовании схемы Гаусса с выбором главного элемента по строке. Еще одна модификация алгоритма – метод циклической прогонки. Он применяется, если коэффициенты и правая часть системы уравнений периодично повторяются. Метод прогонки применяется также для решения систем уравнений с пятидиагональной матрицей.

Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки

Исследуем, каким требованиям должны удовлетворять коэффициенты системы (1), чтобы метод правой прогонки мог быть применен и позволил получить решение задачи с достаточной точностью.

Во-первых, расчетные формулы (5) прямого хода прогонки содержат операции деления, поэтому нужно гарантировать, чтобы знаменатели $c_i-\alpha_i a_i$ не обращались в нуль.

Будем говорить, что алгоритм метода прогонки корректен, если выполнено условие $c_i-a_i\alpha_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots,N$.

Во-вторых, решение находится по рекуррентной формуле (6)

$$y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\ i=N-1, \ldots, 1, 0.$$

Эта формула может порождать накопление ошибок округления результатов арифметических операций. Действительно, пусть прогоночные коэффициенты найдены точно, а при вычислении y_N приближенное значение

y_N^* найдено с погрешность ε_N, т.е. $y_N = y_N^* + \varepsilon_N$. Так как приближенные значения y_i^* находятся по формулам (6)

$$y_i^* = \alpha_{i+1} y_{i+1}^* + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \ldots, 1, 0,$$

то погрешности $\varepsilon_i = y_i - y_i^*$ удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_i = \alpha_{i+1}\varepsilon_{i+1}, \quad i = N-1, \ldots, 1, 0,$$

с заданным ε_N. Отсюда следует, что если все α_i по модулю больше единицы, то может произойти сильное увеличение погрешности ε_0 и, если значение N достаточно велико, полученное реальное решение y_i^* будет значительно отличаться от искомого решения y_i. Поэтому будем требовать, чтобы прогоночные коэффициенты α_i не превосходили по модулю единицы. Это достаточное условие гарантирует невозрастание погрешности ε_i.

Будем говорить, что алгоритм метода прогонки устойчив, если выполнено условие $|\alpha_i| \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям*

$$|c_0| > 0, \quad |c_N| > 0,$$
$$|b_0| > 0, \quad |a_N| > 0,$$
$$|a_i| > 0, \quad |b_i| > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$|c_i| \ge |a_i| + |b_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{9}$$
$$|c_0| \ge |b_0|, \quad |c_N| \ge |a_N|, \tag{10}$$

причем хотя бы в одном из условий (9), (10) выполняется строгое неравенство.

Тогда для алгоритма (5), (6) метода правой прогонки имеют место неравенства

$$c_i - a_i\alpha_i \ne 0, \quad |\alpha_i| \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

гарантирующие корректность и устойчивость метода.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Так как из условий теоремы $|c_0| > 0$, $|c_0| \ge |b_0|$, то

$$|\alpha_1| = \left|\frac{b_0}{c_0}\right| \le 1.$$

Пусть $1 \le i \le N-1$. Покажем, что из условий теоремы

$$|c_i| \ge |a_i| + |b_i|, \quad |a_i| > 0, \quad |b_i| > 0$$

и неравенства

$$|\alpha_i| \le 1$$

следуют неравенства

$$c_i - a_i\alpha_i \ne 0, \quad |\alpha_{i+1}| \le 1.$$

Имеем:

$$|c_i - a_i\alpha_i| \ge |c_i| - |a_i||\alpha_i| \ge |a_i| + |b_i| - |a_i||\alpha_i| = |b_i| + |a_i|(1 - |\alpha_i|) \ge |b_i| > 0. \tag{11}$$

Следовательно,

$$c_i - a_i\alpha_i \neq 0,\ \ |c_i - a_i\alpha_i| \geq |b_i|,$$

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|b_i|}{|c_i - a_i\alpha_i|} \leq \frac{|b_i|}{|b_i|} = 1. \tag{12}$$

Пусть $i=N$. Осталось показать, что $c_N - \alpha_N a_N \neq 0$ (использовать (11) для случая $i=N$ нельзя, так как b_N не имеет смысла). Для этого воспользуемся предположением о наличии строгого неравенства хотя бы в одном из условий (9), (10) и рассмотрим возможные случаи.

1. Если $|c_N| > |a_N|$, то, принимая во внимание уже доказанное $|\alpha_N| \leq 1$, получим

$$|c_N - a_N\alpha_N| \geq |c_N| - |a_N||\alpha_N| > |a_N| - |a_N||\alpha_N| = |a_N|(1 - |\alpha_N|) \geq 0.$$

Отсюда следует $c_N - a_N\alpha_N \neq 0$.

2. Если строгое неравенство достигается в (9) для некоторого i_0, то при получении оценки (11) для $i=i_0$ имеем

$$|c_i - a_i\alpha_i| \geq |c_i| - |a_i||\alpha_i| > |a_i| + |b_i| - |a_i||\alpha_i| = |b_i| + |a_i|(1 - |\alpha_i|) \geq |b_i| > 0.$$

Поэтому для всех i таких, что $i_0 \leq i \leq N-1$, получим

$$|c_i - a_i\alpha_i| > |b_i|,\ |\alpha_{i+1}| < 1.$$

В частности, $|\alpha_N| < 1$. Тогда, принимая во внимание условия теоремы $|c_N| \geq |a_N|$, $|a_N| > 0$, получим

$$|c_N - a_N\alpha_N| \geq |c_N| - |a_N||\alpha_N| \geq |a_N| - |a_N||\alpha_N| = |a_N|(1 - |\alpha_N|) > 0. \tag{13}$$

3. Если $|c_0| > |b_0|$, то $|\alpha_1| = \left|\dfrac{b_0}{c_0}\right| < 1$. Строгие неравенства

$$|c_i - a_i\alpha_i| > |b_i|,\ |\alpha_{i+1}| < 1$$

достигаются начиная с $i=1$, т.е. для всех i таких, что $1 \leq i \leq N-1$. В частности, $|\alpha_N| < 1$, можно повторить оценки (13).

Замечание 4. Если элементы a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, некоторой матрицы A удовлетворяют условиям

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ \ 1 \leq i \leq n, \tag{14}$$

то говорят, что матрица A обладает свойством диагонального преобладания по строкам. Если какое-либо из неравенств (14) строгое, то говорят о строгом диагональном преобладании. Таким образом, в условиях теоремы 1 требуется, чтобы матрица системы уравнений имела диагональное преобладание по строкам, причем хотя бы в одном случае преобладание являлось строгим.

Замечание 5. Условия теоремы 1 являются достаточными. Их можно ослабить, разрешив некоторым из коэффициентов a_i или b_i обращаться в нуль. Пусть, например, $a_m=0$ при некотором m, $1 \leq m \leq N-1$. Тогда система (1) распадется на две системы:

$$
\begin{aligned}
c_m y_m - b_m y_{m+1} &= f_m,\\
-a_{m+1} y_m + c_{m+1} y_{m+1} - b_{m+1} y_m &= f_{m+1},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
-a_N y_{N-1} + c_N y_N &= f_N.
\end{aligned}
$$

для определения неизвестных $y_m ,..., y_N$ и

$$
\begin{aligned}
c_0 y_0 - b_0 y_1 &= f_0,\\
-a_1 y_0 + c_1 y_1 - b_1 y_2 &= f_1,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
-a_{m-1} y_{m-2} + c_{m-1} y_{m-1} &= f_{m-1} + b_{m-1} y_m.
\end{aligned}
$$

для определения неизвестных y_0, ..., y_{m-1}. К каждой из этих систем по отдельности можно применять (при выполнении условий теоремы 1) алгоритм прогонки. Известно, что и для всей системы (1) в рассматриваемом случае алгоритм также применим.

Замечание 6. Условия теоремы 1 обеспечивают корректность и устойчивость не только метода правой прогонки, но и методов левой и встречных прогонок. Заметим, что при доказательстве теоремы 1, т.е. при обосновании правой прогонки, мы не использовали одно из условий, $|b_0|>0$. Это условие требуется для обоснования левой прогонки (для этого случая избыточным является условие $|a_N|>0$).

LU-разложение трехдиагональной матрицы

Ранее мы исследовали вариант LU-разложения, в котором L – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, U – верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами. Здесь мы рассмотрим другой вариант: L – нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, U – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Такой вариант LU-разложения, как скоро увидим, тесно связан с матрицей системы (2) и прямым ходом правой прогонки.

Рассмотрим матрицу системы (1):

$$
A=\begin{bmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & c_1 & -b_1 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & c_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{bmatrix}.
$$

Будем искать треугольные матрицы представления $A=LU$ в следующем виде:

$$L=\begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_N \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 1 & \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \omega_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем:

$$LU=\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_0\omega_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & \delta_1\omega_0+\gamma_1 & \gamma_1\omega_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & \delta_2\omega_1+\gamma_2 & \gamma_2\omega_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \delta_3 & \delta_3\omega_2+\gamma_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Сравнивая эту матрицу с матрицей A, получим элементы матриц L и U:

$\delta_i = -a_i,\ i= 1, 2, \ldots , N,$

$\gamma_0=c_0,\ \omega_0= -\dfrac{b_0}{c_0},\ \ \gamma_i=c_i-\delta_i\omega_{i-1},\ \omega_i= -\dfrac{b_i}{\gamma_i},\ i= 1, 2, \ldots , N-1,\ \gamma_N=c_N-\delta_N\omega_{N-1}.$

Получили $\delta_i= -a_i$, $\omega_i= -\alpha_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,N$, где α_{i+1} – прогоночные коэффициенты из формул (5) правой прогонки.

Таким образом, треугольное разложение $A=LU$ матрицы системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma_0=c_0,\ \alpha_1=\frac{b_0}{c_0},$$

$$\gamma_i=c_i-a_i\alpha_i,\ \alpha_{i+1}=\frac{b_i}{\gamma_i},\quad i= 1, 2, \ldots , N-1, \tag{15}$$

$$\gamma_N=c_N-\alpha_N a_N.$$

Замечание 7. При выполнении условий теоремы 1 система (1) имеет единственное решение при любой правой части. Действительно, в этом случае для всех γ_i справедливо $\gamma_i\neq0$, поэтому

$$\det A=\det L\ \det U= \gamma_0 \ldots \gamma_N\neq0.$$

Рассмотрим применение полученного LU-разложения для решения системы (1).

После факторизации $A=LU$ трехдиагональной матрицы система (1) примет вид $LUy=f$. Процесс решения этой системы распадается на решение двух систем с двухдиагональными матрицами:

- решение системы $Lz=f$ с нижней двухдиагональной матрицей L;
- решение системы $Uy=z$ с верхней двухдиагональной матрицей U.

Запишем систему $Lz= f$ в развернутом виде:

$$\begin{array}{llr}
\gamma_0 z_0 & & = f_0, \\
-a_1 z_0 + \gamma_1 z_1 & & = f_1, \\
\dots\dots\dots\dots & & \\
& -a_i z_{i-1} + \gamma_i z_i & = f_i, \\
\dots\dots\dots\dots & & \\
& & -a_N z_{N-1} + \gamma_N z_N = f_N.
\end{array}$$

Отсюда

$$z_0 = \frac{f_0}{\gamma_0}, \quad z_i = \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{\gamma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad z_N = \frac{f_N + a_N z_{N-1}}{\gamma_N}.$$

Сравнение этих соотношений с формулами (5) правой прогонки показывает (с учетом вида γ_i в (15)), что $z_i=\beta_{i+1}$.

Таким образом, применение метода правой прогонки к системе (1) $Ay=f$ допускает следующую реализацию:

- получение LU-разложения $A=LU$ трехдиагональной матрицы по формулам (15) (заменяет вычисление прогоночных коэффициентов α_i);
- решение системы $L\beta=f$ с нижней двухдиагональной матрицей L (заменяет вычисление прогоночных коэффициентов β_i);
- решение системы (2) $Uy=\beta$ с верхней двухдиагональной матрицей U по формулам обратной прогонки (6).

Если требуется решить нескольких СЛАУ с одной и той же матрицей, то (как и в случае систем с плотными матрицами) при любом числе правых частей LU-разложение матрицы системы можно осуществить только один раз (см. замечание 1).

Матричная прогонка

Кратко рассмотрим еще один широко используемый на практике метод решения СЛАУ – метод матричной прогонки. Метод матричной прогонки аналогичен обычному методу прогонки, но оперирует не со скалярными величинами, а с матрицами и векторами.

Пусть $A_1,\dots,A_N$, $B_0,B_1,\dots,B_{N-1}$, $C_0,C_1,\dots,C_N$ – $M\times M$ матрицы, $Y_0,Y_1,\dots,Y_N$, $F_0,F_1,\dots,F_N$ – M-мерные векторы. Рассмотрим блочно-трёхдиагональную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&C_0Y_0 - B_0Y_1 && = F_0,\\
-&A_1Y_0 + C_1Y_1 - B_1Y_2 && = F_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad -A_iY_{i-1} + C_iY_i - B_iY_{i+1} && = F_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad -A_NY_{N-1} + C_NY_N = F_N.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

или, если записывать отдельно по уравнениям,

$$
\begin{aligned}
&C_0Y_0 - B_0Y_1 = F_0,\\
&-A_iY_{i-1} + C_i\,Y_i - B_iY_{i+1} = F_i,\ \ i = 1, \ldots, N{-}1,\\
&-A_NY_{N-1} + C_NY_N = F_N.
\end{aligned}
\qquad (16')
$$

Эта система родственна системе скалярных уравнений (1) и все выкладки для получения формул матричной прогонки выполняются по аналогии со скалярным случаем, но используется блочный вариант метода Гаусса.

Для иллюстрации блочных преобразований рассмотрим приведение первых двух уравнений

$$
\begin{aligned}
&C_0Y_0 - B_0Y_1 = F_0,\\
&-A_1Y_0 + C_1Y_1 - B_1Y_2 = F_1
\end{aligned}
$$

системы (16) к виду, возникающему после прямой прогонки (т.е. к виду первых двух уравнений блочного аналога системы (2)).

Умножим слева каждую часть первого уравнения на матрицу C_0^{-1}. Обозначив $\alpha_1 = C_0^{-1}B_0$, $\beta_1 = C_0^{-1}f_0$ (α_1 – матрица, β_1 – вектор), получим

$$
\begin{aligned}
&Y_0 - \alpha_1Y_1 = \beta_1,\\
&-A_1Y_0 + C_1Y_1 - B_1Y_2 = F_1.
\end{aligned}
$$

Первое уравнение имеет требуемый вид. Теперь надо исключить из второго уравнения вектор Y_0 и получить на месте матрицы C_1 единичную матрицу. Прибавим ко второму уравнению первое уравнение, умноженное слева на матрицу A_1:

$$
\begin{aligned}
&Y_0 - \alpha_1Y_1 = \beta_1,\\
&(C_1 - A_1\alpha_1)Y_1 - B_1Y_2 = F_1 + A_1\beta_1.
\end{aligned}
$$

Умножим слева каждую часть второго уравнения на матрицу $(C_1-A_1\alpha_1)^{-1}$. Обозначим $\alpha_2=(C_1-A_1\alpha_1)^{-1}B_1$, $\beta_2=(C_1-A_1\alpha_1)^{-1}(F_1+A_1\beta_1)$ и запишем в требуемом виде оба уравнения:

$$
\begin{aligned}
&Y_0 - \alpha_1Y_1 = \beta_1,\\
&\qquad Y_1 - \alpha_2Y_2 = \beta_2.
\end{aligned}
$$

Выпишем окончательные формулы алгоритма метода матричной прогонки для решения системы вида (16):

• прямая прогонка – вычисление матриц α_i и векторов β_i по формулам

$\alpha_1 = C_0^{-1}B_0$, $\beta_1 = C_0^{-1}f_0$,

$$\alpha_{i+1}=(C_i-A_i\alpha_i)^{-1}B_i,\ \ \beta_{i+1}=(C_i-A_i\alpha_i)^{-1}(F_i+A_i\beta_i),\ \ i=1,2,\ldots,N-1, \tag{17}$$
$$\beta_{N+1}=(C_N-A_N\alpha_N)^{-1}(F_N+A_N\beta_N);$$

• обратная прогонка – вычисление решения (вычисление векторов Y_i) по формулам

$$Y_N=\beta_{N+1},\quad Y_i=\alpha_{i+1}Y_{i+1}+\beta_{i+1},\ \ i=N-1,\ldots,1,0. \tag{18}$$

Замечание 8. При организации вычислений по формулам (17) не следует производить обращение и перемножение матриц. Следует вместо этого решать СЛАУ (например, $(C_i-A_i\alpha_i)\alpha_{i+1}=B_i$).

Будем говорить, что алгоритм метода матричной прогонки корректен, если матрицы C_0 и $C_i-A_i\alpha_i$, $i=1,2,\ldots,N$, не вырождены.

Будем говорить, что алгоритм метода матричной прогонки устойчив, если выполнено условие $\|\alpha_i\|\le 1$ для $i=1,2,\ldots,N$ (предполагается, что в M-мерном пространстве введена какая-либо норма).

Теорема 2. *Если C_i, $i=0,1,\ldots,N$, – невырожденные матрицы, а $A_1,\ldots,A_N$, $B_0,B_1,\ldots,B_{N-1}$ – ненулевые матрицы и выполнены условия*

$$\left\|C_i^{-1}A_i\right\|+\left\|C_i^{-1}B_i\right\|\le 1,\ \ i=1,2,\ldots,N-1, \tag{19}$$

$$\left\|C_0^{-1}B_0\right\|\le 1,\ \ \left\|C_N^{-1}A_N\right\|\le 1, \tag{20}$$

причем хотя бы в одном из условий (19), (20) выполняется строгое неравенство, то алгоритм (17), (18) метода матричной прогонки корректен и устойчив.

Доказательство проводится по индукции. Приведем только основной этап: покажем, что из условий теоремы и неравенства

$$\|\alpha_i\|\le 1$$

следуют невырожденность матрицы $C_i-A_i\alpha_i$ и справедливость неравенства

$$\|\alpha_{i+1}\|\le 1.$$

Имеем с учетом неравенств (19) и неравенства нулю матриц $C_i^{-1}B_i$:

$$\left\|C_i^{-1}A_i\alpha_i\right\|\le\left\|C_i^{-1}A_i\right\|\,\left\|\alpha_i\right\|\le\left\|C_i^{-1}A_i\right\|\le 1-\left\|C_i^{-1}B_i\right\|<1.$$

Воспользуемся известным утверждением (лемма 5 файла «Нормы_ Обусловленность»): если для квадратной матрицы S имеет место оценка $\|S\|<1$, то существует обратная к $E-S$ матрица, причем $\|(E-S)^{-1}\|\le 1/(1-\|S\|)$. Положим $S=C_i^{-1}A_i\alpha_i$. Тогда существуют обратные к $E-C_i^{-1}A_i\alpha_i$ и $C_i-A_i\alpha_i$, причем

$$\left\|\left(E-C_i^{-1}A_i\alpha_i\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\left\|C_i^{-1}A_i\alpha_i\right\|}\le\frac{1}{1-\left(1-\left\|C_i^{-1}B_i\right\|\right)}=\frac{1}{\left\|C_i^{-1}B_i\right\|}.$$

Отсюда и из соотношений (17) $\alpha_{i+1}=(C_i-A_i\alpha_i)^{-1}B_i$ получим

$$\left\|\alpha_{i+1}\right\|=\left\|\left(C_i\left(E-C_i^{-1}A_i\alpha_i\right)\right)^{-1}B_i\right\|=\left\|\left(E-C_i^{-1}A_i\alpha_i\right)^{-1}C_i^{-1}B_i\right\|\le\left\|\left(E-C_i^{-1}A_i\alpha_i\right)^{-1}\right\|\left\|C_i^{-1}B_i\right\|\le 1.$$

Замечание 9. Если для исходной блочно-трехдиагональной системы выполнены условия (19), то имеет место матричный аналог диагонального преобладания по строкам:

$$\|C_i\| \geq \|A_i\| + \|B_i\|,\ i=1,2,...,N-1.$$

Действительно, так как $\|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i^{-1}B_i\| \leq 1$, то после умножения левой и правой частей этого неравенства на $\|C_i\|$ и использования свойства мультипликативности матричной нормы ($\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$) получим

$$\|C_i\|\,\|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i\|\,\|C_i^{-1}B_i\| \leq \|C_i\|,\quad \|C_iC_i^{-1}A_i\| + \|C_iC_i^{-1}B_i\| \leq \|C_i\|,\quad \|A_i\| + \|B_i\| \leq \|C_i\|.$$

Список использованных источников

1. Самарский А.А. Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М: Наука. 1978. 592 с.

2. Репников В.И. Вычислительные методы алгебры. Курс лекций. Минск. Белгосуниверситет. Кафедра вычислительной математики. 2011.

3. Андреев В.Б. Численные методы. Часть I.

4. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Прогонка, точечный вариант» URL: http://algowiki-project.org