2024年　東大文系数学

第　1　問

座標平面上で, 放物線 $C : y = ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}\,(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}\,(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線を持っている。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

⑴　$a,\ b,\ c$ を $s=\sin\theta$ を用いて表せ。

⑵　放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

⑶　$A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

第　2　問

以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

⑴　$5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

⑵　$5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

第　3　問

座標平面上に 2 点 O $(0,\ 0)$, A $(0,\ 1)$ をとる。x 軸上の 2 点 P $(p,\ 0)$, Q $(q,\ 0)$ が，次の条件(i)，(ii)をともに満たすとする。

(i)　$0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii)　線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP} = \angle\mathrm{PMQ}$

(1)　q を p を用いて表せ。

(2)　$q = \dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAP}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{PMQ}$ の面積を T とする。$S > T$ となる p の範囲を求めよ。

第　4　問

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

2023年　東大文系数学

第　1　問

k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とする。k が $k>2$ の範囲を動くとき，

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

の最小値を求めよ。

第　2　問

座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を ℓ とおく。実数 t に対し，C 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ 3t^2-4t)$ と ℓ の距離を $f(t)$ とする。

⑴　$-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分

$$g(a)=\int_{-1}^{a} f(t)\,dt$$

を求めよ。

⑵　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

第　3　問

黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1)　どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2)　どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

第　4　問

半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\quad \mathrm{AC}=\mathrm{BC},\quad \mathrm{AD}=\mathrm{BD},\quad \cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\frac{4}{5}$$

を満たしているとする。

(1)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の体積を求めよ。

2022年　東大文系数学

第　1　問

a，b を実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2 + ax + b$ を C とおく。C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 を持つとする。ただし，C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

⑴　b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

⑵　$i = 1,\ 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で ℓ_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ。

第　2　問

$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\,(\alpha,\ \alpha^3 - \alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする。C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする。

⑴　α のとりうる値の範囲を求めよ。

⑵　C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β，γ とする。ただし $\beta < \gamma$ とする。$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ。

⑶　⑵の β，γ を用いて，

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。

第　3　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。

(2) a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ。

第　4　問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，$\cdots\cdots$，X_N を以下の規則(i), (ii)に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N = 5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2) $N = 98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

2021年　東大文系数学

第　1　問

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

第　2　問

N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1,\ \cdots\cdots,\ l+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{7,\ 8,\ 9\}$, $\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む。

⑴　条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

⑵　条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

第　3　問

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線

$$C:\quad y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

⑴　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

⑵　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

第　4　問

以下の問いに答えよ。

⑴　正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA = LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

⑵　正の整数 $a,\ b$ が $a > b$ を満たしているとする。このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ。

⑶　$a,\ b$ は⑵の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

⑷　${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

2020年　東大文系数学

第　1　問

$a > 0,\ b > 0$ とする。座標平面上の曲線

$$C:\quad y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a\quad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4),\qquad y = b\quad (b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

がある。以下，16 個の点

$$(a,\ b)\quad (a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad b = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

第　３　問

O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$l: \quad y = ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と直線 l 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。

第　４　問

$n,\ k$ を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,\,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots\cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を $n,\ k$ で表せ。

2019年　東大文系数学

第　1　問

座標平面の原点を O とし，O, A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点 P(p, 0), Q(0, q), R(r, 1) はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり，3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

(1)　q と r を p で表し，p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

第　2　問

O を原点とする座標平面において，点 A(2, 2) を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P(p, q) が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

条件 1：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2：点 O と直線 l の距離を c とし，点 P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1)　D を図示し，その面積を求めよ。

(2)　$\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

第　3　問

正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する。

⑴　事象 S が起こる確率を求めよ。

⑵　事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

第　4　問

O を原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x| + |y| \leqq 1$$

が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする。

⑴　D，E をそれぞれ図示せよ。

⑵　a，b を実数とし，不等式

$$|x - a| + |y - b| \leqq 1$$

が表す領域を F とする。また，点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ をみたす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

2018年　東大文系数学

第　1　問

座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める。原点をとおる 2 直線 l, m は C に接するものとする。

⑴　放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

⑵　次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し，不等式 $px + qy \leqq 0$ がなりたつ。

第　2　問

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める。

⑴　a_7 と 1 の大小を調べよ。

⑵　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ。

⑶　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

第　3　問

$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2 x$$

とおく。

(1)　$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると，
$\beta > 1$ である。

第　4　問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。

(1)　点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

2017年　東大文系数学

第　1　問

座標平面において 2 つの放物線 $A:\ y = s(x-1)^2$ と $B:\ y = -x^2 + t^2$ を考える。ただし $s,\ t$ は実数で，$0 < s,\ 0 < t < 1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

第　2　問

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

第　3　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

第　4　問

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　$a_1,\ a_2$ の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

2016年　東大文系数学

第　1　問

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(-x,\ -y)$, $\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

第　2　問

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

第　3　問

座標平面上の 2 つの放物線

$$A:\ y = x^2$$
$$B:\ y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1)　p と q の値を求めよ。

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3)　$t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

第　4　問

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2)　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

2015年　東大文系数学

第　1　問

以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 $n,\ m,\ \ell$ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ。

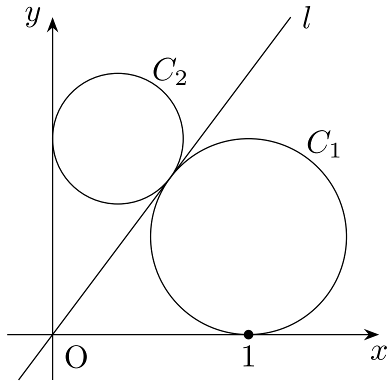
第　2　問

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。

第　3　問



l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

第　4　問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 A A を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，A A, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

A A B B A A B

となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

2014年　東大文系数学

第　1　問

以下の問いに答えよ。

⑴　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

⑵　⑴の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

第　2　問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作㈹を考える。

㈹　袋 U から球を 1 個取り出し，
　(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。
　(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作㈹を繰り返し行う。
たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。
n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

⑴　p_1，p_2 を求めよ。

⑵　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

第　3　問

座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

⑴　s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

⑵　D を図示せよ。

第　4　問

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r+1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

⑴　自然数 n に対し，b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

⑵　$r = 2,\ p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

⑶　ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

2013年　東大文系数学

第　1　問

関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O, P, Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

第　2　問

座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}\left(0,\ -\sqrt{2}\right),\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \sqrt{2}\right),\quad \mathrm{A}\left(a,\ \sqrt{a^2+1}\right)\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 PA − AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA} + \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

第　3　問

$a,\ b$ を実数の定数とする。実数 $x,\ y$ が

$$x^2+y^2 \leqq 25, \quad 2x+y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

第　4　問

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

2012年　東大文系数学

第　1　問

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

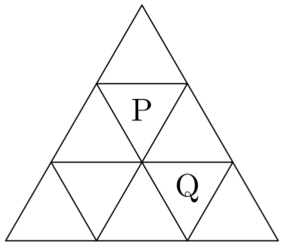
第　2　問

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0), A(0, 1), B(1, 0), C(t, 0) を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO} = \angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

第　3　問

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



第　4　問

座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める。$s,\ t$ は実数とし $t < 0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を $l_1,\ l_2$ とする。

(1)　$l_1,\ l_2$ の方程式を求めよ。

(2)　a を正の実数とする。放物線 C と直線 $l_1,\ l_2$ で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ。

2011年　東大文系数学

第　1　問

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\quad f(-1)=-1,\quad \int_{-1}^{1}\left(bx^2+cx+d\right)\,dx=1$$

を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

第　2　問

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x\rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1=\langle a\rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1}=\left\langle \dfrac{1}{a_n}\right\rangle \\ a_n=0 \text{ のとき，} a_{n+1}=0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

第　3　問

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。
また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b;\ c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

第　4　問

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \alpha^2\right)$, $\mathrm{R}\left(\beta,\ \beta^2\right)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

2010年　東大文系数学

第　1　問

O を原点とする座標平面上に点 A$(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i)，(ii)をみたす 2 点 B, C を考える。

(i)　B は $y > 0$ の部分にあり，$\mathrm{OB} = 2$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ - \theta$ である。

(ii)　C は $y < 0$ の部分にあり，$\mathrm{OC} = 1$ かつ $\angle\mathrm{BOC} = 120^\circ$ である。ただし $\triangle\mathrm{ABC}$ は O を含むものとする。

以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

第　2　問

2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c\int_0^1 \left(3x^2 + 4xt\right) f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。

第　3　問

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30 - x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z) = z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

第　4　問

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t = 0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t = 2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは，それぞれ m, 1, 2 であるとする。（したがって，Q はちょうど C を一周する。）ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ をみたす整数である。$\triangle$PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

2009年　東大文系数学

第　1　問

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし，b は正の実数とする。

(1)　$a,\ b$ を t を用いて表せ。また，t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，b の最大値を求めよ。

第　2　問

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$$ {}_m\mathrm{C}_1,\ {}_m\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

第　3　問

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない，さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}_1}$ を求めよ。

第　4　問

2 次以下の整式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対し

$$S = \int_0^2 |f'(x)|\,dx$$

を考える。

(1)　$f(0) = 0,\ f(2) = 2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0) = 0,\ f(2) = 2$ をみたしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

2008年　東大文系数学

第　1　問

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

第　2　問

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手持ちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第　3　問

座標平面上の 3 点 A(1, 0), B(-1, 0), C(0, -1) に対し，$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC}$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$, B, C とする。

第　4　問

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 & \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

2007年　東大文系数学

第　1　問

連立不等式

$$y\left(y-\left|x^2-5\right|+4\right) \leqq 0, \quad y+x^2-2x-3 \leqq 0$$

の表す領域を D とする。

⑴　D を図示せよ。

⑵　D の面積を求めよ。

第　2　問

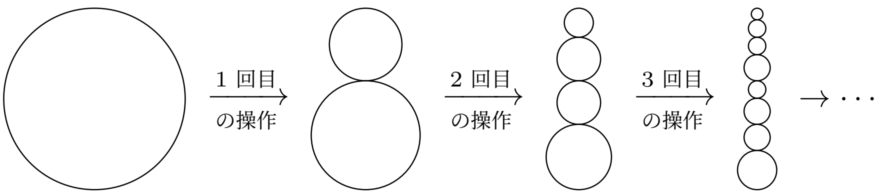
r は $0<r<1$ をみたす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②をみたす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

①　新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

②　新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に内接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

- 最初に，平面上に半径 1 の円を描く。
- 次に，この円に対して操作(P)を行い，2 つの円を得る（これを 1 回目の操作という）。
- k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作(P)を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$。



⑴　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

⑵　2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

⑶　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

第　3　問

正の整数の下 2桁(けた)とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば 2000, 12345 の下 2 桁はそれぞれ 0, 45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

第　4　問

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0 < p < 1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

2006年　東大文系数学

第　1　問

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

第　2　問

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　P_3 を p で表せ。

(3)　$n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。

第　3　問

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$n = 1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n = 3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

第　4　問

θ は，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数

$$f(x) = |x+1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x-1|^3$$

が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。

2005年　東大文系数学

第　1　問

$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。$a,\ b$ を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx$$

が最小になるようにする。このとき，

$$g(-1)=f(-1),\ g(1)=f(1)$$

であることを示せ。

第　2　問

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

第　3　問

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。

第　4　問

N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, $\cdots\cdots$, N が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は，$b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b \leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b \geqq c$ の場合は，乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。ひいたカードはもとに戻す。$a+b<c+d \leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

2004年　東大文系数学

第　1　問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

> △PQR は一辺の長さ a の正三角形であり，点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。

第　2　問

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2$$
$$y \leqq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値，最小値を求めよ。

第　3　問

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x)$$
$$h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

第　4　問

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し，3, 4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに，2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

2003年　東大文系数学

第　1　問

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。
2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A)，(B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1,\quad f(1) = 1,\quad f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{f'(x)\}^2\,dx$ のとりうる範囲を求めよ。

第　2　問

$a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

$$x + 3y \geqq a,\quad 3x + y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

第　3　問

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく。

(1) s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

第　4　問

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。

(1) $x_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

2002年　東大文系数学

第　1　問

2 つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}\,(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$$
$$y = -2\sqrt{3}\,(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるような θ の範囲を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

第　2　問

n は正の整数とする。x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく。

⑴　数列 $a_n,\ b_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

⑵　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n,\ b_n$ は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

第　3　問

2 つの関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$
$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$$

が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0) = g'(0), \quad f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 0, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = 0$$

ここで，$f(x)$, $g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分

$$\int_{-1}^{0} \{f''(x)\}^2\,dx + \int_{0}^{1} \{g''(x)\}^2\,dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

ただし，$f''(x)$, $g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ の導関数を表す。

第　4　問

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。

2001年　東大文系数学

第　1　問

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3}, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$$

を満たしている。このとき r の値を求めよ。

第　2　問

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $\left(t^2,\ 0\right)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C(0, 3) に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線場を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t > 0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

⑴　関数

$$S(t)\ (t > 0)$$

のグラフの概形を描け。

⑵　u を正の実数とするとき，$0 < t \leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数

$$M(u)\ (u > 0)$$

のグラフの概形を描け。

第　3　問

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

第　4　問

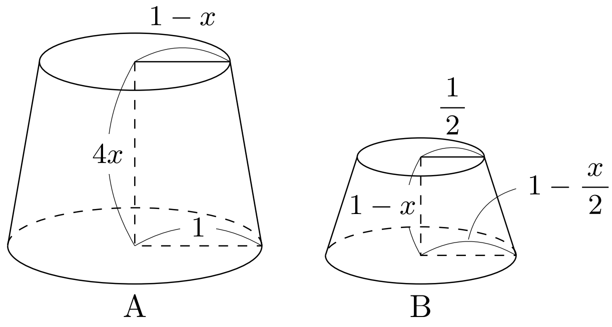
白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁（ご）石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

2000年　東大文系数学

第　1　問

図のように底面の半径 1，上面の半径 $1-x$，高さ $4x$ の直円すい台 A と，底面の半径 $1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径 $\dfrac{1}{2}$，高さ $1-x$ の直円すい台 B がある。ただし，$0 \leqq x \leqq 1$ である。A と B の体積の和を $V(x)$ とするとき，$V(x)$ の最大値を求めよ。



第　2　問

xy 平面上の領域

$$-1 \leqq x \leqq 1, \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

において

$$1-ax-by-axy$$

の最小値が正となるような定数 a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

第　3　問

正四面体の各頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$$P_1(0) = \frac{1}{4},\quad P_2(0) = \frac{1}{2},\quad P_3(0) = \frac{1}{8},\quad P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

第　4　問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $\mathrm{R}(\omega)$ とする。ただし，複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき，

「$\omega = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

1999年　東大文系数学

第　1　問

⑴　一般角 θ に対して，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

⑵　⑴で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

第　2　問

次の 2 つの条件⒜，⒝を同時に満たす複素数全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

⒜　$2z$，$\dfrac{2}{z}$ の実部はいずれも整数である。

⒝　$|z| \geqq 1$ である。

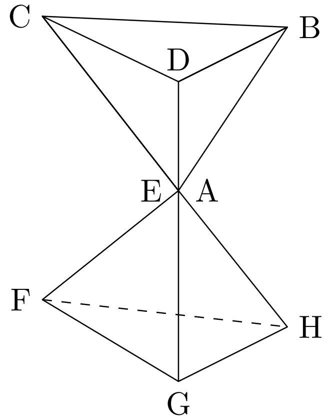
第　3　問

c を $c > \dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を A とし，直線 $y = x - c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。

第　4　問

(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



1998年　東大文系数学

第　1　問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = \left(3x^2 - 4\right)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

第　2　問

$a,\ b$ は実数で，$b \neq 0$ とする。xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる。

⑴　$\triangle\mathrm{OPQ}$ が鋭角三角形となるための $a,\ b$ の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

⑵　$m,\ n$ を整数とする。$a,\ b$ が⑴で求めた条件を満たすとき，不等式

$$(m + na)^2 - (m + na) + n^2b^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。

第　3　問

⑴　x は $0° \leqq x \leqq 90°$ を満たす角とする。

$$\begin{cases} \sin y = |\sin 4x| \\ \cos y = |\cos 4x| \\ 0° \leqq y \leqq 90° \end{cases}$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

⑵　α は $0° \leqq \alpha \leqq 90°$ を満たす角とする。
$0° \leqq \theta_n \leqq 90°$ を満たす角 θ_n，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \\ \sin \theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n| \\ \cos \theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n| \end{cases}$$

で定める。k を 2 以上の整数として，$\theta_k = 0°$ となる α の個数を k で表せ。

第　4　問

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}\left(0,\ \sqrt{3},\ 0\right)$ をとる。$\triangle\mathrm{ABC}$ を 1 つの面とし，$z \geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに $\triangle\mathrm{ABD}$ を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

⑴　点 E の座標を求めよ。

⑵　正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積を求めよ。

1997年　東大文系数学

第　1　問

$a,\ b$ は実数で

$$a^2+b^2=16, \quad a^3+b^3=44$$

を満たしている。このとき，

(1)　$a+b$ の値を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

第　2　問

$a,\ b$ を正の数とし，xy 平面の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ および $\mathrm{B}(0,\ b)$ を頂点とする正三角形を ABC とする。ただし，C は第 1 象限の点とする。

(1)　三角形 ABC が正方形 $D=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ の範囲を求めよ。

(2)　$(a,\ b)$ が(1)の範囲を動くとき，三角形 ABC の面積 S が最大となるような $(a,\ b)$ を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。

第　3　問

r を正の数とする。xyz 空間に原点 O(0, 0, 0) と 3 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) をとる。xyz 空間の点 P で

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PO}}|$$

を満たすものが 2 つ存在するための r の条件を求めよ。さらに，この 2 点の座標を r を用いて表せ。

第　4　問

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，xy 平面上の点 A, B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right), \quad \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める。t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を図示せよ。

1996年　東大文系数学

第　1　問

a を実数とする。行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ が

$$X^2 - 2X + aE = O$$

を満たすような実数 $x,\ y$ を求めよ。
ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

第　2　問

$a,\ b,\ c,\ d$ を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時に満たす正の数 $s,\ t$ があるとき，2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

第　3　問

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対し，正方形 $S(\mathrm{P})$ を連立不等式

$$|x-a| \leqq \frac{1}{2}, \quad |y-b| \leqq \frac{1}{2}$$

の表す領域として定め，原点と $S(\mathrm{P})$ の点との距離の最小値を $f(\mathrm{P})$ とする。
点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を P が動くとき，$f(\mathrm{P})$ の最大値を求めよ。

第　4　問

xyz 空間において，点 P を $(1,\ 0,\ 1)$，点 Q を $(a,\ a+1,\ 0)$ とする。線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面と平面 $z=1$ および xy 平面で囲まれる部分の体積を $V(a)$ とおく。a が実数全体を動くときの $V(a)$ の最小値およびそれを与える a の値を求めよ。

1995年　東大文系数学

第　1　問

すべての正の実数 $x,\ y$ に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第　2　問

自然数 k に対し，xy 平面上のベクトル

$$\overrightarrow{v}_k = \left(\cos\frac{k\pi}{4},\ \sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

を考える。$a,\ b$ を正の数とし，平面上の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_8$ を

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_0 = (0,\ 0)\\
&\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}} = a\overrightarrow{v}_{2n+1},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\\
&\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+2}} = b\overrightarrow{v}_{2n+2},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3
\end{aligned}$$

により定める。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{P}_8 = \mathrm{P}_0$ であることを示せ。

(2)　$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_8$ を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　面積 S が 7，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4$ の長さが $\sqrt{10}$ のとき，$a,\ b$ の値を求めよ。

第　3　問

xy 平面において，曲線 $y = -x^3 + ax$ 上の $x > 0$ の部分に，点 P を次の条件を満たすようにとる。ただし，$a > 0$ とする。

> 点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，原点 O における接線が $\angle$QOP を二等分する。

このとき，$\triangle$QOP の面積 $S(a)$ の最小値と，それを与える a の値を求めよ。

第　4　問

半径 1 cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。この器に毎秒 $\dfrac{\pi}{18}\,\mathrm{cm}^3$ の割合で水を入れるとき，入れはじめてから $3 + \cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れだした。このときの θ の値を求めよ。

1994年　東大文系数学

第　1　問

xy 平面上で，次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ の範囲を D とする。

$$\log_2 x \leqq 2 + \log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2(4-2x)$$

⑴　D を xy 平面上に図示せよ。

⑵　$s<1$ のとき，$y-sx$ の D 上での最大値 $f(s)$ を求め，関数 $t=f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ。

第　2　問

xy 平面上の 2 点 P, Q に対し，P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す。

⑴　原点 O(0, 0) と点 A(1, 3) に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

⑵　点 A(1, 3) と点 $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ に対し，$d(\mathrm{A},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

第　3　問

$0 < a \leqq 1$ に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2a \end{pmatrix}$ を考える。

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき，ベクトル $A\overrightarrow{u}$ の長さ $\left|A\overrightarrow{u}\right|$ について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(2-\sqrt{2})\,a \leqq \left|A\overrightarrow{u}\right| \leqq 2+\sqrt{2}$$

ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。

第　4　問

$0 < c < 1$ とする。3 次関数 $f(x) = -4x^3 + 3x^2$ に対し，

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t)\,dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t)\,dt$$

とおく。以下，関数 $f_3(x)$，$f_4(x)$，$\cdots\cdots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t)\,dt$$

により定める。

(1)　関数 $f_n(x)$ を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ について，$0 < x < 1$ のとき，$f_n(x) = 0$ を満たす x がただひとつ存在することを示せ。

1993年　東大文系数学

第　1　問

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は極大値と極小値をもち，それらを区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ 内でとるものとする。この条件を満たすような実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

第　2　問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

で定める。a_n が偶数となる n を決定せよ。

第　3　問

xyz 空間内の原点を中心とする半径 1 の球面

$$S = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x,\ y,\ z \text{ は実数 }\}$$

を考え，S 上の定点 (0, 0, 1) を A とする。

A とことなる S 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，直線 AP と xy 平面の交点を $\mathrm{Q}(u,\ v,\ 0)$ とする。

k を正の定数とし，点 P が

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqq \frac{1}{k},\ y \geqq \frac{1}{k},\ z \geqq \frac{1}{k}$$

を満たしながら動くとき，対応する点 Q の動く範囲を uv 平面上に図示せよ。

第　4　問

$0 \leqq t \leqq 2$ の範囲にある t に対し，方程式 $x^4 - 2x^2 - 1 + t = 0$ の実数解のうち最大のものを $g_1(t)$，最小のものを $g_2(t)$ とおく。$\displaystyle\int_0^2 \{g_1(t) - g_2(t)\}\,dt$ を求めよ。

1992年　東大文系数学

第　1　問

x についての方程式

$$px^2 + \left(p^2 - q\right)x - (2p - q - 1) = 0$$

が解をもち，すべての解の実部が負となるような実数の組 $(p,\ q)$ の範囲を pq 平面上に図示せよ。

（注）複素数 $a + bi$（$a,\ b$ は実数，i は虚数単位）に対し，a をこの複素数の実部という。

第　2　問

甲，乙 2 人が出資して共同事業を行う。2 人の出資合計を s とするとき，この事業による利潤 $f(s)$ は

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}s(s-3)^2 & (0 \leqq s \leqq 2) \\ -\dfrac{3}{4}s + 2 & (s > 2) \end{cases}$$

で与えられ，利潤は出資額に応じて甲，乙に比例配分されるものとする。

甲の出資額 a が一定であるとして，乙の利潤配分額を最大にする s の値を求めよ。ただし $0 \leqq a \leqq 2$ とする。

第　3　問

$p_1=1,\ p_2=1,\ p_{n+2}=p_n+p_{n+1}\ (n \geqq 1)$ によって定義される数列 $\{p_n\}$ をフィボナッチ数列といい，その一般項は

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で与えられる。必要ならばこの事実を用いて，次の問いに答えよ。

各桁の数字が 0 か 1 であるような自然数の列 $X_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の規則により定める。

(i)　$X_1=1$

(ii)　X_n のある桁の数字 α が 0 ならば α を 1 で置き換え，α が 1 ならば α を'10' で置き換える。X_n の各桁ごとにこのような置き換えを行って得られる自然数を X_{n+1} とする。

たとえば，$X_1=1,\ X_2=10,\ X_3=101,\ X_4=10110,\ X_5=10110101,\ \cdots\cdots$ となる。

(1)　X_n の桁数 a_n を求めよ。

(2)　X_n の中に'01' という数字の配列が現れる回数 b_n を求めよ（たとえば，$b_1=0,\ b_2=0,\ b_3=1,\ b_4=1,\ b_5=3,\ \cdots\cdots$）。

第　4　問

xy 平面において，x 座標，y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

(1)　辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2)　辺 AB, AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

1991年　東大文系数学

第　1　問

関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ の，区間 $-\dfrac{7}{4} \leqq x \leqq 3$ での最大値と最小値を求めよ。

第　2　問

xyz 空間の点 $\mathrm{P}(2,\ 0,\ 1)$ と，yz 平面上の曲線 $z = y^2$ を考える。点 Q がこの曲線上を動くとき，直線 PQ が xy 平面と出会う点 R のえがく図形を F とする。

xy 平面上で F を図示せよ。

第　3　問

二辺の長さが 1 と a の長方形の頂点 A, B, C, D および対角線の共有点 E を中心として，半径 r の円を 5 つえがく。どの 2 つの円の内部も共通部分をもたないようにして半径 r を最大にするとき，5 つの円が長方形から切りとる面積を $S(a)$ とする。

a の関数 $\dfrac{S(a)}{a}$ のグラフの概形をえがけ。

第　4　問

正四角錐 V に対し，その底面上に中心を持ち，そのすべての辺と接する球がある。底面の一辺の長さを a とするとき，次の量を求めよ。

⑴　V の高さ

⑵　球と錐 V との共通部分の体積

ただし，正四角錐とは，正方形を底面とし，その各辺を底辺とする 4 つの合同な二等辺三角形と底面とで囲まれた図形とする。

1990年　東大文系数学

第　1　問

V を一辺の長さが 1 の正 8 面体，すなわち xyz 空間において

$$|x| + |y| + |z| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ の集合と合同な立体とする。

(1)　V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。

(2)　一辺の長さが 1 の正方形の穴があいた平面がある。V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

第　2　問

3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の 1 つの解を α とする。

(1)　$\left(2\alpha^2 + 5\alpha - 1\right)^2$ を $a\alpha^2 + b\alpha + c$ の形の式で表せ。ただし $a,\ b,\ c$ は有理数とする。

(2)　上の 3 次方程式の α 以外の 2 つの解を(1)と同じ形の式で表せ。

第　3　問

$a,\ b,\ c$ を整数，$p,\ q,\ r$ を $p < 0 < q < 1 < r < 2$ をみたす実数とする。関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ が次の条件(i)，(ii)をみたすように $a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r$ を定めよ。

(i)　$f(x) = 0$ は 4 個の相異なる実数解をもつ。

(ii)　関数 $f(x)$ は $x = p,\ q,\ r$ において極値をとる。

第　4　問

平面 π の上に等辺の長さが 1 であるような直角二等辺三角形がある。π 上の直線でこの直角二等辺三角形と頂点または一辺のみを共有するものを軸として，その三角形を回転させるときできる立体の最大値，最小値を求めよ。

1989年　東大文系数学

第　1　問

$k > 0$ とする。xy 平面上の 2 曲線

$$y = k\left(x - x^3\right), \qquad x = k\left(y - y^3\right)$$

が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 $(\alpha,\ \beta)$ をもつような k の範囲を求めよ。

第　2　問

$a > 0$ に対して次の 2 つの放物線を考える。

$$C_1:\ y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \qquad C_2:\ y = -(x-a)^2$$

(1)　$C_1,\ C_2$ の両方に接するような直線がつねに 2 本存在することを示せ。

(2)　(1)で定まる 4 つの接点が作る四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

第　3　問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち，$H = \{z = x + iy \mid x,\ y$ は実数で $y > 0\}$ とする。以下 z を H に属する複素数とする。q を正の実数とし，$f(z) = \dfrac{z+1-q}{z+1}$ とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z) = f(z)$ と書き，以下 $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して

$$f_2(z) = f(f_1(z)),\quad f_3(z) = f(f_2(z)),\quad \cdots,\quad f_n(z) = f(f_{n-1}(z)),\quad \cdots$$

とおく。このとき，各 n に対して

$$f_n(z) = \frac{r_n z + (1-q)s_n}{s_n z + r_n},\quad {r_n}^2 - (1-q){s_n}^2 = q^n$$

が成り立つような z によらない実数 r_n，s_n がとれることを示せ。

第　4　問

半径 r の円 O のまわりに一辺の長さ a の正三角形 ABC を円 O と同一平面内で次の 2 条件を満たしながら可能な限り移動させる。

(a) $\triangle$ABC は円 O の内部と共有点を持たず，円 O の周とただ 1 点を共有する。

(b) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ はそれぞれ一定に保たれる。

このとき，$\triangle$ABC の通過し得る範囲を図示して，その面積 S を求めよ。さらに，$\triangle$ABC の面積を T とするとき，$r \to 0$ としたときの極限値 $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

1988年　東大文系数学

第　1　問

直線 l 上に 10 メートル離れた 2 定点 A, B があり，l に平行な直線 m 上を点 P が秒速 1 メートルで一定の向きに動いている。A, P 間の距離と B, P 間の距離の和は，ある時刻に測ったとき 15 メートル，その 5 秒後に測ったときも 15 メートルであった。2 直線 l，m のあいだの距離は何メートルか。

第　2　問

xy 平面上の一次変換 f が次の 3 条件をみたすとする。

(i)　点 $(1, 0)$ は f により第 4 象限の内部にうつる。

(ii)　点 $(0, 1)$ は f により第 2 象限の内部にうつる。

(iii)　点 $(1, 1)$ は f により第 1 象限の内部にうつる。

このとき f には逆変換が存在することを示せ。また，点 P の像 $f(\mathrm{P})$ が第 1 象限の内部にあれば，点 P も第 1 象限の内部にあることを示せ。

第　3　問

xyz 空間において次の 6 個の不等式で表される立体の体積を求めよ。

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad x+y+z \leqq 3, \quad x+2z \leqq 4, \quad y-z \leqq 1$$

第　4　問

$f(x)=x^3-x^2$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 A(1, 0) における接線が再びこの曲線と交わる点を B とする。曲線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=f(x)$ が点 A, B を共有し，さらに A と B のあいだにもうひとつの共有点をもつとき，この 2 曲線のかこむ部分の面積を求めよ。また，その面積が最小となるように a, b, c を定めよ。

1987年　東大文系数学

第　1　問

行列 $X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ が条件

$$X^2 - 4X + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をみたすとき，このような $x,\ y$ を座標とする点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ。ただし，行列の成分は実数とする。

第　2　問

a を正の定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x$ のグラフを C とする。$f(x)$ が極大となる x の値を b とするとき，点 $(b,\ f(b))$ における C の接線と C とによって囲まれる部分の面積を a で表せ。

第　3　問

t の関数 $f(t)$ を $f(t)=1+2at+b\left(2t^2-1\right)$ とおく。区間 $-1 \leqq t \leqq 1$ のすべての t に対して $f(t) \geqq 0$ であるような $a,\ b$ を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

第　4　問

3 つの実数 $x,\ y,\ z$ のうち最大の数を $\max(x,\ y,\ z)$ で表し，最小の数を $\min(x,\ y,\ z)$ で表す。いま，次の条件をみたす $x,\ y,\ z$ を座標とする点全体の集合を R とする。

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0$$
$$\max(x,\ y,\ z) \leqq a$$
$$x+y+z-\min(x,\ y,\ z) \leqq a+b$$

R の体積を求めよ。ただし，$a,\ b$ は定数で，$a>b>0$ とする。

1986年　東大文系数学

第　1　問

x が $0 \leqq x \leqq 3$ という範囲を動くときの，関数 $f(x) = 2x^2 - 4ax + a + a^2$ の最小値 m が 0 となるような，定数 a の値をすべて求めよ。

第　2　問

4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体 T において，各辺の長さが

$$\mathrm{AB} = x, \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = \mathrm{BC} = \mathrm{BD} = 5, \quad \mathrm{CD} = 4$$

であるとき，T の体積 V を求めよ。またこのような四面体が存在するような x の範囲を求めよ。またこの範囲で x を動かしたときの V の最大値を求めよ。

第　3　問

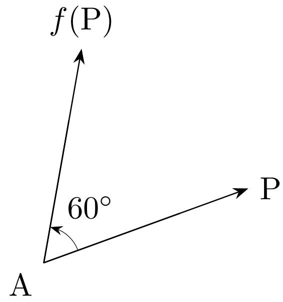
3 次またはそれ以下の任意の整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して，常に

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = uf(s) + vf(t)$$

が成り立つような定数 u, v, s, t を求めよ。ただし $s < t$ とする。

第　4　問

平面 S の 1 点 A と正数 α ($\alpha < 180$) をとる。点の集合としての S から S への写像 φ が，次の 3 つの条件(i), (ii), (iii)をみたすとき，φ は A を中心とする正の向きの α° 回転と呼ばれる。



(i)　$\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$

(ii)　S の任意の点 P ($\neq$ A) に対し，$\mathrm{AP} = \mathrm{A}\varphi(\mathrm{P})$, $\angle \mathrm{PA}\varphi(\mathrm{P}) = \alpha^\circ$

(iii)　人が三角形 $\mathrm{P}\varphi(\mathrm{P})\mathrm{A}$ の周を一周し，P, φ(P), A の順序に頂点を通るとき，三角形の内部は常に人の左側にある。

いま S 上に相異なる 2 点 A, B をとり，A を中心とする正の向きの 60° 回転を f，B を中心とする正の向きの 60° 回転を g とする。これに対し，f と g の合成写像 $h = g \circ f$ が，$h(\mathrm{P}) = g(f(\mathrm{P}))$ によって定義される。

(1)　このとき，点 h(A) と h(B) は，A, B に対して，どのような位置にあるかを求め，図示せよ。

(2)　h はある点 O を中心とする正の向きの回転であることを示し，点 O および回転角を求めよ。

1985年　東大文系数学

第　1　問

$a,\ b$ は $a^2+b^2 \neq 0$ なる実数とし，

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 $A^3,\ (I-A)^2$ の表す一次変換による点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の像を，それぞれ Q, R とする。ただし，Q, R はいずれも P と一致しないものとする。

(1)　$\angle$QPR の大きさを求めよ。

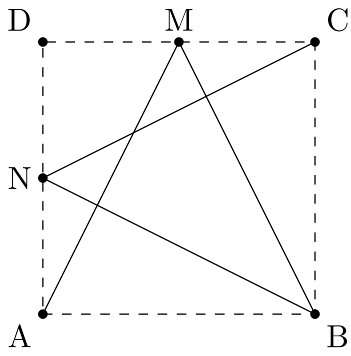
(2)　$\triangle$PQR の面積を $a,\ b,\ x,\ y$ を用いて表せ。

第　2　問

図において，ABCD は一辺の長さ 1 km の正方形で，M, N はそれぞれ辺 CD, DA の中点である。

いま，甲，乙は同時刻にそれぞれ A, B を出発し，同じ一定の速さで歩くものとする。甲は図の実線で示した道 AMB 上を進み，乙は実線で示した道 BNC 上を進み，30 分後に甲は B に，乙は C に到着した。

甲，乙が最も近づいたのは出発後何分か。また，そのときの両者の間の距離はいくらか。



第　3　問

n を 2 以上の整数とする。$x^n + ax + b$（a, b は実数の定数）の形の多項式 $f(x)$ で

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

を満たすものを考える。この $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt, \quad G(x) = \int_{-1}^{x} F(t)\,dt$$

とおく。$G(x)$ が極大または極小となる点 x と，その点における $G(x)$ の値を求めよ。

第　4　問

t を正の数とする。xyz 空間において，点 $(t,\ t,\ 0)$ を P とし，x 軸を含み点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を Q，y 軸を含み点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を R とする。また，原点を O とする。

(1)　Q, R の座標を求めよ。

(2)　4 点 O, P, Q, R を頂点とする四面体の体積を求めよ。

1984年　東大文系数学

第　1　問

t を実数の定数として，関数 $f(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)(x - t)$ を考える。いま $f'(x) = 0$ の 2 個の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ と書くことにすれば，これらは t の関数とみなすことができる。

t の関数 $|t - \alpha| + |t - \beta|$ の $1 \leqq t \leqq 3$ の範囲における最大値および最小値を求めよ。

第　2　問

xy 平面上に，海を隔てて 2 国 $A,\ B$ がある。A の領土は不等式 $x^2 + (y - 7)^2 \leqq 4$ で表される領域であり，B の領土は不等式 $y \leqq 0$ で表される領域であるという。

いま A の領海を次の 3 条件(i)，(ii)，(iii)を満たす点 P 全体の集合と定める。

(i)　P は $A,\ B$ いずれの領土にも含まれない。

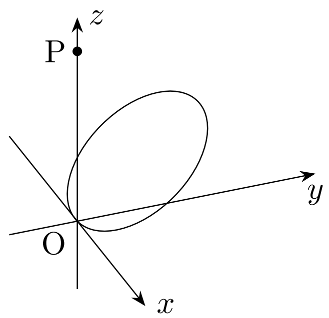
(ii)　P と A の領土との間の最短距離は 4 より小さい。

(iii)　P と A の領土との間の最短距離は，P と B の領土との間の最短距離より小さい。

A の領海の面積を求めよ。

第　3　問

空間内の点の集合 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq y,\ 0 \leqq z\}$ に含まれ，原点 O において x 軸に接し，xy 平面と 45° の傾きをなす，半径 1 の円板 C がある。座標が $\left(0,\ 0,\ 2\sqrt{2}\right)$ の位置にある点光源 P により，xy 平面上に投ぜられた円板 C の影を S とする。



(1)　S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ。

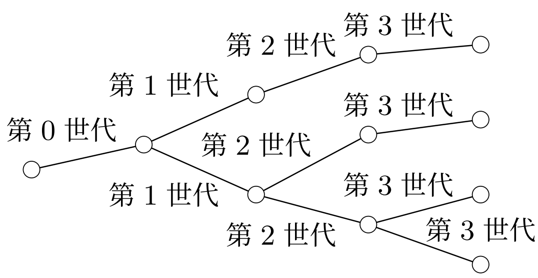
(2)　円板 C と影 S の間にはさまれ，光の届かない部分のつくる立体の体積を求めよ。

第　4　問

各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある。

いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を，$P_n(m)$ とかくことにしよう。

n を自然数とするとき，$P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を求めよ。



1983年　東大文系数学

第　1　問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す xy 平面の 1 次変換 f が，次の条件(i)，(ii)をみたすとする。

(i)　f は，任意の三角形をそれと相似な三角形にうつす。

(ii)　f は，点 $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ を点 $\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right)$ にうつす。

このような行列 A をすべて求めよ。

第　2　問

傾いた平面上で，もっとも急な方向の勾配（こうばい）（傾き）が $\dfrac{1}{3}$ であるという。いま，南北方向の勾配をはかったところ $\dfrac{1}{5}$ であった。東西方向の勾配はどれだけか。

第　3　問

xy 平面上で，曲線 C： $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 上の点 P における接線 l が，P と異なる点 Q で C と交わるとする。l と C で囲まれた部分の面積と，Q における接線 m と C で囲まれた部分の面積の比を求め，これが一定であることを示せ。

第　4　問

直線上に，赤と白の旗をもった何人かの人が，番号 0，1，2，$\cdots\cdots$ をつけて並んでいる。番号 0 の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為にあげるものとし，他の番号 j の人は，番号 $j-1$ の人のあげた旗の色を見て，確率 p で同じ色，確率 $1-p$ で異なる色の旗をあげるものとする。

このとき，番号 0 の人と番号 n の人が同じ色の旗をあげる確率 P_n を求めよ。

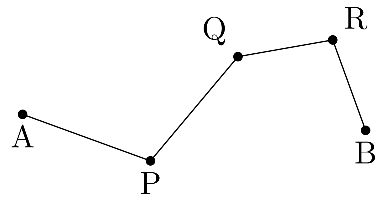
1982年　東大文系数学

第　1　問

平面上に 2 定点 A, B があり，線分 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ である。この平面上を動く 3 点 P, Q, R があって，つねに

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2,\quad \overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\sqrt{2}$$

なる長さを保ちながら動いている。このとき，点 Q が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



第　2　問

xy 平面上の曲線 $y=x^2$ 上の 3 点を，x 座標の小さいものから順に A, B, C とする。A と B との x 座標の差は a（a は正の定数)，B と C との x 座標の差は 1，という関係を保ちながら 3 点 A, B, C が動く。

$\angle$CAB が最大になるときの，点 A の x 座標を a で表せ。また，$\angle$CAB が最大になるときに，$\angle$ABC が直角になるような a の値を求めよ。

第　3　問

$a,\ b$ を整数として，x の 4 次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ の 4 つの解を考える。いま，4 つの解の近似値

$$-3.45,\ -0.61,\ 0.54,\ 3.42$$

がわかっていて，これらの近似値の誤差の絶対値は 0.05 以下であるという。真の解を小数第 2 位まで正しく求めよ。

第　4　問

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$ とおく。xy 平面において，$(1,\ 1)$ を座標とする点 P_0 から始めて，点列 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots$ をつぎのような手続きで作っていく。P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とするとき，

(イ)　$x_n+y_n \geqq \dfrac{1}{100}$ のときは，$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ のどちらかが成り立つように決める。

(ロ)　$x_n+y_n < \dfrac{1}{100}$ のときは，$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ によって決める。

このようにするといろいろな点列ができるが，それらについてつぎの問に答えよ。

(1)　P_2 として可能な点をすべて求め，図示せよ。

(2)　x_n+y_n を n で表せ。

(3)　P_{10} として可能な点は何個あるか。

1981年　東大文系数学

第　1　問

$A=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ とし，正の整数 n について $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ とおく。つぎに，a を実数とし，xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と点 $(a,\ 0)$ との距離を d_n とする。このとき，$d_{n+1}>d_n$ がすべての正の整数 n に対して成り立つような，a の値の範囲を求めよ。

第　2　問

Aが100円硬貨を4枚，Bが50円硬貨を3枚投げ，硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ちとし，同じ枚数のときは引き分けとする。硬貨の表，裏の出る確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ であるものとする。

⑴　Aの勝つ確率，Bの勝つ確率，引き分けの確率を求めよ。

⑵　もし，勝った方が相手の投げた硬貨を全部もらえるとしたら，AとBとどちらが有利か。

第　3　問

2 つの放物線

$$y = 2x^2 + 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y = -x^2 + c \quad \cdots\cdots ②$$

の共通接線の方程式を求めよ。ただし c は定数で，$c < 1$ をみたすものとする。

つぎに，共通接線と放物線①で囲まれた部分の面積を S_1，共通接線と放物線②で囲まれた部分の面積を S_2 としたとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

第　4　問

実数 α $\left(ただし\ 0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と，空間の点 A(1, 1, 0), B(1, -1, 0), C(0, 0, 0) を与えて，つぎの 4 条件をみたす点 P(x, y, z) を考える。

(イ)　$z > 0$

(ロ)　2 点 P, A を通る直線と，A を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\dfrac{\pi}{4}$

(ハ)　2 点 P, B を通る直線と，B を通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\dfrac{\pi}{4}$

(ニ)　2 点 P, C を通る直線と，C を通り z 軸と平行な直線のつくる角は α

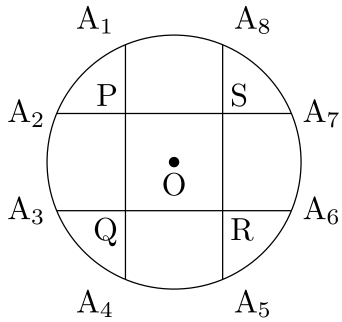
このような点 P の個数を求めよ。また，P が 1 個以上存在するとき，それぞれの場合について，z の値を，α を用いて表せ。

1980年　東大文系数学

第　1　問

図のように，半径 a の円 O の周を 8 等分する点を順に A_1，A_2，$\cdots$，A_8 とし，弦 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$ と弦 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_7$，$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_6$ との交点をそれぞれ P, Q とし，弦 $\mathrm{A}_5\mathrm{A}_8$ と弦 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_6$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_7$ との交点をそれぞれ R, S とする。

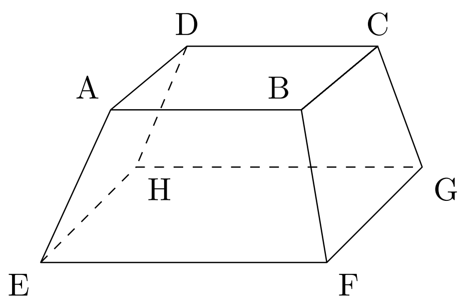
このとき，正方形 PQRS の面積を求めよ。また，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}$，$\mathrm{A}_2\mathrm{P}$ と弧 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。



第　2　問

図のような立体 ABCD − EFGH がある。上底面 ABCD，下底面 EFGH はともに正方形であって，両底面はたがいに平行であり，4 つの側面 ABFE，BCGF，CDHG，DAEH は台形であって，AE = BF = CG = DH である。また下底面の 1 辺の長さは 12，両底面の間の距離は 4 である。

上底面の 1 辺の長さが x のとき，側面 ABFE の面積を $S(x)$ とする。x が $2 \leqq x \leqq 10$ の範囲を動くときの $S(x)$ の最大値と最小値を求めよ。



第　3　問

$n,\ a,\ b,\ c,\ d$ は 0 または正の整数であって,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6 \\ a+b+c+d \leqq n \\ a \geqq b \geqq c \geqq d \end{cases}$$

をみたすものとする。このような数の組 $(n,\ a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ。

第　4　問

$a,\ b$ は $a^2-b^2=-1$ をみたす定まった実数とし, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ とおく。実数の組 $(x,\ y)$ について $Z=xI+yA$ とおき, この Z に対して $Z'=xI-yA$ とおく。また零行列を O で表す。

⑴　等式

$$ZZ'-Z-Z'-3I=O \cdots\cdots (*)$$

をみたすすべての Z に対する点 $(x,\ y)$ のつくる曲線を図示せよ。

⑵　$x^2+y^2 \neq 0$ のとき, Z の逆行列 Z^{-1} があって $uI+vA$ の形に表されることを示せ。また, 等式 $(*)$ をみたすすべての Z に対する点 $(u,\ v)$ のつくる曲線を図示せよ。

1979年　東大文系数学

第　1　問

xy 平面上の 4 点 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1) を頂点とする正方形を Q とする。

実数 t に対して一次変換

$$U_t = \begin{pmatrix} 1+t & t+t^2 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix},\ V_t = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ t+t^2 & 1+t \end{pmatrix}$$

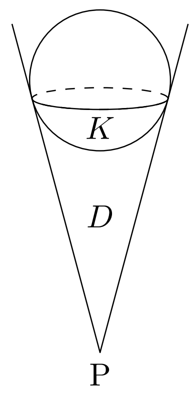
を考え，Q が U_t によってうつされた図形と，Q が V_t によってうつされた図形との共通部分の面積を $S(t)$ とする。t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，t の関数 $S(t)$ のグラフの概形を描き，$S(t)$ のこの範囲での最大値を求めよ。

第　2　問

図のように，半径 1 の球が，ある円錐の内部にはめ込まれる形で接しているとする。球と円錐面が接する点の全体は円をなすが，その円を含む平面を α とする。

円錐の頂点を P とし，α に関して P と同じ側にある球の部分を K とする。また，α に関して P と同じ側にある球面の部分および円錐面の部分で囲まれる立体を D とする。いま，D の体積が球の体積の半分に等しいという。

そのときの K の体積を求めよ。



第　3　問

ある硬貨を投げるとき，表と裏がおのおの確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るものとする。

この硬貨を 8 回くり返して投げ，n 回目に表が出れば $X_n = 1$，裏が出れば $X_n = -1$ とし，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $(1 \leqq n \leqq 8)$ とおく。

このとき次の確率を求めよ。

(1) $S_n \neq 0$ かつ $S_8 = 2$ となる確率。

(2) $S_4 = 0$ かつ $S_8 = 2$ となる確率。

第　4　問

a を正の整数とし，数列 $\{u_n\}$ を次のように定める。

$$u_1 = 2, \quad u_2 = a^2 + 2,$$
$$u_n = au_{n-2} - u_{n-1}, \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

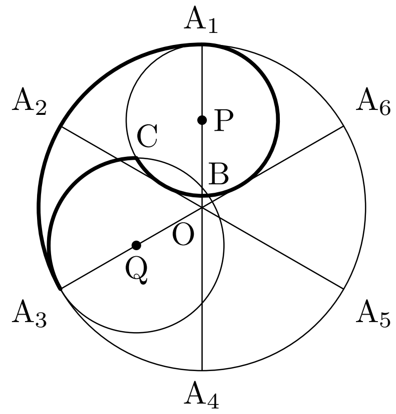
このとき，数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないために，a のみたすべき必要十分条件を求めよ。

1978年　東大文系数学

第　1　問

半径 1 の円 O の周を 6 等分する点を図のように順次 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\cdots\cdots$，$\mathrm{A_6}$ とする。

弧 $\mathrm{A_2A_1A_6}$ および半径 $\mathrm{OA_2}$，$\mathrm{OA_6}$ に接する円の中心を P とし，この円 P の周と線分 OP の交点を B とする。線分 $\mathrm{OA_3}$ 上に $\mathrm{OQ}=\mathrm{PA_1}$ をみたすように点 Q を定める。Q を中心とし $\mathrm{QA_3}$ を半径とする円周と円 P の交点のうちで，直径 $\mathrm{A_1B}$ に関し点 $\mathrm{A_2}$ と同じ側にあるものを C とする。



このとき四辺形 OPCQ は平行四辺形であることを証明せよ。また弧 $\mathrm{A_1A_2A_3}$，弧 $\mathrm{A_3C}$，弧 $\mathrm{CBA_1}$ によって囲まれた領域（図の太線で囲まれた部分）の面積を求めよ。

第　2　問

2 つの放物線

$$\begin{cases} y=x^2-2x+2 & \cdots\cdots① \\ y=-x^2+ax+b & \cdots\cdots② \end{cases}$$

は，それらの交点の 1 つ P で，接線が互いに直交しているものとする。このとき，放物線②は，a，b の値に無関係な一定の点 Q を通ることを証明し，Q の座標を求めよ。

第　3　問

x の関数 $f(x)=\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$ の，$t \leqq x \leqq t+1$ という範囲における最大値を $g(t)$ とする。

t が $-3 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき，関数 $s=g(t)$ を求め，そのグラフを描け。

第　4　問

xy 平面で点 $\mathrm{P}(-3,\ 6)$ を通り，曲線

$$y=x^3-5x^2+x+9 \quad \cdots\cdots ①$$

に接する直線のうち，接点の x 座標が $x \geqq 0$ をみたすものを PQ, PR とする。ただしこれらの直線は点 Q, R において曲線①に接するものとする。このとき曲線①の点 Q から点 R までの部分と，線分 PQ，線分 PR で囲まれた領域の面積を求めよ。

1977年　東大文系数学

第　1　問

k を実数の定数とするとき，x の関数 $f(x) = \left|x^3 - 3kx\right|$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す。k が実数全体を動くとき，$M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ。

第　2　問

新課程

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ と書く。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し，

$$A(I - tJ) = I + tJ$$

という関係が成り立つとき，a，b，c，d を t の式で表せ。

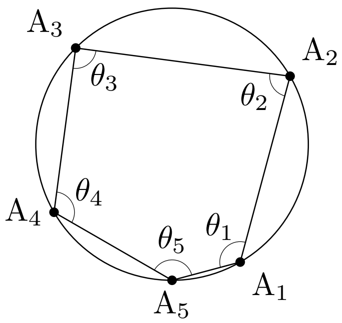
また t が実数全体を動くとき，関係 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点 $(x,\ y)$ が動いてできる図形を求め，これを図示せよ。

旧課程

θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5 を正の数とする。図のように円に内接する五角形 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4A_5}$ で，$1 \leqq i \leqq 5$ に対し角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するためには，

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 3\pi, \quad \theta_1 + \theta_3 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_4 > \pi, \quad \theta_3 + \theta_5 > \pi, \quad \theta_1 + \theta_4 > \pi, \quad \theta_2 + \theta_5 >$$

が同時に成り立つことが必要かつ十分であることを証明せよ。



第　3　問

xy 平面上に，不等式で表される 3 つの領域

$$\begin{cases} A: \ x \geqq 0 \\ B: \ y \geqq 0 \\ C: \ \sqrt{3}\,x + y \leqq \sqrt{3} \end{cases}$$

をとる。いま任意の点 P に対し，P を中心として A, B, C のどれか少なくとも 1 つに含まれる円を考える。

このような円の半径の最大値は点 P によって定まるから，これを $r(\mathrm{P})$ で表すことにする。

(1) 点 P が $A \cap C$ から $(A \cap C) \cap B$ を除いた部分を動くとき，$r(\mathrm{P})$ の動く範囲を求めよ。

(2) 点 P が平面全体を動くとき，$r(\mathrm{P})$ の動く範囲を求めよ。

第　4　問

新課程

座標の定められた空間において，直線 l は 2 点 $(1,\ 1,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 1)$ を通り，直線 m は 2 点 $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 2)$ を通る。

(1) l を含み m に平行な平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ の形に表せ。

(2) 点 $(2,\ 0,\ 1)$ を通り l, m の両方と交わる直線を n とする。l と n の交点および m と n の交点を求めよ。

旧課程

a を実数の定数とするとき，$a\cos 2\theta - 4(a-2)\cos\theta - a + 4 = 0$ をみたす相異なる θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にいくつあるか。

1976年　東大文系数学

第　1　問

負でない実数 r，l に対して，xy 平面上の曲線

$$y=\begin{cases} x^2 & (0 \leqq x \leqq r) \\ r^2 & (r \leqq x \leqq l+r) \\ (x-l-2r)^2 & (l+r \leqq x \leqq l+2r) \end{cases}$$

を考え，これを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする。r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき，V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ。

第　2　問

時刻 $t=0$ に原点を出発し，xy 平面上で次の条件(i)，(ii)に従っていろいろに運動する動点 P がある。

(i)　$t=0$ における P の速度を表すベクトルの成分は $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$ である。

(ii)　$0<t<1$ において，P は何回か（1 回以上有限回）直角に左折するが，そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。（ただし，左折するのに要する時間は 0 とする）

このとき，時刻 $t=1$ において P が到達する点を Q として，Q の存在しうる範囲を図示せよ。

第　3　問

新課程

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は xy 平面上の円

$$C:\ (x-5)^2+(y-5)^2=r^2\ (r>0)$$

の上を動く動点である。このとき点 P の点 A(9, 0) に関する対称点を Q とし，また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ とを求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

旧課程

xy 平面上に 3 つの円 A, B, C があって，それぞれ

$$\begin{aligned} A &:\ x^2+y^2=9,\\ B &:\ (x-4)^2+(y-3)^2=4,\\ C &:\ (x-5)^2+(y+3)^2=1 \end{aligned}$$

で表される。この平面上の点 P から円 A, B, C に接線がひけるとき，P からそれらの接点までの距離をそれぞれ $\alpha(\mathrm{P})$, $\beta(\mathrm{P})$, $\gamma(\mathrm{P})$ とする。このとき

$$\alpha(\mathrm{P})^2+\beta(\mathrm{P})^2+\gamma(\mathrm{P})^2=99$$

となる点 P の全体が作る曲線を図示し，その長さを求めよ。

第　4　問

新課程

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$ とかく。実数 a, b に対し $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ とおく。いま $xI+yA$（x, y は実数）の形に表される行列全体からなる集合を R とし，R から O を除いた集合を G とする。

(1)　R に属する 2 つの行列の積は R に属することを示せ。

(2)　G に属する任意の行列が逆行列をもつとき，点 $(a,\ b)$ はどのような範囲にあるか。これを図示せよ。

旧課程

a を整数とする。整式 $f(x)=x^5-ax-1$ が整数を係数とする 2 つの（正の次数の）整式の積に表されるような a を求めよ。またそのような a について $f(x)$ を上のような積に分解せよ。

1975年　東大文系数学

第　1　問

三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=32$, $\mathrm{CA}=36$, $\mathrm{AB}=25$ とする。この三角形の 2 辺の上に両端をもつ線分 PQ によって，この三角形を 2 等分する。そのような PQ の長さが最短になる場合の，P と Q の位置を求めよ。

第　2　問

k, l, m, n は負でない整数とする。0 でないすべての x に対して等式

$$\frac{(x+1)^k}{x^l}-1=\frac{(x+1)^m}{x^n}$$

を成り立たせるような k, l, m, n の組を求めよ。

第　3　問

2 つの放物線 $y = x^2$ と $y = -(x-a)^2 + b$ とによって囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{3}$ となるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

第　4　問

xy 平面内の曲線 $x = f(y)$（$f(y)$ は正の値をとる関数とする）と直線 $y = 2$ および x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる立体から，y 座標が 2 の y 軸上の点を中心とする半径 1 の球との共通部分をくりぬいた残りの立体を A とする。立体 A の $y \leqq t$ にあたる部分の体積 $V(t)$ が

$$V(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\pi(t^2 + t) & (0 \leqq t \leqq 1) \\ \pi\left(\dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 4t - \dfrac{3}{2}\right) & (0 < t \leqq 2) \end{cases}$$

であるとき，関数 $f(y)$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ を定めて，A の xy 平面による断面の図形をえがけ。

1974年　東大文系数学

第　1　問

　自然数 n，p に対し，n^p を十進法で書いたときの 1 の位の数を $f_p(n)$ で表す。ただし，自然数とは，1，2，3，$\cdots\cdots$ のことである。

⑴　n が自然数の全体を動くとき，$f_2(n)$ のとる値を全部求めよ。

⑵　あらゆる自然数 n に対して，$f_5(n) = f_1(n)$ が成り立つことを証明せよ。

⑶　n が自然数の全体を動くとき，$f_{100}(n)$ のとる値を全部求めよ。

第　2　問

　長さ l の線分が，その両端を放物線 $y = x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし $l \geqq 1$ とする。

第　3　問

半径 a の球から, 鉛直で球の中心を通る軸をもつ円柱状の部分をくり抜き, 残った環状部分の高さが $2h$ になるようにする。この環状部分の体積を求めよ。ただし，$a > h$ とする。

第　4　問

$\alpha > 0$ とし，xy 平面上において，不等式

$$y \leqq \frac{-1}{\alpha^2}x^2 + \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2}x - 1 + \frac{1}{\alpha}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる集合を A とする。A と第一象限との共通部分を B とするとき，B の面積を α の関数として表し，そのグラフを描け。

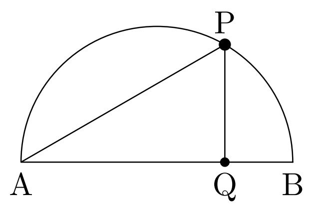
1973年　東大文系数学

第　1　問

平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 S がある。この平面上で S を平行移動して得られる正方形で，点 P を中心にもつものを $T(\mathrm{P})$ とする。このとき，共通部分 $S \cap T(\mathrm{P})$ の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるような点 P の存在範囲を図示せよ。

第　2　問

図において $\mathrm{AB} = 2a$ とする。AB を直径とする半円周上に P があるとする。P から AB に下ろした垂線の足を Q とする。$\triangle$APQ を AB のまわりに回転してできる立体の体積の最大値を求めよ。



第　3　問

四角錐 V − ABCD があって，その底面 ABCD は正方形であり，また 4 辺 VA, VB, VC, VD の長さはすべて等しい。この四角錐の頂点 V から底面に下した垂線 VH の長さは 6 であり，底面の 1 辺の長さは $4\sqrt{3}$ である。VH 上に VK $= 4$ なる点 K をとり，点 K と底面の 1 辺 AB とを含む平面で，この四角錐を 2 つの部分に分けるとき，頂点 V を含む部分の体積を求めよ。

第　4　問

区間 $1 \leqq x \leqq 3$ において次のように定義された関数 $f(x)$ がある。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ x - 1 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

いま実数 a に対して，区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における関数 $f(x) - ax$ の最大値から最小値を引いた値を $V(a)$ とおく。このとき次の値に答えよ。

⑴　a がすべての実数にわたって動くとき，$V(a)$ の最小値を求めよ。

⑵　$V(a)$ の最小値を与えるような a の値を求めよ。

1972年　東大文系数学

第　1　問

空間に座標系が定められていて，z 軸上に 2 点 A(0, 0, 6), B(0, 0, 20) が与えられている。xy 平面上の点 P$(x,\ y,\ 0)$ で，

$$0 \leqq x \leqq 15,\quad 0 \leqq y \leqq 15,\quad \angle\mathrm{APB} \geqq 30^\circ$$

を満たすものの全体が作る図形の面積を求めよ。

第　2　問

平面上の三角形 ABC において，頂点 A を通り辺 AB, AC に垂直な直線をそれぞれ $h,\ k$ とする。B の k に関する対称点を B′, C の h に関する対称点を C′ とする。ベクトル $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{b'} = \overrightarrow{\mathrm{AB'}},\ \overrightarrow{c'} = \overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ の間に

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c},\quad \overrightarrow{c'} = m\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\ (m \text{ は正の整数}),\quad \left|\overrightarrow{b}\right| = 1$$

が成り立つとき，$m,\ \angle\mathrm{BAC}$，および $\left|\overrightarrow{c}\right|$ を求めよ。ただし $\left|\overrightarrow{a}\right|$ はベクトル $\overrightarrow{a}$ の長さをあらわす。また $0 < \angle\mathrm{BAC} < \pi$ とする。

第　3　問

複素数 z, w の間に $w = z^2$ なる関係があり，複素平面において点 z は 4 点 $1+i$, $2+i$, $2+2i$, $1+2i$ を頂点とする正方形の内部を動くものとする。このとき，複素平面において，点 w の動く範囲の面積を求めよ。ただし，i は虚数単位をあらわす。

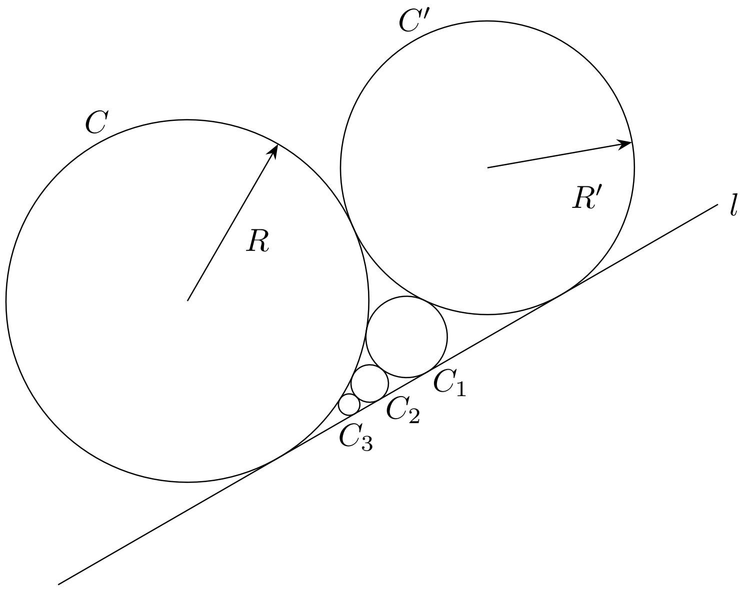
第　4　問

たがいに外接する定円 C, C' が共通接線 l の同じ側にあるとする。図のように

C, C', l に接する円を C_1,　　C, C_1, l に接する円を C_2,　　……

C, C_{n-1}, l に接する円を C_n,　　……

とする。このとき円 C_n の半径を r_n として，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 r_n$ を，円 C の半径 R と円 C' の半径 R' とを用いてあらわせ。



1971年　東大文系数学

第　1　問

変数 t が 0 から π まで動くとき，

$$x = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

によって表される点 $(x,\ y)$ と原点 $(0,\ 0)$ との間の距離の最大値，最小値およびそれらをとる t の値を求めよ。

第　2　問

正数 x を与えて，

$$2a_1 = x, \quad 2a_2 = {a_1}^2 + 1, \quad \cdots\cdots, \quad 2a_{n+1} = {a_n}^2 + 1, \quad \cdots\cdots$$

のように数列 $\{a_n\}$ を定めるとき，

(1)　$x \neq 2$ ならば，$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n < \cdots\cdots$ となることを証明せよ。

(2)　$x < 2$ ならば，$a_n < 1$ となることを証明せよ。このとき，正数 ε を $1 - \dfrac{x}{2}$ より小となるようにとって，a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n までが $1 - \varepsilon$ 以下となったとすれば，個数 n について次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2 - x > n\varepsilon^2$$

第　3　問

与えられた実数係数の整式 $f(x)$ について

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2, \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 3$$

となるとする。そのとき，

$$\int_0^1 \{f(x) - ax - b\}^2\,dx$$

の値を最小にする実数 a および b の値を求めよ。

第　4　問

x の整式

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

について

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを証明せよ。

方程式 $f_n(x) = 0$ は，n が奇数ならばただ 1 つの実根をもち，n が偶数ならば実根をもたないことを数学的帰納法をもちいて証明せよ。

1970年　東大文系数学

第　1　問

次の文を読んで後の設問に答えよ。

k を 2 から 10 までの任意の整数とするとき，正の整数はすべて

$$a_n \times k^n + \cdots\cdots + a_1 \times k + a_0$$

のように書くことができる。ただし，a_0，a_1，$\cdots\cdots$，a_n を 0 から $k-1$ までの整数とする。したがって，上の式で書かれる数を

$$a_n \cdots\cdots a_1 a_0$$

のように，数字 a_0，a_1，$\cdots\cdots$，a_n の単なる配列で表すことができる。10 進法というのは，k を 10 にとったときのことであるが，k を 2 にとればこれは 2 進法といわれる記数法になる。

⑴　10 進法で 365 と書かれる数を 2 進法で書けばどうなるか。

⑵　2 進法で 101101 と書かれる数と 1011 と書かれる数との積は 2 進法でどのように書かれるか。

⑶　正の整数 x が 2 進法で書かれているとき，それを右から 3 桁ずつ区切っていき，2 進法で各区切りの表す数 y_0，y_1，$\cdots\cdots$，y_m を考える。もしこれらの和 $y_m + \cdots\cdots + y_1 + y_0$ が 7 で割り切れるならば，x も 7 で割り切れることを証明せよ。

第　2　問

2 点 A(0, 1), B(0, 11) が与えられている。いま x 軸上の正の部分に点 P$(x,\ 0)$ をとって ∠APB の大きさを 30° 以上にしたい。x をどのような範囲にとればよいか。

第　3　問

25 m 隔てて 2 地点 P, Q がある。いま A, B 2 人がそれぞれ P, Q に立ち，同時に向かい合って走り出す。走り出してから t 秒後の A, B の速度を，P から Q に向かう方向を正の向きとしてそれぞれ u m/秒，v m/秒 とすれば，u は一定で $v = \dfrac{3}{4}t^2 - 3t$ である。このとき，B が Q にかえるまでに A が B に出あうかまたは追いつくためには，u が少なくともどれほどの大きさでなければならないか。

1968年　東大文系数学

第　1　問

一辺の長さが1の正方形ABCDの内部に点Pをとって, $\angle$APB, $\angle$BPC, $\angle$CPD, $\angle$DPA がいずれも $\dfrac{3\pi}{4}$ をこえないようにするとき，点Pのうごき得る範囲の面積を求めよ。ただし，CはAととなりあわない頂点とする。

第　2　問

正方形ABCDを底面とし，Vを頂点とする正四角錐（すい）において，底面と斜面のなす二面角が45° のとき，となりあう2つの斜面のなす二面角を求めよ。

第　3　問

$\alpha,\ \beta$ は与えられた実数とする。x の 2 次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の係数 $a,\ b,\ c$ が $a + b + c = 0$ なる関係式をみたしながら動くとき，座標 $(f(\alpha),\ f(\beta))$ をもつ点の全体は，平面上のどんな集合になるか。

第　4　問

次の条件をみたす 3 次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

(i)　多項式 $g(x)$ の次数が 2 をこえないならば，つねに $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0$

(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx = 1$

(iii)　$f(1) > 0$

第　5　問

平面上の点 $(a,\ b)$ の，直線 $2x - y = p$ に関する対称点をとり，次にこれを原点を中心として正の向きに 90° 回転し，さらに直線 $x + 2y = q$ に関する対称点をとると，はじめの点 $(a,\ b)$ に一致する。このとき $p,\ q$ を用いて，$a,\ b$ を表せ。

1967年　東大文系数学

第　1　問

a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geqq 0$ において不等式 $ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ が成り立つことを証明せよ。

第　2　問

一平面上に 3 個の半径 1 の円があり，それぞれ点 A(0, 0)，点 $\mathrm{B}\left(2\sqrt{3},\ 0\right)$，点 $\mathrm{C}\left(\sqrt{3},\ 3\right)$ を中心とする。このとき，次の条件(i)と(ii)とを満たす点 P の存在する範囲を定め，その面積を求めよ。

(i)　点 P は円 A，円 B，円 C のすべての外部にある。

(ii)　点 P から円 A，円 B，円 C にひいた接線の接点をそれぞれ R, S, T とするとき，$\overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{PT}}^2 < 36$

第　3　問

南北の方向に水平でまっすぐな道路上を，自動車が南から北へ時速 100 km で走っている。また，飛行機が一定の高度で一直線上を時速 $\sqrt{7} \times 100$ km で飛んでいる。自動車から飛行機を見たところ，ある時刻にちょうど西の方向に仰角 30 度に見えて，それから 36 秒後には北から 30 度西の方向に仰角 30 度に見えた。飛行機の高度は何 m であるか。

第　4　問

a がすべての正の実数をとって動くとき，直線 $y = ax + b$ が点 A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1) を頂点とする三角形を，面積の等しい 2 つの図形に分けるようにするには，b を a のどのような関数にとればよいか。

第　5　問

楕円 $\dfrac{x^2}{a} + ay^2 = 1 \ (a > 0)$ を考える。a がすべての正の実数をとって動くとき，これらの楕円の上にある点全体はどのような範囲にあるか，その範囲を決定せよ。なお，それを図示せよ。

1966 年　東大文系数学

第　1　問

ある鉄道の旅客運賃計算規則は下記のとおりであり，それによると，距離が 319 km, 349 km のときの運賃は，それぞれ 970 円，1010 円となる。下記の文中の a, b にあてはまる数を求めよ。ただし，a, b はともに 0.1 の整数倍の数である。

> 旅客運賃は，距離が 300 km 以下の分に対しては 1 km につき a 円，300 km を超過した分に対しては 1 km につき b 円として計算し，その結果において，10 円未満の端数（はすう）は 10 円に切り上げるものとする。

第　2　問

平面上のある直線 l 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対し，点 $(4x+2y,\ x+3y)$ がふたたび l の上にあるという。このような直線 l をすべて求めよ。

第　3　問

3 直線 $x+y-1=0$, $x-y+1=0$, $3x+4y-5=0$ で囲まれる三角形の内心の座標と，内接円の半径を求めよ。

第　4　問

　半径 1 の定円 O の周上に 1 点 A が与えられている。A を中心とする円が，円 O の直径 $\mathrm{AA'}$ と交わる点を R，円 O と交わる点を P, Q とするとき，四辺形 APRQ の面積の最大値を求めよ。

第　5　問

新課程

　空間の 2 点 $(10,\ 2,\ 5)$, $(-6,\ 10,\ 11)$ を直径の両端とする球面がある。

(1)　この球面が，xy 平面からきりとる円の面積を求めよ。

(2)　この球面が，z 軸からきりとる線分の長さを求めよ。

旧課程

　点 O を中心とする定円の円周上に 1 点 A を固定し，O とも A とも異なる点 P を半径 OA 上にとる。点 P を通り OA に垂直な弦の一端における円の接線が，OA の延長と交わる点を Q とする。

　点 P が点 A に近づくときの $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}$ の極限を求めよ。ただし，$\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{PA}}$ はそれぞれ線分 PQ, PA の長さである。

1965年　東大文系数学

第　1　問

ある都市で A, B, C 3 種類の新聞が発行されている。その都市の世帯で

A を購読しているものの割合は 69％,

B を購読しているものの割合は 46％,

C だけを購読しているものの割合は 3％,

B, C の両方を購読しているものの割合は 21％,

A, C の少なくとも一方を購読しているものの割合は 88％,

B, C の少なくとも一方を購読しているものの割合は 50％,

A, B, C のうちどれか 1 種類だけを購読しているものの割合は 61％

である。このとき

(1)　A だけを購読しているものの割合,

(2)　B だけを購読しているものの割合,

(3)　A, B, C すべてを購読しているものの割合,

(4)　A, B, C のどれも購読していないものの割合

を求めよ。

第　2　問

A, B, C を 3 つの山頂とする。A から見ると，C は真北より東 10° の方向にあって仰角 15° であり，B から見ると，C は真北より西 20° の方向にあって仰角 30° である。また B から A を見る仰角は 30° である。A, B の高さがそれぞれ海抜 1600 m，1210 m であるとすれば，C の高さは海抜何メートルか。$\sqrt{3} = 1.732$ として計算し，1 m 未満は四捨五入せよ。

第　3　問

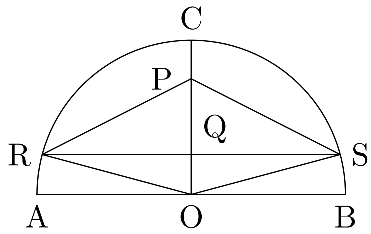
直線 l は双曲線 $xy=1$ の第一象限にある部分に接し，l と x 軸との交点の x 座標は 2 より小さくないとする。

この条件のもとで l が変動するとき，4 直線 l, $y=0$, $x=1$ および $x=2$ で囲まれる部分の面積の最大値を求めよ。

第　4　問

右の図において ABC は長さ 2 の線分 AB を直径とし，O を中心とする半円周，P は AB に垂直な半径 OC 上の動点とする。

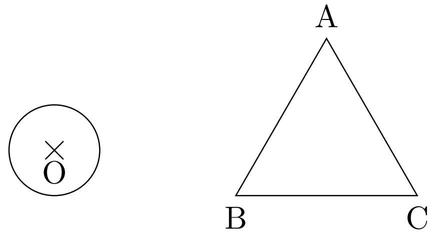
k を正の定数とし，線分 PO を $k:1$ に内分する点 Q を通って AB に平行な弦を RS とすれば，P をどこにとったとき四辺形 ROSP の面積が最大になるか。



第　5　問

右の図のように，一平面上に半径の長さ 1 の円 O と一辺の長さ 4 の正三角形 ABC がある。点 P は円内の任意の点を動き，点 Q は正三角形の周上を動くとする。

このとき線分 PQ の中点 R の動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



1964年　東大文系数学

第　1　問

$a,\ b,\ c$ を相異なる数，$x,\ y,\ z$ を連立方程式

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

の根とするとき，$a^3+b^3+c^3$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。

第　2　問

平面上に 2 つの曲線

$$y=x^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$y=3x^2+24x+50 \qquad \cdots\cdots(2)$$

がある。このとき 1 点 P をとり，曲線(1)の上の任意の点 A に対して，線分 AP を一定の比 $m:n\ (m>0,\ n>0)$ に内分する点 B が必ず曲線(2)の上にあるようにしたい。

点 P の座標 $(\alpha,\ \beta)$ と比 $m:n$ の値とを求めよ。

第　3　問

点 V を頂点とし，正方形 ABCD を底面とする四角錐 V − ABCD があって，その 4 つの側面はいずれも底辺 20 cm，高さ 40 cm の二等辺三角形である。

辺 VA 上に $\mathrm{VP} : \mathrm{PA} = 3 : 1$ なる点 P をとり，3 点 P, B, C を通る平面でこの四角錐を切るとき，切り口の面積を求めよ。

第　4　問

4 点 $\mathrm{A}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_2(1,\ 0)$, $\mathrm{A}_3(2,\ 2)$, $\mathrm{A}_4(0,\ 2)$ を頂点とする四辺形がある。この平面上に 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 をとって，

> 点 P_1 は $\mathrm{P}_4\mathrm{A}_4$ の中点，点 P_2 は $\mathrm{P}_1\mathrm{A}_1$ の中点，点 P_3 は $\mathrm{P}_2\mathrm{A}_2$ の中点，点 P_4 は $\mathrm{P}_3\mathrm{A}_3$ の中点

となるようにする。

4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 の座標および四辺形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積を求めよ。

第　5　問

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ と y 軸との交点を A とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2},\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}$$

を求めよ。

1963年　東大文系数学

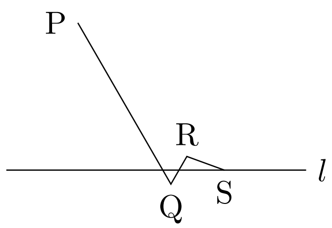
第　1　問

直方体の 1 つの頂点 O から出る 3 つの辺を OA, OB, OC とし，O から最も遠い頂点を D とする。$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とするとき，OD の長さを a, b, c で表せ。

また，$a=5$, $b=3$ のとき，c のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

P は平面上の定点，l はこの平面上の定直線で，P から l までの距離は $\sqrt{3}+1$ である。また，Q, R, S はこの平面上の動点で，S は l 上にあるものとする。PQ, QR, RS の長さはそれぞれ一定で，$2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-1$ に等しい。このとき R の動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



第　3　問

$$f(x)=\frac{4x-2}{5-x}\ (x\neq 5)$$

とするとき

(1)　$y=f(x)-x$ のグラフをかけ。

(2)　$f(x)-x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

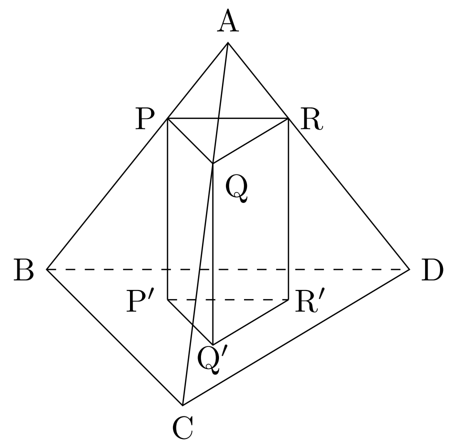
(3)　$f(x)>x$ となる x の範囲を求めよ。

第　4　問

一辺の長さ a の正四面体 ABCD の辺 AB, AC, AD の上に A から等距離にそれぞれ点 P, Q, R をとり，P, Q, R から面 BCD に下ろした垂線の足をそれぞれ P', Q', R' とする。

(1)　三角柱 $\mathrm{PQR}-\mathrm{P}'\mathrm{Q}'\mathrm{R}'$ の体積が最大になるときの AP の長さを求めよ。

(2)　この三角柱の体積の最大値 V_0 と正四面体 ABCD の体積 V の比 $\dfrac{V_0}{V}$ を求めよ。



第　5　問

平面上を運動する点があり，その x 座標，y 座標が時刻 t の函数として

$$x=f(t)=vt\cos\alpha,\quad y=g(t)=vt\sin\alpha-5t^2\quad \left(v>0,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられている。ある時刻 t_0 に $x=10,\ y=0$ となるとして，その時刻 t_0 における $x,\ y$ の変化率の 2 乗の和 $\{f'(t_0)\}^2+\{g'(t_0)\}^2$ を α の式で表せ。また，この式の値を最も小さくするような α の値を求めよ。

1962年　東大文系数学

第　1　問

2 次方程式 $x^2 - 2x\log_a b + \log_b a = 0$ が実根 α, β をもち，$0 < \alpha < 1 < \beta$ となるものとする。

このとき a, b, 1 の大きさの順序はどのようになるか。ただし a, b はいずれも 1 と異なる正の数とする。

第　2　問

$\triangle$ABC において $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$, $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2$ とする。点 B, C から直線 BC に関して A と同じ側に辺 BC に垂直な半直線 BX, CY を引く。半直線 BX，辺 AB, BC, CA，半直線 CY の上にそれぞれ点 P, Q, R, S, T をとり，

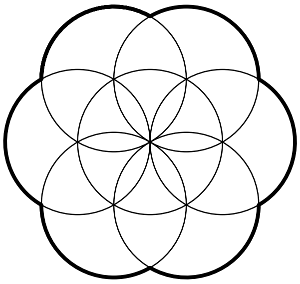
$$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{BC}, \quad \frac{\cos\angle\mathrm{BQP}}{\cos\angle\mathrm{AQR}} = \sqrt{2}, \quad \angle\mathrm{BRQ} = \angle\mathrm{CRS}, \quad \frac{\cos\angle\mathrm{CST}}{\cos\angle\mathrm{ASR}} = \sqrt{2}$$

となるようにする。

$\mathrm{BP} = x$, $\mathrm{CT} = y$ とするとき，x と y との間にはどのような関係式を成り立つか。

第　3　問

半径 a の円周を 6 等分する点のそれぞれを中心として，半径 a の円をえがくとき，これら 6 個の円がおおう範囲（図の太線で囲まれた範囲）の面積を求めよ。



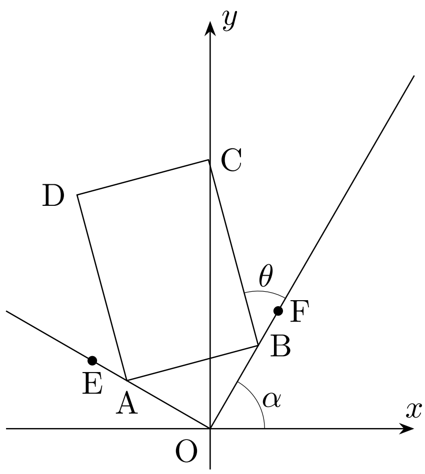
第　4　問

図のような xy 平面上の図形において，

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OF} = 1, \quad \angle\mathrm{EOF} = 90^\circ, \quad \tan\alpha = \sqrt{2}$$

とし，ABCD は $\angle\mathrm{EOF}$ の中にある長方形で $\mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{BC} = \sqrt{2}$ なるものとする。

この長方形の頂点 A が OE 上を E から O に向かって動き，頂点 B が OF 上を O から F に向かって動くとき，



⑴　$\angle\mathrm{CBF}$ を θ として頂点 C の座標を θ で表せ。

⑵　C はどのような曲線をえがくか。

第　5　問

1 つの頂点から出る 3 辺の長さが x，y，z であるような直方体において，x，y，z の和が 6，全表面積が 18 であるとき，

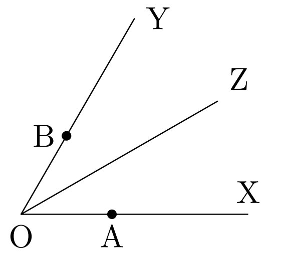
⑴　x のとりうる値の範囲を求めよ。

⑵　このような直方体の体積の最大値を求めよ。

1961年　東大文系数学

第　1　問

点 O で 60° の角をなす半直線 OX, OY と $\angle$XOY の二等分線 OZ があり，OX, OY 上に O から $1\,\mathrm{cm}$ の距離にそれぞれ点 A, B がある。いま動点 P, Q, R がそれぞれ A, O, B から同時に出発して半直線 OX, OZ, OY 上をそれぞれ毎秒 $1\,\mathrm{cm}$, $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $2\,\mathrm{cm}$ の速さで O から遠ざかる。



(i)　3 点 P, Q, R が一直線上にくるまでの時間

および

(ii)　$\triangle$PQR の面積が $\triangle$AOB の面積に等しくなるまでの時間

を求めよ。

第　2　問

x の 4 次式 $f(x)$ において

$f(-0.2) = 2.226,\quad f(-0.1) = 2.460,\quad f(0) = 2.718,\quad f(0.1) = 3.004,\quad f(0.2) = 3.320$

であるとき，$f'(0)$ を求めよ。

第　3　問

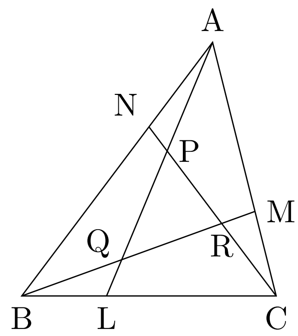
あたえられた半径 a の半球に外接する直円錐をつくり，その全表面積（側面積と底面積の和）をもっとも小さくするには，その高さをなにほどにすればよいか，ただし直円錐の底面は半球の底面とおなじ平面上にあるものとする。

第　4　問

$\triangle$ABC の 3 辺 BC, CA, AB の上にそれぞれ点 L, M, N をとり

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}} = \frac{1}{2}$$

となるようにする。AL と CN の交点を P，AL と BM の交点を Q，BM と CN の交点を R とするとき，$\triangle$PQR の面積と $\triangle$ABC の面積との比を求めよ。



第　5　問

曲線 $y = \sqrt{1+x^2}$ の上に 3 点 P, A, Q があり，その x 座標がそれぞれ $a-h$, a, $a+h$ $(h>0)$ であるとする。いま A を通り，x 軸に垂直な直線が線分 PQ と交わる点を B とし，線分 AB の長さを l とするとき，

$$\lim_{h \to 0} \frac{l}{h^2}$$

を a を用いて表せ。