E94084032 林柏廷

(a)

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&4&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\2&0&1\\-1&2&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\0&8&-1\\0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4&-1\\0&8&-1\\0&0&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rank = 3 #

(b)

$$\begin{bmatrix}2-\lambda&0&1\\-1&4-\lambda&-1\\-1&2&-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow(2-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)-2-(-(4-\lambda)-2(2-\lambda))$$

$$=(8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2)(-\lambda)-2+(4-\lambda)+2(2-\lambda)$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda-2+4-\lambda+4-2\lambda$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

(c)

$\lambda=1,3,2$ #

$\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&3&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$x_1=-x_3$

$x_1+x_3=0$

$-x_1+3x_2-x_3=0$

$-x_1+2x_2-x_3=0$

eigenvector $=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\lambda=3$

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&1&-1\\-1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$-x_1+x_3=0 \Rightarrow x_3=x_1$

$-x_1+x_2-x_3=0 \quad \frac{1}{2}x_2=x_1$

$-x_1+2x_2-3x_3=0$

eigenvector $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=2$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\-2&2&-1\\-1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$x_3=0$

$-2x_1+2x_2=0$

$-x_1+2x_2=0$

eigenvector $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$