

$$\vec{\nabla} := \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

(i) Gradient: $\vec{\nabla} f = \text{grad } f := \begin{pmatrix} \frac{\partial_x f}{\partial_x f} \\ \frac{\partial_y f}{\partial_y f} \\ \frac{\partial_z f}{\partial_z f} \end{pmatrix} = \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} f + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} f + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} f$

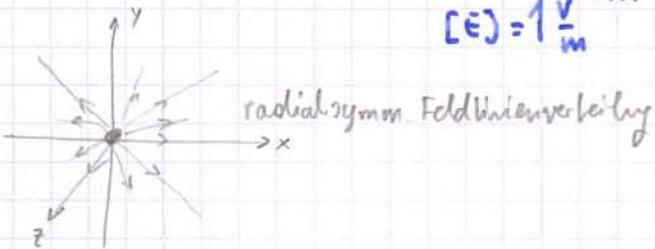
(ii) Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_x} \\ \frac{\partial_y}{\partial_y} \\ \frac{\partial_z}{\partial_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$

(iii) Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_x} \\ \frac{\partial_y}{\partial_y} \\ \frac{\partial_z}{\partial_z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$

• Elektrische Feldstärke:

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_P}{r_P^2}}$$

... elektrostatisches Feld einer Punktladung Q
 $[E] = 1 \text{ V/m}$



• Elektrische Potenzialfkt.:

$$\boxed{y(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_P}}$$

$[y] = 1 \text{ V}$

 $U_{PA} = y(P) - y(A)$

Aquipotentialflächen

- Elektrische Feldstärke als Gradient der Pot.fkt.

$$\boxed{\vec{E}(r_P) = -\nabla y(r_P) = -\left(\frac{\partial_x}{\partial_y}\right) y(r_P)}$$

• Dielektrische Verschiebungsdichte / Flussdichte:

$$\boxed{Q = \int D_n \cdot dA} \quad [D] = 1 \frac{C}{m^2} = 1 \frac{As}{m^2}$$

$$\boxed{\vec{D}(P) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}(P)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_P^2} \cdot \epsilon_r \cdot \vec{r}_P}$$

- Divergenz der el. Flussdichte

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z = \rho$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho} \quad \dots \dots \text{lokale Fassung des Satzes vom G.-H.F}$$

$$\boxed{\nabla(\rho V) = Q(V)} \quad \dots \text{globale Fassung}$$

- (magn. Flussdichte)
- MAGNETISCHE INDUKTION: (\Rightarrow el. Flussdichte)

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}(\rho)}$$

$$[B] = 1 \frac{Vs}{m^2}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{I}}{A} \cdot \vec{e}_{rp}}$$

- MAGNETISCHE FELDSTÄRKE: (\Leftrightarrow el. Feldstärke)

$$\boxed{\vec{H}(\rho)}$$

$$[\vec{H}] = 1 \frac{A}{m}$$

Elektrisches Feld

$$\vec{s} = \sigma \cdot \vec{e} \dots \text{Stromdichte}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \dots \text{Flussdichte}$$

$$\vec{E} = -\frac{dy}{dx} \vec{e}_x = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi \dots \text{el. Feldstärke}$$

$$\rho = \frac{dq}{dv} \dots \text{Raumlad. dichte}$$

σ ... Leitfähigkeit / el. Leitfähigkeit

ϵ ... Permittivität

- Materialgleich.:

$$(i) \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$(ii) \vec{s} = \sigma \cdot \vec{E} \dots \text{lokales Ohm. Gesetz}$$

- El. Fluss (Ψ in ET) $D = \frac{\Psi}{A}$

Magnetisches Feld

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \dots \text{mag. Flussdichte}$$

$$\vec{H} = \frac{V}{L} \cdot \vec{e}_B \dots \text{mag. Feldstärke}$$

V ... mag. Spannung

μ ... Permeabilität

$$\Phi \dots \text{Magna. Fluss} \quad B = \frac{\Phi}{A} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{\Psi}{A}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_B}$$

- Satz vom magna. Hüllefluss: $\Phi(\partial A) = 0$

- Durchflusssatz: $V(\partial A) = I(A) \dots \text{im stationären Fall}$



- Ampere-Harwell-Satz: $V(\partial A) = I(A) + \dot{\Psi}(A) \dots \text{Weinglers}$

- Induktionsgesetz: $U(\partial A) = -\dot{\Psi}(A)$

MAXWELL - GLEICHUNGEN

DIFFERENZIELLE FORM
(gültig in jedem Punkt
des Raumes)

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{dF} = \int_V \rho dV$$

$$\text{Satz vom el. HF:} \\ \Psi(\partial V) = \Phi(V)$$

$$[\![D_n]\!] \leftarrow \rho_S$$

Flächendichte

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{dF} = 0$$

$$\text{Satz vom magn. HF:} \\ \vec{\Phi}(\partial V) = 0$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dF}$$

$$\text{Induktionsgesetz:} \\ u(\partial A) = - \vec{\Phi}(A)$$

$$(iv) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{S} \cdot \vec{dF} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot \vec{dF}$$

$$\text{Durchflussgesetz:} \\ V(\partial A) = I(A)$$

$$\vec{S} = \vec{J} + \vec{V} \cdot \vec{D}$$

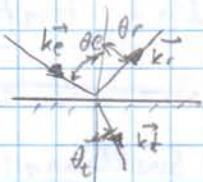
→ Verschiebstrom

ANMERKUNG, ETW

INTEGRALE FORM
(gültig in gro.
Räumen)

Reflexion an der Grenzfläche

- Reflektionsgesetz: $\boxed{\theta_e = \theta_r} = \theta_1$



- Snelliussches Brechungsgesetz:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n} \quad n \dots \text{relativer Brechungsindex'}$$

- Brewster-Winkel: Tener Winkel θ_B , bei dem der reflektierte Anteil wegfällt

$$\boxed{\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n}$$

- Bei diesem Winkel gilt $\Gamma_{TM} = 0$
- im TE-Fall gibt es keinen Brewster-Winkel

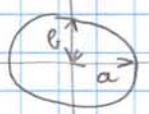
- Fresnelsche Formeln:

Formeln für

- Reflektionsfaktoren $\Gamma_{TM}, \Gamma_{TE} = f(n, \theta_1, \theta_2)$
- Transmissionsfaktoren $T_{TM}, T_{TE} = f(n, \theta_1, \theta_2)$

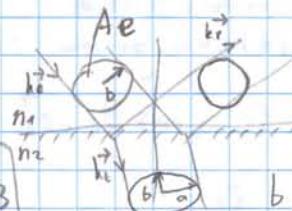
siehe Skriptum S39

- Ellipse:



a ... große Kollachse (AAAAng = alpha)
b ... kleine Kollachse "

$$\boxed{A = a \cdot b \cdot \pi}$$



$$\boxed{\text{Elliptizität: } \frac{a}{b} \text{ bzw. } 20 \lg \frac{a}{b} \text{ dB}}$$

b bleibt bei Transmission erhalten,
a mit Geometrie ausrechnen!

- Poynting-Vektor, Leistung der einfallenden Wellen

$$P_e = \int \int \vec{T}_e \cdot d\vec{A} = \|\vec{T}_e\| \cdot A_e = \boxed{\frac{E_e^2}{\eta_1} \cdot A_e = P_e}$$

$$\boxed{\vec{T}_e = \frac{1}{2} \vec{E}_e \times \vec{H}_e} \text{ kompl. Poyntingvektor}$$

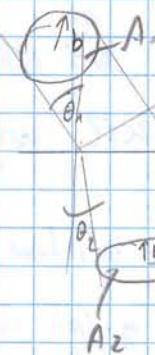
$$\text{mit } \boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \eta \cdot \vec{H}} \\ \Rightarrow \boxed{H = \frac{E}{\eta}}$$

• Beispiele lösen:

(a) Einfallss- / Australls- / Refl. Winkel:

- Brechungsgesetz Reflexionsgesetz
- Snelliussches Brechungsgesetz
- Brewster-Winkel θ_B annehmen und $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

(b) Querschnittsfläche von transm. Stahl berechnen:



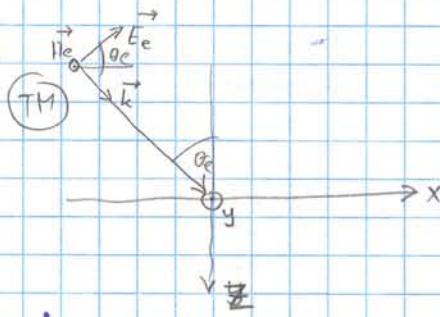
b bleibt gleich

a über Geometrie Lösen

Dann $A_2 = a \cdot b \cdot \pi$

(c) Leistungen $P_{TE,+}$ und $P_{TM,+}$ berechnen:

- (i) TE, TM Fall aufzeichnen und $E_{TE}^{\rightarrow} / H_{TE}^{\rightarrow}$
bzw. $E_{TM}^{\rightarrow} / H_{TM}^{\rightarrow}$ formal durch Vektoren-Zerlegung
ausdrücken, z.B.



- Koordinaten-system definieren
- Welle einzeichnen, dann Formel zusammenbauen :

$$E_e = E_e \cdot [\cos \theta_e \cdot e_1^{\rightarrow} + \sin \theta_e \cdot e_2^{\rightarrow}] \cdot e^{-j k_e \cdot \vec{r}} \cdot e^{j \omega t}$$

mit $H_e = \frac{E_e}{\eta_1}$ auch für He

→ FÜR TM UND TE machen

$E_{e,TM}^{\rightarrow} = \dots$	$H_{e,TM}^{\rightarrow} = \dots$
$E_{e,TE}^{\rightarrow} = \dots$	$H_{e,TE}^{\rightarrow} = \dots$

(ii) POYNING-Vektor für einfallende Welle:

$$T_c^{\rightarrow} = T_{e,TE}^{\rightarrow} + T_{e,TM}^{\rightarrow} = \left(\frac{1}{2} E_{e,TE}^{\rightarrow} \times H_{e,TE}^{\rightarrow} \right) + \left(\frac{1}{2} E_{e,TM}^{\rightarrow} \times H_{e,TM}^{\rightarrow} \right)$$

zusammenbauen

(ii) Leistung EINFÄLLEND:

$$P_E = \int_A \langle \vec{E} \cdot \vec{H} \rangle dA = \int_A \Re\{\vec{E}\} \cdot \vec{H} dA = |\vec{E}_E| \cdot A_E = \boxed{\frac{E_E^2}{\eta_1} \cdot A_E = P_E}$$

daraus $E_E = \dots$

$$\text{und } H_E = \frac{E_E}{\eta_1} = \dots$$

(iv) Mit $(\Gamma_{TE}, \Gamma_{TM}) T_{TE}, T_{TM}$ die (refl.) Transmittivitäten

Amplituden von E und H berechnen:

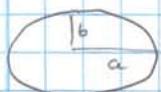
$$E_{t, TM} = T_{TM} \cdot E_E \quad \text{etc.}$$

$$H_{t, TM} = \frac{E_{t, TM}}{\eta_2}$$

(v) Transmittivierte Leistung:

$$P_t = P_{t, TM} + P_{t, TE} = \frac{E_{t, TM}^2 \cdot T_{TM}^2}{2} + \frac{E_{t, TE}^2 \cdot T_{TE}^2}{2}$$

(d) Elliptizität von transm./refl. Welle reduzieren:



$$\left(\frac{a}{b}\right) \text{ bzw. } 20 \cdot \lg\left(\frac{a}{b}\right) \text{ dB}$$

(e) Auf Leistungsberechnungen:

$$P_r = P_{r, TM} + P_{r, TE}$$

$$P_{r, TM} = \frac{\Gamma_{TM}^2 \cdot E_{EO}^2}{2\eta_1} \cdot A_1 = \boxed{\frac{\Gamma_{TM}^2 \cdot P_E}{2} = P_{r, TM}}$$

$$P_t = P_{t, TM} + P_{t, TE}$$

* gleiches für TE (Γ_{TM}, Γ_{TE})
und Transmission (Γ_{TM}, T_{TE})

Die Wellengleichung

Maxwell-Gleichungen



Medium: homogen, isokrop, linear, zeitinvariant
harmonische Vorgänge, Quellenfreiheit

HOMOGENE WELLENGLG. (FLÜCHTIGKEIT-GLG. F. HARM. VORGÄNGE)

$$\boxed{\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0} \quad \text{mit } k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \sigma}$$

$$\sigma = \epsilon' + j \cdot \epsilon''$$

Ψ ... beliebige Feldgröße (Pol. ad. Feldstärke)

$$\nabla^2 \dots \text{Laplace-Op.}, \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

= lineare partielle DG \Rightarrow

zur Lösung: SEPARATIONSANSATZ:

$$\boxed{\Psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)}$$

$$\text{Separationsbedingung: } k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 / \mu \cdot \sigma$$

\downarrow
 y, z
konstant halten

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu \sigma} \dots \text{verlustbeh. Med.}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \dots \text{verlustfr. Medium}$$

DG der Form

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + k_x^2 \cdot X(x) = 0 \quad \text{lösen}}$$

$$\downarrow$$

Mögliche Lösungen: $\hat{f}(k_x x) = \begin{cases} \sin(k_x x) \\ \cos(k_x x) \\ e^{-j k_x x} \\ e^{j k_x x} \end{cases}$ diese Ph. sind, LINEAR UNABHÄNGIG
 \Rightarrow auch L.K. dieser Ph. sind mögliche Lösungen

Allgemeine Lösung sieht immer so aus:

$$Y(x, y, z) = f(k_x x) \cdot g(k_y y) \cdot h(k_z z)$$

wobei f, g, h jeweils eine Ph. lt. $\hat{f}(k_x x)$ ist.

\rightarrow JEDER WELLENFKT. LASST SICH ALS L.K. FOLG. FKT ANSCHREIBEN:

$$\Psi(x, y, z) = e^{-jk_x x} \cdot e^{-jk_y y} \cdot e^{-jk_z z}$$

Die physikalische Bedeutung der jeweiligen Lösungen (S23):

(AUSBREITUNGSRICHTUNG z) $|jk_z = \alpha + j\beta \Rightarrow \beta - j\alpha = k_z|$

~~e^{-j k_z z}~~

$$jk_z = \gamma = \alpha + j\beta$$

Ausbreitungskonst. \uparrow Phasen = Ausbreitungskonst.

Dämpfungskonst.

$e^{-jk_z z}$

- k_z reell ... $e^{-j\beta z}$... Wanderwelle in $+z$
- k_z imag. ... $e^{-\alpha z}$... evanescentes Feld, abklingend
- \ k_z komplex ... $e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$... gedämpfte Welle

$e^{+jk_z z}$

w.o., nur in $-z$

$\sin(k_z z)$

- k_z reell ... $\sin(\beta z)$... stehende Welle

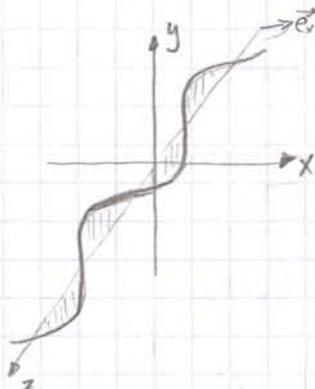
$\cos(k_z z)$

- k_z reell ... $\cos(\beta z)$... stehende Welle

BEISPIEL FÜR EINE LÖSUNG DER HOM. WELLENGLICHUNG:

EBENE, 1-DIM HARMONISCHE WELLE:

(verlustloses, ideales Medium)



Annahme: $E_y = 0$ (Welle in xz -Ebene, Ausbreitung in $+z$ -Richtung)

$$\vec{E}_x(z) = E_x(z) \cdot \vec{e}_x = \operatorname{Re} \{ E_0 \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{j\omega t} \} \cdot \vec{e}_x = \\ = E_0 \cdot \cos(\omega t - k_z z) \cdot \vec{e}_x$$

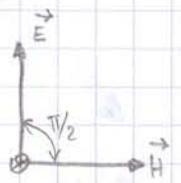
$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \left. \right\} N = \frac{\omega}{k_z} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$$

N ... Wellenzahl, ω ... Kreisfrequenz, v ... Phasengeschwindigkeit

POLARISATION

Ps Polarisierung beschreibt die Orientierung der elektrischen Feldvektoren

- Eine einzige HEW:



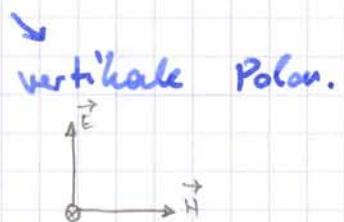
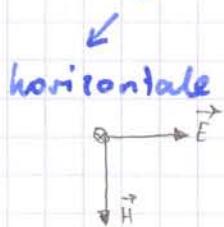
\vec{E} und \vec{H} stehen konstant im Winkel $\pi/2$ zueinander

- UNPOLARISIERTE WELLE:

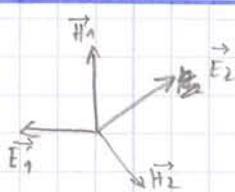
Mischung von mehreren HEWs mit beliebiger Orientierung, Größe und statisch verteilter Phase, wobei alle HEWs sich in selbe Richtung ausbreiten (z.B. Sonnenlicht).

- LINEAR POLARISIERTE WELLE:

NUR EINE HEW vorhanden \Rightarrow \vec{E} schwingt nur in einer Ebene



- ELLIPTISCH POLARISIERTE WELLE:



Zwei HEWs mit gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung, aber UNTERSCH. PHASE, AMPLITUDE und ORIENTIERUNG.

$$\text{Formal: } \vec{E}_1 = \vec{E}_x = \operatorname{Re} \{ [E_1 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y] \cdot e^{-jk_1 z} \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_y = \operatorname{Re} \{ [0 \cdot \vec{e}_x + E_2 \cdot \vec{e}_y] \cdot e^{-jk_2 z} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} \}$$

$$\downarrow \\ \vec{E}_1 = E_1 \cdot \cos [\omega t - k_1 z] \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \cos [\omega t - k_2 z + \varphi] \cdot \vec{e}_y$$

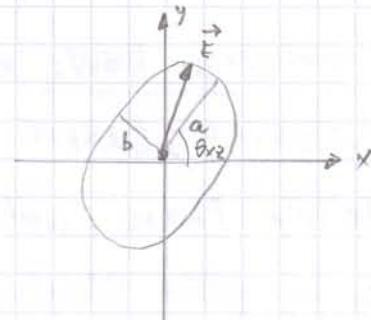


↓ für festen Ort (z.B. z=0)

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_1 \cdot \cos(\omega t) \\ E_y(t) &= E_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen für} \\ \text{Ellipse in xy-Ebene} \\ (\text{Parameter } t) \end{array} \right\}$$



\vec{E} bewegt sich i.A. entlang einer Ellipse:

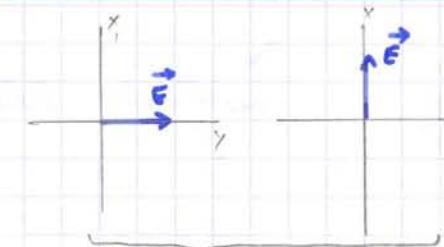


$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

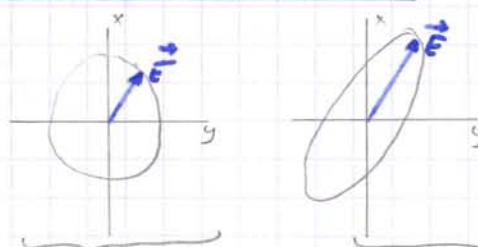
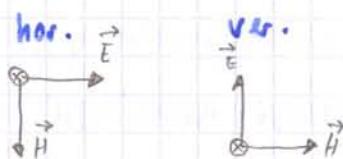
→ Beschreibung der Ellipse über:

- Elliptizität $\frac{a}{b}$ bzw. $20 \cdot \lg \left(\frac{a}{b} \right) \text{ dB}$
- Neigungswinkel θ zu Bezugsebene
- Händigkeit/Chiralität (rechts/RHC bzw. links/LHC)

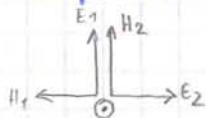
⇒ POLARISATIONSZUSTÄNDE EBENEN WELLEN:



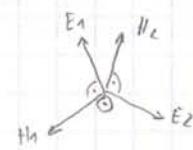
LINARE POLARISATION
(Elliptizität = 0)



ZIRKULARE POL.
(Elliptizität = 1/0dB)

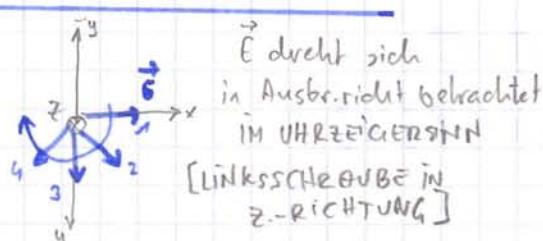


ELLIPT. POL. (ALLG.)

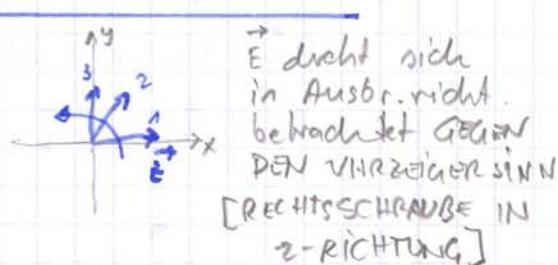


"ZIRKULAR POLARISIERTE WELLE": Spezialfall der ell. Pol. (siehe oben)
mit Elliptizität = 1

RECHTSZIRKULARE POL.



LINKSZIRKULARE POL.



Freier Raum, verlustlose Medien, VERLUSTBEHAFFTE MEDIEN

$$\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$$

$$\frac{1}{V_H} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \omega = 3.10^8 \frac{m}{s}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = k$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{f_{\text{carrier}}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 377 \Omega$$

VERLUSTLOSE MEDIEN

$$\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$$

$$V_H = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \omega = 3.10^8 \frac{m}{s}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = k_E$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{f_{\text{carrier}}}$$

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}} = Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

VERLUSTBEHAFFTE MEDIEN

$$\begin{array}{l} \epsilon_r \neq 1, \mu_r \neq 1 \\ \mu_r = 1 \\ \epsilon_r > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon_r \neq 1, \mu_r \neq 1 \\ \mu_r < 1 \\ \epsilon_r > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon_r \neq 1, \mu_r \neq 1 \\ \mu_r > 1 \\ \epsilon_r < 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon_r \neq 1, \mu_r \neq 1 \\ \mu_r = 1 \\ \epsilon_r < 1 \end{array}$$

$$\alpha \neq 0, \beta = \omega \sqrt{\mu_r - \epsilon_r}$$

$$\rightarrow jk_E = \gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow k_E = \beta - j\gamma$$

he wird komplex reell

$$jk_E = jk_E \sqrt{1-s}$$

$$\rightarrow \gamma = R + jX = \eta_E \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

γ wird komplex reell

\hookrightarrow QUASIDIETRIKUM ($\alpha \gg 1$)

\hookrightarrow QUASILEITZEN ($\alpha \ll 1$)

Eindringtiefe: JENE Tiefe im QUASILEITER,
in der die Feldstärke auf den e^{-1} -

faktor Wert abgesunken ist

$$d = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{k_E} \sqrt{\frac{2}{s}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \epsilon_0}}$$

FELDKOMPONENTEN RECHNEN

(HOLLOW LEITER, HOLLOW RADIATOR, PARALLELPL.)
TE, TM

1. TE oder TM ? Welche aufgespaltete Helmholtz-Gl. ?

$$TE: E_z = 0 \Rightarrow \nabla^2 H_t + k_0^2 H_t = 0$$

$$TM: H_z = 0 \Rightarrow \nabla^2 E_z + k_0^2 E_z = 0$$

2. Separationsansatz / Sep. Bedingungen:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\begin{aligned} k_c^2 &= k_x^2 + k_y^2 && \text{bei Ausbr. in } \vec{e}_z \\ &= k_y^2 + k_z^2 && \text{bei Ausbr. in } \vec{e}_x \\ &= k_x^2 + k_z^2 && \text{bei Ausbr. in } \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_{\perp}^2 = k_c^2 + k_z^2$$

\Rightarrow in $k_0^2 = k_x^2 + k_y^2$ einsetzen; wenn z.B. bekannt, dass es keine Wellen fließt in x-Richtung $\Rightarrow k_x = 0$

keine Begrenzung in x-Richtung \rightarrow kein k_x
 $e^{j k_x x}$.

$$\text{z.B. } k_z^2 = k_c^2 + k_x^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Hinweis: $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k_x^2 + k_z^2$

DISPERSIONSRELATION / CUT-OFF

HINWEIS: Hiermit kann man ~~CUT-OFF-FREQUENZ~~ errednen:

$$k_c^2 = \omega_c^2 \cdot \sqrt{\mu \epsilon} = \text{z.B. } k_x^2 \quad 2\pi f_c = \omega_c \dots \text{CUT-OFF-FR.}$$

$$\text{Disp.} = k(\omega)$$

3. Ansatz: Form:

$$A_z = (E_z \vee H_z) = [A \cdot \sin(k_x \cdot x) + B \cdot \cos(k_x \cdot x)] [C \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot \cos(k_y \cdot y)]$$

bei Ausbr. in z-Richtung

4. Randbedingungen:

$[\vec{E}_t] = \vec{0}$ an metallischen Rändern ansetzen,

$$\text{z.B. } E_z|_{y=0} = 0 \text{ etc.}$$

5. Mit Randbedingungen Koeff. / Moden bestimmen:

TE: $E_z = 0 \Rightarrow$ Wir verwenden DGL. in $H_z : \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$
d.h. wir brauchen Randbed. in H_z

↓

$$\text{Wenn } E_z|_{y=0} = 0 \quad E_z|_{x=0}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$$

TM: $H_z = 0 \Rightarrow$ Wir verwenden DGL in $E_z : \nabla_x^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$
und können Randbed., z.B.

$$E_z|_{y=0} \text{ direkt verwenden.}$$

Alle Koeff. / Moden bed. bestimmen

(a) $x=0 \rightarrow$ Gl. ansetzen \rightarrow 1. Koeff. bestimmen

(b) $y=0 \rightarrow$ $\dots \rightarrow$ 2. $\dots \rightarrow$

(c) $x=a \rightarrow$ $\dots \rightarrow$ 1. Modenbed. $\dots \rightarrow$

(d) $y=b \rightarrow$ $\dots \rightarrow$ 2. Modenbed. $\rightarrow \dots$

6. Lösung für E_z / H_z ausrechnen

7. Bestimmy der Transversalkomp. mittels

$$\vec{H}_t = -\frac{V}{k_c} \cdot \vec{\nabla}_t H_z \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}_t = -\frac{V}{k_c} \cdot \vec{\nabla}_t E_z$$

TE:

↓

H_x, H_y bestimmen
durch Koeff.-vergleich

TM:

↓

E_x, E_y bestimmen durch
Koeff.-vergleich

8. Fehlers von (E auf H) oder von (H auf E) umrechnen:

TE: H-Komp. vorh.,

$$\vec{E}_t = Z_E (\vec{H} \times \vec{e}_z)$$

$$Z_E = j \frac{w_M}{g} \quad \uparrow \text{Ausbr.richtig}$$

TM: E-Komp. vorh.,

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_{TM}} [\vec{e}_z \times \vec{E}_t]$$

$$Z_{TM} = \frac{V}{j w E}$$

9. Anpassen
der Sep. bed. an
Rand?

Modenbed. in
 $E_z^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$ setzen

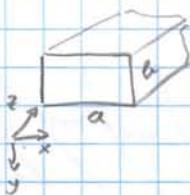
RECHTECKHOHLEITER

- Ansätze zur Lösung der WG:

$$\rightarrow TE: E_z = 0 \Rightarrow H_z = A \cdot \cos(k_x \cdot x) \cdot \cos(k_y \cdot y) \cdot e^{-jk_z z}$$

$$\rightarrow TH: H_z = 0 \Rightarrow E_z = A \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot e^{-jk_z z}$$

mit $k_x = \frac{m \cdot \pi}{a}$, $k_y = \frac{n \cdot \pi}{b}$



- Separationsbedingung:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 / \mu \cdot \epsilon$$

- Cut-Off-Frequenz für bestimmten Modus:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 = \omega_c^2 / \mu \cdot \epsilon$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon} \cdot \left[\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 \right]} = \omega_c$$

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m \pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{2b}\right)^2} =$$

$$= \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}$$

- Cut-Off-Wellenlänge: $\lambda_c = \frac{c}{f_c}$ VORSICHT! $c \neq c_0$!

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{c,mn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2}}$$

- Hohlleiterwellenlänge:

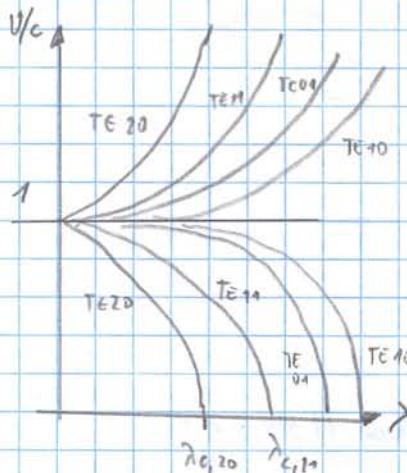
$$\lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c,mn}}\right)^2}}$$

λ - freie Wellenlänge

• Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit, Dispersion

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda_H} = \frac{\lambda_H \cdot c_0}{\gamma} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{c,mm})^2}}$$

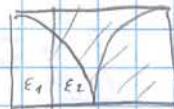
$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \left(\frac{d\omega}{d\lambda} \right)^{-1} = \dots = c_s \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{c,mm})^2}$$



• Rechteckwellenleiter mit Kunststoffferrit:

(i) Welcher Modus ist gefragt? Meint TE10

→ Feldbild einzeichnen



Jetzt Ansätze bilden & von links/von rechts
(auf Koord.-system und Skrift achten)!

(ii) Separationsbedingungen: Für alle Bereiche getrennt ansetzen:

$$k_z^2 = k_{x1}^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad \text{bei } TE_{10} \quad k_y = 0$$

$$k_z^2 = k_{x2}^2 + k_z^2$$

$$\Rightarrow \omega \cdot \mu_1 \cdot \epsilon_1 = k_{x1}^2 + k_z^2$$

$$-\underline{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 = k_{x2}^2 + k_z^2}$$

$$\underline{\underline{\omega^2 [\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2] = k_{x1}^2 - k_{x2}^2}}$$

Das ist eine Randbed. für 2 Unbekannte (k_{x1}, k_{x2})

2. Randbedingung aus Sprungbed. an Grenzfläche ermitteln →

(iii) Sprungbedingungen an Grenzfläche (Luft/Dich.):

$$[\vec{E}_t] = \vec{0} \Rightarrow E_{y1} = E_{y2} \rightarrow \text{Formeln einsetzen}$$

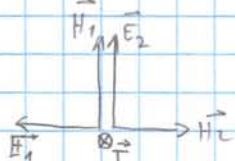
$$[\vec{H}_t] = \vec{0} \Rightarrow H_{z1} = H_{z2} \rightarrow \text{Formeln einsetzen}$$

aus beiden Gleichungen etc.
schöne brauen
(mit tan etc.)

• Zirkuläres Drehfeld $\hookrightarrow (\vec{H})$ im Grundmodus suchen:

Was ist über zirk. Pol. bekannt? 2 Helix, orthogonal, Vektoren haben gleiche Länge (Betrag gleich)

\Rightarrow



\Rightarrow suche jene H-Komponenten, die orthogonal aufeinander stehen.

(in Modellen Lösungen ist meist $H_y = 0$)

\Rightarrow finde z.B. (H_x, H_z)

jetzt $|H_x| = |H_z|$ aufstellen und nach Ortsvariablen auflösen.

Hohlraumresonator

• Resonanzfrequenz:

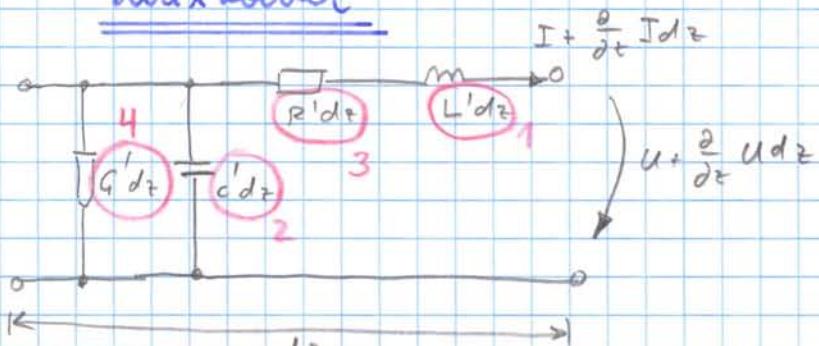
über Sep. Bedingung rechnen

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 = \omega_r^2 / \mu_r$$

• Unbelastete Größe

$$Q_0 = \frac{\pi \cdot \eta}{2 \cdot R_M} \cdot \frac{b \cdot (a^2 + c^2)^{3/2}}{ac(a^2 + c^2) + 2b(a^2 + c^2)^{3/2}}$$

Werkstoffkartei



• Ind. belag:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \quad 1$$

• Kap. belag:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\rho_n(r_o/r_i)} \quad 2$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \eta \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

• Eindringtiefe:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_{\text{rel}} \cdot \delta}}$$

• Widerstandsbelag: $R_D = \frac{1}{\sigma \cdot d} \rightarrow R' = R_D \cdot \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_o} \right] \quad 3$

• Dämpfung:

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_G$$

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_G \quad 4 \Rightarrow \alpha = \alpha_R = \frac{R'}{2\sqrt{\frac{L'}{C'}}} \quad \text{in } \frac{N_p}{m}$$

$$\alpha_G = \frac{G' \cdot Z_L}{2}$$

• Ableitungsbetrag:

$$G' = \omega \cdot C' \cdot \tan \delta \quad 4$$

• Reflexionsfaktor (wenn Abschlusswid. am Ende): $\rho_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Voraussetzung: $R' \ll \omega L'$ (Leiterdurchm. \gg Eindringtiefe)

PARALLELPLATTENLEITUNG

- Ansätze für Lösung der DG:

(TH): $H_z = 0 \rightarrow E_z = A \cdot \sin(k_y \cdot y) \cdot e^{-j k_z \cdot z}$

(TE): $E_z = 0 \rightarrow H_z = A \cdot \cos(k_y \cdot y) \cdot e^{-j k_z \cdot z}$

(TEh): $(H_z = 0) \wedge (E_z = 0) \Rightarrow [E_E] = \vec{0} \Rightarrow$ Metallflächen: $E_x = 0$

\downarrow

$\left. \begin{array}{l} \\ H_y = 0 \end{array} \right\}$

keine NODEN

Bei TE \rightarrow

DAHIER KEINE

$$E_y = E_0 \cdot e^{-j k_z \cdot z}$$

$$H_x = -\frac{E_0}{Z} \cdot e^{-j k_z \cdot z}$$

cos/sin-fkt.

- Separationsbedingungen:

Wie dünner: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$

- Bei TE, TH: $k_x = 0$, $k_y = \left(\frac{m \cdot \pi}{d}\right) \rightarrow k^2 = \left(\frac{m \cdot \pi}{d}\right)^2 + k_z^2$

- Bei TEh: $k_x = 0$, $k_y = 0 \rightarrow k = k_z$

- Mediumswiderstand, Leitungswellenwid., Grenzfrequenz ω :

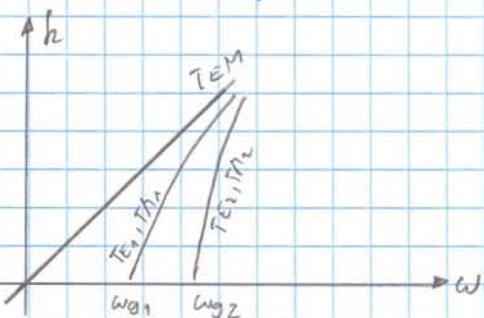
$$\gamma = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\epsilon_0}} \dots \text{Mediumswid.}$$

$$Z_{W,m} = \frac{E_t}{H_t} \dots \text{Verhältnis der transvers. Feldkomp. = Leit.wellenwid.}$$

$$\gamma_{c,m} = 0 \text{ für TEM}$$

$\gamma_{c,m}$ für TE, TH über k_c und Sep. bed. ermitteln

- Dispersionsdiagramm



Noden:

- ↓ TEM
- ↓ TE₁, TM₁
- ↓ TE₂, TH₂
- ↓ ;

ANTENNEN

- Richtcharakteristik:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{|\mathbf{E}_{\text{V}}(\vartheta, \varphi)|}{|\mathbf{E}_{\text{V}}(\vartheta, \varphi)|_{\max}} = \frac{|\mathbf{H}_{\text{G}}(\vartheta, \varphi)|}{|\mathbf{H}_{\text{G}}(\vartheta, \varphi)|_{\max}}$$

- Äquivalenter Raumwinkel:

$$\Omega_a = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\mathbf{P}(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

- Direktheit:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_a}$$

- Antennengewinn:

$$G_{\text{REF}}(\text{DUT}) = \frac{\left[\frac{|\mathbf{E}_{\text{V,DUT}}|^2_{\max}}{P_{\text{L,DUT}}} \right]}{\left[\frac{|\mathbf{E}_{\text{V,REF}}|^2_{\max}}{P_{\text{L,REF}}} \right]} = \frac{P_{\text{L,REF}}}{P_{\text{L,DUT}}} \cdot \frac{|\mathbf{E}_{\text{V,DUT}}|^2_{\max}}{|\mathbf{E}_{\text{V,REF}}|^2_{\max}}$$

} Leistungsverhältnis



$$G_{\text{iso}}(\text{DUT}) = D(\text{DUT})$$

$$G_{\text{HD}}(\text{DUT}) = \frac{2}{3} G_{\text{iso}}(\text{DUT}) \Rightarrow G_{\text{iso}}(\text{HD}) = \frac{3}{2} \stackrel{!}{=} 1,76 \text{ dBi}$$

- Zusammenhang zwischen WIRKSAMER ANT. FLÄCHE UND GEWINN:

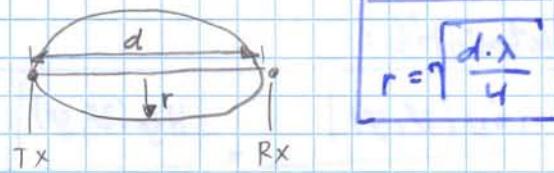
$$G_{\text{iso}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot W \quad \text{W... Flächenwirkungsgrad}$$

- EIRP (Equivalent Isotropically Radiated Power):

$$\boxed{EIRP = P_{\text{L}} \cdot G_{\text{iso}}}$$

RICHTFUNK

- 1. Fresnel-Ellipsoid:



$$r = \sqrt{\frac{d \cdot \lambda}{4}}$$

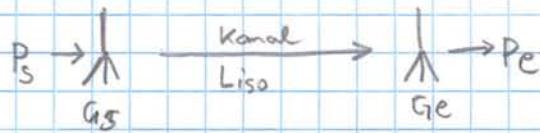
- Rayleigh-Distanz:

$$r_R = \frac{2D^2}{\lambda}$$

D... größte Abmessung
der Antenne, z.B.



- Link-Budget-Rechnung:



Empfangene Sendeleistung

$$P_e = T_e \cdot A_e = \frac{P_s \cdot G_s}{4\pi d^2} A_e$$

$$P_{e, \text{dB}} = P_{s, \text{dB}} + G_{s, \text{dB}} - L_{\text{iso}} + G_{e, \text{dB}}$$

Grundstreckendämpfung
zwischen 2 isotropen
Antennen ($G_s = G_e = 1$)

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{\text{iso}}$$

Wirksame
Ant.fläche
am Empfänger

$$L = 10 \cdot \lg \left[\frac{P_e}{P_s} \right] \text{ dB}$$

Streckendämpfung

- Bei Empfänger:

$$P_{e, \text{dB}} = SNR_{\text{dB}} + P_{n, \text{dB}}$$

$$P_n = k_b \cdot T \cdot B = 290 K \cdot k_b \cdot B \cdot F$$

bzw. $P_{n, \text{dB}} = 10 \cdot \lg [k_b \cdot T \cdot B] =$

$$= -174 \frac{\text{dB}}{\text{Hz}} \text{dBHz}^{-1} + 10 \cdot \lg [B] \text{dBHz} + 10 \cdot \lg [F] \text{dB}$$

F... Rauschzahl

B... Bandbreite

k_b ... Boltzmann-K.

RADAR

- Radargleichung:

$$\frac{P_e}{P_s} = G \cdot G_s \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi d^4}$$

= G^2 für MONOSTAT. RADAR = gelbe Sende- und Empfangsant.

5... Streuquerschnitt (abh. von Orientierung des Ziels)

- Retroreflektor (z.B. kleiner Metallstück):

$$G = A \cdot G$$

A ... wirksame Fläche des Reflektors

METHZWEG-AUSBREITUNG (2 Wellen, gleiche f/bzw λ)

- Empfänger bewegt sich um seinen Standort (\rightarrow SCHWUND):

$$\Delta t_{\text{Notch}} \approx \lambda/2$$

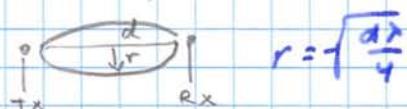
- Schwund durch Reflexion:

$$\Delta f_{\text{notch}} = \frac{1}{\Delta t}$$

Δt ... Laufzeitunterschied der beiden Wellen

- Bedingung für LOS (Line-of-Sight) - Verbindung:

1. Fresnel-Ellipsoid muss frei sein



- Notch-Frequenzen (ausgelöschte/gedämpfte Frequenzen):

