

Wellenausbreitung

Theoriefragen

Prüfungsbeispiele + Lösungen

von
René Repp

Wien, 14. Mai 2010

VERSION 2 (Jänner 2015)

1. Welcher grundsätzliche Zusammenhang (Proportionalität) besteht zwischen Empfangsleistung und Sendeleistung als Funktion der Distanz bei leitungsgeführter Strahlung und bei Freiraumausbreitung?
2. Wie hängt die in Dezibel ausgedrückte Dämpfung eines Wellenleiters mit seiner Länge zusammen? Welche Dämpfung hat ein unter optimalen Bedingungen eingesetztes, 100 km langes Stück Glasfaserleitung?
3. Nennen Sie je zwei Vor- und Nachteile von Freiraumausbreitung im Vergleich zur Übertragung über Leitungen!
4. Nennen Sie drei wesentliche Vorteile der drahtlosen Übertragung!
5. Schreiben Sie die vier Maxwellgleichungen in differentieller Form an!
6. Schreiben Sie die vier Maxwellschen Gleichungen für harmonische Vorgänge in komplexer Schreibweise an! Es sei Ladungsfreiheit angenommen. Verwenden Sie wenn möglich lediglich \vec{E} und \vec{H} .
7. Aus welchen Komponenten setzt sich die Gesamtstromdichte in einem Quasidielektrikum zusammen?
8. Wie lautet die Kraftgleichung für ein Elektron, auf welches sowohl eine elektrostatische als auch eine Lorentz-Kraft einwirkt?
9. Was bedeutet der Begriff "effektive Ladungsfreiheit"? Durch welche Formel wird die dielektrische Relaxationszeit τ_D angegeben und wie groß ist diese näherungsweise bei Kupfer?
10. Was ist die Kontinuitätsgleichung? (Erklären Sie die auftretenden Größen und geben Sie ihre Einheiten an!)
11. Wie sind die Poyntingvektoren \vec{P} und \vec{T} definiert? Wie berechnet man aus \vec{T} die Wirkleistungsflussdichte?
12. Wie sind die Poyntingvektoren \vec{P} und \vec{T} definiert? Wie berechnet man daraus die Blindleistungsflussdichte?
13. Wie lautet der Satz von Poynting (Erhaltung der elektromagnetischen Energie)?
14. Was beschreibt der Imaginärteil der Wellenzahl k_z bei einer sich in z -Richtung ausbreitenden Welle?
15. Was geben Wellenzahl und Kreisfrequenz an?

16. Wie groß ist die Wellenlänge einer sich im Vakuum ausbreitenden HEW mit $f = 1 \text{ GHz}$?
17. Wie lautet der allgemeine Lösungsansatz der eindimensionalen homogenen Wellengleichung?
18. Wie sieht der Separationsansatz für eine von den Koordinaten x, y, z abhängige Wellenfunktion aus?
19. Beschreiben Sie stichwortartig drei Depolarisationsmechanismen bei der Funkübertragung!
20. Was ist der Brewsterwinkel und unter welchen Bedingungen tritt er auf?
21. Eine TM Welle möge auf eine Grenzschicht zwischen Vakuum ($n_1 = 1$) und Fensterglas ($n_2 = 1,5$) auftreffen. Geben Sie den Brewsterwinkel im Vakuum und im Glas an!
22. Wie ist die Eindringtiefe in einen Quasileiter definiert? Wie hängt sie von der Frequenz und der Leitfähigkeit ab? Erklären Sie alle verwendeten Größen und geben Sie ihre Einheiten an.
23. Wie schreibt man die komplexe Dielektrizitätskonstante δ zweckmäßig bei Ohmschen Verlusten und bei Umpolarisierungsverlusten an?
24. Was verstehen Sie allgemein unter dem Grundmodus eines beliebigen Wellenleiters?
25. Wann sind zwei Wellentypen entartet? Was ist ein Modus?
26. Geben Sie den Leitungswellenwiderstand Z_{PV} der Parallelplattenleitung an! Erklären Sie alle Größen und nennen Sie deren Einheiten!
27. Skizzieren Sie, wie das elektrische und das magnetische Feld einer Parallelplattenleitung praktisch (d. h. ohne Idealisierungen) aussieht!
28. Was ist der Grundmodus des Rechteckhohlleiters?
29. Wie hängen in einem Rechteckhohlleiter die Phasengeschwindigkeit v_P und die Gruppengeschwindigkeit v_G von der Grenzwellenlänge ab?
30. Wie lautet die Formel für die Hohlleiterwellenlänge λ_H im Rechteckhohlleiter (die Grenzwellenlänge λ_G sei bekannt)?
31. Ist in einem Rechteckhohlleiter ($a = 3 \text{ cm}, b = 1,8 \text{ cm}$) bei den Frequenzen 1 GHz und 10 GHz Wellenausbreitung möglich (Begründung, welche Moden)?

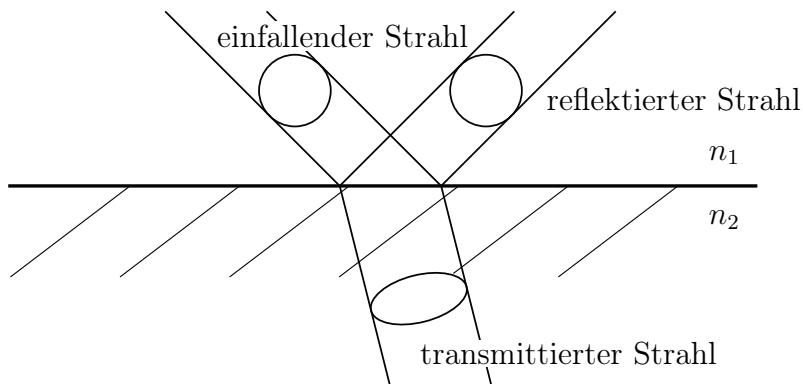
32. Skizzieren (und beschriften!) Sie den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Phasen/Gruppengeschwindigkeiten beim Rechteckhohlleiter!
33. Zeichnen Sie das Dispersionsdiagramm einer TEM-Welle und einer TE₁₀-Welle! (Beschriftung, keine Zahlenwerte!)
34. Geben Sie den Grundmodus der Parallelplattenleitung, des Rechteckhohlwellenleiters und des Koaxialkabels an!
35. Skizzieren sie die Feldbilder des TEM-Modus für \vec{E} und \vec{H} in einem Koaxialkabel!
36. Wie hängen die dielektrischen Verluste in der Mikrostreifenleitung von der Frequenz ab? $\alpha_D \propto \omega^a$, $a = ?$ Ist das gut oder schlecht? Warum?
37. Erklären Sie die Unterschiede zwischen Dispersionsbegrenzung und Dämpfungsbegrenzung bei Nachrichtenübertragung über Wellenleiter!
38. Definieren Sie das Vektorpotential \vec{A} !
39. Wie lautet die Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung für das Vektorpotential \vec{A} bei bekannter Dichte der eingeprägten Ströme \vec{S}_e ? Zeichnen Sie eine Skizze der Geometrie!
40. Mit Hilfe welcher Größe (Name) unterscheidet man Nah- und Fernzone einer Antenne und welchen Wert hat sie (Formel)? Geben Sie Bedeutung und Einheit der verwendeten Größen an.
41. Welche Richtcharakteristik hat ein Hertz'scher Dipol? Welchen Gewinn hat er über dem Isotropstrahler?
42. Welche Eigenschaften kennzeichnen einen Hertz'schen Dipol?
43. Welche Feldkomponenten treten bei einem Hertz'schen Dipol in der Fernzone auf? (Skizze!)
44. Schreiben Sie zwei Definitionen des Antennengewinns an! Erklären Sie die verwendeten Größen und geben Sie ihre Einheiten an!
45. Geben Sie zwei praxisgerechte Verfahren für die Bestimmung des Antennengewinnes an (Skizze). Welche Länge muss das für die Messung verwendete Funkfeld haben?
46. Wie lautet der Zusammenhang zwischen wirksamer Antennenfläche und dem Antennengewinn für einen Flächenwirkungsgrad $w = 1$?

47. Skizzieren Sie die Stromverteilung und die Spannungsverteilung auf einem in der Mitte gespeisten Dipol der Länge λ !
48. Skizzieren Sie die Stromverteilung und die Spannungsverteilung auf einem in der Mitte gespeisten Dipol der Länge $\lambda/2$!
49. Skizzieren Sie die Stromverteilung und die Spannungsverteilung auf einem in der Mitte gespeisten Dipol der Länge $3\lambda/2$!
50. Was verstehen Sie im Laborjargon unter Kreuzpolarisation?
51. Welches Anwendungsgebiet hat eine Drehkreuzantenne?
52. Skizzieren Sie eine Drehkreuzantenne inklusive der Speiseleitung!
53. Nennen Sie fünf wichtige Eigenschaften von Antennen!
54. Nennen Sie zwei schmalbandige Antennen!
55. Nennen Sie zwei breitbandige Antennen!
56. Wie kann man die Bandbreite einer Antenne definieren?
57. Eine Antenne mit 4000Ω Fusspunktimpedanz soll mit einem Koaxialkabel von 50Ω Impedanz gespeist werden. Welche Aufgaben hat hierbei ein Anpassungsnetzwerk, und wo wäre es im Idealfall anzutreffen?
58. Was ist die Bedingung für eine Line-Of-Sight (LOS) Verbindung?
59. Was ist ein Weibull-Plot und wie sieht darin eine Rayleigh-Verteilung aus?
60. Welche Ausbreitungsphänomene werden durch eine Rayleigh- bzw. durch eine Rice-Verteilung beschrieben?

2 Übergang von Vakuum nach Glas (15%)

Name/Mat. Nr.: _____

Eine zirkular polarisierte Welle mit einem Querschnitt von $A = 3 \text{ mm}^2$ und einer Leistung von $P = 10 \text{ mW}$ wird unter dem Brewster-Winkel auf eine Grenzfläche zwischen Vakuum ($n_1 = 1$) und Glas ($n_2 = 1,6$) eingestrahlt.



2.1 (4%) Berechnen Sie Einfallswinkel θ_e , Reflexionswinkel θ_r und Austrittswinkel θ_t und zeichnen Sie diese in die Skizze ein!

2.2 (3%) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des transmittierten Strahls!

2.3 (8%) Berechnen Sie die Leistungen $P_{TE,t}$ und $P_{TM,t}$ der transmittierten Wellen!

$$2.1.) A_1 = 3 \text{ mm}^2, P_e = 10 \text{ mW}, \theta_1 = \theta_B$$

$$n_1 = 1, n_2 = 1.16$$

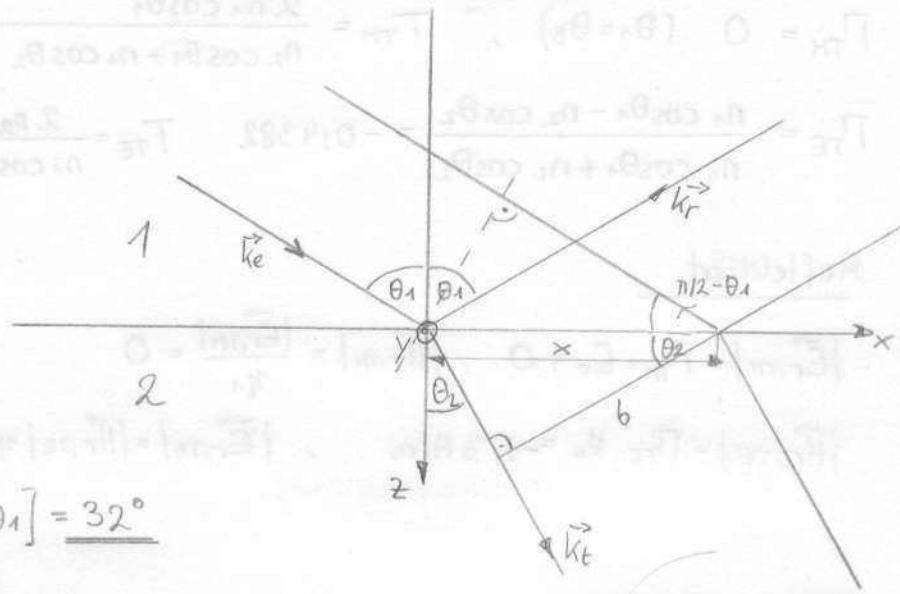
$$\theta_e = \theta_r = \theta_1$$

$$\theta_t = \theta_2$$

$$\tan \theta_B = \tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = n$$

$$\theta_1 = \arctan(n) = 5.8^\circ$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n \quad \theta_2 = \arcsin \left[\frac{1}{n} \sin \theta_1 \right] = 32^\circ$$



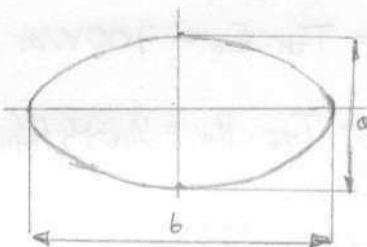
2-2.)

$$A_1 = r^2 \pi, \quad r = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}, \quad a = 2r = 2\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}$$

$$x \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_1) = x \cos \theta_1 = 2r$$

$$b = x \cos \theta_2 = 2r \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

$$A_2 = \frac{\pi a b}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A_1}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = A_1 \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = 4.8 \text{ mm}^2$$



$$2.3.)^* \text{ Elliptizität: Reflektiert } 20 \log \left(\frac{2r}{2r} \right) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Transmittiert } 20 \log \left(\frac{b}{a} \right) = 4.082 \text{ dB}$$

*... Punkte vom
nächsten Beispiel

2.2.)^{*}

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e,TH} + \vec{E}_{e,TE}$$

$$\vec{E}_{e,TH} = E_0 (\cos \theta_e \vec{e}_x - \sin \theta_e \vec{e}_z) e^{-j \vec{k}_e \cdot \vec{r}}, \quad \vec{E}_{e,TE} = j E_0 \vec{e} e^{-j \vec{k}_e \cdot \vec{r}} (-\vec{e}_y)$$

$$\vec{H}_e = \vec{H}_{e,TH} + \vec{H}_{e,TE}$$

$$\vec{H}_{e,TH} = \frac{E_0}{n_1} e^{j \vec{k}_e \cdot \vec{r}} \vec{e}_y, \quad \vec{H}_{e,TE} = j \frac{E_0}{n_1} (\cos \theta_e \vec{e}_x - \sin \theta_e \vec{e}_z) e^{-j \vec{k}_e \cdot \vec{r}}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}}$$

$$\vec{P}_e = \frac{1}{2} \vec{E}_e \times \vec{H}_e^* = \frac{1}{2} (\vec{E}_{e,TH} \times \vec{H}_{e,TH}^* + \vec{E}_{e,TE} \times \vec{H}_{e,TE}^*) = \vec{P}_{e,TH} + \vec{P}_{e,TE}$$

$$\vec{P}_{e,TH} = \frac{E_0^2}{2n_1} \vec{e}_e, \quad \vec{P}_{e,TE} = \frac{E_0^2}{2n_1} \vec{e}_e \quad \vec{P}_{e,TH} = \vec{P}_{e,TE}, \quad \vec{P}_e = \frac{E_0^2}{n_1} \vec{e}_e$$

$$P_e = \int_{A_1} \operatorname{Re}\{\vec{P}_e\} \cdot d\vec{A} = |\vec{P}_e| \cdot A_1 = \frac{E_0^2}{n_1} A_1 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{P_e n_1}{A_1}} = 1.12 \text{ kV/m}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{n_1} = 2.97 \text{ A/m}$$

$$\Gamma_{TM} = 0 \quad (\theta_1 = \theta_B) , \quad T_{TM} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = 0,625$$

$$\Gamma_{TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = -0,4382 \quad T_{TE} = \frac{2n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = 0,899$$

Reflektiert

$$|\vec{E}_{r,TM}| = \Gamma_{TM} \cdot E_0 = 0 , \quad |\vec{H}_{r,TM}| = \frac{|\vec{E}_{r,TM}|}{\eta_1} = 0$$

$$|\vec{H}_{r,TE}| = \Gamma_{TE} \cdot H_0 = -1,3 \text{ A/m} , \quad |\vec{E}_{r,TE}| = |\vec{H}_{r,TE}| \eta_1 = -490,3 \text{ V/m}$$

Transmittiert

$$|\vec{E}_{t,TM}| = T_{TM} \cdot E_0 = 700 \text{ V/m} , \quad |\vec{H}_{t,TM}| = \frac{|\vec{E}_{t,TM}|}{\eta_2} = 2,973 \text{ A/m}$$

$$|\vec{H}_{t,TE}| = T_{TE} \cdot H_0 = 2,674 \text{ A/m} , \quad |\vec{E}_{t,TE}| = |\vec{H}_{t,TE}| \eta_2 = 629,56 \text{ V/m}$$

2.3.)

$$\vec{P}_t = \vec{P}_{t,TM} + \vec{P}_{t,TE}$$

$$\vec{P}_{t,TM} = \frac{T_{TM}^2 E_0^2}{2 \eta_2} \vec{e}_t , \quad \theta_1 = \theta_B : \quad \cos \theta_1 = T_{TM} \cos \theta_2 , \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{1}{n} = T_{TM}$$

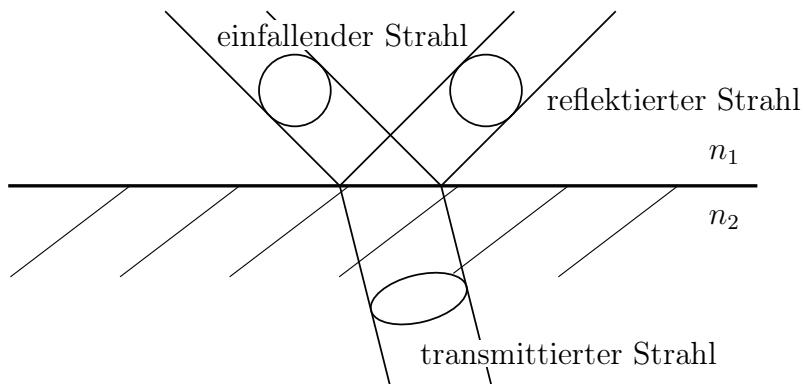
$$P_{t,TM} = \frac{T_{TM}^2 E_0^2}{2 \eta_2} A_2 = T_{TM}^2 P_{e,TM} \frac{n_1}{\eta_2} \frac{A_2}{A_1} = P_{e,TM} \cdot n \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \cdot \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} T_{TM} = P_{e,TM} = \frac{P_e}{2} = \underline{\underline{5 \text{ mW}}}$$

$$P_{t,TE} = \frac{T_{TE}^2 E_0^2}{2 \eta_2} A_2 = T_{TE}^2 P_{e,TE} n \frac{A_2}{A_1} = \underline{\underline{4,04 \text{ mW}}}$$

2 Übergang von Vakuum nach Glas (15%)

Name/Mat. Nr.: _____

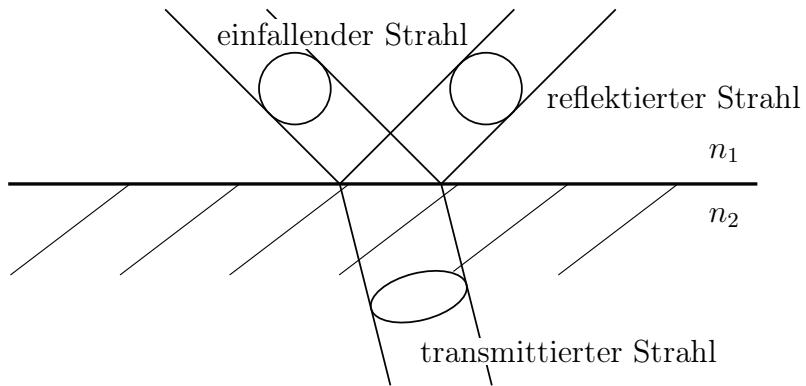
Eine zirkular polarisierte Welle mit einem Querschnitt von $A = 2 \text{ mm}^2$ und einer Leistung von $P = 1 \text{ mW}$ wird unter dem Brewster-Winkel auf eine Grenzfläche zwischen Vakuum ($n_1 = 1$) und Glas ($n_2 = 1,5$) eingestrahlt.



- 2.1** (4%) Berechnen Sie Einfallswinkel θ_e , Reflexionswinkel θ_r und Austrittswinkel θ_t und zeichnen Sie diese in die Skizze ein!
- 2.2** (7%) Berechnen Sie die TE und TM-Anteile (E und H) der reflektierten und der transmittierten Welle!
- 2.3** (4%) Berechnen Sie die Elliptizität der reflektierten und der transmittierten Welle in dB!

3 Polarisationsfilter (20%)

Ein Lichtstrahl der Sonne (unpolarisiert, aber TM, TE gleich stark) fällt zu später Stunde ($\theta_e = 75^\circ$) auf einen See ($n_2 = 1,33$). An der glatten Wasseroberfläche wird er reflektiert. Zwei Fotografen fotografieren diese Landschaft. Der zweite verwendet ein ideales Polarisationsfilter um die Reflexion der Sonne im Wasser zu unterdrücken.



- 3.1** (10%) Wie groß ist die (gesamte) reflektierte Lichtleistung im Verhältnis zur eingestrahlten (in dB)? Zeichnen Sie alle verwendeten Winkel ein.

- 3.2** (10%) Wie gut kann das ideal eingesetzte Polarisationsfilter des zweiten Fotografen die Reflexion im Vergleich zum ersten Fotografen unterdrücken (in dB)?

$$3.1.) \quad \theta_1 = 75^\circ, n_2 = 1,33, n_1 = 1$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{n}\right) = 46,57^\circ$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} = -0,3327$$

$$\Gamma_{TE} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} = -0,5587$$

$$P_e = \frac{E_o^2}{n_1} A_1 \quad (\text{siehe voriges Beispiel})$$

$$P_{r,TM} = \frac{\Gamma_{TM}^2 E_o^2}{2n_1} A_1 = \frac{\Gamma_{TM}^2}{2} P_e \quad \Rightarrow \quad P_r = P_{r,TM} + P_{r,TE} = \frac{P_e}{2} \left(\Gamma_{TM}^2 + \Gamma_{TE}^2 \right)$$

$$P_{r,TE} = \frac{\Gamma_{TE}^2 E_o^2}{2n_1} A_1 = \frac{\Gamma_{TE}^2}{2} P_e$$

$$10 \log\left(\frac{P_r}{P_e}\right) = 10 \log\left(\frac{\Gamma_{TM}^2 + \Gamma_{TE}^2}{2}\right) = -6,75 \text{ dB}$$

$$3.2.) \quad \text{TE-Filter: } P_{r,TM}=0 : \quad 10 \log\left(\frac{P_r}{P_e}\right) = 10 \log\left(\frac{\Gamma_{TE}^2}{2}\right) = -8,06 \text{ dB}$$

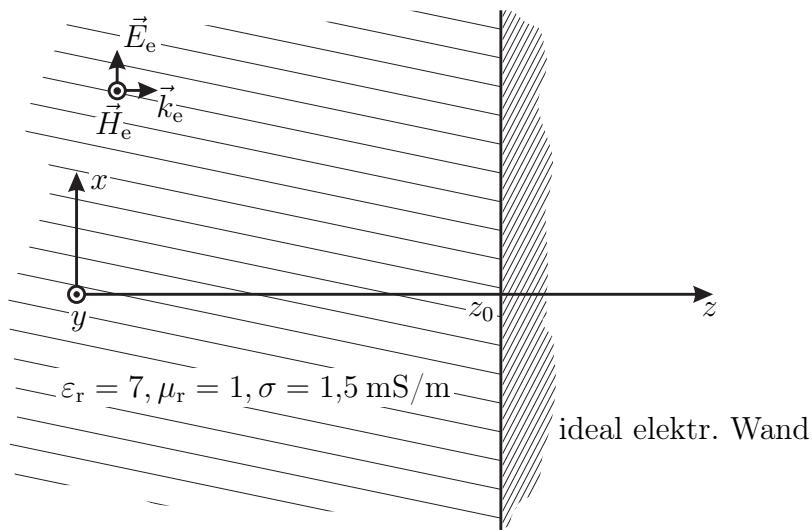
$$\text{TM-Filter: } P_{r,TE}=0 : \quad -" - = 10 \log\left(\frac{\Gamma_{TM}^2}{2}\right) = -12,57 \text{ dB}$$

$$5 \quad \text{max. Reflexionsdämpfung : } -6,75 \text{ dB} + 12,57 \text{ dB} = \underline{\underline{5,82 \text{ dB}}}$$

3 Stehende Welle im verlustbehafteten Medium (15%)

Eine sich im verlustbehafteten Medium (z.B.: trockener Erdboden) ausbreitende ebene Welle mit $f = 20 \text{ MHz}$ wird von einer auf die Ausbreitungsrichtung senkrecht stehenden metallischen Wand mit unendlicher Leitfähigkeit reflektiert (siehe Abbildung). Die Amplitude der einfallenden Welle bei $z = 0$ beträgt 5 V/m .

Hinweis: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$.



- 3.1 (1%) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit v_p ?
- 3.2 (4%) Setzten Sie die einfallende Welle an (\vec{E}_e und \vec{H}_e) und berechnen Sie die Wellenzahl k_e . Wie groß ist die Dämpfung in dB/m?
- 3.3 (2%) Berechnen Sie die komplexe Amplitude und den zeitlichen Verlauf der einfallenden Welle am Ort der metallischen Wand $z_0 = 8 \text{ m}$!
- 3.4 (4%) Finden Sie einen Ansatz für die reflektierte Welle (\vec{E}_r und \vec{H}_r)! Wie muss der zeitliche Verlauf der reflektierten Welle aussehen, damit die Randbedingungen erfüllt sind?
- 3.5 (4%) Berechnen Sie die Hüllkurve des Gesamtfeldes!

$$3.1.) \quad f = 20 \text{ MHz}, |\vec{E}_e(z=0)| = 5 \text{ V/m}, \epsilon_r = 7, \mu_r = 1, \sigma = 1.5 \text{ mS/m}$$

$$V_p = \frac{C_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \underline{1,134 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}}$$

$$3.2.) \quad \vec{E}_e = E_0 e^{-jk_2 z}, \quad E_0 = 5 \text{ V/m}$$

$$\vec{H}_e = \frac{E_0}{\eta} e^{-jk_2 z}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

$$jk_2 = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} = j\gamma = \alpha + j\beta, \quad \delta = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon(1 - js), \quad s = \frac{\sigma}{\epsilon \omega}, \quad k_E = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\alpha = k_E \sqrt{\frac{1 + s^2 - 1}{2}} = 0,1063 \text{ Np/m} = \underline{0,825 \text{ dB/m}}$$

$$\beta = k_E \sqrt{\frac{1 + s^2 + 1}{2}} = \underline{1,114 \text{ m}^{-1}}$$

$$3.3.) \quad \vec{E}_e = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{e}_x, \quad |\vec{E}_e(z=2_0)| = E_0 e^{-\alpha z_0} = \underline{2,136 \text{ V/m}}$$

$$\vec{E}_e(z_0, t) = E_0 e^{-\alpha z_0} \cos(\omega t - \beta z_0) \vec{e}_x$$

$$3.4.) \quad \vec{E}_r = -E_0 e^{-\alpha z_0} e^{\alpha(z-z_0)} e^{j\beta z} \vec{e}_x = -E_0 e^{\alpha(z-2z_0)} e^{j\beta z} \vec{e}_x$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_0}{\eta} e^{\alpha(z-2z_0)} e^{j\beta z} \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z=2_0) &= \vec{E}_e(z_0) + \vec{E}_r(z_0) = E_0 e^{-\alpha z_0} e^{-j\beta z_0} - E_0 e^{-\alpha z_0} e^{j\beta z_0} \\ &= E_0 e^{-\alpha z_0} [-2j \sin(\beta z_0)] \stackrel{!}{=} 0 \quad \underline{\beta z_0 = n\pi}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$3.5.) \quad \vec{E} \cdot \vec{E}^* = E_0^2 (e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - e^{\alpha(z-2z_0)} e^{j\beta z}) \cdot (e^{-\alpha z} e^{j\beta z} - e^{\alpha(z-2z_0)} e^{-j\beta z})$$

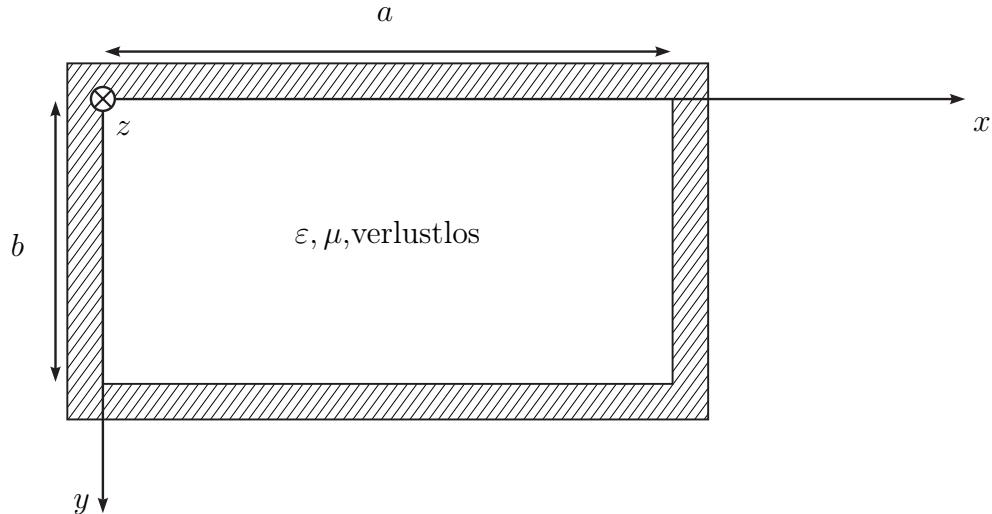
$$= E_0^2 (e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha z_0} e^{-j2\beta z} - e^{-2\alpha z_0} e^{j2\beta z} + e^{2\alpha(z-2z_0)})$$

$$= E_0^2 [e^{-2\alpha z} + e^{2\alpha(z-2z_0)} - 2 e^{-2\alpha z_0} \cos(2\beta z)]$$

2 Rechteckhohlleiter (20%)

Name/Mat. Nr.: _____

Untersuchen Sie die Ausbreitung von $\text{TE}_{m,n}$ Wellen in z Richtung im skizzierten Rechteckhohlleiter.



- 2.1 (6%) Finden Sie einen geeigneten Ansatz für die Komponenten der gewünschten Moden in Ausbreitungsrichtung, der die Wellengleichung erfüllt. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen.
- 2.2 (5%) Leiten Sie daraus die restlichen Feldkomponenten her und passen Sie an den Rand an! Welche Komponenten verschwinden?
- 2.3 (3%) Berechnen Sie die Hohlleiterwellenlängen, die Grenzwellenlängen und die Grenzfrequenzen aller gefragter Moden als Funktion von m und n ! Ist ein TEM Modus ausbreitungsfähig? Wieso? Wenn ja, welche Grenzwellenlänge bzw. Feldwellenwiderstand hat er?
- 2.4 (6%) Berechnen und skizzieren Sie das Dispersionsdiagramm für die TE_{10} , TE_{11} , TE_{20} Moden für $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $\epsilon_r = 3$, $\mu_r = 1$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$. Achten Sie auf die Beschriftung! Geben Sie die Grenzfrequenzen an! In welchem Frequenzbereich ist nur ein einziger Modus ausbreitungsfähig? Welcher?

$$2.1.) \text{ Ansatz: } E_2 = 0$$

$$H_2 = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j k_z z}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \underline{\underline{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon}}$$

2.2.) Modale Lösungen in kartesischen Koordinaten

$$E_x = \frac{-j}{k^2} (k_z \partial_x E_2 + \omega \mu \partial_y H_2) \quad H_x = \frac{-j}{k^2} (k_z \partial_x H_2 - \omega \epsilon \partial_y E_2) \quad \text{mit } x^2 = k^2 - k_z^2$$

$$E_y = \frac{-j}{k^2} (k_z \partial_y E_2 - \omega \mu \partial_x H_2) \quad H_y = \frac{-j}{k^2} (k_z \partial_y H_2 + \omega \epsilon \partial_x E_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = \frac{j \omega \mu}{k^2} \frac{n\pi}{b} A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j k_z z}}$$

$$E_y = \frac{-j \omega \mu}{k^2} \frac{m\pi}{a} A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j k_z z}$$

$$E_2 = 0$$

$$H_x = \frac{j k_z}{k^2} \frac{m\pi}{a} A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j k_z z}$$

$$H_y = \frac{j k_z}{k^2} \frac{n\pi}{b} A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j k_z z}$$

$$H_2 = A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$2.3.) \lambda_H = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}} , \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\rightarrow \lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2 \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]}}$$

$$\lambda_H \rightarrow \infty \text{ für } \lambda = \lambda_G : 1 - \lambda_G^2 \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right] = 0 \Rightarrow \lambda_G = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_G} \right)^2}}$$

$$f_G = \frac{c}{\lambda_G} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2}$$

Keine TEM-Wellen! Statisch/Stationärer Charakter des Transversalfeldes.
Leiterkontur = Potentielfläche \Rightarrow kein \vec{E} -Feld im Inneren!

$$2.4.) \quad V_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda_H} = \frac{\lambda_H c}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_H}\right)^2}}$$

$$V_G = \frac{d\omega}{dk_z} = \left(\frac{d\omega}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2k_z} 2\omega \epsilon_H \right)^{-1} = \frac{k_z}{\omega \epsilon_H k_H} = \frac{k_z}{k} c = \frac{\lambda}{\lambda_H} c = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_H}\right)^2}$$

mit $a=4\text{cm}$, $b=3\text{cm}$, $\epsilon_r=3$, $\mu_r=1$

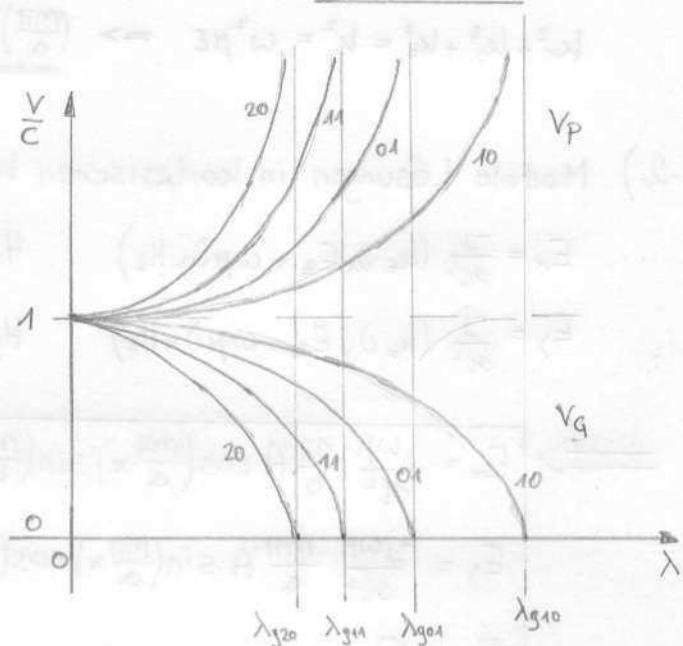
$$f_{g10} = c \cdot \frac{1}{2a} = 2,165 \text{ GHz}, \quad \lambda_{g10} = 8 \text{ cm}$$

$$f_{g01} = c \cdot \frac{1}{2b} = 2,887 \text{ GHz}, \quad \lambda_{g01} = 6 \text{ cm}$$

$$f_{g11} = c \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^2} = 3,608 \text{ GHz}, \quad \lambda_{g11} = 4,18 \text{ cm}$$

$$f_{g20} = c \cdot \frac{1}{a} = 4,33 \text{ GHz}, \quad \lambda_{g20} = 4 \text{ cm}$$

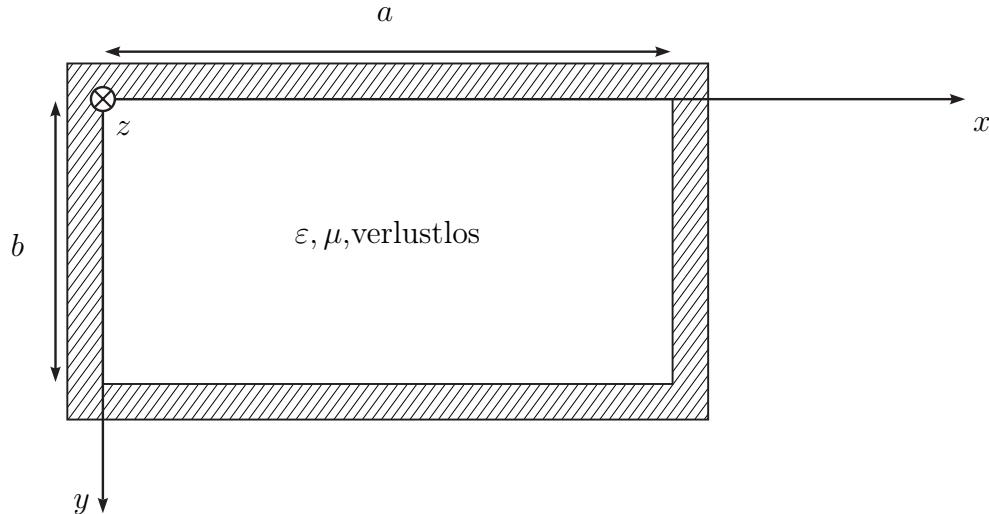
$$\underline{2,165 \text{ GHz} < f < 2,887 \text{ GHz} \Rightarrow \text{nur TE}_{10}$$



2 Rechteckhohlleiter (25%)

Name/Mat. Nr.: _____

Untersuchen Sie die Ausbreitung einer TE_{10} Welle in z Richtung im skizzierten Rechteckhohlleiter.



- 2.1 (7%) Finden Sie einen geeigneten Ansatz für die Komponenten des gewünschten Modus in Ausbreitungsrichtung, der die Wellengleichung erfüllt. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand an.
- 2.2 (3%) Leiten Sie daraus die restlichen Feldkomponenten her. Welche verschwinden?
- 2.3 (12%) Der Hohlleiter wird im X-Band eingesetzt und hat die Abmessungen bzw. Kenndaten $a = 19,05 \text{ mm}$, $b = 8,47 \text{ mm}$, $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$. Er wird bei 14 GHz betrieben. Berechnen Sie die maximale elektrische Feldstärke bei einer übertragenen Leistung von 37 dBW .
- 2.4 (3%) Ist die Verwendung dieses Hohlleiters bei einer Durchschlagsfeldstärke von 15 kV/cm (Luft) möglich? Wenn dies nicht möglich ist oder wäre, wie könnte man dies dennoch ermöglichen?

2.1.) Ansatz wie vorher mit $m=1, n=0$, $k_x = \frac{\pi}{a}, k_y = 0$ $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

2.2.) wie vorher mit $m=1, n=0$

$$E_x = 0$$

$$H_x = \frac{jk_z}{\pi} \alpha A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

$$E_y = -\frac{j\omega \mu}{\pi} \alpha A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_y = 0$$

$$\text{mit } \pi^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$E_z = 0$$

$$H_z = A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

2.3) $a = 19,05 \text{ mm}, b = 8,47 \text{ mm}, \epsilon_r = 1, \mu_r = 1, f = 14 \text{ GHz}, P_{\text{dBW}} = 37 \text{ dBW}$

$$P_{\text{dBW}} = 10 \log\left(\frac{P}{1 \text{ W}}\right) \Rightarrow P = 10^{\frac{P_{\text{dBW}}}{10}} \cdot 1 \text{ W} = 5,012 \text{ kW}$$

$$P = \int \Re \{ \vec{P} \} \cdot d\vec{A} = , d\vec{A} = dA \vec{e}_z$$

$$\text{mit } \vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = -\frac{1}{2} E_y H_x^* \vec{e}_z = \frac{k_z \omega \mu}{2} \left(\frac{\alpha A}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \vec{e}_z$$

$$P = \frac{k_z \omega \mu}{2} \left(\frac{\alpha A}{\pi}\right)^2 b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{k_z \omega \mu}{4} \left(\frac{\alpha A}{\pi}\right)^2 ab$$

$$\text{mit } k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = 242,68 \text{ m}^{-1} \text{ folgt}$$

$$A = \sqrt{\frac{4P\pi^2}{\alpha^3 b k_z \omega \mu}} = 35413 \text{ Am}^{-1}$$

$$|\vec{E}| = |E_y|, |\vec{E}|_{\max} = |E_y|_{\max} = \frac{\omega \mu}{\pi} \alpha A \quad (\text{bei } x = \frac{a}{2})$$

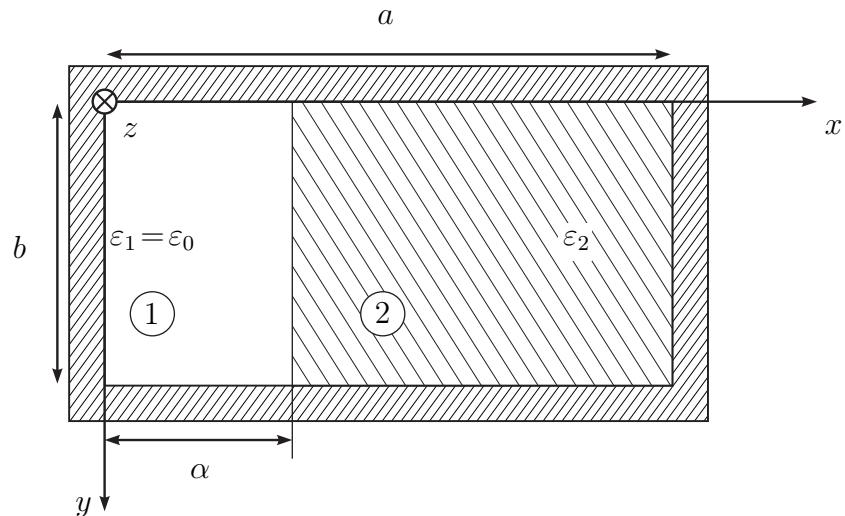
$$= 237,9 \text{ kV/m} = \underline{\underline{2,38 \text{ kV/cm}}}$$

2.4.) $|\vec{E}|_{\max} < 15 \text{ kV/cm} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Betrieb möglich}}}$

$$|\vec{E}|_{\max} = \sqrt{\frac{4\omega \mu P}{\alpha b k_z}}, |\vec{E}|_{\max} \text{ reduzieren: } f \text{ kleiner, } a, b \text{ größer}$$

3 Rechteckhohlleiter mit Kunststoffeinsatz (25%)

Untersuchen Sie die Ausbreitungseigenschaften des Grundmodus, dessen Feldverteilung der TE₁₀ Welle im leeren Hohlleiter ähnlich ist, im unten abgebildeten Hohlleiter mit Kunststoffeinsatz.



Medium 1 ist Luft mit ε_0 und μ_0 .

Medium 2 ist ein Dielektrikum mit $\varepsilon_0\varepsilon_{r,2}$ und μ_0 .

- 3.1 (8%) Finden Sie einen geeigneten Ansatz für die Komponenten $E_{z,i}$ und $H_{z,i}$, mit $i = 1, 2$ für Raum i , der die Wellengleichung erfüllt!
- 3.2 (4%) Leiten Sie daraus die restlichen Feldkomponenten her!
- 3.3 (8%) Gewinnen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum die charakteristische Gleichung für die Ausbreitungskonstante!
- 3.4 (5%) Skizzieren Sie das Feldbild längs und quer zur Ausbreitungsrichtung!

$$3.1.) \quad E_{z1} = 0, \quad H_{z1} = A_1 \cos(k_{x1}x) e^{-jk_{z1}z}$$

$$E_{z2} = 0, \quad H_{z2} = A_2 \cos[k_{x2}(x-a)] e^{-jk_{z2}z}$$

$$k_{x1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1 - \epsilon_{r2})$$

$$k_{x2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r2}$$

$$3.2.) \quad \text{mit } k_x^2 = k_{x1}^2, \quad k_x^2 = k_{x2}^2$$

Modale Lösungen

$$E_{x1} = 0, \quad E_{y1} = -j \frac{\omega \mu_0}{k_{x1}} A_1 \sin(k_{x1}x) e^{-jk_{z1}z}$$

$$H_{x1} = j \frac{k_z}{k_{x1}} A_1 \sin(k_{x1}x) e^{-jk_{z1}z}, \quad H_{y1} = 0$$

$$E_{x2} = 0, \quad E_{y2} = -j \frac{\omega \mu_0}{k_{x2}} A_2 \sin[k_{x2}(x-a)] e^{-jk_{z2}z}$$

$$H_{x2} = j \frac{k_z}{k_{x2}} A_2 \sin[k_{x2}(x-a)] e^{-jk_{z2}z}, \quad H_{y2} = 0$$

$$3.3.) \quad x = a:$$

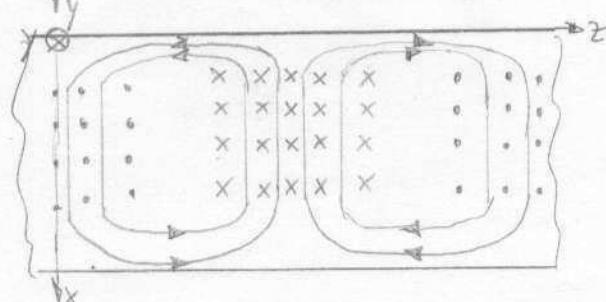
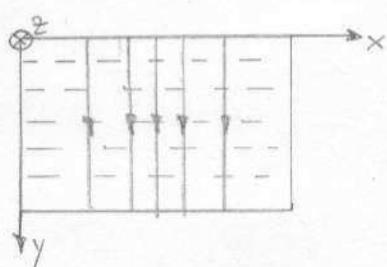
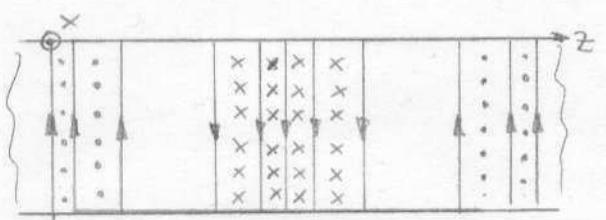
$$E_{y1} = E_{y2}: \quad \frac{A_1}{k_{x1}} \sin(k_{x1}a) = \frac{A_2}{k_{x2}} \sin[k_{x2}(a-a)]$$

$$H_{z1} = H_{z2}: \quad A_1 \cos(k_{x1}a) = A_2 \cos[k_{x2}(a-a)]$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(k_{x1}a)}{k_{x1}} = \frac{\tan[k_{x2}(a-a)]}{k_{x2}}$$

$$\text{sowie: } k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1 - \epsilon_{r2})$$

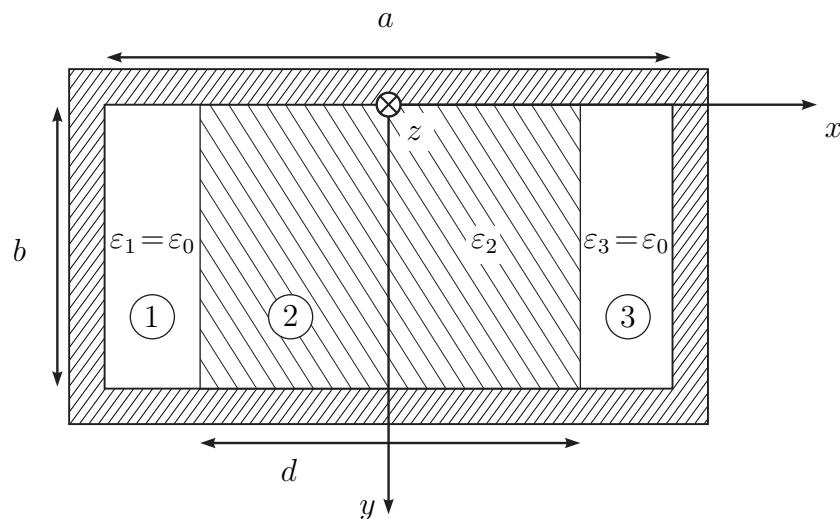
3.4.)



2 Rechteckhohlleiter mit Kunststoffeinsatz (25%)

Name/Mat. Nr.: _____

Untersuchen Sie die Ausbreitungseigenschaften des Grundmodus, dessen Feldverteilung der TE₁₀ Welle im leeren Hohlleiter ähnlich ist, im unten abgebildeten Hohlleiter mit Kunststoffeinsatz.



Medium 1 und 3 ist Luft mit ϵ_0 und μ_0 .

Medium 2 ist ein Dielektrikum mit $\epsilon_0\epsilon_{r,2}$ und μ_0 .

- 2.1 (8%) Finden Sie einen geeigneten Ansatz für die Komponenten $E_{z,i}$ und $H_{z,i}$, mit $i = 1, 2, 3$ für Raum i , der die Wellengleichung erfüllt!
- 2.2 (4%) Leiten Sie daraus die restlichen Feldkomponenten her!
- 2.3 (8%) Gewinnen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum die charakteristische Gleichung für die Ausbreitungskonstante in z -Richtung!
- 2.4 (5%) Skizzieren Sie das Feldbild längs und quer zur Ausbreitungsrichtung!

$$2.1.) E_{z1} = 0, H_{z1} = A_1 \cos[kx_1(x + \frac{d}{2})] e^{-jkz z}$$

$$E_{z2} = 0, H_{z2} = A_2 \sin(kx_2 x) e^{-jkz z}$$

$$E_{z3} = 0, H_{z3} = A_3 \cos[kx_3(x - \frac{d}{2})] e^{-jkz z}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_{x_1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \\ k_{x_2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r2} \\ k_{x_3}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k_{x_1} = k_{x_3}}{k_{x_1}^2 - k_{x_2}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1 - \epsilon_{r2})}$$

$$2.2.) \text{ mit } k_1^2 = k_{x_1}^2, k_2^2 = k_{x_2}^2, k_3^2 = k_{x_3}^2$$

Modale Lösungen

$$E_{x1} = 0, E_{y1} = -j \frac{\omega \mu_0}{k_{x_1}} A_1 \sin[kx_1(x + \frac{d}{2})] e^{-jkz z}$$

$$H_{x1} = j \frac{k_2}{k_{x_1}} A_1 \sin[kx_1(x + \frac{d}{2})] e^{-jkz z}, H_{y1} = 0$$

$$E_{x2} = 0, E_{y2} = j \frac{\omega \mu_0}{k_{x_2}} A_2 \cos(kx_2 x) e^{-jkz z}$$

$$H_{x2} = -j \frac{k_2}{k_{x_2}} A_2 \cos(kx_2 x) e^{-jkz z}, H_{y2} = 0$$

$$E_{x3} = 0, E_{y3} = -j \frac{\omega \mu_0}{k_{x_3}} A_3 \sin[kx_3(x - \frac{d}{2})] e^{-jkz z}$$

$$H_{x3} = j \frac{k_2}{k_{x_3}} A_3 \sin[kx_3(x - \frac{d}{2})] e^{-jkz z}, H_{y3} = 0$$

$$2.3.) \underline{x = -d/2:}$$

$$E_{y1} = E_{y2} : -\frac{A_1}{k_{x_1}} \sin[kx_1(\frac{d}{2} - d)] = \frac{A_2}{k_{x_2}} \cos(kx_2 \frac{d}{2})$$

$$H_{z1} = H_{z2} : A_1 \cos[kx_1(\frac{d}{2} - d)] = -A_2 \sin(kx_2 \frac{d}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\tan[kx_1(\frac{d}{2} - d)]}{k_{x_1}} = \frac{\cot(kx_2 \frac{d}{2})}{k_{x_2}}$$

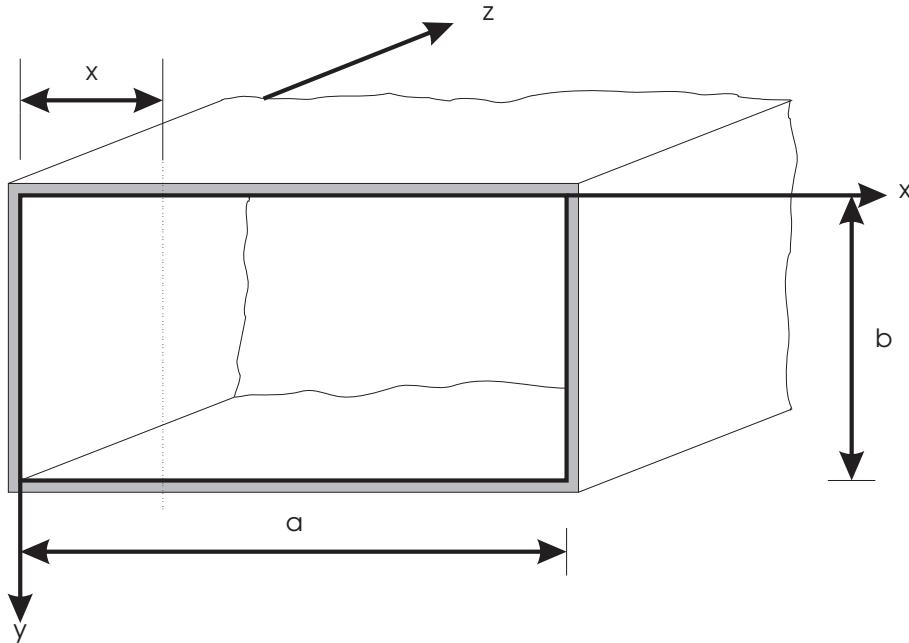
$$\text{sowie: } k_{x_1} = k_{x_3}, k_{x_1}^2 - k_{x_2}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1 - \epsilon_{r2})$$

gleiches Resultat bei $x = d/2$

$$2.4.) \text{ siehe voriges Bsp., bzw. Skriptum S. 59}$$

3 Zirkuläres Drehfeld im Rechteckhohlleiter (20%)

Gegeben sei ein Hohlleiter (siehe Abbildung).



1. Welcher Modus ist der Grundmodus dieses Rechteckhohlleiters? (1%)
2. Berechnen Sie das Feldbild des Grundmodus! (12%)
3. Wo existiert in diesem Hohlleiter, der im Grundmodus betrieben wird, ein zirkular drehendes H -Feld? Drücken Sie das Ergebnis als Funktion der Wellenlänge aus! Hinweis: Wo existieren beim Grundmodus 2 räumlich orthogonale H -Komponenten mit gleicher Amplitude und einer Phasenverschiebung von 90° ? (7%)

3.1.) $\alpha > b$: $m=1, n=0 : \underline{\underline{T_{E10}}}$

3.2.) siehe Bsp.-

$$E_x = 0$$

$$E_y = -j \frac{\omega H}{\pi} \alpha A \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} x\right) e^{-jk_z z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = j \frac{k_z}{\pi} \alpha A \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} x\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_y = 0$$

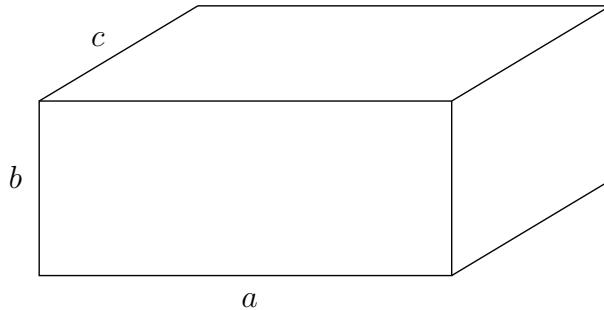
$$H_z = A \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} x\right) e^{-jk_z z}$$

3.3.) H_x um 90° zu H_z verschoben.

$$|H_x| = |H_z| \quad \frac{k_z}{\pi} \alpha A \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} x_0\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} x_0\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{\alpha} x_0\right) = \frac{\pi}{k_z \alpha} = \frac{\lambda_H}{2\alpha}, \text{ mit } \lambda_H = \frac{2\pi}{k_z}$$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{\alpha}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda_H}{2\alpha}\right)$$

3 Hohlraumresonator (10%)

Berechnen Sie den Grundmodus TE_{101} eines luftgefüllten ($\epsilon_r = 1$) Hohlraumresonators (Abmessungen: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$) mit $\mathbb{R}_M = 20 \text{ m}\Omega$.



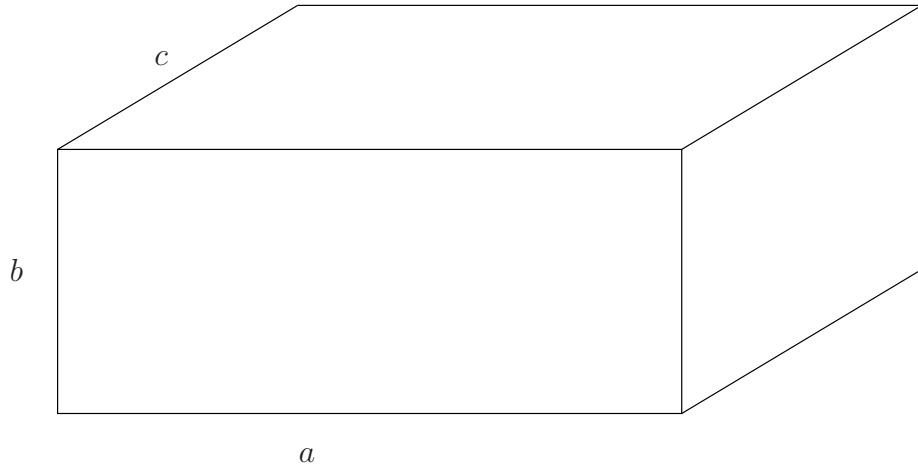
3.1 (4%) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz!

3.2 (4%) Berechnen Sie die unbelastete Güte! Vereinfachen Sie zuerst die Formel unter der Berücksichtigung $a = c$! Setzen Sie dann Zahlenwerte ein!

3.3 (2%) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz und die unbelastete Güte, wenn der Hohlraumresonator mit einem verlustlosen Dielektrikum $\epsilon_r = 2,5$ gefüllt ist!

3 Hohlraumresonator (10%)

Betrachten Sie den Grundmodus TE_{101} eines luftgefüllten $\epsilon_r = 1$ Hohlraumresonators ($a = 2b = c$, $\mathbb{R}_M = 30\text{m}\Omega$).



3.1 (4%) Berechnen Sie die Abmessungen a , b , c für eine Resonanzfrequenz von 20GHz!

3.2 (4%) Berechnen Sie die unbelastete Güte! Vereinfachen Sie die Formel unter der Berücksichtigung $a = 2b = c$!

3.3 (2%) Berechnen Sie die relative Dielektrizitätskonstante und die unbelastete Güte, wenn der Hohlraumresonator mit einem verlustlosen Dielektrikum gefüllt ist, um die Resonanzfrequenz auf 15GHz zu reduzieren!

$$3.1.) \quad m=1, n=0, p=1$$

$$\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, R_M = 20 \text{ m}\Omega$$

$$a = 4 \text{ cm}, b = 2 \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}$$

$$\omega_{mnp} = \pi \frac{c_0}{\mu_r \epsilon_r} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

$$f_{101} = \frac{\omega_{101}}{2\pi} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} = \underline{\underline{5.13 \text{ GHz}}}$$

$$3.2.) \quad Q_o = \frac{\pi n}{2R_M} \cdot \frac{b \sqrt{(a^2+c^2)^3}}{ac(a^2+c^2) + 2b(a^3+c^3)}, \quad n = \sqrt{\frac{M_o}{\epsilon_0}}$$

$$\text{mit: } c=a, b=\frac{a}{2} \quad Q_o = \frac{\pi n}{4R_M} \cdot \frac{a \sqrt{8a^6}}{2a^4+2a^4} = \frac{\pi n}{4R_M} \cdot \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\pi n}{4\mu^2 R_M} = \underline{\underline{10.461}}$$

$$3.3.) \quad \epsilon_r = 2.5$$

$$f'_{101} = \frac{f_{101}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \underline{\underline{3.1352 \text{ GHz}}} \quad Q'_o = \frac{Q_o}{\sqrt{\epsilon_r}} = \underline{\underline{6.616}}$$

$$3.1.) \quad m=1, n=0, p=1$$

$$\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, R_M = 30 \text{ m}\Omega$$

$$f_{101} = 20 \text{ GHz}, \quad a=2b=c$$

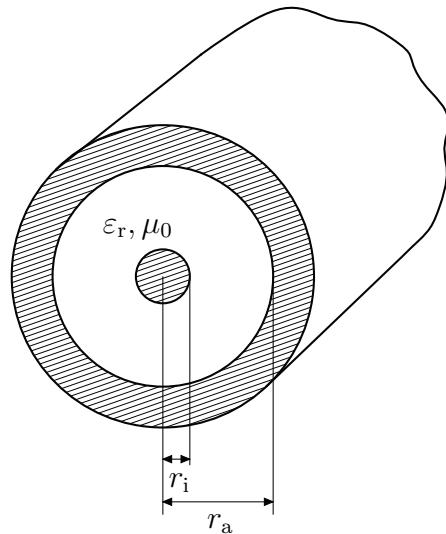
$$f_{101} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{2}{a^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{2}a} \Rightarrow a = \frac{c_0}{\sqrt{2}f_{101}} = \underline{\underline{1.06 \text{ cm}}} = c, \quad b = \frac{a}{2} = \underline{\underline{0.53 \text{ cm}}}$$

$$3.2.) \quad \text{Wie vorher: } Q_o = \frac{\pi n}{4\mu^2 R_M} = \underline{\underline{6.874}}$$

$$3.3.) \quad f'_{101} = 15 \text{ GHz} = \frac{f_{101}}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad \epsilon_r = \left(\frac{f_{101}}{f'_{101}} \right)^2 = \underline{\underline{1.77}}$$

$$Q'_o = \frac{Q_o}{\sqrt{\epsilon_r}} = \underline{\underline{5.231}}$$

3 Koaxialkabel (20%)



- 3.1** (5%) Bestimmen Sie einen geeigneten Innenradius r_i des abgebildeten Koaxialkabels für $Z_L = 60 \Omega$. Der Außenradius sei $r_a = 8,5 \text{ mm}$, das verwendete Dielektrikum sei Luft mit $\epsilon_r = 1$.
- 3.2** (5%) Die Innen- bzw. Außenleiter bestehen aus Kupfer mit $\sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ S/m}$. Wie groß ist die Eindringtiefe bei $f = 5 \text{ GHz}$? Berechnen Sie die ohmschen Verluste des Kabels in dB/m.
- 3.3** (5%) Ein Ende der Koaxialleitung wird mit Hilfe einer kreisförmigen Scheibe aus Graphit abgeschlossen. Die Scheibe habe ein $R_\square = 120\pi \Omega$. Welchen ohmschen Widerstand hat die kreisförmige Scheibe für eine einfallende TEM Welle?
- 3.4** (5%) Wie groß ist der Reflexionsfaktor am Ende der Koaxialleitung auf Grund des Abschlusswiderandes der kreisförmigen Scheibe? In welchem Frequenzbereich gilt dieser Reflexionsfaktor?

$$3.1.) \quad Z_L = 60 \Omega, r_o = 8.5 \text{ mm}, \epsilon_r = 1, \mu_r = 1$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right), \quad C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_o/r_i)}$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi^2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right), \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow r_i = r_o \exp\left(-\frac{2\pi Z_L}{\eta}\right) = \underline{\underline{3.125 \text{ mm}}}$$

$$3.2.) \quad \sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ S m}^{-1}, f = 5 \text{ GHz}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{cu} \sigma}}, \quad \text{mit } \mu_{cu} \approx \mu_0 \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = \underline{\underline{942.75 \text{ nm}}}$$

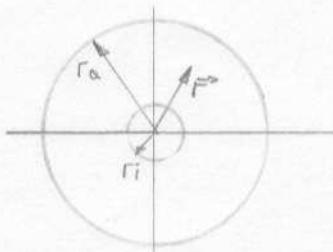
$$R_\square = \frac{1}{\sigma d} = 18.61 \text{ m}\Omega$$

$$R' = R_\square \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_o} \right) = 1.296 \Omega/\text{m}$$

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_G, \quad G' = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_R = \frac{R'}{2\sqrt{L'C'}} = \frac{R'}{2Z_L} = 1.08 \cdot 10^{-2} \text{ Np/m} = \underline{\underline{0.094 \text{ dB/m}}} \\ (\text{mit } 1 \text{ Np} = 8.7 \text{ dB})$$

$$3.3.) \quad R_\square = 120\pi \Omega$$

Annahme: radialsymmetrische Stromverteilung



$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{1}{d} \vec{e}_r, \quad \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{1}{\sigma d} \vec{e}_r = \frac{R_\square I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

$$U = \int_{r_i}^{r_o} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{R_\square I}{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{r} dr = \frac{R_\square I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{R_\square}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) = \underline{\underline{60 \Omega}} = R_A$$

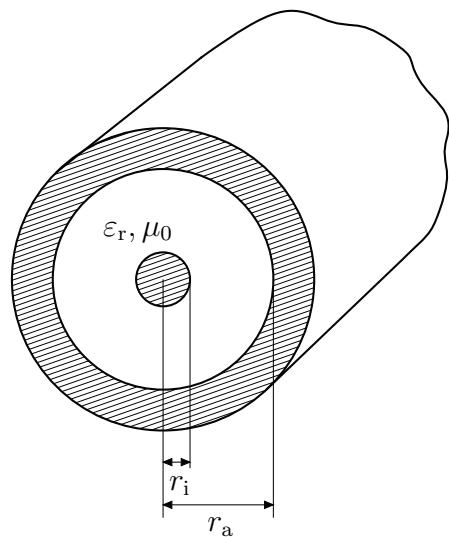
$$3.4.) \quad P_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} = 0$$

Voraussetzung: $R' \ll \omega L'$

Leiterdurchmesser groß gegen Eindringtiefe

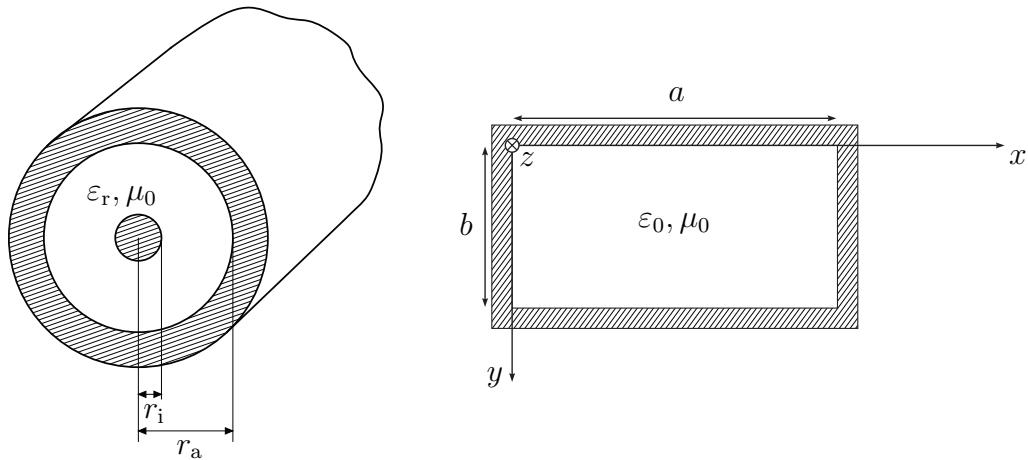
f klein: Dämpfungsverluste

3 Koaxialkabel (20%)



- 3.1 (7%) Bestimmen Sie einen geeigneten Innenradius r_i des abgebildeten Koaxialkabels für $Z_L = 50 \Omega$. Der Außenradius sei $r_a = 7,3 \text{ mm}$, das verwendete Dielektrikum habe $\epsilon_r = 2,35$.
- 3.2 (7%) Berechnen Sie die ohmschen Verluste α_R des Kabels für eine Leitfähigkeit des Innen- bzw. Außenleiters von $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ bei 8 GHz in dB/m.
- 3.3 (6%) Berechnen Sie die dielektrischen Verluste α_G des Kabels für ein Dielektrikum mit $\tan \delta = 0,001$ in dB/m.

3 Vergleich Koaxialkabel – Rechteckhohlleiter (30%)



- 3.1** (6%) Bestimmen Sie einen geeigneten Innenradius r_i des abgebildeten Koaxialkabels für $Z_L = 50 \Omega$. Der Außenradius sei $r_a = 6,3 \text{ mm}$, das verwendete Dielektrikum habe $\epsilon_r = 2,25$.
- 3.2** (6%) Berechnen Sie die ohmschen Verluste α_R des Kabels für eine Leitfähigkeit des Innen- bzw. Außenleiters von $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ bei 10 GHz in dB/m.
- 3.3** (6%) Berechnen Sie die dielektrischen Verluste α_G des Kabels für ein Dielektrikum mit $\tan \delta = 0,001$ in dB/m.
- 3.4** (12%) Berechnen Sie mittels der Power-Loss-Method den Dämpfungskoeffizienten des abgebildeten Rechteckhohlleiters mit den Abmessungen $a = 22,86 \text{ mm}$ und $b = 10,16 \text{ mm}$ bei 10 GHz (Grundmodus TE₁₀) in dB/m. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise. Das Metall sei durch $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ charakterisiert. Bei der gesuchten Ausbreitung in z -Richtung lauten die Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -\frac{j\omega\mu}{\pi}aA \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \frac{jk_z}{\pi}aA \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z} \\ H_y &= 0 \\ H_z &= A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

$$3.1.) \quad Z_L = 60 \Omega, r_a = 7,3 \text{ mm}, \epsilon_r = 2,35$$

wie vorher: $r_i = r_a \exp\left(\frac{-2\pi Z_L}{\eta}\right) = \underline{\underline{2,033 \text{ mm}}}$

$$3.2.) \quad f = 8 \text{ GHz}, \sigma = 517 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} = 745,31 \text{ nm}, \quad R_D = \frac{1}{\sigma d} = 23,54 \text{ m}\Omega, \quad R^I = R_D \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right) = 2,35 \text{ }\Omega/\text{m}$$

$$\alpha_R = \frac{R^I}{2 Z_L} = 2,356 \cdot 10^{-2} \text{ Np/m} = \underline{\underline{0,1205 \text{ dB/m}}}$$

$$3.3.) \quad C^I = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} = 102,27 \text{ pF/m}, \quad t_{\tan\delta} = 0,001 \text{ dB/m}$$

$$\alpha_A = \frac{C^I \cdot Z_L}{2} = \frac{\omega C^I t_{\tan\delta} Z_L}{2} = \underline{\underline{0,128 \text{ dB/m}}}$$

3.1, 2, 3) wie vorher.

$$3.4.) \quad a = 22,86 \text{ mm}, b = 10,16 \text{ mm}, \quad f = 10 \text{ GHz}, \quad T E_{10}, \sigma = 517 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}, \quad \partial_z P(z) = -2\alpha P(z) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2P(z)} [-\partial_z P(z)]$$

$$P = \int \Re \vec{E} \vec{P} \cdot d\vec{A} = -\frac{1}{2} \iint \limits_{0,0}^{a,b} E_y H_x^* dx dy = \frac{\omega k_2 \mu_0}{2} \left(\frac{\sigma A}{\pi}\right)^2 b \int \limits_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{\omega k_2 \mu_0}{4} \sigma b \left(\frac{\sigma A}{\pi}\right)^2$$

$$-dP = \frac{1}{2} |H_t|^2 R_H dA, \quad x=0,a; y \in [0,b] \quad dA = dz \int dy \\ y=0,b; x \in [0,a] \quad dA = dz \int dx$$

$$-\partial_z P(z) = \frac{1}{2} R_H \left[2 \int \limits_{y=0}^a (|H_x|^2 + |H_z|^2) \Big|_{x=0}^a dx + 2 \int \limits_{x=0}^a (|H_y|^2 + |H_z|^2) \Big|_{x=0}^a dy \right] \\ = R_H A^2 \left[\left(\frac{k_2 \sigma}{\pi}\right)^2 \int \limits_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx + \int \limits_0^a \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx + \int \limits_0^a dy \right] \\ = A^2 R_H \left[\frac{\sigma}{2} \left(1 + \left(\frac{2\sigma}{\lambda_H}\right)^2 \right) + b \right]$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\omega \mu_0} R_H \frac{\lambda_H}{\sigma^3 b} \left[\frac{\sigma}{2} \left(1 + \left(\frac{2\sigma}{\lambda_H}\right)^2 \right) + b \right]$$

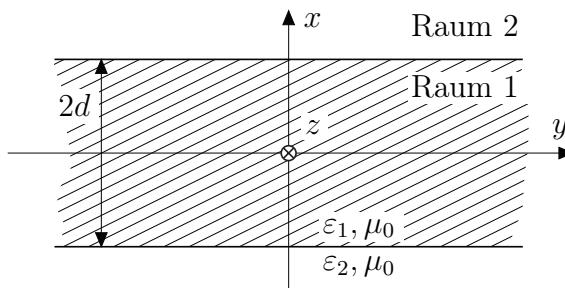
$$\lambda = \frac{c_0}{f} = 3 \text{ cm}, \quad \lambda_A = 2a, \quad \lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}} = 3,1975 \text{ cm}, \quad R_H = \frac{1}{\sigma d} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} = 26,32 \text{ m}\Omega$$

$$\underline{\underline{\alpha = 0,103 \text{ dB/m}}}$$

2 Dielektrische Platte (30%)

Name/Mat. Nr.: _____

Berechnen Sie die Ausbreitungseigenschaften der H_{10} -ähnlichen Grundwelle (siehe Rechteckhohlleiter), die von einer in y - und z -Richtung unbegrenzten und in x -Richtung $2d$ dicken dielektrischen Platte (Raum 1) geführt wird (Raum 2 ist Luft)!



- 2.1 (10%) Finden Sie einen Ansatz für die Komponenten des elektromagnetischen Feldes in Ausbreitungsrichtung (positive z -Richtung) E_{z1} , E_{z2} , H_{z1} und H_{z2} der die Wellengleichung erfüllt und geben Sie die Separationsbedingungen an! Nutzen Sie die Symmetrie der Platte und berücksichtigen Sie nur $x > -d$!
- 2.2 (5%) Bestimmen Sie die restlichen Feldkomponenten!
- 2.3 (10%) Gewinnen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zwischen Luft und Dielektrikum weitere Beziehungen zur Bestimmung der Ausbreitungskonstanten. Reduzieren Sie die gewonnenen Beziehungen zu einer einzigen transzendenten Gleichung für die Ausbreitungskonstante in x -Richtung ausserhalb der Platte in Abhängigkeit der Frequenz ω !
- 2.4 (5%) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Grenzfrequenz der Grundwelle an. Die Grenzfrequenz ist durch den Übergang von der geführten Welle zur ungedämpften Abstrahlung in den Raum neben der Platte definiert!

$$2.1.) E_{21} = 0, H_{21} = A_1 \cos(k_{x1}x) e^{-jk_{z2}z}$$

$$E_{22} = 0, H_{22} = A_2 e^{-k_{x2}(x-d)} e^{-jk_{z2}z}$$

$$k_{x1}^2 + k_z^2 = k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$$

$$-k_{x2}^2 + k_z^2 = k_2^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$2.2.) k_{x1}^2 = k_1^2 - k_z^2 = k_{x1}^2, k_{x2}^2 = k_2^2 - k_z^2 = -k_{x2}^2$$

Modale Lösungen

$$E_{x1} = 0$$

$$, E_{y1} = -j \frac{\omega \mu_0}{k_{x1}} A_1 \sin(k_{x1}x) e^{-jk_{z2}z}$$

$$H_{x1} = j \frac{k_z}{k_{x1}} A_1 \sin(k_{x1}x) e^{-jk_{z2}z}, H_{y1} = 0$$

$$E_{x2} = 0$$

$$, E_{y2} = j \frac{\omega \mu_0}{k_{x2}} A_2 e^{-k_{x2}(x-d)} e^{-jk_{z2}z}$$

$$H_{x2} = -j \frac{k_z}{k_{x2}} A_2 e^{-k_{x2}(x-d)} e^{-jk_{z2}z}, H_{y2} = 0$$

$$2.3.) \underline{x=d}:$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{y1} = E_{y2} : -\frac{A_1}{k_{x1}} \sin(k_{x1}d) = \frac{A_2}{k_{x2}} \\ H_{z1} = H_{z2} : A_1 \cos(k_{x1}d) = A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow k_{x2} \tan(k_{x1}d) + k_{x1} = 0$$

$$\text{mit: } k_{x1} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - k_z^2}, k_{x2} = \sqrt{k_z^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0}$$

$$\Rightarrow \underline{\sqrt{k_z^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0} \tan(\sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - k_z^2} d) + \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - k_z^2} = 0}$$

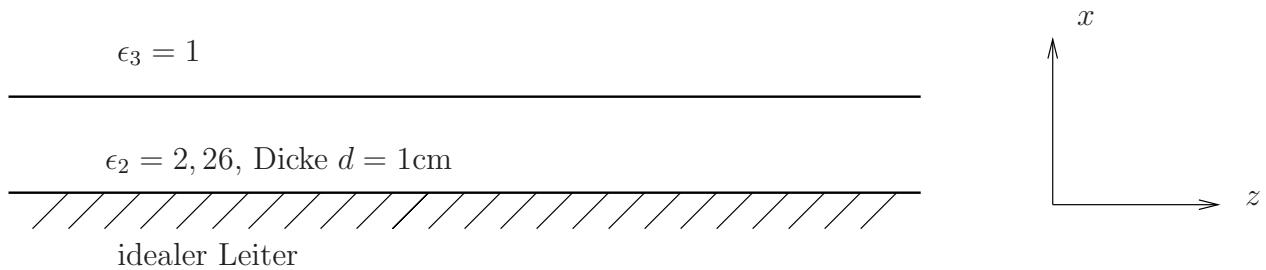
$$2.4.) \underline{k_{x2} = 0} : k_{x1} d \cot(k_{x1}d) = 0 \Rightarrow k_{x1} = \frac{(2m-1)\pi}{2d}, m \in \mathbb{N}$$

$$k_{x1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_{r1}-1)$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_{c,m} = \frac{(2m-1)\pi}{2d \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 (\epsilon_{r1}-1)}}}, f_{c,m} = \frac{\omega_{c,m}}{2\pi} = \underline{\frac{(2m-1) c_0}{4d \sqrt{\epsilon_{r1}-1}}}$$

4 Dielektrischer Wellenleiter (20%)

Gegeben sei ein dielektrischer Wellenleiter der Dicke $d = 1\text{cm}$ mit einer relativen Permittivität von $\epsilon_2 = 2,26$. Oberhalb des Wellenleiters befindet sich Luft ($\epsilon_3 = 1$), unterhalb ein idealer Leiter. Es breite sich eine Welle in z -Richtung aus!



4.1 (5%) Finden Sie den minimalen Ansatz für TE-Wellen! Benennen Sie alle Terme!

4.2 (5%) Berechnen Sie die Separationsbedingungen und berechnen Sie die restlichen Feldkomponenten!

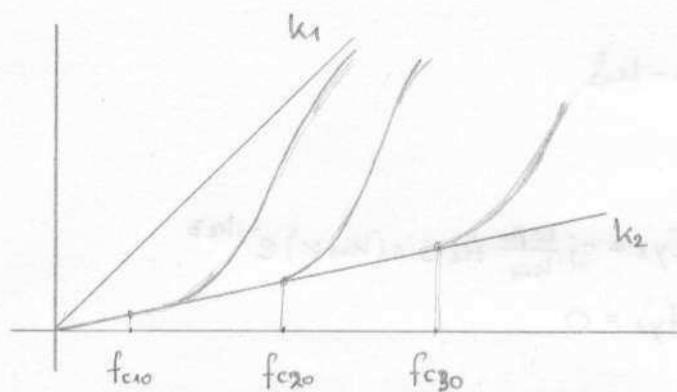
4.3 (5%) Finden Sie die Randbedingungen!

4.4 (5%) Bestimmen Sie die Dispersionsgleichung und die Grenzfrequenzen der ersten drei Moden! Skizzieren Sie das Dispersionsdiagramm!

4.1/2/3/4 wie vorher. , $d = 1 \text{ cm}$, $\epsilon_{r1} = 2,26$

4.4.) $f_{c10} = \frac{c_0}{4d\sqrt{\epsilon_{r1}-1}} = \underline{6,68 \text{ GHz}}$

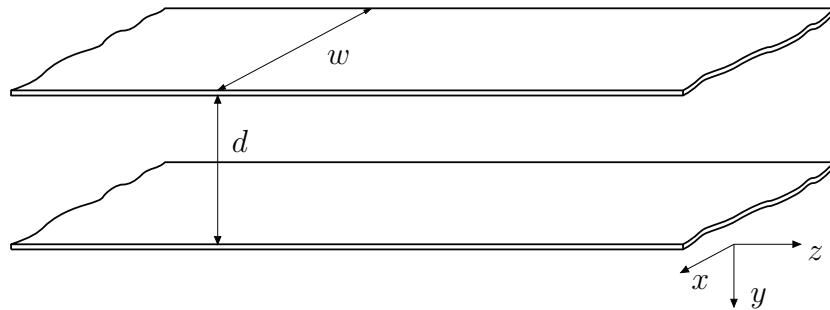
$f_{c20} = 3f_{c10} = \underline{20,04 \text{ GHz}}$, $f_{c30} = 5f_{c10} = \underline{33,4 \text{ GHz}}$



3 Dämpfungsbelag der Parallelplattenleitung (25%)

Es soll die Ausbreitungsfähigkeit des TEM Modus in z -Richtung auf dem abgebildeten Parallelplattenleiter (mit $\epsilon_r = 3,5$) untersucht werden.

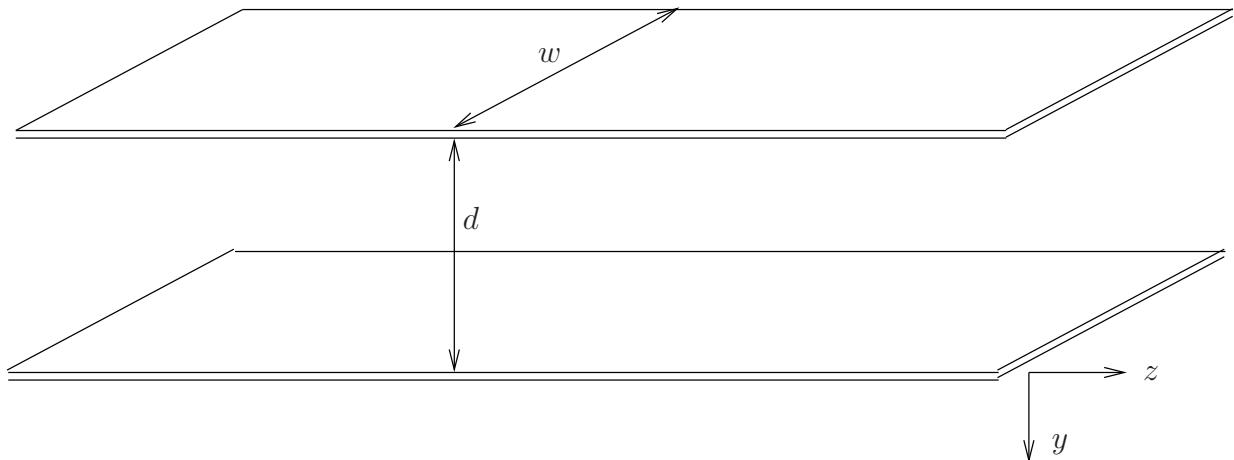
Hinweis: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, $\epsilon_0 = 8,8541 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$



- 3.1 (5%) Berechnen Sie die Komponenten der gefragten Moden, finden Sie einen Ansatz der die Wellengleichung erfüllt, ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand an! Verwenden Sie dabei die Näherung $w \gg d$. Welche Komponenten verschwinden?
- 3.2 (6%) Berechnen Sie den Mediumswiderstand, den Leitungswellenwiderstand und die Grenzfrequenz des gefragten Modus für $w = 12 \text{ mm}$, $d = 3 \text{ mm}$! Geben Sie alle zur Berechnung notwendigen Schritte an!
- 3.3 (9%) Berechnen Sie mittels der Power Loss Method den Dämpfungscoeffizienten für den gefragten Modus in dB/m. Das Metall sei durch $\sigma_{\text{Cu}} = 48 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ charakterisiert, die Frequenz sei 7 GHz. Geben Sie alle zur Berechnung notwendigen Schritte an!
- 3.4 (5%) Zeichnen Sie die tatsächlichen Feldbilder ohne Verwendung der Näherung $w \gg d$ in zwei Ansichten! Welche Wellentypen sind prinzipiell auf dieser Leitung ausbreitungsfähig?

3 Dämpfungsbelag der Parallelplattenleitung (25%)

Leiten Sie den Dämpfungsbelag der abgebildeten leeren Parallelplattenleitung mit dem Plattenabstand d und der Plattenbreite w ($w \gg d$) her. Nehmen Sie an, daß sich eine TEM-Welle in z -Richtung ausbreitet.



- 3.1 (5%) Finden Sie einen Ansatz für die Komponenten des gefragten Modus, der die Wellengleichung erfüllt (nachprüfen!), ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand an! Welche Komponenten verschwinden?
- 3.2 (5%) Zeichnen Sie die Feldbilder in zwei Ansichten (xy - und yz - Ebene)! Erklären Sie die Auswirkungen der Näherung $w \gg d$! Welche Wellentypen sind prinzipiell auf dieser Leitung ausbreitungsfähig?
- 3.3 (5%) Berechnen Sie den Mediumswiderstand, den Leitungswellenwiderstand und die Grenzfrequenz des gefragten Modus!
- 3.4 (5%) Berechnen Sie mittels der Power Loss Method den Dämpfungskoeffizienten für den gefragten Modus. Das Metall sei durch $\sigma_{\text{Cu}} = 5,7 \times 10^7 \text{ S/m}$ (nun nicht mehr verlustfrei) charakterisiert, die Frequenz sei 1GHz, $w = 20\text{mm}$, $d = 1,5\text{mm}$
- 3.5 (5%) Berechnen und skizzieren Sie das Dispersionsdiagramm für den gefragten Modus.

$$3.1.) \quad \epsilon_r = 3,5$$

$$E_y = E_0 e^{-jk_z z}$$

$$H_x = -\frac{E_0}{\eta} e^{-jk_z z}, \quad k_z = k = \omega/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$y=0, d: E_t = 0$ Randbedingung erfüllt

$$3.2.) \quad w = 12 \text{ mm}, \quad d = 3 \text{ mm}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 201,37 \Omega, \quad Z_L = \eta \frac{d}{w} = 50,34 \Omega, \quad f_g = 0 \text{ do TEM}$$

$$3.3.) \quad \sigma = 48 \cdot 10^6 \text{ S/m}, \quad f = 7 \text{ GHz}$$

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}, \quad \partial_z P(z) = -2\alpha P(z) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2P(z)} [-\partial_z P(z)]$$

$$P = \int_{*} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \cdot d\vec{A} = -\frac{1}{2} \int_{*} \operatorname{Re} \{ E_y H_x^* \} dA = \frac{E_0^2}{2\eta} wd$$

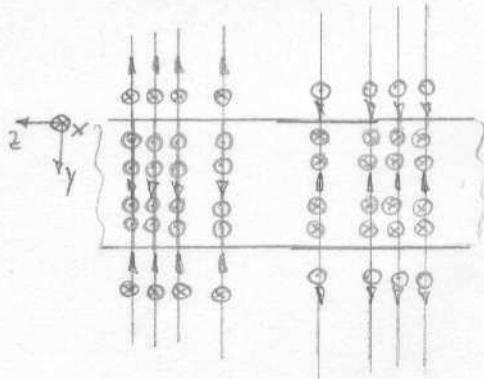
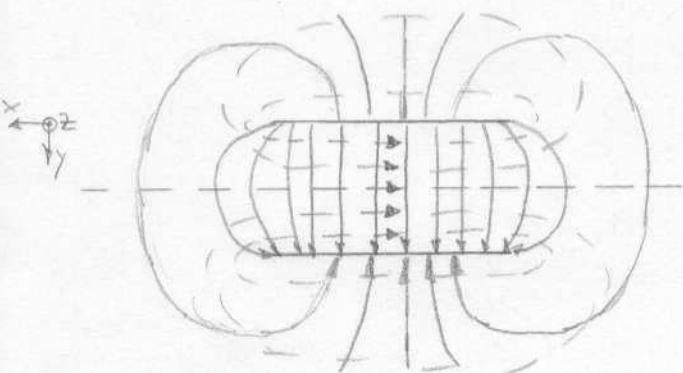
$$-dP = \frac{1}{2} |H_t|^2 R_M dA, \quad y=0, d: x \in [0, w] : dA = dz \int dx$$

$$-\partial_z P = \frac{1}{2} R_M 2 \int_0^w |H_x|^2 \Big|_{y=0} dx = \frac{R_M w E_0^2}{\eta^2}$$

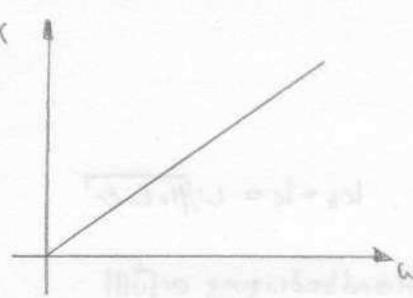
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \frac{2\eta}{E_0^2 wd} \cdot \frac{R_M w E_0^2}{\eta^2} = \frac{R_M}{d\eta}, \quad \text{mit } R_M = \frac{1}{\sigma d} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} = 24 \text{ m}\Omega$$

$$\alpha = 3,97 \cdot 10^{-2} \text{ Np/m} = \underline{0,345 \text{ dB/m}}$$

3.4.) TEM, TE, TM ausbreitungsfähig.



$$3.5.) \quad k = \omega / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c}$$



$$\epsilon_r = 3 \quad (\text{Air})$$

$$\epsilon_r = 3 = \epsilon_0$$

$$\epsilon_r = \frac{3^2}{\pi^2} = 9/4$$

$$\epsilon_r = 3^2 / 6.0 = 9/4$$

$$\sin \theta = b, \cos \theta = a \quad (\text{Eq 3})$$

$$\text{NET at } O: \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 = \vec{0}$$

$$[\text{Eq 4}] \quad \text{At } O: \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 0 \quad (\text{Eq 4})$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a} \quad \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2 = \frac{b^2}{a^2} = 9/4$$

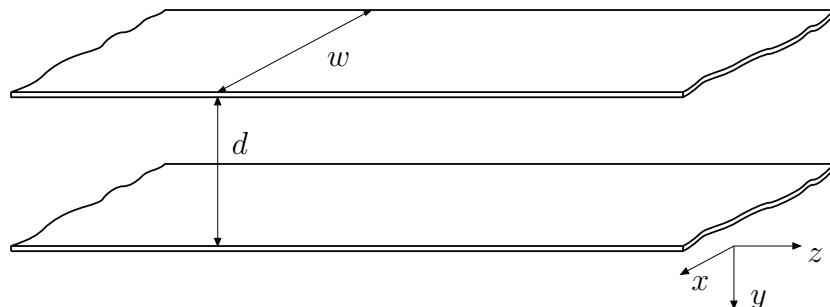
$$\text{Sum} E = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{E_1}{2} + E_3 + E_4 + E_5 = \frac{E_1}{2} + \frac{E_1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{4} E_1$$



3 Parallelplattenleitung (15%)

Es soll die Ausbreitungsfähigkeit von TEM, TE_m und TM_m Moden in z -Richtung auf dem abgebildeten Parallelplattenleiter (mit $\epsilon_r = 1$) untersucht werden.

Hinweis: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, $\epsilon_0 = 8,8541 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$



- 3.1 (7%) Die Leitung soll von 10 bis 12 GHz im Monomodebetrieb eingesetzt werden. Dimensionieren Sie d so, dass die Grenze für Monomodebetrieb 20% über bzw. unter dem angegebenen Bereich liegt.
- 3.2 (3%) Welche Moden sind bei der doppelten Betriebsfrequenz ausbreitungsfähig?
- 3.3 (5%) Zeichnen Sie ein Dispersionsdiagramm für die untersten 5 Moden.

$$3.1.) \quad f_u = 10 \text{ GHz}, \quad f_o = 12 \text{ GHz}$$

$$f_g = 112 \cdot f_o = 1414 \text{ GHz} = \frac{n c_0}{2d}$$

$$n=1, \quad d = \frac{c_0}{2f_g} = \underline{10,416 \text{ mm}} \quad f < f_g : \text{TEM}, \quad f > f_g : \text{TEM, TE}_1, \text{TM}_1$$

$$3.2.) \quad f = [20, 24] \text{ GHz}$$

$$f_{g1} = 1414 \text{ GHz}$$

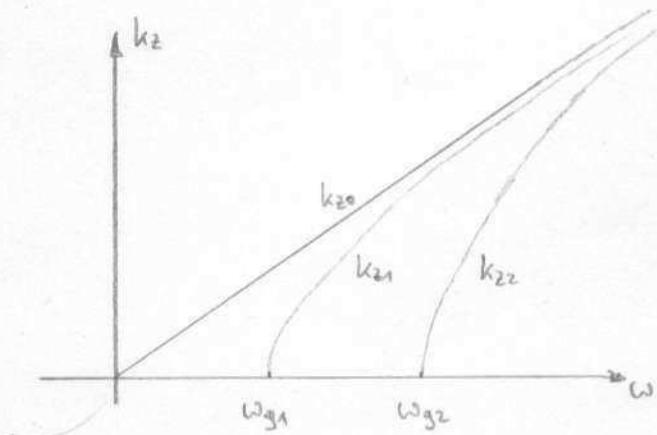
$$f_{g2} = 2f_{g1} = 2818 \text{ GHz} \Rightarrow \underline{\text{TEM, TE}_1, \text{TM}_1}$$

$$3.3.) \quad k_{2,n} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

$$\text{TEM: } k_{2,0} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c_0}$$

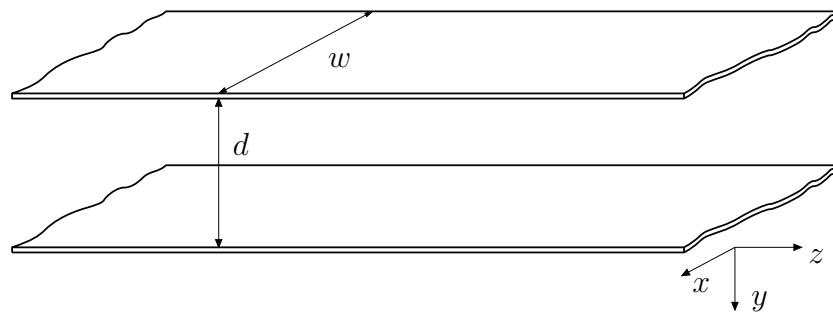
$$\text{TE}_1, \text{TM}_1: \quad k_{2,1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

$$\text{TE}_2, \text{TM}_2: \quad k_{2,2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2}$$



2 Parallelplattenleitung (20%) Name/Mat. Nr.: _____

Es soll die Ausbreitungsfähigkeit von TM_n Moden auf dem abgebildeten Parallelplattenleiter (mit $w \gg d$, $\epsilon_r = 1$) untersucht werden.

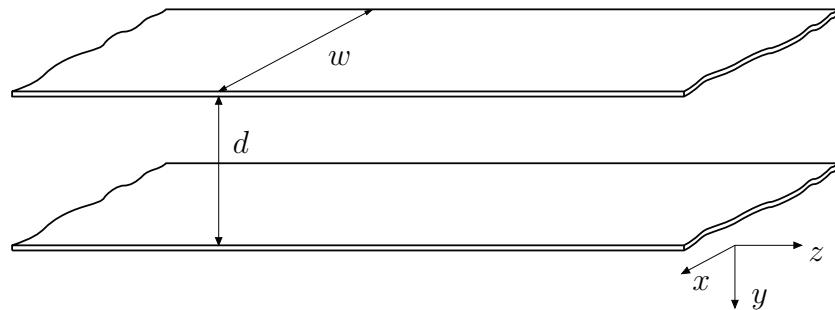


- 2.1** (10%) Finden Sie einen Ansatz für die gefragten Moden, der die Wellengleichung erfüllt, und überprüfen Sie dies. Berechnen Sie alle weiteren Komponenten. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand an.

- 2.2** (10%) Berechnen Sie den Mediumswiderstand η , den Feldwellenwiderstand $Z_{W,n}$ und die Grenzfrequenz $f_{G,n}$ aller gefragten Moden!

2 Parallelplattenleitung (10%) Name/Mat. Nr.: _____

Es soll die Ausbreitungsfähigkeit von TE_n Moden auf dem abgebildeten Parallelplattenleiter (mit $w \gg d$, $\epsilon_r = 1$) untersucht werden.



- 2.1** (6%) Berechnen Sie die Komponenten der gefragten Moden, finden Sie einen Ansatz der die Wellengleichung erfüllt, ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand an! Welche Komponenten verschwinden?

- 2.2** (4%) Berechnen Sie den Mediumswiderstand, den Feldwellenwiderstand und die Grenzfrequenz aller gefragten Moden!

$$2.1.) \quad \underline{\underline{TM}} \quad H_z = 0, \quad E_z = A \sin(k_y y) e^{-jk_z z}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{d}, \quad k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad k^2 = k_y^2$$

$$E_x = 0, \quad E_y = -j \frac{k_z}{k_y} A \cos(k_y y) e^{-jk_z z}$$

$$H_x = j \frac{\omega \epsilon_0}{k_y} A \cos(k_y y) e^{-jk_z z}, \quad H_y = 0$$

$$2.2.) \quad n = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \underline{\underline{377 \Omega}}$$

$$k_z = 0 : \quad k_y = k \quad \frac{n\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda_q} = \frac{2\pi f_q}{c_0} \Rightarrow f_q = \frac{n c_0}{2d}$$

$$Z_w = \frac{E_y}{H_x} = -\frac{k_z}{\omega \epsilon_0} = -\frac{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}}{\omega \epsilon_0} = -n \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \frac{1}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}} = -n \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2}$$

TE

$$2.1.) \quad E_z = 0, \quad H_z = A \cos(k_y y) e^{-jk_z z}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{d}, \quad k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad k^2 = k_y^2$$

$$E_x = j \frac{\omega \mu_0}{k_y} A \sin(k_y y) e^{-jk_z z}, \quad E_y = 0$$

$$H_x = 0, \quad H_y = j \frac{k_z}{k_y} A \sin(k_y y) e^{-jk_z z}$$

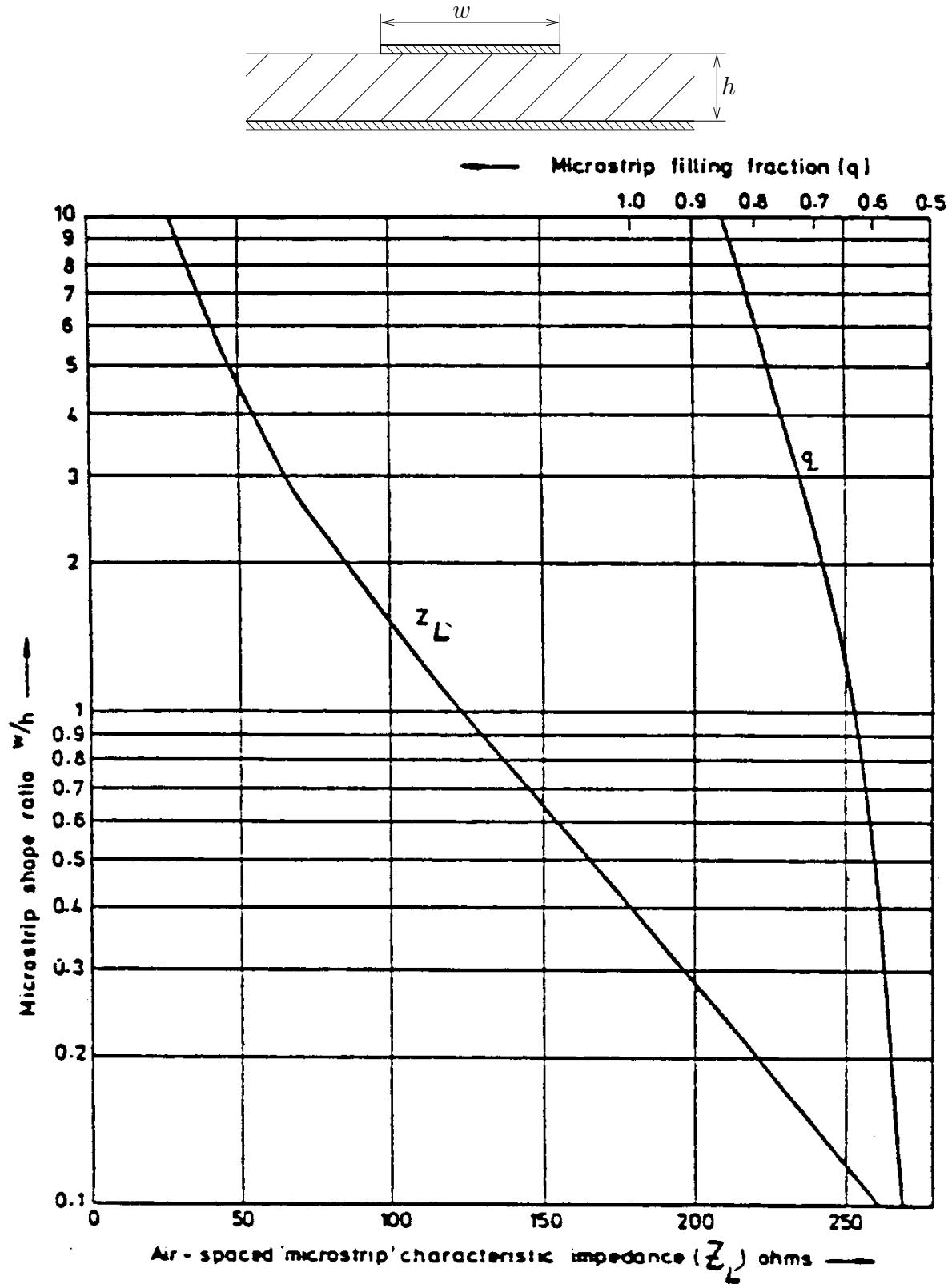
$$2.2.) \quad n, f_q \text{ wie oben}$$

$$Z_w = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega \mu_0}{k_z} = \frac{\omega \mu_0}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}} = \frac{n}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kd}\right)^2}}$$

2 Mikrostreifenleitung (15%)

Name/Mat. Nr.: _____

Dimensionieren Sie eine 50Ω Mikrostreifenleitung bei 9 GHz mit Hilfe des abgebildeten Nomogramms. Als Trägermaterial ist ein Al_2O_3 -Keramiksubstrat ($\epsilon_r = 9$) vorgesehen. Die Höhe des Trägermaterials ist $h = 0,8 \text{ mm}$. Erklären Sie jeden Schritt Ihrer Vorgangsweise!



$$2.) \ Z_L = 50\Omega, f = 9 \text{ GHz}, \epsilon_r = 9, h = 0,8 \text{ mm}$$

I. o.) $\epsilon_{eff} = \epsilon_r = 9$

b.) $Z_{L0} = Z_L \sqrt{\epsilon_{eff}} = 150\Omega$

c.) ablesen: $w/h = 0,65$

d.) ablesen: $q = 0,6$

e.) $\epsilon_{eff} = 1 + q(\epsilon_r - 1) = 5,8$

II. o.) $\epsilon_{eff} = 5,8$

b.) $Z_{L0} = Z_L \sqrt{\epsilon_{eff}} = 120,41\Omega$

c.) $w/h = 1,07$

d.) $q = 0,65$

e.) $\epsilon_{eff} = 6,2$

III.) b.) $Z_{L0} = 124,5\Omega$

c.) $w/h = 1$

d.) $q = 0,625$

e.) $\epsilon_{eff} = 6$

IV. b.) $Z_{L0} = 122,47 \dots$ nicht mehr

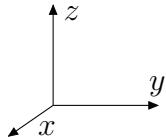
genauer ablesbar $\Rightarrow w/h = 1, \underline{\underline{w = 0,8 \text{ mm}}}$

5 Richtdiagramm und Gewinn einer Antenne (20%)

Eine verlustlose Antenne habe die Richtcharakteristik

$$f(\vartheta, \varphi) = |\sin(\vartheta) \cos(\varphi) \cos(\varphi/2)|$$

- 5.1 (7%)** Skizzieren Sie das Richtdiagramm in horizontaler (x/y) und vertikaler (x/z) Ebene! Zeichnen Sie ϑ und φ in den Skizzen und dem Koordinatensystem ein.



- 5.2 (8%)** Berechnen Sie den äquivalenten Raumwinkel und die Direktivität!

Hinweis: $\int \sin^3(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + \frac{1}{3a} \cos^3(ax)$ und
 $\int (\cos(x) \cos(ax))^2 dx = \frac{\sin(2(a+1)x)}{16(a+1)} + \frac{\sin(2(a-1)x)}{16(a-1)} + \frac{\sin(2ax)}{8a} + \frac{\sin(2x)}{8} + \frac{x}{4}$

- 5.3 (5%)** Berechnen Sie den Gewinn über dem Isotropstrahler und über dem Hertz'schen Dipol!

$$5.1.) \quad f(\vartheta, \varphi) = |\sin \vartheta \cos \varphi \cos(\varphi/2)|$$

$$x/y: \quad f(\pi/2, \varphi) = |\cos \varphi \cos(\varphi/2)|$$

$$x/z: \quad f(\vartheta, 0) = |\sin \vartheta|$$

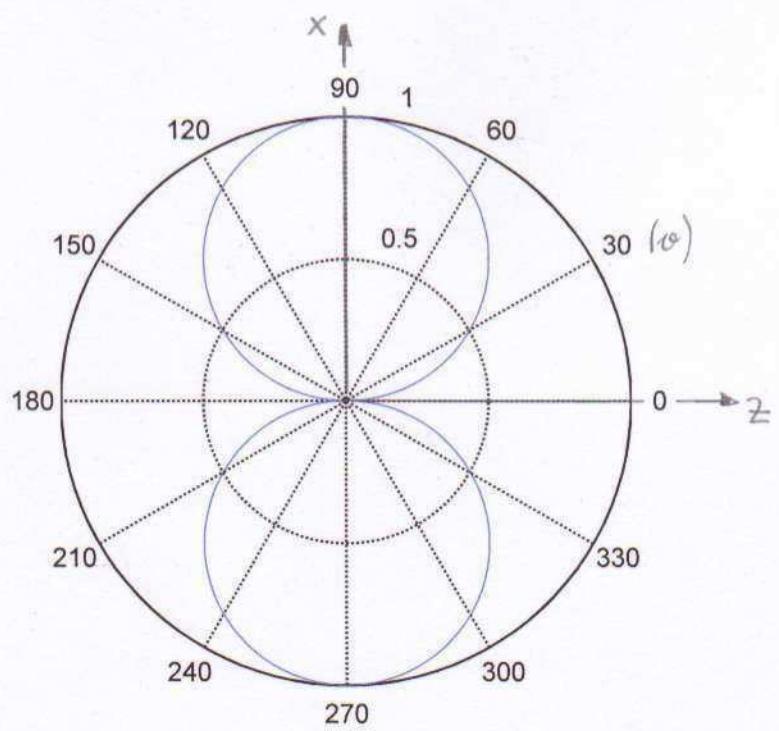
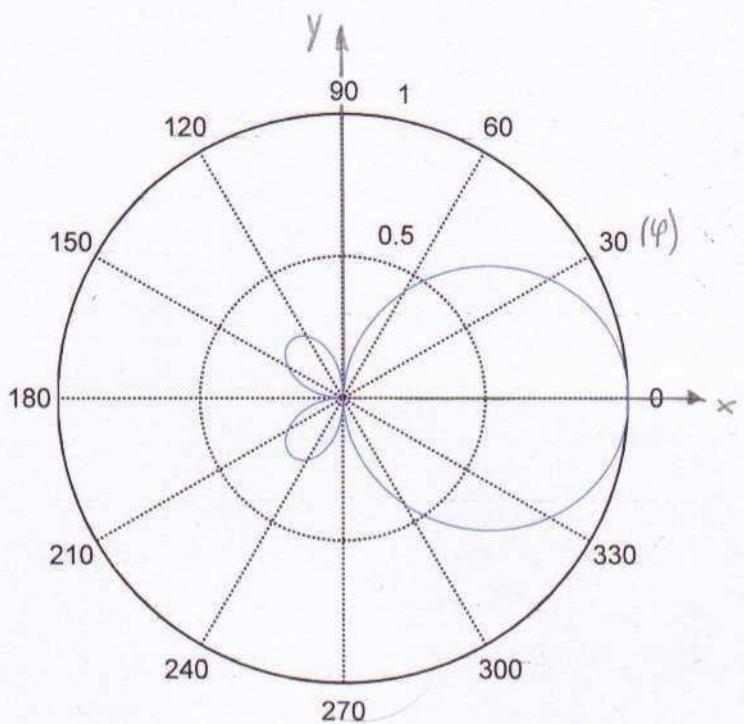
siehe nächste Seite

$$\begin{aligned} 5.2.) \quad Q_0^4 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi \cos^2(\varphi/2) d\vartheta d\varphi = \\ &= \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3(\vartheta) \right] \Big|_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin(3\varphi)}{24} + \frac{3\sin \varphi}{8} + \frac{\sin(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi}{4} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}} \end{aligned}$$

$$D = \frac{4\pi}{Q_0^4} = \underline{\underline{6}}$$

$$5.3.) \quad G_{\text{iso}} = D = \underline{\underline{6}}$$

$$G_{\text{HD}} = \frac{2}{3} G_{\text{iso}} = \underline{\underline{4}}$$

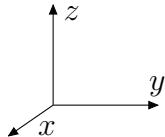


4 Richtdiagramm und Gewinn einer Antenne (20%)

Eine verlustlose Antenne habe die Richtcharakteristik

$$f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} |\sin(\vartheta) \cos(\varphi)| & \text{für } 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi \\ |\frac{1}{2} \sin(\vartheta) \cos(3\varphi)| & \text{sonst} \end{cases}$$

- 4.1 (7%)** Skizzieren Sie das Richtdiagramm in horizontaler (x/y) und vertikaler (x/z) Ebene! Zeichnen Sie ϑ und φ in Ihren Skizzen und dem abgebildeten Koordinatensystem ein.



- 4.2 (8%)** Berechnen Sie den äquivalenten Raumwinkel und die Direktivität!

Hinweis: $\int \sin^3(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + \frac{1}{3a} \cos^3(ax)$ und
 $\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$

- 4.3 (5%)** Berechnen Sie den Gewinn über dem Isotropstrahler und über dem Hertz'schen Dipol!

$$4.1.) \quad f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} |\sin \vartheta \cos \varphi| & : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \left| \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos(3\varphi) \right| & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\times/y: \quad f(\pi/2, \varphi) = \begin{cases} |\cos \varphi| & : -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \left| \frac{1}{2} \cos(3\varphi) \right| & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\times/z: \quad f(\vartheta, 0) = |\sin \vartheta|$$

Siehe nächste Seite

$$4.2.) \quad \mathcal{Q}_s^{\text{u}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |f(\vartheta, \varphi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi + \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos^2(3\varphi) d\vartheta d\varphi$$

$$= \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

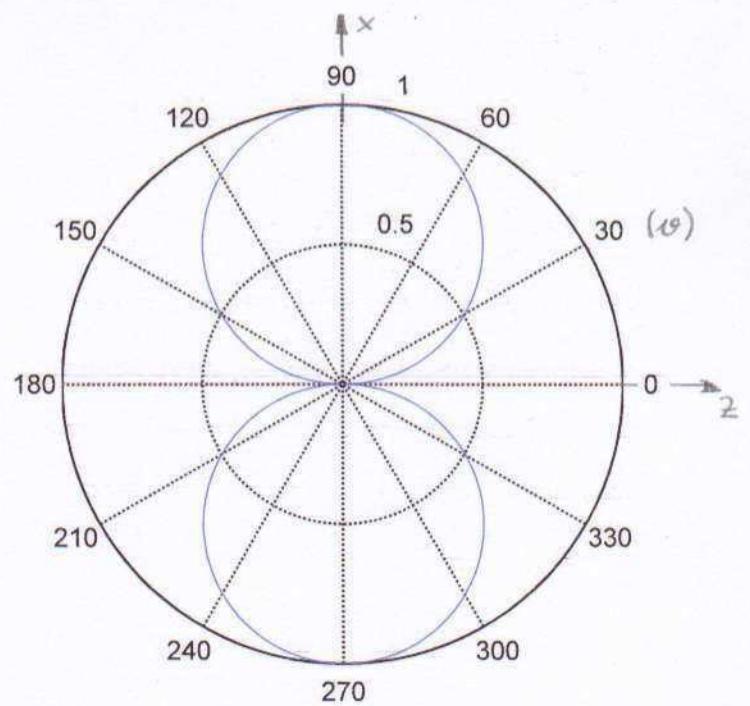
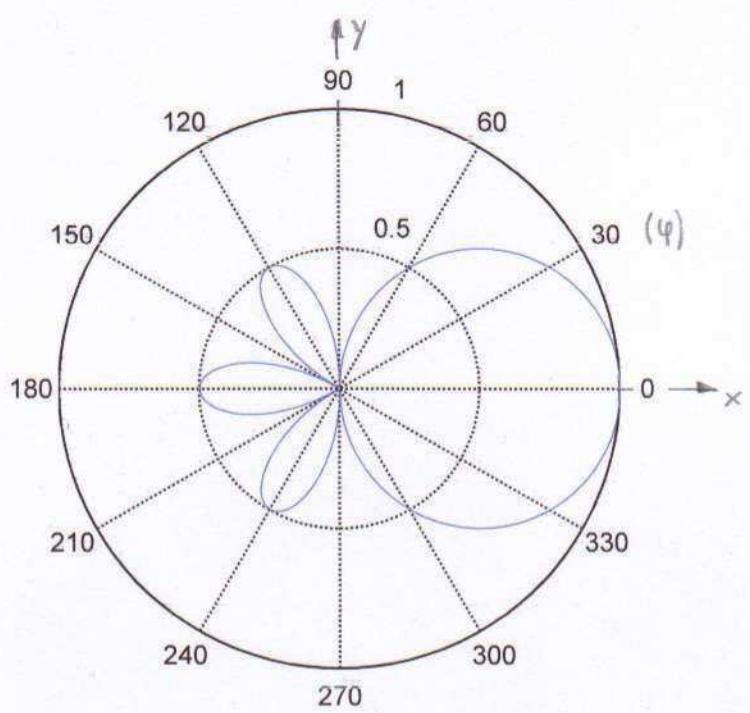
$$+ \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos \vartheta}{2} + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(6\varphi)}{12} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$$

$$D = \frac{4\pi}{\mathcal{Q}_s^{\text{u}}} = \underline{\underline{4,8}}$$

$$4.3.) \quad G_{150} = D = \underline{\underline{4,8}}$$

$$G_{HD} = \frac{2}{3} G_{150} = \underline{\underline{3,12}}$$



5 Richtdiagramm und Gewinn einer Antenne (20%)

Eine Antenne habe das Richtdiagramm

$$f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \cos^{16}(\vartheta) & \text{für } 0 < \vartheta < \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.1 (7%) Skizzieren (und beschriften) Sie das Richtdiagramm in zwei Ansichten!

5.2 (8%) Berechnen Sie den äquivalenten Raumwinkel und die Direktivität!

5.3 (5%) Berechnen Sie den Gewinn über dem Isotropstrahler und über dem Hertz'schen Dipol!

$$5.1.) \quad f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \cos^{16}\vartheta & : 0 < \vartheta < \pi/2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\times/y: f(\pi/2, \varphi) = 0$$

$$\times/z: f(\vartheta, 0) = \begin{cases} \cos^{16}\vartheta & : 0 < \vartheta < \pi/2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

siehe nächste Seite

$$5.2.) \quad \Omega_\alpha^n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |f(\vartheta, \varphi)|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{32}\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

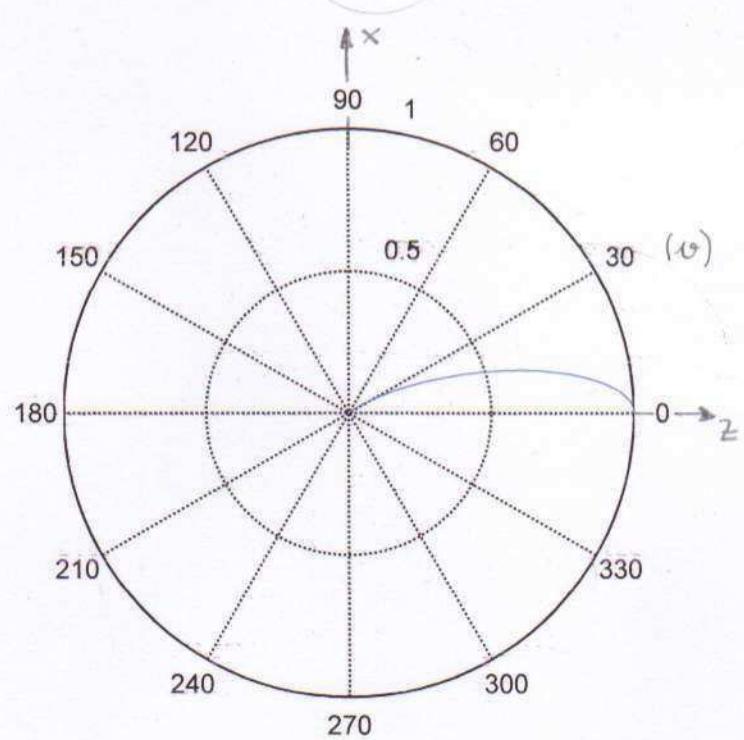
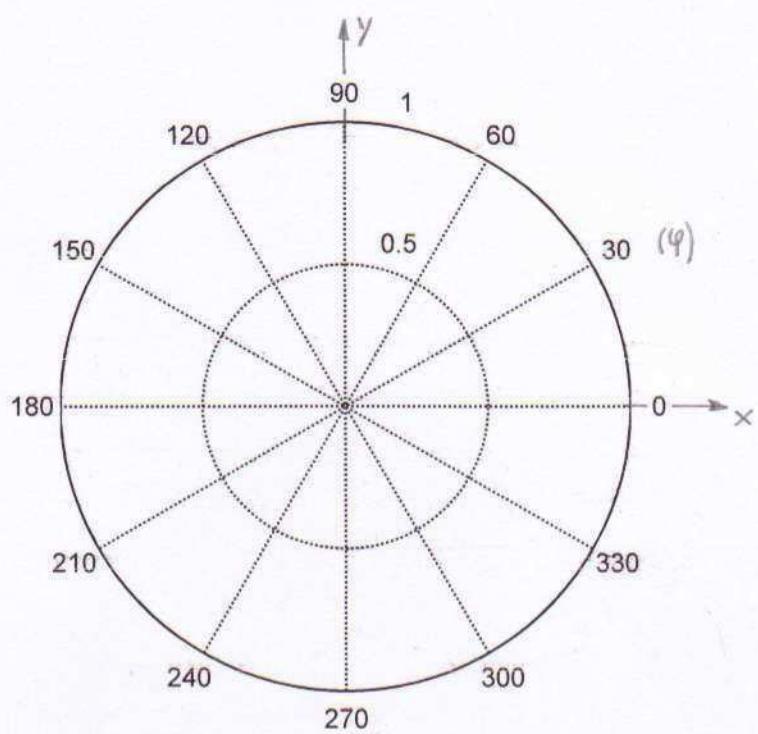
$$\text{mit } \int \sin(\alpha x) \cos^n(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha(n+1)} \cos^{n+1}(\alpha x)$$

$$\Rightarrow \Omega_\alpha^n = 2\pi \cdot \left(-\frac{\cos^{33}\vartheta}{33} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{33}$$

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_\alpha^n} = \underline{\underline{66}}$$

$$5.3) \quad G_{\text{iso}} = D = \underline{\underline{66}}$$

$$G_{\text{HD}} = \frac{2}{3} G_{\text{iso}} = \underline{\underline{44}}$$



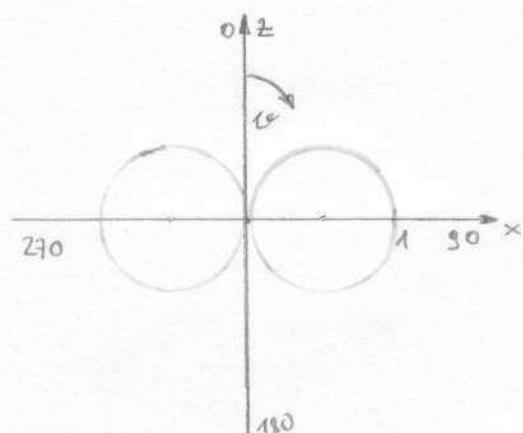
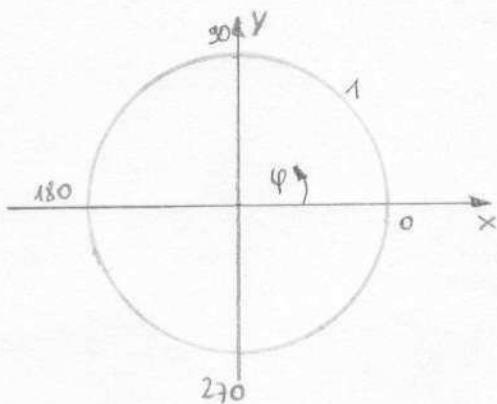
5 Hertzscher Dipol (15%)

Ein Hertzscher Dipol infinitesimaler Länge erzeugt in einem Aufpunkt in 1000m Entfernung und einem Elevationswinkel von 45° eine Feldstärke von $E = 0,01\text{V/m}$. Die Sendefrequenz sei 700MHz.

1. Geben Sie die Formel für das Richtdiagramm eines Hertzschen Dipoles an (inklusive Skizzen)! (5%)
2. Wie gross ist die Sendeleistung? (10%)

$$5.1) \quad r = 1000 \text{ m}, \quad \varphi = \pi/4, \quad |E_\varphi| = 0,01 \text{ V/m}, \quad f = 700 \text{ MHz}$$

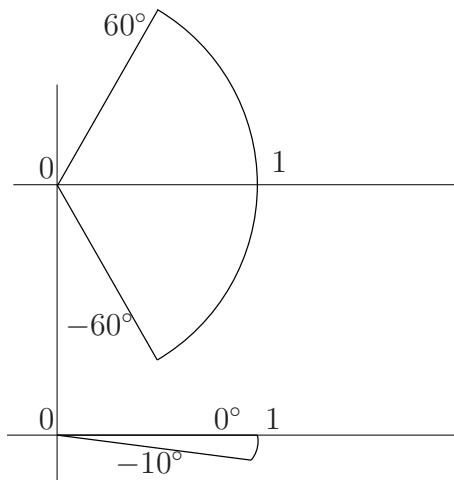
$$f(\varphi, \psi) = |\sin \varphi|$$



$$5.2) \quad P_{r, HD} = \frac{4\pi r^2}{3\eta} |E_{\varphi, HD}|^2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} = \underline{1,822 \text{ W}} \quad , \quad \text{mit } \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

5 Sektorantenne (10%)

Eine idealisierte Sektorantenne für eine Mobilfunk-Basisstation habe ein vereinfachtes Richtdiagramm entsprechend der Abbildung: Im Azimutalbereich von -60° bis 60° und im Elevationsbereich von -10° bis 0° sei die Direktivität gleich 1, sonst 0.



5.1 (2%) Schätzen Sie den Gewinn über dem Isotropstrahler (in dB) ab!

5.2 (3%) Berechnen Sie die wirksame Antennenfläche bei $f = 2,2\text{GHz}$ und $w = 0,8!$

5.3 (5%) Bei der Verwendung als Empfangsantenne werde am Antennenkabel eine Leistung von -60dBm gemessen. Wie gross sind E und H des einfallenden linear polarisierten Feldes? Was müssen Sie über die Wellenfront annehmen?

(27)

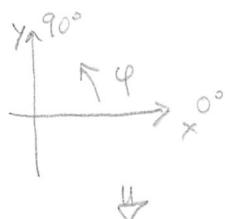
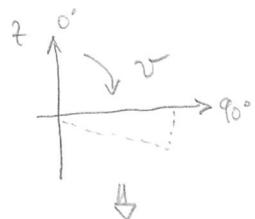
$$5.1) \quad G_{HD} = \frac{2}{3} \cdot G_{iso}$$

$$G_{HD} = \frac{\frac{8\pi}{3}}{2\bar{a}}$$

$$\rightarrow G_{iso} = \frac{8\pi \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2\bar{a}} = \frac{4\pi}{2\bar{a}}$$

$$2\bar{a} = \iint_0^{2\pi} |f(v, \varphi)|^2 \sin(v) dv d\varphi$$

$$f(v, \varphi) = \begin{cases} 1 & -60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ \\ 0 & -10^\circ < v < 0^\circ \end{cases}$$



$$90^\circ < v < 100^\circ$$

$$-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$$

$$\Rightarrow f(v, \varphi) = \begin{cases} 1 & -60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ \\ 0 & 90^\circ < \varphi < 100^\circ \end{cases}$$

$$2\bar{a} = \iint_{-60^\circ}^{100^\circ} 1 \cdot \sin(v) dv d\varphi = \iint_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{9}} \sin(v) dv d\varphi =$$

$$= \left[-\cos(v) \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{9}} = 0,173 \cdot \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{9}} = 0,362$$

$$\begin{aligned} 60^\circ &\hat{=} \frac{\pi}{3} \\ 90^\circ &\hat{=} \frac{\pi}{2} \\ 100^\circ &\hat{=} \frac{5\pi}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{iso} = 34,71 \quad \Rightarrow G_{iso} [\text{dB}] = 10 \cdot \log(G_{iso}) = 15,9 \text{ dB}$$

5.2)

$$G_{iso} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot w \quad \rightarrow \quad A = \frac{G_{iso} \cdot \lambda^2}{4\pi w} = 63,59 \cdot \underline{10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

5.3)

$$-60 \text{ dBm} = 10 \cdot \log \left(\frac{P}{1 \text{ mW}} \right)$$

$$10^{-60} = \frac{P}{1 \text{ mW}} \quad \Rightarrow \quad P = 1 \text{ mW} \cdot 10^{-\frac{60}{10}} = 1 \cdot \underline{10^{-9} \text{ W}}$$

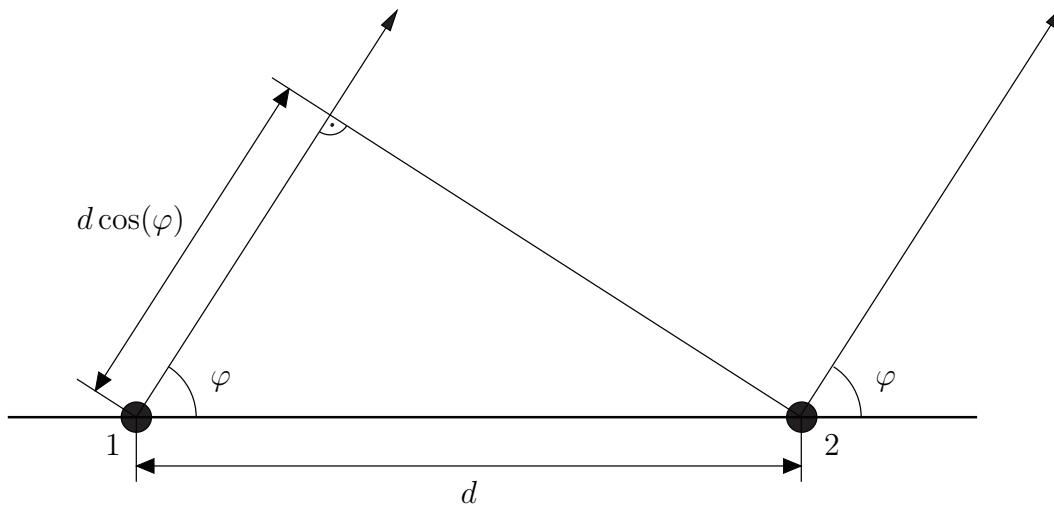
$$P_e = A \cdot T_e$$

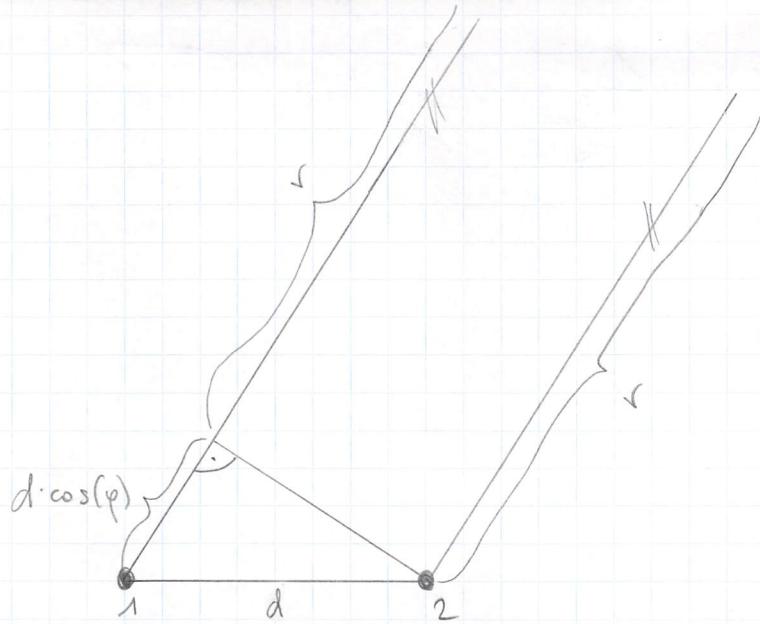
$$T_e = \frac{|Ee|^2}{2\eta} \quad \Rightarrow \quad P = A \cdot \frac{|Ee|^2}{2\eta} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{\frac{P \cdot 2\eta}{A}} = 3,44 \cdot \underline{10^{-3} \text{ V}}$$

$$\rightarrow H = \frac{E}{\eta} = 9,137 \cdot \underline{10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{m}}}$$

5 Richtdiagramm einer Antennengruppe (20%)

Zwei baugleiche omnidirektionale Antenne im Abstand d , welche entkoppelt angenommen werden, erzeugen in einem sehr grossen Abstand r Feldstärken, welche dem Betrag nach identisch als E_0 angenommen werden können. Berechnen Sie das Richtdiagramm einer derartigen Anordnung in der Zeichenebene (x, y) !





$$E = E_0 \cdot e^{-jkr_1} + E_0 \cdot e^{-jkr_2}$$

$$r_1 = r \quad r_2 = d \cdot \cos(\varphi) + r$$

$$E = E_0 \cdot e^{-jkr} + E_0 \cdot e^{-jk(d \cdot \cos(\varphi) + r)}$$

$$= E_0 \cdot (e^{-jkr} + e^{-jk(d \cdot \cos(\varphi) + r)})$$

$$|E|^2 = E_0^2 \cdot \left[\underbrace{\cos(kr)}_a + \underbrace{\cos(kd \cdot \cos(\varphi) + r)}_b \right]^2 + \left[\sin(kr) + \sin(kd \cdot \cos(\varphi) + r) \right]^2$$

$$|\cos(a)^2 + 2\cos(a)\cos(b) + \cos(b)^2 + \sin(a)^2 + 2\sin(a)\sin(b) + \sin(b)^2|$$

$$|1+1+2\cos(a)\cos(b)+2\sin(a)\sin(b)|$$

↑

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$$|1+1+2\cos(a-b)| =$$

$$= |2 + 2\cos(kr - kd \cdot \cos(\varphi) + r)|$$

$$|E| = E_0 \cdot \sqrt{2 + 2\cos(kr - kd \cdot \cos(\varphi) + r)} \quad k \cdot (r - d \cdot \cos(\varphi)) + r = 0$$

$$\max \text{ bei } kr - kd \cdot \cos(\varphi) + r = 0 ! \Rightarrow \cos = 1$$

$$|E| = E_0 \cdot \sqrt{4} \Rightarrow |E|_{\max} = 2 \cdot E_0$$

$$|f(\nu, \varphi)| = \frac{E}{E_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \cos(k(r-d \cdot \cos(\varphi)) + \nu)}$$

Zeichnen ???

4 Richtfunkstrecke (20%)

Für eine Richtfunkstrecke bei 25 GHz steht ein Sender mit einer Sendeleistung von $P = 17 \text{ dBm}$ zur Verfügung. Daran angeschlossen ist eine optimal ausgerichtet Antenne mit einem Gewinn $G_s = 19,5 \text{ dBi}$. In einer Entfernung $d = 1,5 \text{ km}$ steht der Empfänger mit einer Antenne mit dem Gewinn $G_e = 15 \text{ dBi}$.

4.1 (5%) In welcher Höhe muss die Richtfunkverbindung mindestens montiert werden, wenn ein sich in der Mitte der Strecke Sender-Empfänger ein Haus mit 20 m Höhe befindet?

4.2 (6%) Berechnen Sie die Leistung am Standort des Empfängers (in dBm)!

4.3 (9%) Bei Bauarbeiten wird die Sendeantenne versehentlich um einen Winel $\Delta\varphi = 15^\circ$ verdreht. Um welchen Wert in (dB) ändert sich das SNR am Empfänger? Die Richtcharakteristik der Antenne lautet:

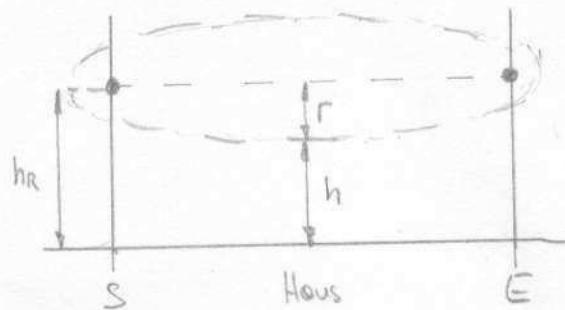
$$f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \sin^{18}(\vartheta) \sin^{18}(\varphi) & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.) $f = 25 \text{ GHz}$, $P_{s,\text{dBm}} = 17 \text{ dBm}$, $G_{s,\text{dB}} = 19,5 \text{ dBi}$, $G_{e,\text{dB}} = 15 \text{ dBi}$
 $d = 115 \text{ km}$, $h = 20 \text{ m}$

$$4.1.) \lambda = \frac{c_0}{f} = 1,2 \text{ cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{d\lambda}{4}} = 2,12 \text{ m}$$

$$h_R = h + r = \underline{\underline{22,12 \text{ m}}}$$



$$4.2.) P_{e,\text{dBm}} = P_{s,\text{dBm}} - L_{iso,\text{dB}} + G_{s,\text{dB}} + G_{e,\text{dB}}$$

$$L_{iso,\text{dB}} = -20 \log\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right) = 123,92 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow P_{e,\text{dBm}} = \underline{\underline{-72,42 \text{ dBm}}}$$

$$4.3.) \Delta\varphi = 15^\circ, f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \sin^2\vartheta \sin^2\varphi & : 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

optimale Ausrichtung: $\vartheta = 90^\circ, \varphi = 90^\circ$

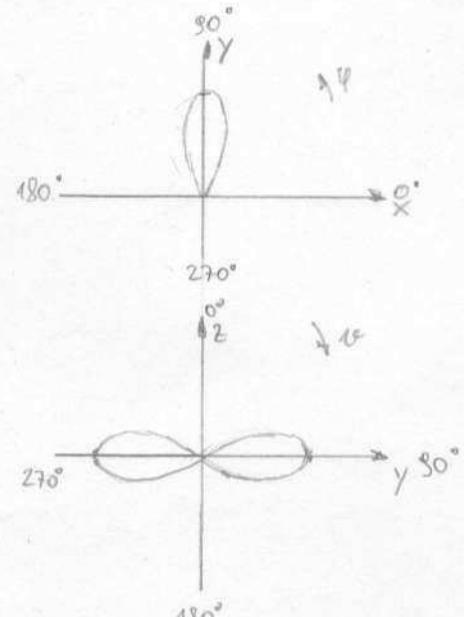
$$\varphi' = \varphi - \Delta\varphi = 75^\circ \quad (\text{bzw } +\Delta\varphi \text{ oder auch } \vartheta \pm \Delta\vartheta \\ \rightarrow \text{gleiches Ergebnis})$$

$$f(90^\circ, 75^\circ) = 0,53578 = f'$$

$$G_{s'} = G_s \cdot f'^2, G_{s',\text{dB}} = 14,08 \text{ dBi}$$

$$P_{e',\text{dBm}} = P_{s,\text{dBm}} - L_{iso,\text{dB}} + G_{s',\text{dB}} + G_{e,\text{dB}} \\ = \underline{\underline{-77,84 \text{ dBm}}}$$

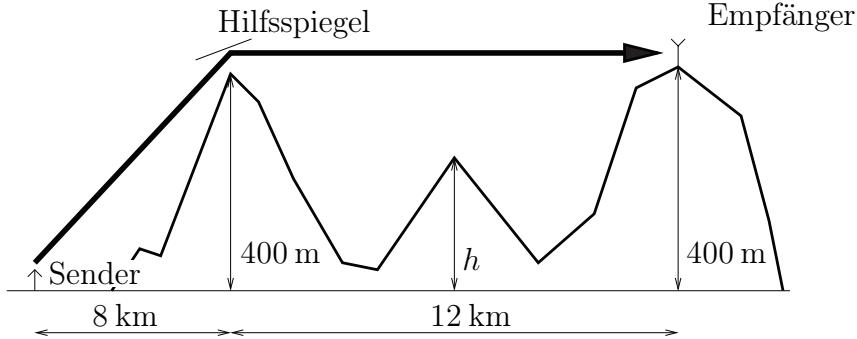
$$\Delta \text{SNR} = \text{SNR}' - \text{SNR} = 10 \log \frac{P_{e'}}{P_n} - 10 \log \frac{P_e}{P_n} = P_{e',\text{dBm}} - P_{e,\text{dBm}} = \underline{\underline{-5,42 \text{ dB}}}$$



4 Richtfunkstrecke mit Hilfspiegel (20%)

Wie in der Skizze gezeigt, soll eine Richtfunkstrecke auf 11 GHz zwischen einem Sender und einem Empfänger in hügeligem Gelände über einen Hilfspiegel realisiert werden. Der Streuquerschnitt des Hilfspiegels ist $\sigma = 220 \text{ m}^2$, der Empfänger hat eine Rauschtemperatur von $400 \text{ }^\circ\text{K}$ und eine Bandbreite von 6 MHz. Der Abstand zwischen Signalleistung und Rauschleistung muss mindestens 18 dB betragen. Die Empfangsantenne ist ein Parabolspiegel mit Durchmesser $D = 1,5 \text{ m}$ und einem Flächenwirkungsgrad von 0,8.

Hinweis: Boltzmann-Konstante $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws}/\text{ }^\circ\text{K}$



- 4.1 (6%) Welche Höhe h darf ein ungefähr in der Mitte zwischen Hilfspiegel und Empfänger liegender Hügel maximal haben, ohne die Richtfunkstrecke nennenswert zu beeinträchtigen? Erklären Sie Ihre Argumentation!
- 4.2 (10%) Welche EIRP (in Watt und in dBW) muss die Sendeanlage erzeugen, damit der erforderliche Signal/Rausch-Abstand am Empfänger erreicht wird?
- 4.3 (4%) Welche Sendeleistung (in Watt und in dBW) ist nötig, wenn die Sendeanlage eine baugleiche Parabolantenne verwendet wie der Empfänger?

$$4.) \quad f = 11 \text{ GHz}, \sigma = 220 \text{ m}^2, T = 400 \text{ K}, B = 6 \text{ MHz}, \text{SNR}_{\min} = 18 \text{ dB}$$

$$D = 1.5 \text{ m}, w = 0.8, h_R = 400 \text{ m}$$

$$4.1.) \quad \lambda = \frac{c_0}{f} = 2.72 \text{ cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{D \lambda}{4}} = 9.045 \text{ m}$$

$$h = h_R - r = \underline{390.95 \text{ m}} \quad 1. \text{ Fresnel-Ellipsoid bleibt frei}$$

$$4.2.) \quad \text{Leistung am Spiegel } P_m = \frac{P_s G_s}{4\pi d_o^2} \sigma, \text{ mit } d_o = \sqrt{8^2 + 0.4^2} \text{ km} = 8.001 \text{ km}$$

$$P_e = \frac{P_m}{4\pi d^2} A_e = \frac{EIRP}{16\pi^2 d_o^2 d^2} \sigma A_e, \quad EIRP = P_s G_s, \quad A_e = \frac{D^2 \pi}{4} W = 1.414 \text{ m}^2$$

$$P_{n, \text{dBW}} = 10 \log \left(\frac{kTB}{1W} \right) = -134.8 \text{ dBW}$$

$$P_{e,\min, \text{dBW}} = P_{n, \text{dBW}} + \text{SNR}_{\min} = -116.8 \text{ dBW}, \quad P_{e,\min} = 2.083 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$\Rightarrow EIRP_{\min} = P_{e,\min} \frac{16\pi^2 d_o^2 d^2}{\sigma A_e} = \underline{9.772 \text{ kW}} \hat{=} \underline{39.9 \text{ dBW}}$$

$$4.3.) \quad G_s = G_e = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e = 23.884$$

$$P_s = \frac{EIRP}{G_s} = \underline{0.4095 \text{ W}} \hat{=} \underline{-3.878 \text{ dBW}}$$

4 Mobilfunksystem (20%)

Über ein Mobilfunksystem sind folgende Parameter bekannt: Betriebsfrequenz 1,8 GHz, Bandbreite 200 kHz, Zusatzrauschen des Empfängers 6 dB, minimal erforderliches SNR am Demodulator des Empfängers 13 dB, Gewinn der Empfangsantenne -8 dBi. Die Sendeantenne ist eine typische Sektorantenne mit 1,5 m Höhe, 30 cm Breite und hat einen Gewinn von 13 dBi.

Hinweise: Boltzmannkonstante $1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K, Bezugstemperatur $T_0 = 290$ K.
Vernachlässigen Sie Verluste in Kabeln.

4.1 (5%) In welcher Entfernung beginnt das Fernfeld dieser Sendeantenne?

4.2 (10%) Ermitteln Sie die maximal erlaubte Ausbreitungsdämpfung und die entsprechende Entfernung für eine Sendeleistung von 17 dBm! Geben Sie alle auftretenden Größen in logarithmischen Maßen (dB, dBm,...) an.

4.3 (5%) Zeichen Sie einen Pegelplan (Handskizze, muss nicht masstäblich sein)!

4.) $f = 1.8 \text{ GHz}$, $B = 200 \text{ kHz}$, $F = 6 \text{ dB}$, $\text{SNR}_{\min} = 13 \text{ dB}$, $G_{e,\text{dB}} = -8 \text{ dBi}$
 $h = 1.5 \text{ m}$, $b = 30 \text{ cm}$, $G_{s,\text{dB}} = 13 \text{ dBi}$, $T_0 = 290 \text{ K}$

4.1.) $\lambda = \frac{c_0}{f} = 16.16 \text{ cm}$, $D = \sqrt{h^2 + b^2} = 1.53 \text{ m}$

$$r_R = \frac{2D^2}{\lambda} = \underline{\underline{28.08 \text{ m}}}$$

4.2.) $P_{s,\text{dBm}} = 17 \text{ dBm}$

$$B_{\text{dBHz}} = 10 \log \left(\frac{B}{1 \text{ Hz}} \right) = 53.01 \text{ dBHz}$$

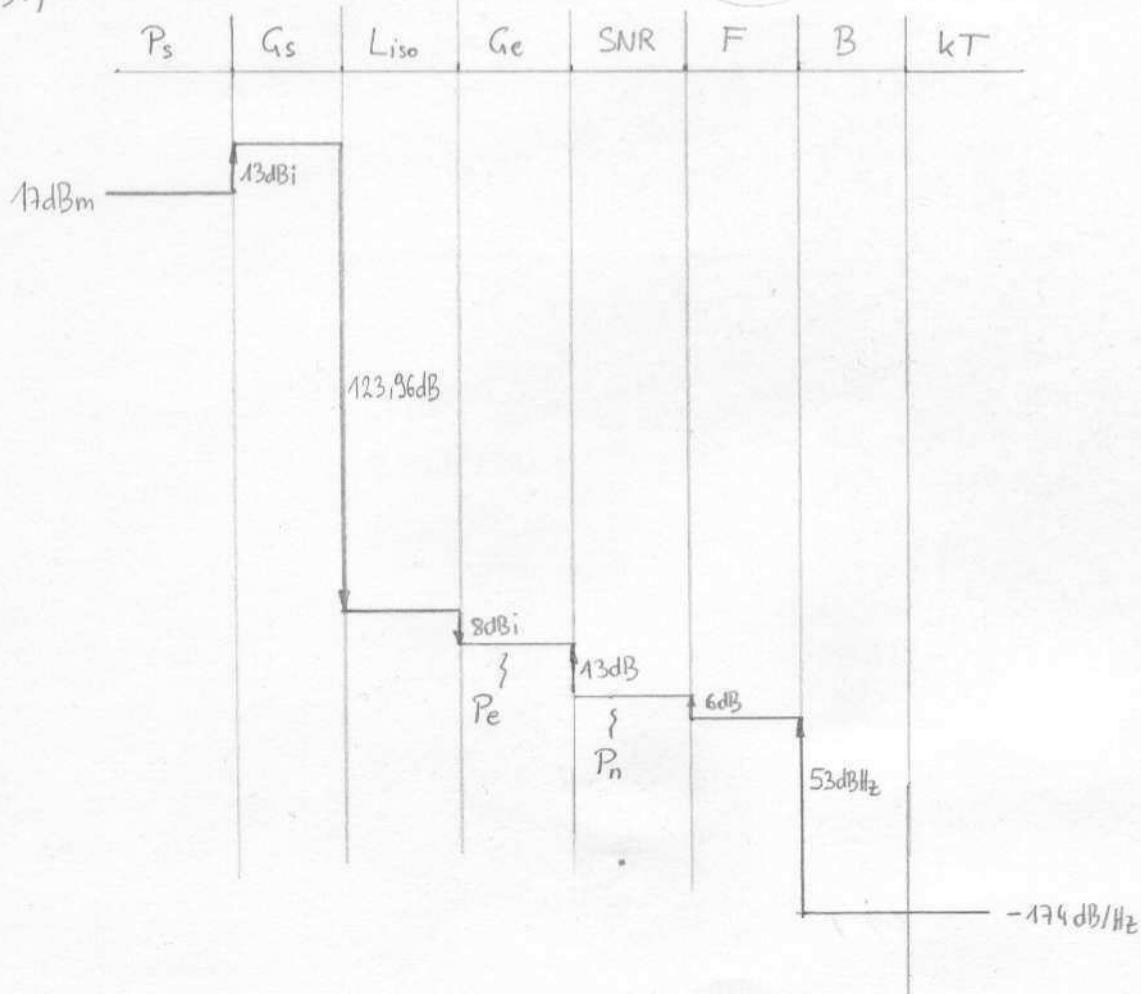
$$P_{n,\text{dBm}} = -174 \text{ dBm/Hz} + B_{\text{dBHz}} + F = -114.96 \text{ dBm}$$

$$P_{e,\min,\text{dBm}} = P_{n,\text{dBm}} + \text{SNR}_{\min} = -101.96 \text{ dBm}$$

$$L_{iso,\text{dB}} = P_{s,\text{dBm}} - P_{e,\text{dBm}} + G_{s,\text{dB}} + G_{e,\text{dB}} = \underline{\underline{123.96 \text{ dB}}} = -20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)$$

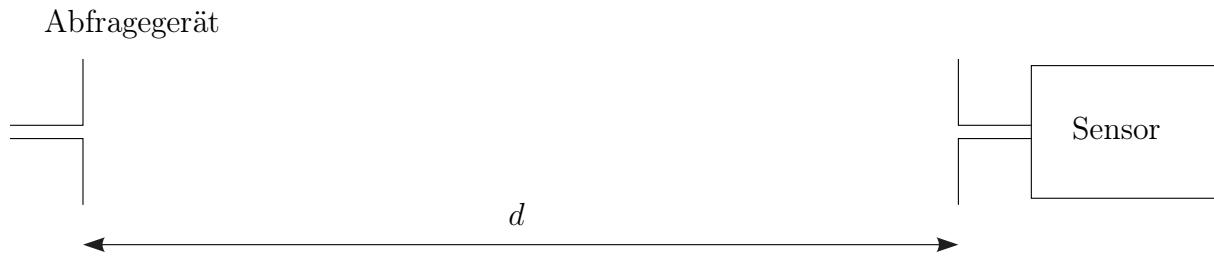
$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot 10^{\frac{L_{iso,\text{dB}}}{20}} = \underline{\underline{201.935 \text{ km}}}$$

4.3.)



5 Drahtloser Temperatursensor (25%)

Ein drahtloser Temperatursensor soll aus $d = 5 \text{ m}$ Distanz per Funk (433 MHz, 100 mW Sendeleistung) ausgelesen werden. Vereinfachend wird angenommen, dass das Abfragegerät und der Sensor mit optimal ausgerichteten, verlustbehafteter ($w = 0,9$) Hertz'schen Dipolen ausgestattet sind. Es wird eine Welle zum Sensor geschickt, die vom Sensor zeitverzögert und um 28 dB geschwächt reflektiert wird. Das Abfragegerät schaltet während der Zeitverzögerung auf Empfang und registriert das Sensorsignal.



5.1 (5%) Gilt für diese Anordnung die Annahme, dass sich der Sensor in der Fernzone der Antenne des Abfragegerätes befindet? Nehmen Sie die wirksame Antennenfläche als kreisförmig an!

5.2 (5%) Berechnen Sie die vom Sensor empfangene Leistung!

5.3 (5%) Wie groß ist die Differenz zwischen der gesendeten Leistung und der am Abfragegerät empfangenen Leistung in dB (Strecke Abfragegerät – Sensor – Abfragegerät)?

5.4 (10%) Zeichnen Sie einen Pegelplan (ohne Rauschen) der Strecke Abfragegerät – Sensor – Abfragegerät. Geben Sie alle Pegel bzw. Änderungen auf den Teilstrecken an (in dBm bzw. in dB)!

$$5.) \quad d = 5 \text{ m}, \quad f = 433 \text{ MHz}, \quad P_{s,A} = 100 \text{ mW}, \quad w = 0.9, \quad L_{vis} = 28 \text{ dB}$$

$$5.1.) \quad \lambda = \frac{c_0}{f} = 69,28 \text{ cm}, \quad G_s = G_e = \frac{3}{2} \hat{=} 1,76 \text{ dBi}$$

$$A = \frac{G_s \lambda^2}{4\pi w} = 6,366 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = \frac{D^2 \pi}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0,1285 \text{ m}$$

$$r_R = \frac{2D^2}{\lambda} = 0,234 \text{ m} < d \quad \text{Fernfeld}$$

$$5.2.) \quad P_{e,s} = P_{s,A} \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 G_s G_e = 27,36 \mu\text{W} \hat{=} -15,63 \text{ dBm}$$

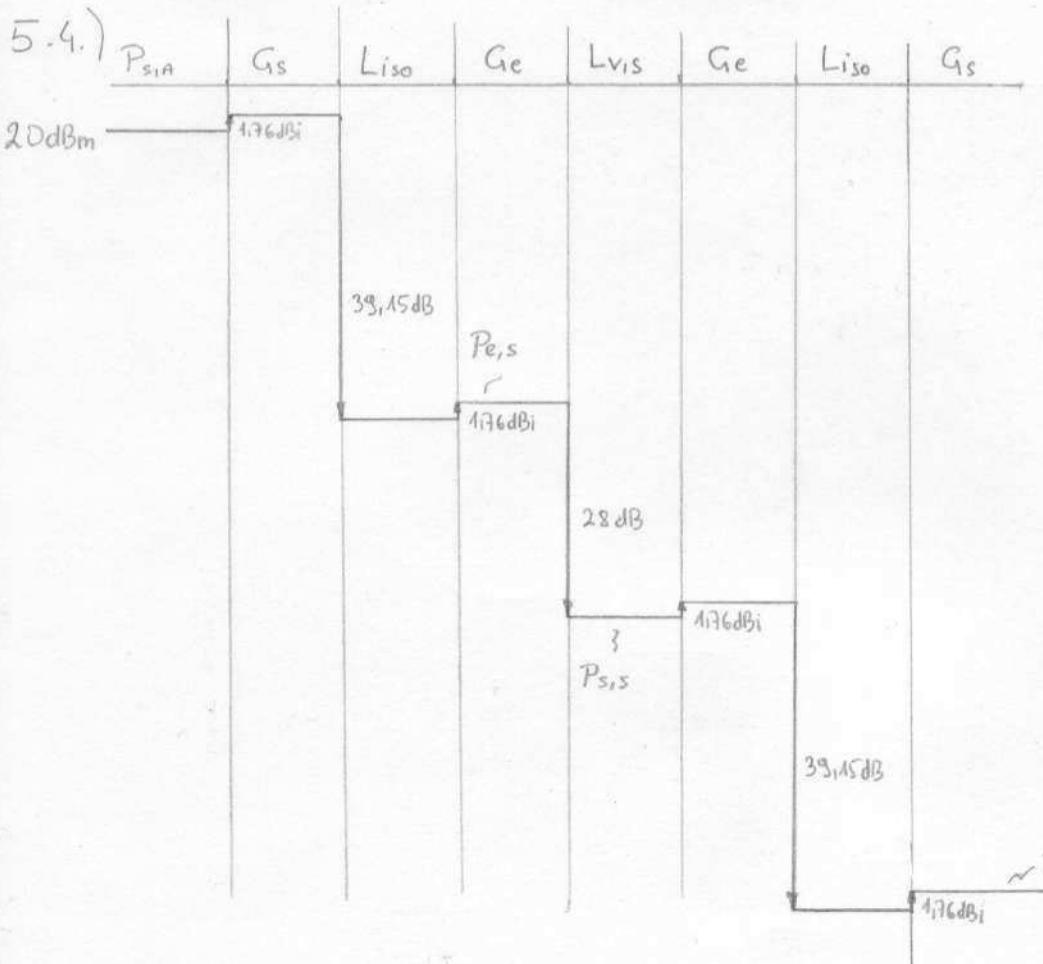
$$5.3.) \quad P_{e,A,\text{dBm}} = P_{s,S,\text{dBm}} - L_{iso,\text{dB}} + G_{s,\text{dB}} + G_{e,\text{dB}}$$

$$L_{iso,\text{dB}} = -20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right) = 39,15 \text{ dB}$$

$$P_{s,S,\text{dBm}} = P_{e,s,\text{dBm}} - L_{vis} = -43,63 \text{ dBm}$$

$$\Rightarrow P_{e,A,\text{dBm}} = -79,26 \text{ dBm}$$

$$\Delta P_A = P_{s,A,\text{dBm}} - P_{e,A,\text{dBm}} = 99,26 \text{ dB}$$



5 Energieübertragung mit Parabolspiegeln (10%)

Zwei identische Parabolspiegel sind im Abstand von 5m aufeinander ausgerichtet. Bei einer Betriebsfrequenz von 10GHz wird vom Sender zum Empfänger 10dB Übertragsverlust gemessen.

5.1 (5%) Welchen Durchmesser haben die Spiegel?

5.2 (5%) Ist die Fernfeldbedingung erfüllt? Warum/warum nicht?

$$5.) \quad d = 5 \text{ m}, \quad f = 10 \text{ GHz}, \quad L_{dB} = 10 \text{ dB}, \quad G_e = G_s = G$$

$$5.1.) \quad P_{e,dBm} = P_{s,dBm} - L_{dB}, \quad L_{dB} = L_{iso,dB} - 2G_{dB}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = 3 \text{ cm}, \quad L_{iso,dB} = -20 \log\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right) = 66,4 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = \frac{1}{2} (L_{iso,dB} - L_{dB}) = 28,21 \text{ dB}$$

$$G = 662,22 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_W, \quad \text{mit } w=1, A = \frac{D^2\pi}{4}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{\lambda^2 G}{\pi^2}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{G} = \underline{\underline{0,246 \text{ m}}}$$

$$5.2.) \quad r_R = \frac{2D^2}{\lambda} = \underline{\underline{4,026 \text{ m}}} < d \dots \text{Fernfeld}$$

4 Fernsehsatellit ASTRA (10%)

Die Fernsehsatelliten ASTRA (11GHz) haben ein EIRP von 50dBW bei einer Sendeleistung von 47W.

4.1 (5%) Berechnen Sie die Antennengewinne bezogen auf den Isotropstrahler und den Hertz'schen Dipol!

4.2 (5%) Welchen Durchmesser hat die Parabolantenne dieses Satellitentyps bei einem angenommenen Flächenwirkungsgrad $w = 0.8$?

4.) $f = 11 \text{ GHz}$, $EIRP = 50 \text{ dBW}$, $P_s = 47 \text{ W}$

4.1) $P_{s, \text{dBW}} = 16,72 \text{ dBW}$

$$EIRP = P_s G_{\text{iso}}$$

$$G_{\text{iso}, \text{dB}} = EIRP_{\text{dBW}} - P_{s, \text{dBW}} = \underline{\underline{33,28 \text{ dB}}} \triangleq 2127,66$$

$$G_{\text{HD}} = \frac{2}{3} G_{\text{iso}} = 14,18,44 \triangleq \underline{\underline{31,52 \text{ dB}}}$$

4.2) $G_{\text{iso}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_w$, $w = 0,8$, $A = \frac{D^2\pi}{4}$

$$\Rightarrow D = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{G_{\text{iso}}}{w}} = \underline{\underline{0,448 \text{ m}}}$$

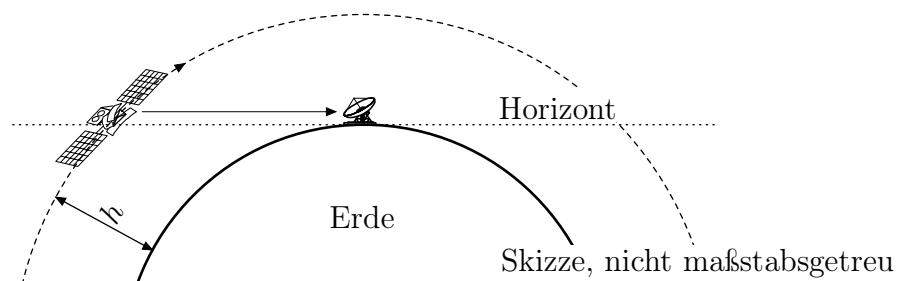
5 Satellitenfunk (15%)

Der Satellit MOST fliegt in einer erdnahen Umlaufbahn in $h = 820$ km Höhe um die Erde (Erdradius $r = 6370$ km). Er sendet bei $f = 2232$ MHz mit einer Sendeleistung von $P_s = 0,5$ W bei einer Bandbreite von $\Delta f = 78$ kHz und seine Antenne hat einen Gewinn von 0 dBi. Zwischen Sender und Antenne befinden sich Kabel mit 2 dB Verlusten.

Die Bodenstation in Wien verwendet einen Parabolspiegel mit einem Gewinn von 35 dBi der dem Satelliten bei seinem Überflug folgt und der Empfänger hat eine Rauschtemperatur von 115 °K.

Nehmen Sie zusätzliche Dämpfungen von 0,8 dB durch die Atmosphäre, 3 dB aufgrund von Polarisationsverlusten sowie 1,2 dB aufgrund mechanischer Toleranzen bei der Ausrichtung der Antenne an.

Hinweis: Boltzmann-Konstante $1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/°K



- 5.1 (10%) Berechnen Sie das SNR (in dB) für den Fall, dass sich der Satellit genau am Horizont befindet.
- 5.2 (5%) Um wieviel dB verbessert sich das SNR wenn sich der Satellit genau über Wien befindet?

$$5.) \quad h = 820 \text{ km}, \quad r = 6370 \text{ km}, \quad f = 2,232 \text{ GHz}, \quad P_s = 0,5 \text{ W}, \quad B = 78 \text{ kHz}$$

$$G_{S,\text{dB}} = 0 \text{ dB}, \quad L_{V,S} = 2 \text{ dB}$$

$$G_{e,\text{dB}} = 35 \text{ dB}, \quad T = 115 \text{ K}, \quad L_{V,A} = 0,8 \text{ dB}, \quad L_{V,P} = 3 \text{ dB}, \quad L_{V,M} = 1,2 \text{ dB}$$

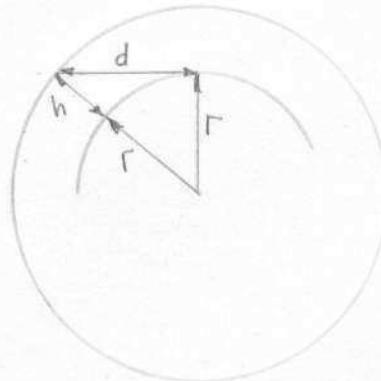
$$5.1) \quad \lambda = \frac{c_0}{f} = 13,44 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2} = 3335 \text{ km}$$

$$L_V = L_{V,S} + L_{V,A} + L_{V,P} + L_{V,M} = 7 \text{ dB}$$

$$P_{s,\text{dBW}} = -3 \text{ dBW}$$

$$L_{\text{iso},\text{dB}} = -20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right) = 169,87 \text{ dB}$$



$$\begin{aligned} P_{e,\text{dBW}} &= P_{s,\text{dBW}} - L_{\text{iso},\text{dB}} - L_V + G_{S,\text{dB}} + G_{e,\text{dB}} \\ &= \underline{-144,89 \text{ dBW}} \end{aligned}$$

$$P_{n,\text{dBW}} = 10 \log \left(\frac{kTB}{1W} \right) = -159,07 \text{ dBW}$$

$$\text{SNR} = P_{e,\text{dBW}} - P_{n,\text{dBW}} = \underline{14,18 \text{ dB}}$$

$$5.2.) \quad d = h = 820 \text{ km}$$

$$L_{\text{iso},\text{dB}} = 157,69 \text{ dB}$$

$$P_e = -132,7 \text{ dBW}$$

$$\text{SNR}' = 26,37 \text{ dB}$$

$$\Delta \text{SNR} = \text{SNR}' - \text{SNR} = \underline{12,18 \text{ dB}}$$

5 Radar (20%)

Ein Radargerät auf einem Schiff arbeite mit einer Betriebsfrequenz von 14 GHz und einem Antennengewinn von 37 dBi. In einer Entfernung von 5 km wird ein idealer, kreisförmiger Retroreflektor mit einem Durchmesser von 35 cm geortet.

5.1 (6%) Wie gross ist der Streuquerschnitt σ des Retroreflektors?

5.2 (9%) Welche Leistung (in dBm) hat das empfangene Echo, wenn die Sendeleistung 800 W beträgt?

5.3 (5%) In welcher Entfernung kann der Retroreflektor noch erkannt werden, wenn die minimale Empfangsleistung -90 dBm beträgt?

$$5.) \quad f = 14 \text{ GHz}, \quad G_{S,\text{dB}} = 37 \text{ dB}, \quad d = 5 \text{ km}, \quad D = 35 \text{ cm}$$

$$5.1.) \quad A = \frac{\pi D^2}{4} = 0,0962 \text{ m}^2, \quad \lambda = \frac{c_0}{f} = 2,143 \text{ cm}$$

$$\sigma = 4\pi \frac{A^2}{\lambda^2} = \underline{253,32 \text{ m}^2}$$

$$5.2.) \quad P_s = 800 \text{ W}, \quad G_s = 50 \text{ dBi}$$

$$P_e = P_s \sigma G_s^2 \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{4\pi d^4} = 1,885 \cdot 10^{-6} \text{ mW} \triangleq \underline{-57,25 \text{ dBm}}$$

$$5.3.) \quad P_{e,\text{dBm}} = -90 \text{ dBm}, \quad P_e = 10^{-92} \text{ W}$$

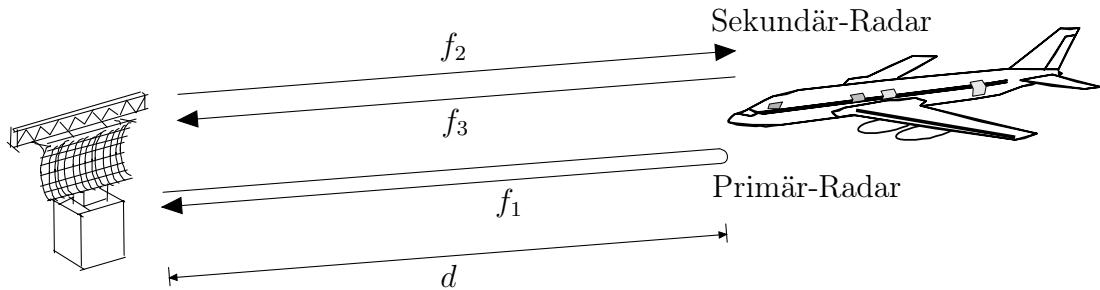
$$d = \sqrt[4]{\frac{P_s}{P_e} \sigma G_s^2 \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{4\pi}} = \underline{32,34 \text{ km}}$$

4 Flughafenradar (25%)

Ein Flughafen setzt ein monostatisches Primär-Radar ein um die Entfernung der Flugzeuge zu messen. An den Sender mit einer Sendeleistung P_{s1} von 44 dBW bei $f_1 = 2,8$ GHz ist eine Antenne mit einem Gewinn G_{s1} von 40 dBi angeschlossen. Ein typisches Flugzeug habe einen Radarquerschnitt von $\sigma = 100 \text{ m}^2$. Der Empfänger des Primär-Radars habe eine Rauschtemperatur $T_1 = 160 \text{ }^\circ\text{K}$ und eine Bandbreite $\Delta f_1 = 200 \text{ MHz}$.

Wurde ein Flugzeug erkannt, so wird ein so genanntes Sekundär-Radar eingesetzt um es zu identifizieren. Ein zweiter Sender mit einer Sendeleistung P_{s2} bei $f_2 = 1030 \text{ MHz}$ sende über eine Antenne mit einem Gewinn G_{s2} von 10 dBi eine Anfrage an das Flugzeug. Dieses empfängt das Signal mit einer Antenne mit einem Gewinn G_{e2} von 3 dBi. Der Empfänger im Flugzeug habe eine Rauschtemperatur von $T_2 = 200 \text{ }^\circ\text{K}$ und eine Bandbreite $\Delta f_2 = 1 \text{ MHz}$. Wird das Signal empfangen, antwortet das Flugzeug auf einer Frequenz f_3 .

Hinweis: Boltzmann-Konstante $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws}/\text{K}$



- 4.1 (13%) Berechnen Sie die maximale Reichweite d_{max} des Radars, wenn ein minimales SNR von 13 dB erreicht werden soll.
- 4.2 (9%) Welche Sendeleistung P_{s2} ist für das Sekundär-Radar notwendig damit im schlechtesten Fall am Flugzeug noch ein SNR von 20 dB erreicht werden kann?
- 4.3 (3%) Wieso ist die horizontale Abmessung der Radar-Antenne wie im Bild angedeutet größer als die vertikale Abmessung?

- 4.) $P_{S1,\text{dBW}} = 44 \text{ dBW}$, $f_1 = 218 \text{ GHz}$, $G_{S1,\text{dB}} = 40 \text{ dBi}$
 $\sigma = 100 \text{ m}^2$, $T_1 = 160 \text{ K}$, $B_1 = 200 \text{ MHz}$
 $f_2 = 1030 \text{ MHz}$, $G_{S2,\text{dB}} = 10 \text{ dBi}$, $G_{e2,\text{dB}} = 3 \text{ dBi}$
 $T_2 = 200 \text{ K}$, $B_2 = 1 \text{ MHz}$

4.1) $\text{SNR}_{\min} = 13 \text{ dB}$, $\lambda_1 = \frac{c_0}{f_1} = 1017 \text{ cm}$

$$P_{n1,\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{kT_1 B_1}{1 \text{ W}} \right) = -123,55 \text{ dBW}$$

$$P_{e1,\text{dBW}} = P_{n1,\text{dBW}} + \text{SNR}_{\min} = -110,55 \text{ dBW}$$

$$P_{e1} = 8,815 \cdot 10^{-12} \text{ W}, P_{S1} = 25,2 \text{ kW}, G_{S1} = 10,000$$

$$d_{\max} = \sqrt[4]{\frac{P_{S1}}{P_{e1}} \sigma G_{S1}^2 \left(\frac{\lambda_1}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{4\pi}} = \underline{113,31 \text{ km}}$$

4.2) $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$, $\lambda_2 = \frac{c_0}{f_2} = 29,13 \text{ cm}$

$$P_{n2,\text{dBW}} = 10 \log \left(\frac{kT_2 B_2}{1 \text{ W}} \right) = -145,6 \text{ dBW}$$

$$P_{e2,\text{dBW}} = P_{n2,\text{dBW}} + \text{SNR} = -125,6 \text{ dBW}$$

$$P_{e2} = 2,761 \cdot 10^{-13} \text{ W}, G_{S2} = 10, G_{e2} = 2$$

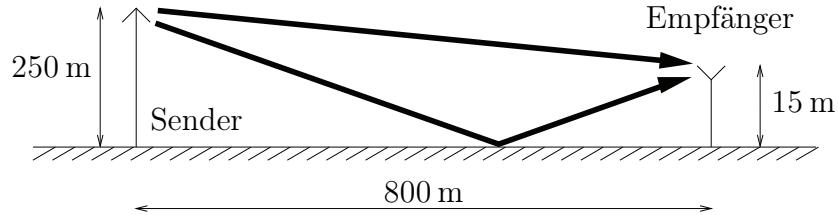
$$P_{e2} = \frac{P_{S2} G_{S2}}{4\pi d_{\max}^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{e2}$$

$$\Rightarrow P_{S2} = P_{e2} \left(\frac{4\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{d_{\max}^2}{G_{e2} G_{S2}} = \underline{0,1331 \text{ W}}$$

4.3.) (höhere horizontale Auflösung ?)

4 Zwei-Wege Ausbreitung im Mobilfunk (20%)

Gegeben ist die abgebildete Anordnung bestehend aus einem Sender mit Höhe h_S und einem Empfänger mit Höhe h_E in Entfernung d . Der Boden ist ideal leitfähig, sodass der Empfänger neben der direkten Welle eine gleich starke, reflektierte Welle empfängt. Die Mittenfrequenz des Senders beträgt 2 GHz.



4.1 (3%) Wie groß ist der Laufzeitunterschied zwischen den beiden Ausbreitungspfaden?

4.2 (3%) Überprüfen Sie, ob der Boden in die erste Fresnelzone hineinragt.

4.3 (4%) Wie hoch ist die Ausbreitungsdämpfung des direkten Pfads (also ohne Berücksichtigung der Reflexion) in dB?

4.4 (5%) Der Empfänger bewegt sich rund um seinen Standort. Welcher ungefähre räumliche Abstand ist zwischen zwei Schwundlöchern zu erwarten?

4.5 (5%) Durch die Reflexion kommt es beim Empfänger zu Schwund. Wie groß ist der Frequenzabstand zwischen zwei Schwundlöchern?

$$4.) \quad h_s = 250\text{m}, \quad h_e = 15\text{m}, \quad d = 800\text{m}, \quad f = 2\text{GHz}$$

4.1.)

$$\tan \theta = \frac{h_s}{x} = \frac{h_e}{y}$$

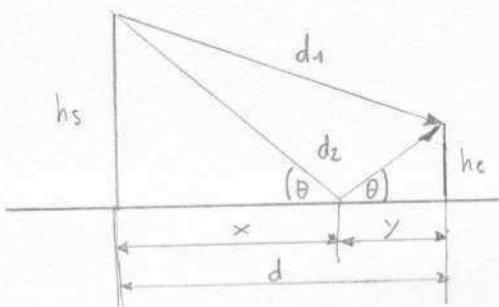
$$x + y = d$$

$$\Rightarrow y = \frac{d}{1 + h_s/h_e} = 45,28\text{m}, \quad x = 754,72\text{m}$$

$$d_1 = \sqrt{(h_s - h_e)^2 + d^2} = 833,8\text{m}$$

$$d_2 = \sqrt{x^2 + h_s^2} + \sqrt{y^2 + h_e^2} = 842,75\text{m}$$

$$\tau_1 = \frac{d_1}{c_0} = 2,779\mu\text{s}, \quad \tau_2 = \frac{d_2}{c_0} = 2,809\mu\text{s} \quad \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \underline{\underline{29,823\text{ns}}}$$



4.2.) für gleiche Höhe: $h_s = h_e$

$$r = \sqrt{\frac{d\lambda}{4}} = \underline{\underline{514,77\text{m}}}, \quad \lambda = \frac{c_0}{f} \approx 15\text{cm}$$

$r < h_e$... 1. Fresnelzone frei

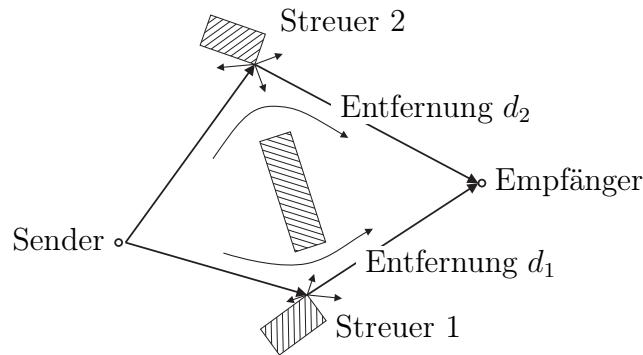
$$4.3.) \quad L_{iso,\text{dB}} = -20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_1} \right) = \underline{\underline{96,88\text{dB}}}$$

$$4.4.) \quad \Delta r_{\text{notch}} \approx \lambda/2 = \underline{\underline{7,5\text{cm}}}$$

$$4.5.) \quad \Delta f_{\text{notch}} \frac{1}{\Delta \tau} = \underline{\underline{33,53\text{MHz}}}$$

4 Zeitinvariante Zweiwegeausbreitung (25%)

Zwei gleich starke Strahlen, die von einer omnidirektionalen Sendeantenne (Isotropstrahler) ausgehen, werden an der Empfangsantenne superponiert. Der Weg des zweiten Strahles d_2 ist um 25% länger als $d_1 = 1800$ m. Die Feldstärke des ersten Stahles am Empfänger sei E_0 . Anmerkung: Nehmen Sie die Streuer als ideal reflektierend an!



- 4.1 (2%)** Berechnen Sie die Laufzeiten beider Strahlen!
- 4.2 (2%)** Wie groß ist die Feldstärke des zweiten Strahles (relativ zum ersten Strahl) am Empfänger?
- 4.3 (10%)** Berechnen Sie die Gesamtfeldstärke am Empfänger!
- 4.4 (11%)** Berechnen und zeichen Sie (in dB, bezogen auf E_0) den Verlauf des Betrages der Gesamtfeldstärke am Empfänger als Funktion der Frequenz im Bereich von 850 bis 855 MHz!

$$4.) d_1 = 1800 \text{ m}, d_2 = 1,25 d_1 = 2250 \text{ m}$$

$$4.1.) \tau_1 = \frac{d_1}{c_0} = \underline{\underline{6 \mu\text{s}}}, \tau_2 = \frac{d_2}{c_0} = \underline{\underline{7,5 \mu\text{s}}}$$

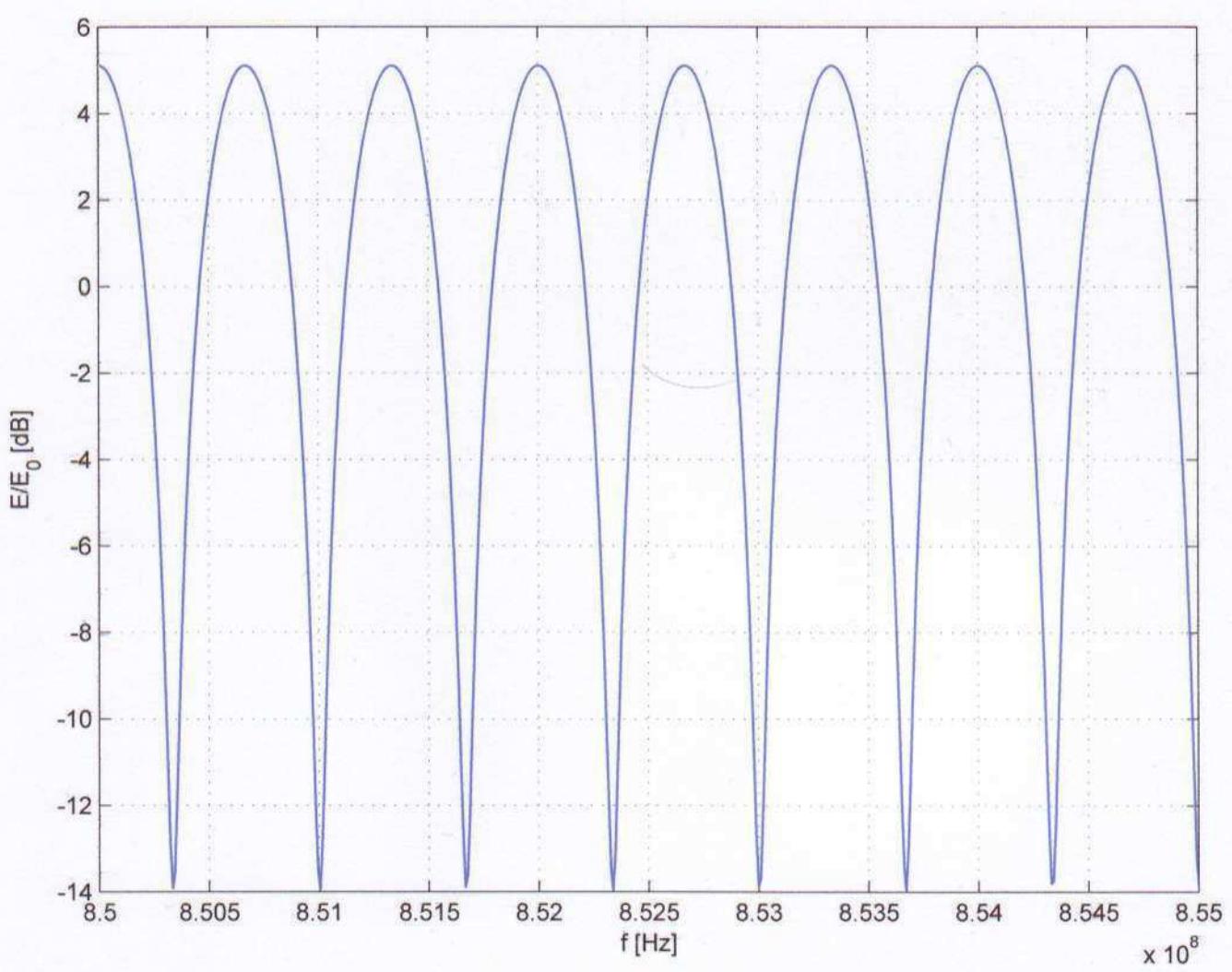
$$4.2.) P_{e1} = P_s + 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_1} \right) = 10 \log \left(\frac{E_o^2}{2\eta} \right) \Rightarrow P_s = 10 \log \left(\frac{E_o^2}{2\eta} \right) - 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_1} \right)$$

$$\begin{aligned} P_{e2} &= P_s + 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_2} \right) = 10 \log \left(\frac{E_2^2}{2\eta} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 &= \left(\frac{E_2}{E_o} \right)^2 \Rightarrow E_2 = \frac{d_1}{d_2} E_o = \underline{\underline{0,8 E_o}} \end{aligned}$$

$$4.3.) E = E_o (e^{-j\omega\tau_1} + 0,8 e^{-j\omega\tau_2})$$

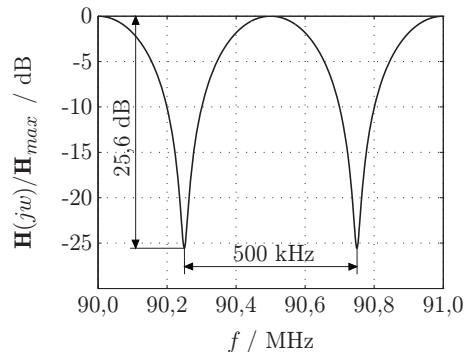
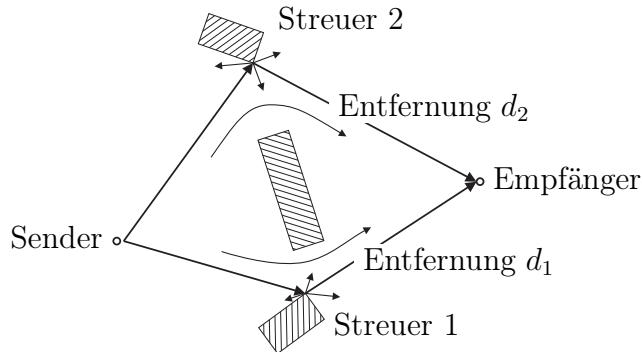
$$4.4.) |E| = E_o \sqrt{1,64 + 1,6 \cos(\omega \Delta \tau)}, \Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = 1,5 \mu\text{s}, \Delta f_{\text{notch}} = \frac{1}{\Delta \tau} = 666 \text{ kHz}$$

$$\underline{\underline{\frac{|E|}{E_o} [\text{dB}] = 20 \log \left(\sqrt{1,64 + 1,6 \cos(2\pi f \Delta \tau)} \right) = 10 \log \left[1,64 + 1,6 \cos \left(2\pi \frac{f}{\Delta f_{\text{notch}}} \right) \right]}}$$



5 Kanalmessung (15%)

Bei einer Kanalmessung des skizzierten NLOS (Non-Line-Of-Sight) Szenarios sendet der Sender mit einer konstanten frequenzunabhängigen Amplitude A . Es wird die angegebene normierte Übertragungsfunktion ermittelt. Die Entfernung d_1 beträgt 2,2 km.



5.1 (7%) Wie groß ist die Entfernung d_2 ?

5.2 (8%) Um welchen Faktor (in dB) unterscheiden sich die empfangenen Leistungen aus Richtung Streuer 1 und Streuer 2?

$$5) d_1 = 2,2 \text{ km}, \Delta f_{\text{notch}} = 500 \text{ kHz}$$

$$5.1.) \Delta \tau = \frac{1}{\Delta f_{\text{notch}}} = 2 \mu\text{s}$$

$$\tau_1 = \frac{d_1}{c_0} = 7,33 \mu\text{s}, \tau_2 = \Delta \tau + \tau_1 = 9,33 \mu\text{s}$$

$$d_2 = c_0 \tau_2 = \underline{\underline{2,8 \text{ km}}}$$

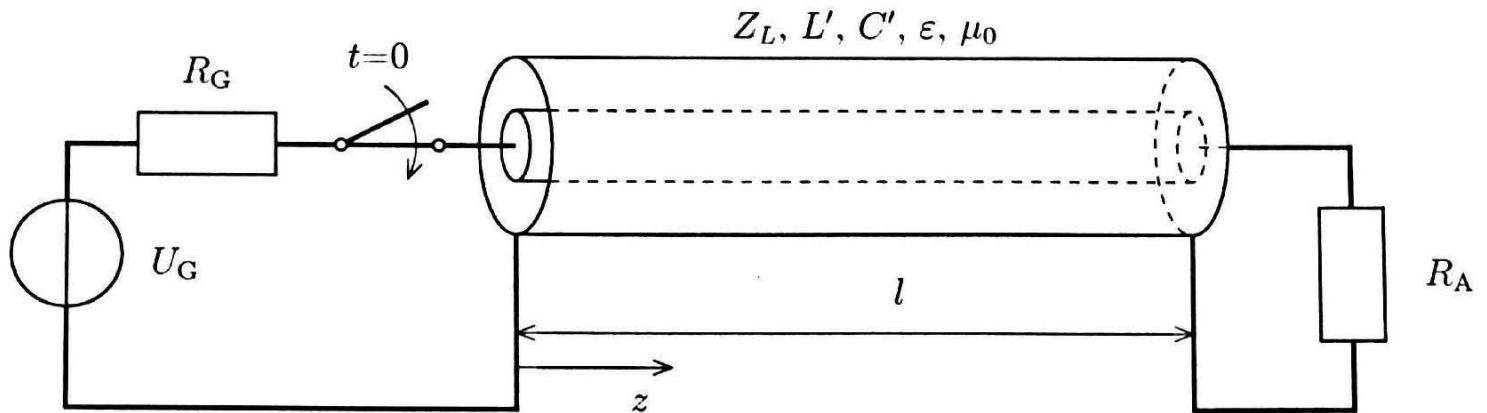
$$5.2.) P_{e1, \text{dB}} = P_{s, \text{dB}} + 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_1} \right)$$

$$P_{e2, \text{dB}} = P_{s, \text{dB}} + 20 \log \left(\frac{\lambda}{4\pi d_2} \right)$$

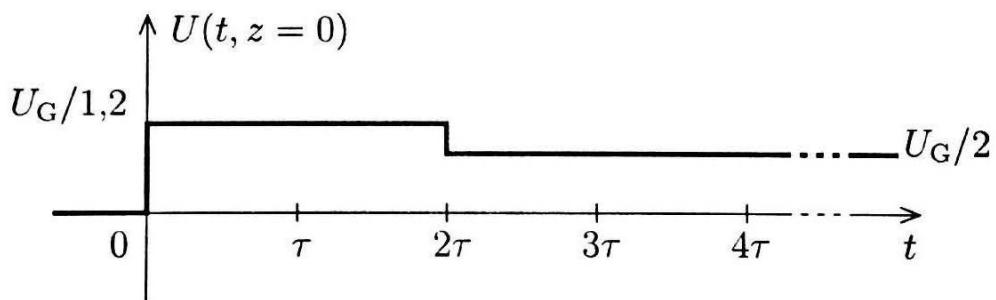
$$\Delta P_e = P_{e1, \text{dB}} - P_{e2, \text{dB}} = 20 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right) = \underline{\underline{2,095 \text{ dB}}}$$

3 Messung am Koaxialkabel (20%)

Ein verzerrungsfreies, näherungsweise verlustloses Koaxialkabel mit dem Wellenwiderstand Z_L , der Länge $l = 150 \text{ m}$ und dem Innenleiterradius $r_i = 2 \text{ mm}$ wird mit einem Generator mit Innenwiderstand $R_G = 30 \Omega$ und einem Abschlusswiderstand R_A wie in der Abbildung dargestellt verbunden.



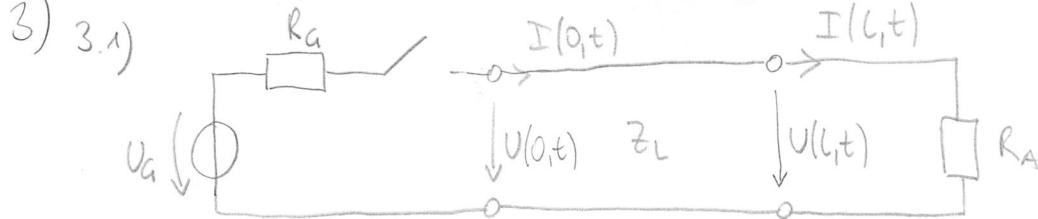
Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Generator eingeschaltet. Am Eingang der Koaxialleitung (bei $z = 0$) wird folgender Spannungsverlauf gemessen. Dabei entspricht $\tau = 550 \text{ ns}$ der einfachen Laufzeit auf dem Koaxialkabel.



Hinweis: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, $\epsilon_0 = 8,8541 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

- 3.1 (3%) Berechnen Sie den Leitungswellenwiderstand Z_L des Koaxialkabels!
- 3.2 (3%) Berechnen Sie den Abschlusswiderstand R_A !
- 3.3 (3%) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_G auf der Leitung!
- 3.4 (5%) Berechnen Sie die Beläge L' und C' des Koaxialkabels!
- 3.5 (6%) Berechnen Sie ϵ_r des Mediums und bestimmen Sie damit den Außenradius r_a des Koaxialkabels!

3)



$$L = 150 \text{ m}$$

$$r_i = 2 \text{ mm}$$

$$R_G = 30 \Omega$$

$$\tau = 550 \text{ ns}$$

$$U_G = R_G \cdot I(0,t) + U(0,t)$$

$$z=0, t=0 \quad U_G = (R_G + Z_L) \cdot I(0,0) = R_G + Z_L \cdot \frac{U(0,0)}{Z_L}$$

$$\rightarrow U(0,0) = U_G \cdot \frac{Z_L}{R_G + Z_L} \stackrel{!}{=} \frac{U_G}{1,2}$$

$$1,2 \cdot Z_L = R_G + Z_L$$

$$\rightarrow Z_L = \frac{R_G}{0,2} = \underline{\underline{150 \Omega}}$$

Der Generator sieht zu Beginn lediglich die Leitung mit Z_L

3.2)

$$U(L,t) = R_A \cdot I(L,t)$$

$$U(z,t) = Z_L \cdot I(z,t)$$

$$z=L, t=\tau \quad R_A \cdot I(L,\tau) \stackrel{!}{=} Z_L \cdot I(L,\tau) \quad \text{für } R_A = Z_L \text{ keine Reflexion}$$

$$U_v(L,\tau) + U_r(L,\tau) = R_A \cdot (I_v(L,\tau) + I_r(L,\tau))$$

$$U_v(L,\tau) = Z_L \cdot I_v(L,\tau)$$

$$U_r(L,\tau) = -Z_L \cdot I_r(L,\tau)$$

 $t=\tau$

$$R_A \cdot (I_v(L,\tau) + I_r(L,\tau)) \stackrel{!}{=} Z_L \cdot I_v(L,\tau) - Z_L \cdot I_r(L,\tau)$$

$$U_r(L,\tau) = U_v(L,\tau) \cdot \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\rho_a = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\rho_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

 $t=2\tau$

$$U_v(0,2\tau) = U_v(0,0) + U_r(L,\tau) \cdot \rho_a = U_v(0,0) + U_r(L,\tau) \cdot \rho_A \cdot \rho_a \stackrel{!}{=} \frac{U_G}{2}$$

$$\frac{U_G}{1,2} + \frac{U_G}{1,2} \cdot \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} \cdot \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} = \frac{U_G}{2}$$

$$\frac{1}{1,2} + \frac{(R_A - Z_L) \cdot (R_A - Z_L)}{1,2 \cdot (R_A + Z_L) \cdot (R_A + Z_L)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1,2} \cdot \left(1 + \frac{R_A \cdot R_A - Z_L \cdot R_A - R_A \cdot Z_L + Z_L^2}{R_A \cdot R_A + Z_L \cdot R_A + R_A \cdot Z_L + Z_L^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_A \cdot R_g - Z_L \cdot R_g - R_A \cdot Z_L + Z_L^2}{R_A \cdot R_g + Z_L \cdot R_g + R_A \cdot Z_L + Z_L^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1,2}} - 1 = -\frac{0,8}{2} = -\frac{2}{5}$$

$$R_A \cdot (R_g - Z_L) - R_g \cdot Z_L + Z_L^2 = -\frac{2}{5} \cdot (R_A \cdot (R_g + Z_L) + R_g \cdot Z_L + Z_L^2)$$

$$R_A \cdot (R_g - Z_L) - R_g \cdot Z_L + Z_L^2 = -\frac{2}{5} \cdot (R_A \cdot (R_g + Z_L)) - \frac{2}{5} (R_g \cdot Z_L) - \frac{2}{5} Z_L^2$$

$$\frac{2}{5} R_A (R_g - Z_L) + \frac{2}{5} (R_A \cdot (R_g + Z_L)) = -\frac{2}{5} (R_g \cdot Z_L) + \frac{5}{5} (R_g \cdot Z_L) - \frac{2}{5} Z_L^2 + \frac{5}{5} Z_L^2$$

$$\frac{7}{5} R_A \cdot R_g - \frac{3}{5} R_A \cdot Z_L = \frac{3}{5} (R_g \cdot Z_L) - \frac{7}{5} Z_L^2$$

$$\frac{1}{8} \cdot (7 \cdot R_A \cdot R_g) - \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot R_A \cdot Z_L) = \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot R_g \cdot Z_L) - \frac{1}{8} \cdot 7 Z_L^2$$

$$R_A \cdot (7 \cdot R_g - 3 \cdot Z_L) = 3 \cdot R_g \cdot Z_L - 7 \cdot Z_L^2$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{3 \cdot R_g \cdot Z_L - 7 \cdot Z_L^2}{7 \cdot R_g - 3 \cdot Z_L} = \underline{\underline{600 \Omega}}$$

$$3.3) \quad \gamma = \frac{L}{V_g}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{L}{\gamma} = \frac{150 \text{ m}}{550 \text{ ns}} = \underline{\underline{272,73 \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

$$3.4) \quad \text{Verzerrungsfreie Leitung!} \quad V_g = V_p = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

$$\sqrt{L' C'} = \frac{1}{V_g} \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) = 549,90 \cdot \underline{\underline{10^{-9} \text{ H}}}$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \underline{\underline{24,44 \cdot 10^{-12} \text{ F}}}$$

$$3.5) \quad \sqrt{L' C'} = \frac{1}{V_g} \Rightarrow \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \cdot \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \left(\frac{1}{V_g}\right)^2$$

$$\mu \cdot \epsilon = \left(\frac{1}{V_g}\right)^2 \Rightarrow \epsilon_r = \frac{\left(\frac{1}{V_g}\right)^2}{\mu \cdot \epsilon_0} = \underline{\underline{1,208}}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

Verlustlose Leitung!

$$Z_L \text{ verlustlos} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = \underline{\underline{342,77}}$$

$$150 \Omega \rightarrow \frac{Z_L \cdot 2\pi}{\eta} = \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) \Rightarrow r_i = \frac{r_i}{e^{-\frac{Z_L \cdot 2\pi}{\eta}}} = \underline{\underline{31,27 \text{ mm}}}$$

$$\text{Faktor } \frac{r_o}{r_i} = 15,635$$

4 Richtfunkstrecke (20%)

Für eine Richtfunkstrecke bei 5,8 GHz steht ein Sender mit einer Sendeleistung von $P = 17 \text{ dBm}$ zur Verfügung. Daran angeschlossen ist eine optimal ausgerichtete, verlustlose Antenne mit einem Gewinn $G_s = 31 \text{ dBi}$. In einer Entfernung $d = 8 \text{ km}$ steht der Empfänger mit einer Antenne mit dem Gewinn $G_e = 16 \text{ dBi}$.

- 4.1** (5%) In welcher Höhe muss die Richtfunkverbindung mindestens montiert werden, wenn sich in der Mitte der Strecke Sender-Empfänger ein Haus mit 25 m Höhe befindet?
- 4.2** (6%) Berechnen Sie die empfangene Leistung (in dBm)!
- 4.3** (5%) Die Richtcharakteristik $f(\vartheta, \varphi)$ der Sendeantenne ist bis auf die Variable $m \in \mathbb{N}$ gegeben, $A = 1,03$. Berechnen Sie m .

$$f(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{4\pi} A \cos^m(\vartheta) \sin^{32}(\varphi) \sqrt{\cos(\varphi)} & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 4.4** (4%) Bei Bauarbeiten wird die Sendeantenne versehentlich um einen Winkel $\Delta\theta = 10^\circ$ verdreht, φ bleibt konstant. Um welchen Wert in (dB) ändert sich das SNR am Empfänger?

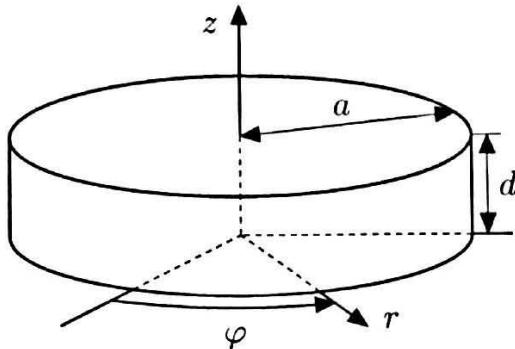
5 Verluste im Resonator (20%)

BSP 43

Der abgebildete Resonator mit dem Radius a und der Höhe d wird im TM₀₁₀ Modus betrieben. Er ist mit Luft gefüllt. Das Feldbild berechnet sich dabei zu

$$\begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\varphi &= 0 \\ E_z &= E_0 J_0(k_r r) \\ H_r &= 0 \\ H_\varphi &= \frac{j\omega\epsilon}{k_r} E_0 J_1(k_r r) \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

Die Separationsbedingung lautet $k_r^2 + k_z^2 = \omega^2/c_0^2$. Beim konkreten Modus folgen aus den Randbedingungen $k_z = 0$ (entsprechend verschwindet oben E_r und es fehlen die $\cos(k_z z)$ Terme) und $k_r a = 2,4048$ (aus der ersten Nullstelle der Besselfunktion $J_0(k_r a) = 0$).



5.1 (2%) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz des Resonators für den gefragten Modus.

5.2 (15%) Berechnen Sie allgemein die unbelastete Güte des Resonators für den gefragten Modus unter Berechnung der gespeicherten Energie und der Verluste im Metall.

Hinweis: $dF = r dr d\varphi$ und $dV = r dr d\varphi dz$

Hinweise zur Integration der Besselfunktionen:

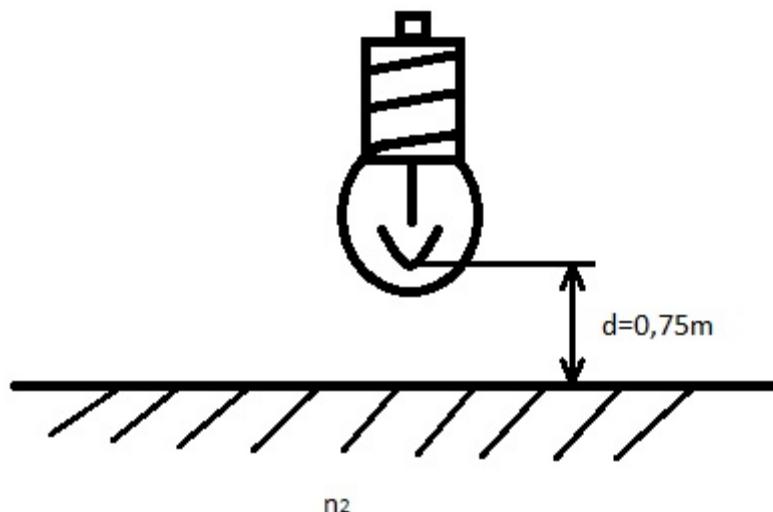
$$\int x J_0^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} [J_1^2(\alpha x) + J_0^2(\alpha x)] \text{ und}$$

$$\int x J_1^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} [J_0^2(\alpha x) - \frac{2}{\alpha x} J_0(\alpha x) J_1(\alpha x) + J_1^2(\alpha x)]$$

5.3 (3%) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz und die unbelastete Güte des Resonators bei einer spezifischen Leitfähigkeit des Metalls von $\sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ für die Abmessungen $a = 42 \text{ mm}$ und $d = 5 \text{ mm}$.

Lichtquelle über Aquarium (20%)

Eine 53W Glühbirne befindet sich in einer Höhe von 0,75m über der Wasseroberfläche eines Aquariums. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die gesamte elektrische Leistung in Licht umgewandelt wird und dass Licht einer Glühbirne unpolarisiert ist. Das Wasser habe einen Brechungsindex $n_2=1,33$.

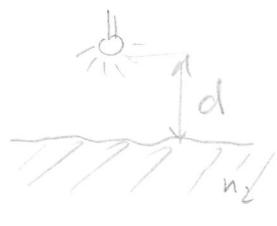


1. (8%) Wie groß ist der Betrag des Poyntingvektors direkt oberhalb der Wasseroberfläche, senkrecht unter der Lampe?

2. (8%) Wie groß ist der Betrag des Poyntingvektors direkt unterhalb der Wasseroberfläche, senkrecht unter der Lampe?

3. (4%) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen beiden Werten!

Lichtquelle über Aquarien



$$d = 0,75 \text{ m}$$

$$P = 53 \text{ W}$$

$$n_2 = 1,33$$

- 1) Betrag Poyntingvektor direkt oberhalb der Wasseroberfläche senkrecht unter der Lampe

Annahme: punktförmige Quelle

$$P = \int \int \int_{0}^{2\pi} T \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi$$

$$P = 2\pi \cdot T \cdot d^2 \cdot 2 = 4\pi d^2 T$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{53}{4\pi \cdot (0,75)^2} = 7,5 \frac{\text{VA}}{\text{m}^2}$$

- 2) Betrag Poyntingvektor direkt unterhalb der Wasseroberfläche

HEW $\rightarrow E, H$ tangential

$\rightarrow E$ an Grenzfläche stetig

$$T_1 = \frac{E_0^2}{2\eta_1}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

$$T_2 = \frac{E_0^2}{2\eta_2}$$

$$T_2 = T_1 \cdot 1,33 = 9,975 \frac{\text{VA}}{\text{m}^2}$$

- 3) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen beiden Werten

HEW $\rightarrow E, H$ tangential

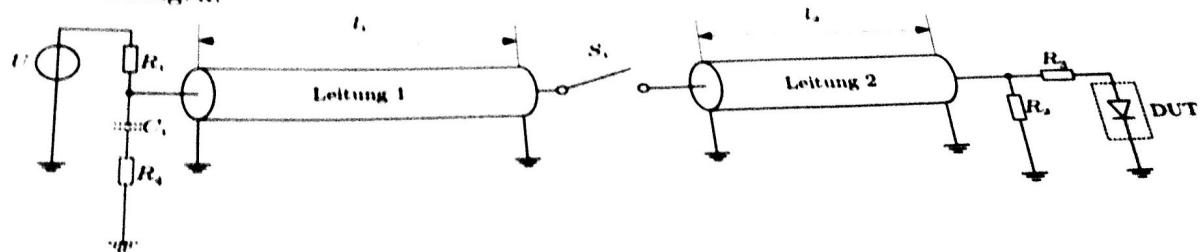
$\rightarrow E$ an Grenzfläche stetig

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

4 Transmission Line Pulser (25%)

Zum Testen der Immunität von Bauelementen gegen ESD (Electro Static Discharge) werden häufig sogenannte TLP (Transmission Line Pulser) eingesetzt. Sie erzeugen einen Impuls definiter Energie, der die Schutzdiode des Bauteils testet, indem die Leistung V_c , welche zuvor über den Widerstand $R_1 = 1 \text{ MO}$ mit der Gleichspannung $U = 1400 \text{ V}$ geladen wurde, durch Schließen des Schalters S_1 die in ihr gespeicherte Energie an Leitung 2 abgibt.

Beide Leitungen seien verlustlos angenommen. Auf ihnen ist ausschließlich eine TEM-Welle ausbreitungsfähig und die zugehörige Leitungswellenimpedanz ist $Z_L = 75 \Omega$. Sie besitzen ein Teflon-Dielektrikum mit $\epsilon_r = 2.25$. Leitung 2 ist 2,50 m lang und wird durch die Kombination von R_2 und $R_3 = 400 \text{ k}\Omega$ impedanzrichtig abgeschlossen, wobei für die verwendeten Spannungen der Innenwiderstand des DUT sowie die Flussspannung zu vernachlässigen sind. Wenn nichts anderes angegeben ist sind die Bauelemente C_1 und R_4 zu vernachlässigen.



- 4.1 (4%) Berechnen Sie die Länge l_1 , sodass sich eine Impulsdauer von $T = 100 \text{ ns}$ ergibt.**

- 4.2 (2%) Berechnen Sie R_2 , zur Vermeidung von Reflexionen bei Leitung 2**

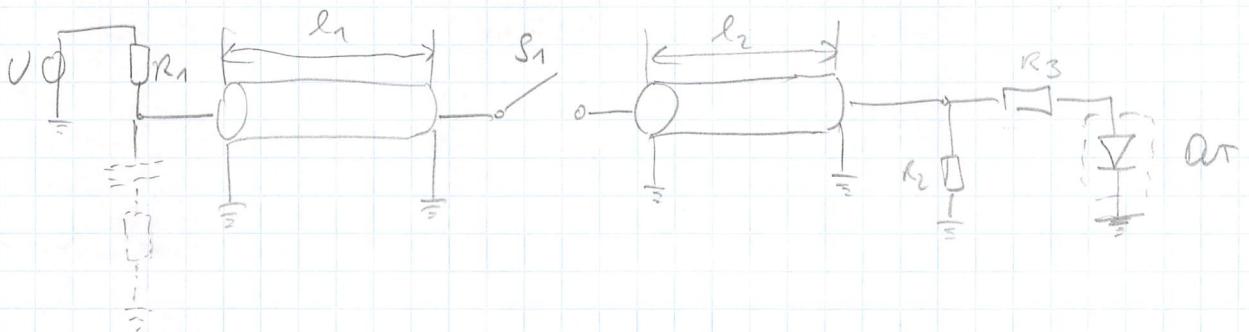
Laden von von Ihr, wenn es sich um eine Koaxialleitung handelt, dessen Außenleiter einen Innendurchmesser von $D_a = 9 \text{ mm}$ aufweist? Nehmen Sie das Kabel nach 10 verstrichenen Zeitkonstanten als geladen an.

- 4.4 (8%) Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung an R_1 sowie den Verlauf des Stromes durch das DUT ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem der Schalter S_1 geschlossen wird.**

- 4.5 (5%) Skizzieren Sie analog zum vorherigen Punkt die Spannungs- und Stromverläufe, wenn die Leitung 1 am Eingang mittels $R_4 = 75 \Omega$ sowie $C_1 \gg \frac{T}{R_4}$ für Wechselspannungen abgeschlossen ist.**

- (+5%) ZUSATZFRAGE: Berechnen Sie die Ladezeit von Leitung 1 für Err von 90% der Ladespannung, aber ohne wie in Punkt 4.3 Eigenschaft Koaxialkabels zu verwenden, nur unter Verwendung der Leitungstheo**

Transmitter Line Phaser



geg: $R_1 = 1 \Omega$, $V = 1600V$

$Z_{L1} = Z_{L2} = 75 \Omega$, $l_2 = 2,50m$, $\epsilon_r = 2,25$

$R_3 = 400k\Omega$

1) l_1 für $T = 100ns$

$$v_p = \frac{w}{h} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu C'}}$$

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

$$Z_{\text{Leitstilus}} = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 251,15$$

$$\ln \frac{r_a}{r_i} = \frac{Z_L}{\eta} = 1,876$$

$$L' = 125,86 \cdot 10^{-9} H \quad C' = 66,715 \cdot 10^{-12} F$$

$$v_p = 199,86 \cdot 10^6 m/s$$

Vorempfei $v_g = v_p$, $v_g = \frac{l_1 + l_2}{T} \Rightarrow l_2 = v_g \cdot T - l_2 = 17,486 \text{ m}$

2) $R_2 = ?$ für Vermeidung von Reflexion bei Leitung 2

$$Z_L = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \quad Z_L = 75 \Omega \quad R_3 = 400k\Omega$$

$$Z_L \cdot (R_2 + R_3) = R_2 \cdot R_3$$

$$Z_L \cdot R_2 + Z_L \cdot R_3 = R_2 \cdot R_3$$

$$Z_L \cdot R_3 = R_2 \cdot R_3 - R_2 \cdot Z_L$$

$$Z_L \cdot R_3 = R_2 \cdot (R_3 - Z_L) \Rightarrow R_2 = \frac{Z_L \cdot R_3}{R_3 - Z_L} = 75,01 \Omega$$

3) Energie in Leitg 1; Ladezeit?

$$D_a = 9 \text{ mm} \Rightarrow r_a = 4,5 \text{ mm}$$

$$T = 10 \cdot \tau$$

$$\frac{z_L}{\eta} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$z_L = 75 \text{ m} \quad \eta = 251,15 \quad \text{nach ②}$$

$$\frac{z_L}{\eta} = \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \frac{z_L \cdot 2\pi}{\eta} = \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$e^{\frac{z_L \cdot 2\pi}{\eta}} = \frac{r_a}{r_i} \Rightarrow r_i = \frac{r_a}{e^{\frac{z_L \cdot 2\pi}{\eta}}} = 0,689 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_i = 1,328 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = 1,876$$

$$t = R_i C = R_i C' l = 1,166 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$R_1 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$Q = C \cdot U$$

$$\rightarrow T = 10 \cdot \tau$$

$$U = 1400 \text{ V}$$

$$Q = C \cdot U = C' l \cdot U$$

$$T = 11,66 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$E_{max} = \frac{C' \cdot U}{2\pi \epsilon} \cdot \frac{1}{r_i}$$

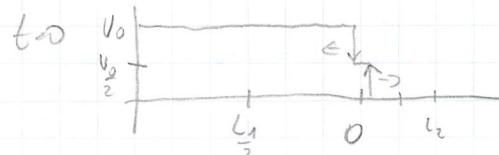
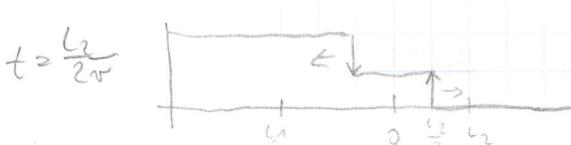
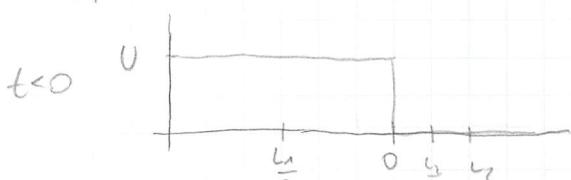
$$C' = 66,715 \cdot 10^{-12}$$

$$E_{max} = 1,083 \cdot 10^6$$

$$Q = \underline{1,633 \cdot 10^{-6} \text{ C}}$$

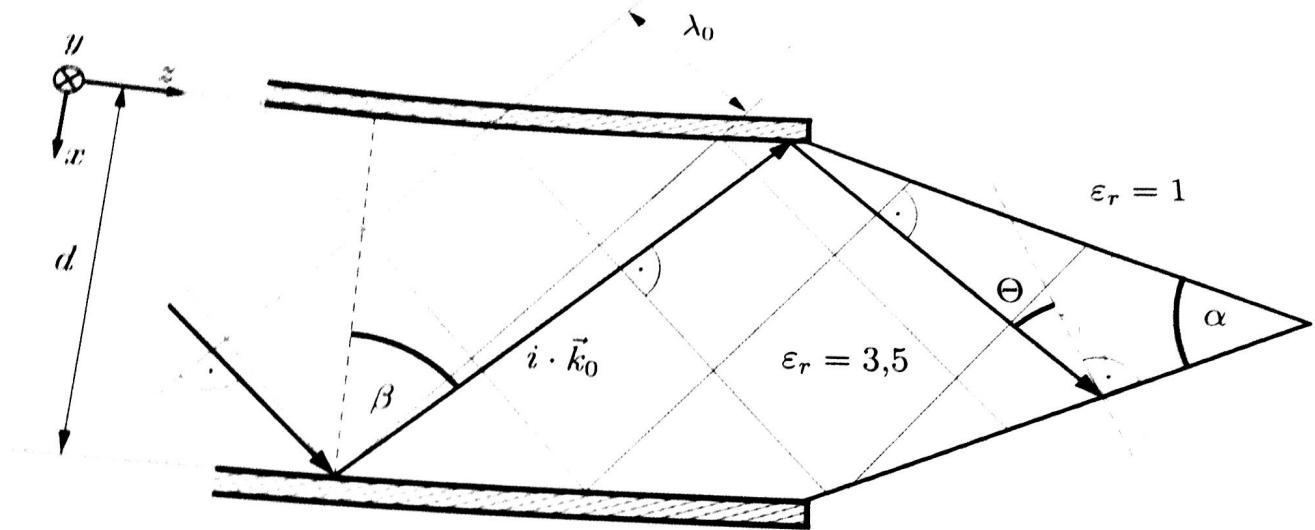
$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ As}$$

4) Verlauf der Spannung an R_1 sowie dem DUT ab $t=0$
 $L_1 \approx 7 \cdot L_2$



5 Dielektrische Stabantenne(20%)

Zu untersuchen ist eine einfache dielektrische Stabantenne bei der Frequenz $f = 2,4 \text{ GHz}$, die von einer Parallelplattenleitung (PPL) (im Bild links) gespeist wird. Die PPL ist mit einem Dielektrikum mit der Permittivität $\epsilon_r = 3,5$ gefüllt, das sich nach rechts symmetrisch verjüngt und die Antenne bildet. Sowohl die PPL mit Breite w als auch der als Antenne wirkende rein dielektrische Teil sind weit in y -Richtung ausgedehnt, so dass die üblichen Näherungen für $w \gg d$ verwendet werden können. Mit \vec{k}_0 ist der Wellenvektor der entsprechenden Freiräumwelle mit Wellenlänge λ_0 bezeichnet, aus dessen Überlagerung der relevante Modus entsteht; i bezeichnet eine Skalierungskonstante. Randstörungen im Bereich der endenden Platten können vernachlässigt werden.



- 5.1** (4%) Zeichnen Sie die Fortsetzung des skizzierten Strahls in dem Freiraum ein, wenn Sie den Fall für maximalen Gewinn der Antenne annehmen. Tragen Sie auch den Ausfallswinkel γ zu diesem Strahl ein und geben Sie dessen Wert in Bezug auf α an!

- 5.2** (5%) Finden Sie einen Ansatz für jene Moden der PPL, die einen reflexionsfreien Übergang in den Freiraum ermöglichen und die Wellengleichung erfüllen. Welche Moden sind dies? Berechnen Sie alle weiteren Komponenten. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand der PPL an.

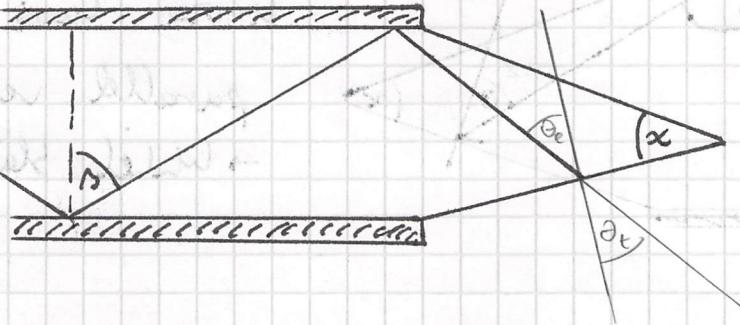
- 5.3** (4%) Welche Bedingung müssen die Winkel α , β sowie Θ erfüllen um einen reflexionsfreien Übergang zu ermöglichen? Von welcher Ordnung ist der in der Skizze angedeutete Modus?

- 5.4** (4%) Berechnen Sie den optimalen Winkel α für reflexionsfreien Übergang

- 5.5** (3%) Berechnen Sie den Parallelplattenabstand d .

5) PPL \rightarrow LUFT

5.1)



bei TR -Fall \rightarrow keine Reflexion \rightarrow kein Ausfallswinkel

$$\gamma = 0^\circ$$

5.2) TR-Welle

$$E_z = A \cdot \sin(k_x x) \cdot e^{-jk_z z}$$

$$H_z = 0$$

$$-k_x^2 + k_z^2 + \omega^2 \epsilon \mu = 0$$

$$k^2 = k_x^2$$

Nodale Längen \rightarrow rechts FS \rightarrow $E_x = H_x$
 $E_y = H_y$

$$\text{RB: } E_{tx} = 0$$

$$E_z(x=0) = 0$$

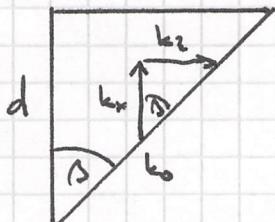
$$E_z(x=d) = 0$$

$$\sin(k_x d) = n \cdot \pi$$

$$\rightarrow k_x d = n \cdot \pi \rightarrow k_x = \frac{n \cdot \pi}{d}$$

5.3) Ordnung ≈ 3

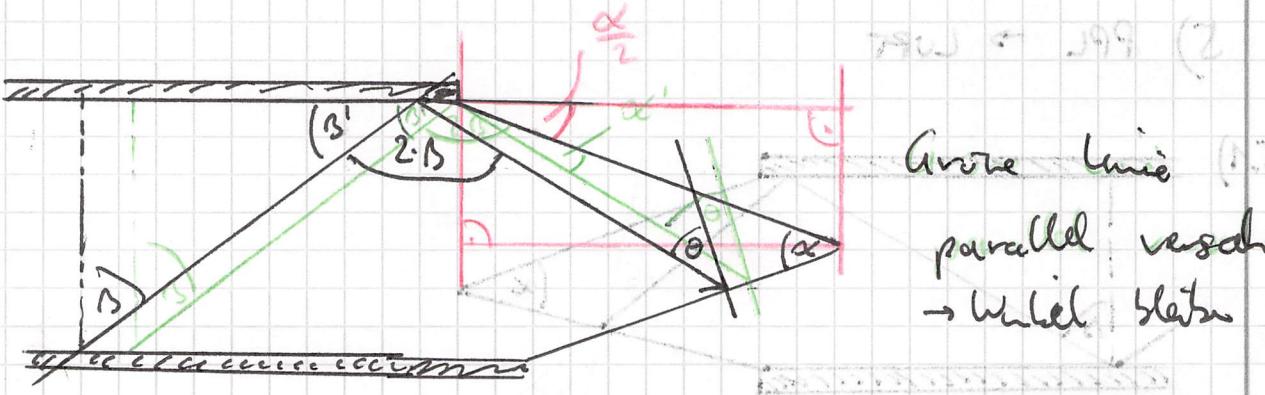
reflexionsfrei Übergang



$$\cos(\beta) = \frac{k_x}{k_0} \rightarrow k_0 \cdot \cos(\beta) = \frac{n\pi}{d} \quad k_0 = \frac{n\pi}{d}$$

$$d \cdot k_0 \cdot \cos(\beta) = n \cdot \pi$$

$$\left(\frac{n\pi}{d}\right) \cdot d \cdot \cos(\beta) = n \cdot \pi \Rightarrow \beta = \dots$$



Anre Leine

parallel verschoben
→ Winkel bleiben gleich

$$\theta = \theta_B = \arctan \frac{m}{b}$$

$$\beta + \beta' + 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \beta' = 90^\circ - \beta$$

Eben.



$$\beta' + 2\beta + \alpha' + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

$$\alpha' + \theta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha' = 90^\circ - \alpha - \theta$$

Winkel III (S2)



$$90^\circ - \beta + 2\beta + 90^\circ - \alpha - \theta + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

$$\beta + \frac{\alpha}{2} - \theta = 0^\circ \quad \text{die E. ist optimal doppelt}$$

$$\alpha = (\beta - \theta) \cdot 2$$

5.4)

$$\alpha = (\beta - \theta) \cdot 2$$

$$\alpha = (1-\lambda) \cdot \beta$$

5.5)

$$d = ? \quad \left(\frac{2\alpha}{\lambda} \right) \cdot d \cdot \cos(\beta) = n \cdot \bar{n}$$

\rightarrow zu groß

gerade Längeneinfü

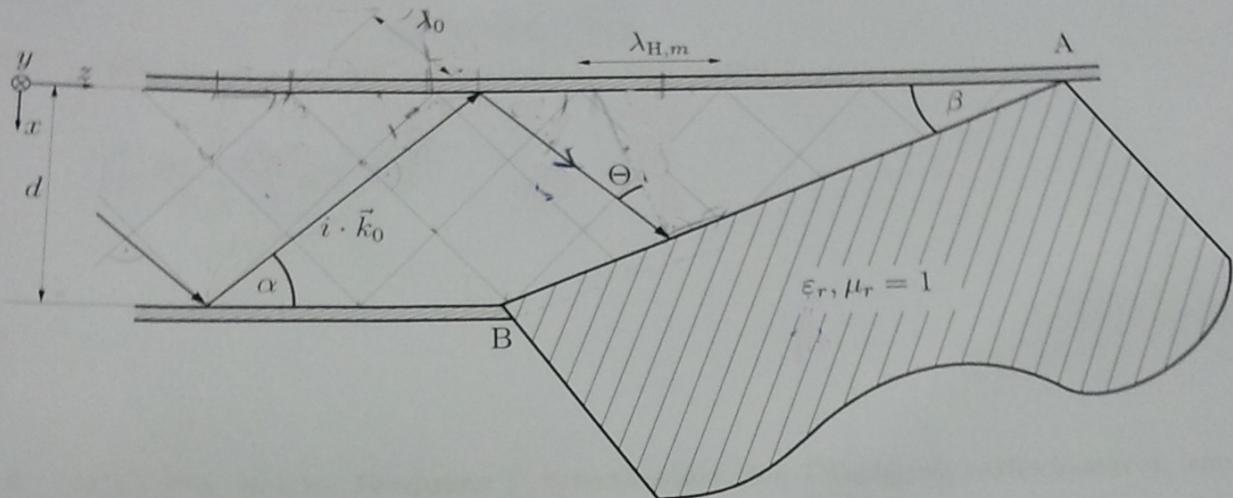
$$d = \frac{(n - \bar{n}) \cdot \cos(\beta)}{2\alpha}$$

$$d = \frac{(n - \bar{n}) \cdot \cos(\beta)}{2\alpha}$$

$$d = \frac{(n - \bar{n}) \cdot \cos(\beta)}{2\alpha}$$

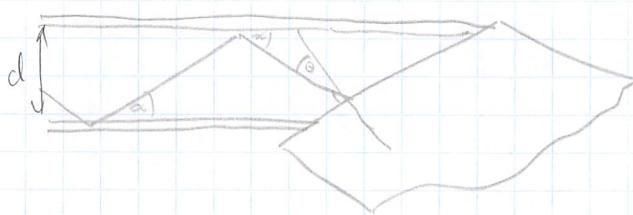
5 Übergang von Parallelplattenleitung zu dielektrischem Wellenleiter (20%)

Zu untersuchen ist der Übergang von einer luftgefüllten Parallelplattenleitung (PPL) zu einem dielektrischen Wellenleiter (DWL), der aus einem dielektrischen Stab mit der Permittivität $\epsilon_r = 1,2$ besteht und sonst mit Luft umgeben ist. Sowohl die PPL mit Breite w als auch der DWL sind weit in y -Richtung ausgedehnt, so dass die üblichen Näherungen für $w \gg d$ verwendet werden können. Mit \vec{k}_0 ist der Wellenvektor der entsprechenden Freiraumwelle mit Wellenlänge λ_0 bezeichnet, aus dessen Überlagerung der relevante Modus entsteht; i bezeichnet eine Skalierungskonstante. Randstörungen an den Punkten A und B können vernachlässigt werden.



- 5.1 (6%) Finden Sie einen Ansatz für jene Moden der PPL, die einen reflexionsfreien Übergang von PPL zu DWL ermöglichen und die Wellengleichung erfüllen. Welche Moden sind dies? Berechnen Sie alle weiteren Komponenten. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen und passen Sie an den Rand der PPL an.
- 5.2 (4%) Welche Bedingung müssen die Winkel α , β sowie Θ erfüllen um einen reflexionsfreien Übergang zu ermöglichen? Von welcher Ordnung ist der in der Skizze angedeutete Modus?
- 5.3 (4%) Berechnen Sie Θ als Funktion von α und β .
- 5.4 (6%) Für welche Frequenz f funktioniert der Übergang reflexionsfrei, wenn der Plattenabstand $d = 15$ mm beträgt, und der Winkel $\beta = 5^\circ$ beträgt?

5) Übergang PPL zu DWL



5.1) reflektionsfrei Übergang

TM-Welle $H_z = 0$

$$E_z = A \cdot \sin(k_x x) \cdot e^{-jk_z z}$$

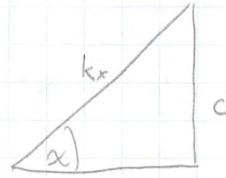
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$



$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad \omega^2 \mu \epsilon$$



Vielfachen von π , damit sin 0 wird

$$\text{SP: } k_x^2 + k_z^2 = k^2$$

$$k^2 = k^2 - k_y^2 = k_x^2 \quad (\text{aussteig in } z\text{-Richtung})$$

$$E_x = \frac{-j}{k^2} \left(k_z \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) = -\frac{j}{k_x^2} (k_z \cdot A \cdot \cos(k_x x) \cdot k_x \cdot e^{-jk_z z})$$

$$E_y = 0$$

$$H_y = -\frac{j}{k^2} \left(-\omega d \frac{\partial}{\partial y} E_z \right) = -\frac{j}{k_x^2} (k_z \cdot A \cdot \cos(k_x x) \cdot k_x \cdot e^{-jk_z z})$$

$$H_z = 0$$

$$RB: x=0 \quad \sin(k_x \cdot 0) = 0$$

$$x=d \quad \sin(k_x \cdot d) = 0$$

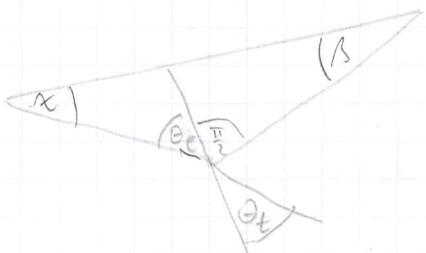
$$\Rightarrow k_x \cdot d = n \cdot \pi$$

$$\sin(\pi) = 0$$

$$k_x = \frac{n \pi}{d}$$

2) α, β, δ

Ordnung: 3 (aus Klasse herauszählen wieviel unterschiedliche Stufen)



Total transmission

$$\theta_t = \theta_e \quad \theta_e = \theta_B \quad \tan \theta_B = \sqrt{\frac{e_2}{e_1}}$$

reflexionfrei Überleg

$$\alpha + \theta_B + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$$

$$\text{Bedingung: } \theta_B = \arctan \sqrt{\frac{e_2}{e_1}}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \theta_B$$

$$k_0 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \pi \Rightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot \lambda}{2\pi d} \right)$$

3) θ als Funktion von $\alpha + \beta$

$$\alpha + \theta_B + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi \Rightarrow \theta_B = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$$

4) $f = ?$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c}{f}$$

$$k_0 \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \pi$$

$$\frac{2\pi f}{c} \cdot d \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \pi$$

$$\frac{n \cdot \pi \cdot c}{2\pi f d} = \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{n \cdot \pi}{2\pi f d} \cdot \frac{c}{c}$$

$$\frac{n \cdot c}{\sin(\alpha)} = 2 f d$$

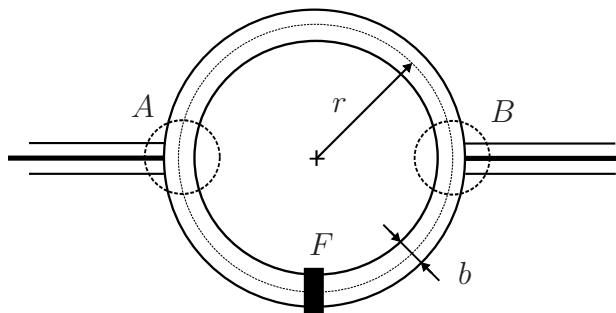
$$\alpha = \arcsin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot c}{2\pi f d} \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{n \cdot c}{2d \cdot \sin(\alpha)} = \frac{n \cdot c}{2d \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B - \beta\right)}$$

2.) Möbius-Resonator (20%)

Ein flexibler luftgefüllter Rechteckhohlleiter mit den Abmessungen a und $b = 1\text{cm}$ ($a \geq b$) wird zu einem ringförmigen Resonator gebogen und die beiden als Flansch ausgeführten Enden werden an der Stelle F verschraubt. Der Resonator wird an Bereich A mittels einer kurzen Feldsonde erregt, die durch ihre Konstruktion im Uhrzeigersinn umlaufende Wellen erzeugt. Im Bereich B kann mittels einer zweiten Feldsonde ein Signal aus dem Resonator ausgekoppelt werden. Die Feldsonden werden von Koaxialkabeln gespeist. Die gewünschte erste Resonanzfrequenz des Resonators liegt bei $f = 10\text{GHz}$.

Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen die Störungen des Feldbildes im Resonator durch die Feldsonden.



2.1) (3%) Dimensionieren Sie den fehlenden Parameter des Hohlleiters so, dass dieser bei der gewünschten Resonanzfrequenz 2% über der unteren Bandkante im Monomodenbetrieb arbeitet.

2.2) (5%) Berechnen Sie den kleinsten möglichen mittleren Radius r des Hohlleiterresonators für die angegebene Resonanzfrequenz.

2.3) (12%) Bei gleich bleibenden mechanischen Parametern wird nun der Resonator in einen Möbius-Resonator umgebaut: Dazu wird der Flansch an Stelle F geöffnet, ein Ende des Wellenleiters um 180° um die Längsachse gedreht und anschließend wieder verschraubt. Geben Sie einen allgemeinern Formelausdruck für die Resonanzfrequenzen an und berechnen Sie die ersten drei Resonanzfrequenzen dieses Resonators.

Möbiusresonator

Rechteckhohlleiter $b = 1 \text{ cm}$ ($a \geq b$)

erste Resonatorfrequenz $f_1 = 10 \text{ GHz}$

1) Dimensioniere die fehlende Parameter für 2% über der unteren Bandkante für Flächenmode Betrieb bei f_1

→ Behandlung als Hohlleiter

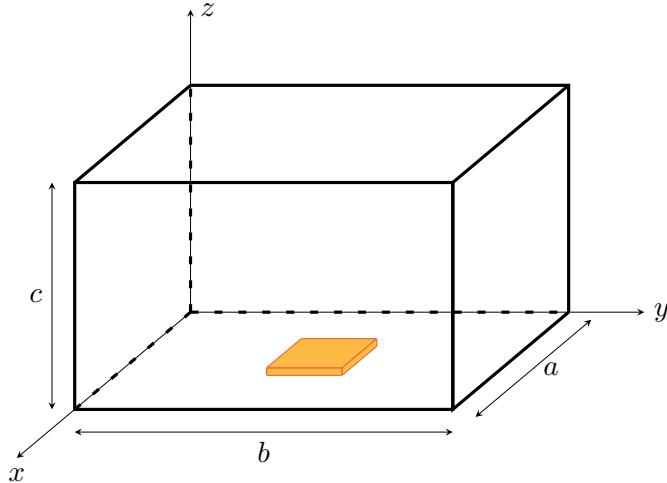
Flächenmode $\Rightarrow \text{TE}_{10}$

$$\lambda_{\text{a}10} = 2a = \frac{c_0}{f} \quad 2\% +$$

$$\rightarrow a = \frac{c_0}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10 \cdot 10^9} \cdot 1,02 = \underline{\underline{15,3 \text{ mm}}}$$

Mikrowellenherd (20%)

Gegeben ist der unten dargestellte Hohlraumresonator der als Mikrowellenherd im TE₂₀₄-Modus bei einer Frequenz von $f = 2,45$ GHz betrieben wird. Die Abmessungen des Resonators sind $a = 30$ cm und $b = 40$ cm. In der Mitte des Herds liegt eine quadratische Toastscheibe der Höhe $h = 1$ cm und der Seitenlänge $l = 12$ cm.



1. Berechnen Sie die Höhe c des Resonators!
2. Berechnen Sie die gesamte Verlustleistung, die in den Wänden des Resonators in Wärme umgewandelt wird! Gehen Sie dabei von den angegebenen Feldbildern des TE_{mnp}-Modus aus und nehmen Sie $A = 1$ A/m an. Die Leitfähigkeit des Wandmaterials beträgt $\sigma = 1,4 \cdot 10^6$ S/m.

$$\begin{aligned}
 H_x &= -\frac{A}{\kappa^2} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{c} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right), \\
 H_y &= -\frac{A}{\kappa^2} \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{c} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right), \\
 H_z &= A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right), \\
 E_x &= \frac{jA\omega\mu}{\kappa^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right), \\
 E_y &= -\frac{jA\omega\mu}{\kappa^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right), \\
 E_z &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Die Toastscheibe habe eine komplexe Dielektrizitätskonstante von $\delta_T = \varepsilon_0(1 - j)$. Berechnen Sie damit die Verlustleistungsdichte in der Toastscheibe!
4. Berechnen Sie den Temperaturverlauf in der Toastscheibe. Nehmen Sie dazu an, dass die Temperatur der Verlustleistungsdichte proportional ist sich aufgrund der geringen Höhe der Scheibe gleichmäßig über diese verteilt. Skizzieren Sie den Temperaturverlauf in der Toastscheibe! Gehen Sie von repräsentativen Schnitten durch die x - z - sowie durch die x - y -Ebene aus!

5. Berechnen Sie die gesamte im Toast umgesetzte Leistung! Geben Sie den Wirkungsgrad des Herds an!
6. (Zusatzfrage: +3%) Wo sollte der Toast ohne zuhilfenahme anderer Gegenstände platziert werden, damit er die maximale Leistung aufnimmt?

Lösung

1. Mit

$$f_{mnp} = c_0 \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2c}\right)^2}$$

sowie $n = 0$ folgt

$$c = \frac{p/2}{\sqrt{\left(\frac{f_{mnp}}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m}{2a}\right)^2}} \approx 26,83 \text{ cm} .$$

2. Zunächst spezifizieren wir die angegebenen Felder für den Fall $(m, n, p) = (2, 0, 4)$. Mit $\kappa^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{2\pi}{a})^2$ folgt

$$\begin{aligned} H_x &= -2A \frac{a}{c} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{c}z\right) , \\ H_y &= 0 , \\ H_z &= A \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{c}z\right) , \\ E_x &= 0 , \\ E_y &= -\frac{jA\omega\mu a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{c}z\right) , \\ E_z &= 0 . \end{aligned}$$

Ausgehend von

$$dP_v = \frac{1}{2} |\vec{H}_{\text{tang}}|^2 \mathbb{R} dA$$

müssen wir nun über die gesamte Oberfläche des Resonators integrieren. Für die unterschiedlichen Wandebenen haben wir jeweils

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \right\} \quad \vec{H}_{\text{tang}} = \left(H_y \vec{e}_y + H_z \vec{e}_z \right)_{x=0, x=a} = A \sin\left(\frac{4\pi}{c}z\right) \vec{e}_z ,$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = b \end{array} \right\} \quad \vec{H}_{\text{tang}} = \left(H_x \vec{e}_x + H_z \vec{e}_z \right)_{y=0, y=b} = -2A \frac{a}{c} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{c}z\right) \vec{e}_x + A \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{c}z\right) \vec{e}_z ,$$

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ z = c \end{array} \right\} \quad \vec{H}_{\text{tang}} = \left(H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y \right)_{z=0, z=c} = -2A \frac{a}{c} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \vec{e}_x .$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_v &= \frac{\mathbb{R}}{2} \int_{\mathcal{A}} |\vec{H}_{\text{tang}}|^2 dA = A^2 \mathbb{R} \left[b \int_0^c \sin^2 \left(\frac{4\pi}{c} z \right) dz \right. \\
&\quad + \int_0^a \int_0^c 4 \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \cos^2 \left(\frac{4\pi}{c} z \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{4\pi}{c} z \right) dx dz \\
&\quad \left. + b \int_0^a 4 \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) dx \right] \\
&= A^2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \left[\frac{bc}{2} + \frac{a(4a^2 + c^2)}{4c} + \frac{2a^3 b}{c^2} \right] \approx 39,44 \text{ mW} .
\end{aligned}$$

3. Mit $s_T = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_0 \omega} = 1$ erhalten wir $\sigma_T = 0,136 \text{ S/m}$. Somit ergibt sich die zeitlich gemittelte Verlustleistungsdichte im Toast zu

$$p_T = \frac{\sigma_T}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{(Af\mu a)^2 \sigma_T}{2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{4\pi}{c} z \right) .$$

4. Mit dem Ergebnis von oben folgt

$$T(x, z) = C p_T(x, z) , \quad T(x, z) \approx T(x) = \tilde{C} p_T(x) = \tilde{C} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) ,$$

mit nicht näher behannten Konstanten C und \tilde{C} . Da Translationsinvarianz bezüglich der y -Koordinate vorliegt, reicht es die Temperatur im Toast als Funktion von x darzustellen:



5. Um die im Toast in Wärme umgesetzte Leistung zu erhalten, müssen wir die oben berechnete Verlustleistungsdichte über das Volumen der Toastscheibe integrieren:

$$P_T = \int_{\mathcal{V}} p_T dV = l \int_{(a-l)/2}^{(a+l)/2} \int_0^h \frac{(Af\mu a)^2 \sigma_T}{2} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \sin^2 \left(\frac{4\pi}{c} z \right) dx dz = 22,44 \text{ mW} .$$

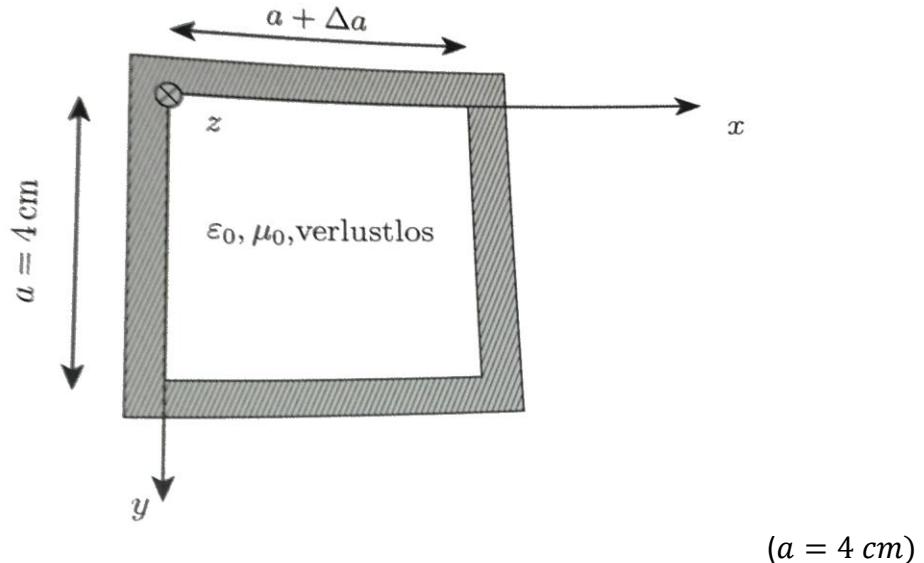
Somit ergibt sich für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_T}{P_{\text{ges}}} = \frac{P_T}{P_T + P_v} = 0,363 .$$

6. Ohne Hilfsmittel \Rightarrow Der Toast soll nach wie vor am Boden des Herds liegen. Gemäß des unter Punkt 4 skizzierten Temperaturverlaufes, welcher der Leistungsdichte proportional ist, sollte der Toast um etwa seine halbe Länge (6 bis 7 cm) in positiver oder negativer x -Richtung verschoben werden, damit er in einem Leistungsdichtemaximum zu liegen kommt.

5. Hohlleiter mit quadratischem Querschnitt (20%)

Untersuchen Sie die Wellenausbreitung in z -Richtung im skizzierten Hohlleiter mit quadratischem Querschnitt. Für die Unterpunkte 1 und 2 gilt $\Delta a = 0$



- 5.1 (5%) Geben Sie den Frequenzbereich für den Monomodebetrieb an.
- 5.2 (5%) Skizzieren sie die Feldbilder der zwei Moden mit der niedrigsten Grenzfrequenz
- 5.3 (10%) Bei der Frequenz $f = 4,5 \text{ GHz}$ werden die ersten beiden Moden gleichphasig an der Position $z = 0 \text{ m}$ in den Hohlleiter eingespeist. An der Position $z = 1 \text{ m}$ wird ein Signal, das proportional zur Summe der Feldstärken der beiden Moden ist, ausgekoppelt. Durch Produktionsungenauigkeiten wird die Breite des Hohlleiters um ein kleines Δa geändert. Berechnen Sie für welches kleinstmögliche Δa das ausgekoppelte Signal verschwindet. Nehmen sie an, dass der Hohlleiter in z und in $-z$ Richtung unendlich ausgedehnt ist.

HGÜ für Solarstrom aus der Sahara

Ein Solarpark in der Sahara mit einer Gesamtleistung von 2500MW soll mittels Hochspannungsgleichstromübertragung (HGÜ) an Südalien angebunden werden. Die Distanz zwischen den Umrichterstationen beträgt $l = 1200\text{km}$. Der Umrichter in der Sahara hat eine Speiseimpedanz von 15Ω und gibt im Leerlauf eine Ausgangsspannung von 1000kV an ein koaxiales Kabel mit PVC Dielektrikum (relative Permittivität $\epsilon_r = 3,5$, Durchschlagsfeldstärke $E_D = 35\text{kV/mm}$) ab. Außen- und Innenleiter des Kabels sind aus Aluminium mit einer Leitfähigkeit $\sigma = 37 * 10^6 \text{ S/m}$.

1. (5%) Welche Innen- und Außendurchmesserradien sind für das Kabel vorzusehen, wenn dieses für 130% der Nennspannung auszulegen ist und die Leitungsimpedanz für minimalen Materialverbrauch zu dimensionieren ist? Geben Sie auch die verwendete Impedanz der Leitung an!

$$U_{max} = E_{max} \cdot r_i \ln \frac{r_o}{r_i}$$

$$U_{max} = 1300 \text{ kV}$$

$$Z_{max \text{ möglich}} = \frac{60\Omega}{\sqrt{3,5}} = 32,07 \Omega = Z_L$$

$$Z_{L \text{ verlustlos}} = \frac{l}{2\pi} \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)$$

$$\frac{2\pi \cdot 60\Omega}{\sqrt{3,5} \cdot 377\Omega} = \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \rightarrow r_i = \frac{r_o}{\exp \left(\frac{2\pi \cdot 60\Omega}{\sqrt{3,5} \cdot 377\Omega} \right)}$$

$$r_i = \frac{U_{max}}{E_{max} \ln(r_o/r_i)} = \frac{1300 \text{ kV} \cdot \sqrt{3,5} \cdot 377\Omega}{35 \text{ MV/m} \cdot 2\pi \cdot 60\Omega} = 69,49 \text{ mm}$$

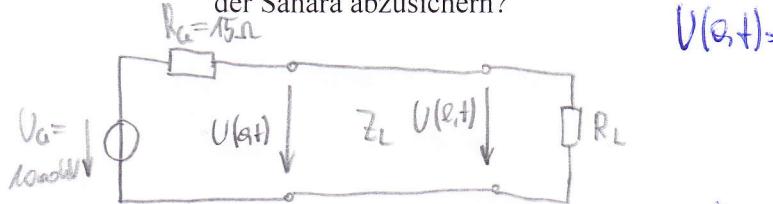
$$r_o = r_i \cdot \exp \left(\frac{2\pi \cdot 60\Omega}{\sqrt{3,5} \cdot 377\Omega} \right) = 118,59 \text{ mm}$$

2. (5%) Welche Widerstände stellen Innen- bzw. Außenleiter des Koaxialkabels dar, wenn der Innenleiter massiv ausgeführt ist, und der Außenleiter die gleiche Masse aufweist wie der Innenleiter? Welche Verluste ergeben sich in Kabel und speisender Umrichterstation?

$$R_i = \frac{l}{6A} = \frac{l}{6r_i^2 \pi} = 2,14 \Omega$$

$$R_o = R_i = 2,14 \Omega$$

3. (6%) Welche Lastimpedanz stellt die Umrichterstation in Italien dar? Die Leitung wird nach Revisionsarbeiten zum Zeitpunkt $t = 0$ in Betrieb genommen. Welche Spannung ergibt sich jeweils an den Umrichterstationen in der Sahara bzw. in Italien für die Zeitpunkte $t = 0$, $t = 2,1 * l/e$, $t = \infty$? ($e = c_0/\sqrt{\epsilon_r}$) Für welchen Maximalstrom ist die Umrichterstation in der Sahara abzusichern?



$$U(0,t) =$$

$$l = 1200 \text{ km}$$

$$I(0,0) = \frac{U(0,0)}{R_a + Z_L}$$

$$U_a = R_a I(0,0) + U(0,0)$$

$$U_a = R_a I(0,0) + Z_L I(0,0) = (R_a + Z_L) I(0,0)$$

$$U_a = (R_a + Z_L) \frac{U(0,0)}{Z_L} \Rightarrow U(0,0) = \frac{Z_L}{R_a + Z_L} U_a$$

$$\underline{U(0,0) = \frac{32,07 \Omega}{15 \Omega + 32,07 \Omega} \cdot 1000 \text{ V} = 681,33 \text{ V}}$$

$$U(0,\infty) = U(l,\infty) = U_a \frac{R_L}{R_a + R_L} \quad I(0,\infty) = I(l,\infty) = \frac{U(0,0)}{Z_L}$$

4. (4%) Berechnen Sie die Kabelkapazität und Induktivität um die darin gespeicherte Energien!

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{l} = 364,28 \mu\text{F/m}$$

$$L' = \frac{\pi \mu_0}{l} = 100,9 \text{nH/m}$$

$$\underline{C' = C \cdot 1200 \text{ km} = 437,15 \mu\text{F}}$$

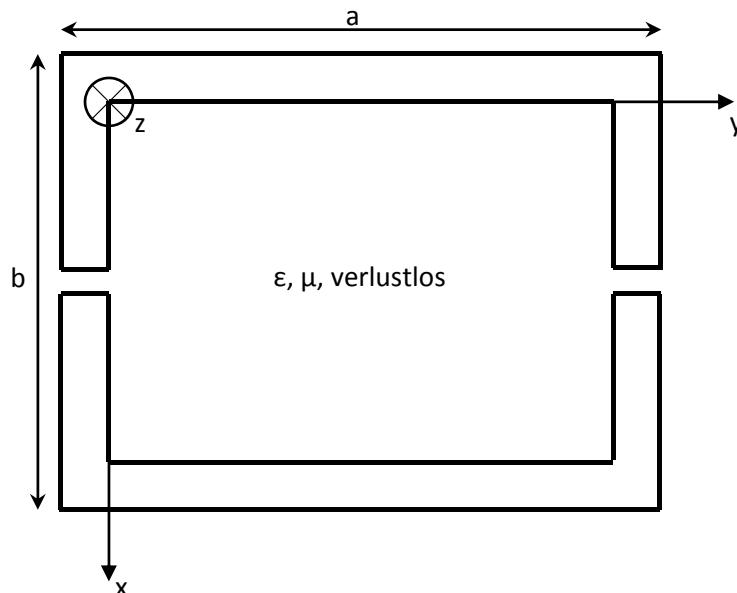
$$\underline{L'' = L' \cdot 1200 \text{ km} = 128,28 \text{ mH}}$$

$$W_e = \frac{C U^2}{2} =$$

$$W_m = \frac{L I^2}{2}$$

Geschlitzter Rechteckhohlleiter (20%)

Untersuchen Sie die Wellenausbreitung in z-Richtung im skizzierten geschlitzten Rechteckhohlleiter. Der Schlitz sei sehr schmal und die Wand des Hohlleiters sehr dünn – daher sind kapazitive Effekte im Schlitz zu vernachlässigen.



1. (5%) Betrachten Sie vorerst $TM_{m,n}$ -Moden! Finden Sie einen geeigneten Ansatz für die Komponenten in Ausbreitungsrichtung, der die Wellengleichung erfüllt. Ermitteln Sie die Separationsbedingungen.
2. (7%) Leiten Sie daraus die restlichen Feldkomponenten her und passen Sie an den Rand an! Welche Bedingungen für die Modenindizes m und n bestehen?
3. (3%) Welche Moden (TEM, TE, TM) sind auf diesem Wellenleiter überhaupt ausbreitungsfähig? In welchem Frequenzbereich wird der Wellenleiter im Monomodenbetrieb betrieben?, wenn die konkreten Angaben des Wellenleiters wie folgt lauten: $a=7\text{cm}$, $b=4,5\text{cm}$, $\epsilon_r=3$, $\mu_r=1$, $\epsilon_0 \mu_0$.
4. (5%) Betrachten Sie alle Moden außer TE-Moden! Berechnen und skizzieren Sie für den zuvor spezifizierten Wellenleiter das Dispersionsdiagramm für die unteren sechs Moden. Achten Sie auf die Beschriftung! geben Sie die Grenzfrequenz an!

Mars Odyssey Radar (20%)

Um für die Marssonde „Phoenix“ geeignete Landeplätze zu erkunden, wurden 2005 mit der den Mars umkreisenden Raumsonde „Odyssey“ Radar-Bilder der Marsoberfläche erzeugt. Die Messungen wurden bi-statisch bei einer Frequenz von 401MHz durchgeführt: Als Sendestation fungierte das Stanford Research Institute in Kalifornien mit einer Sendeleistung P_s von 3kW. Die Raumsonde „Odyssey“ überfliegt den Mars in einer Flughöhe von $h=400\text{km}$ und ist mit einer Empfangsantenne mit einem Gewinn von 4,8dBi ausgerüstet, die Empfängerrauschtemperatur beträgt $T=400\text{K}$, wobei ein Empfangsfilter mit 28kHz Bandbreite eingesetzt wird. In der betrachteten Zeit betrug die Distanz Mars-Erde etwa $70000 \cdot 10^6\text{m}$.

1. (3%) Skizzieren Sie den Sachverhalt auf dem Mars und tragen Sie alle relevanten Daten ein!
Nehmen Sie dabei an, dass sich Erde, „Odyssey“ und Mars auf einer Linie befinden.

2. (5%) Berechnen Sie die Strahlungsleistungsdistanz T_e auf der Marsoberfläche, die durch den Sender in Kalifornien erzeugt wird.

3. (7%) Berechnen Sie die differentielle Empfangsleistung dP_r bei der Sonde, die durch ein Flächenelement dA des Marsbodens mit dem flächenbezogenen Streuquerschnitt $\sigma=4000*10^3$ entspricht.

4. (5%) Wie groß ist die Fläche am Marsboden, die zu Empfangsleistung beiträgt, damit sich ein SNR von 13dB ergibt?

RESONATOR

Ein Stück Koaxkabel mit $Z_1 = 75 \Omega$ wird zu einem Ringresonator mit mittlerem Radius $r = 4 \text{ cm}$ verbunden.

Das Kabel hat einen Außenradius $r_a = 7 \text{ mm}$ und einen Innenradius r_i

Zum Dielektrikum stand da noch: ϵ_r und ϵ_0 und $\mu_0 = \mu_r$

- 1) ϵ_r und r_i so dimensionieren, dass sich eine Resonanzfrequenz von $f_{res} = 1 \text{ GHz}$ ergibt.
- 2) Vor dem Verbinden des Kabels zu einem Ring wurde eine Dämpfung von $\alpha_G = 0,15 \text{ dB}$ gemessen. Die Ohmschen Verluste sind vernachlässigbar. Berechnen Sie die Güte Q des Resonators aufgrund der dielektrischen Verluste α_G

$$\mu_r = 1$$

$$1) \quad C = \frac{C_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \lambda \cdot f \quad \lambda = V = 2\pi r$$

$$\frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2\pi r \cdot f \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{C_0}{2\pi r \cdot f} \right)^2 \sim \text{ich glaub } 2,2$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)^2 \right)} = \gamma \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \quad \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

$$e^{\frac{2\pi Z_w}{\gamma}} = \frac{r_a}{r_i} \Rightarrow r_i = r_a \cdot e^{-\frac{2\pi Z_w}{\gamma}}$$

~~ausrechnen~~

$$2) \quad \Delta G = \frac{G' \cdot Z_w}{2} \quad G' = \omega \cdot C' \tan \delta \Rightarrow \tan \delta = \frac{G'}{\omega C'}$$

$$G' = \frac{2 \cdot \Delta G}{Z_w} \quad \Delta G \text{ in Neper umrechnen}$$

$$\Delta G [N_p] = \frac{\Delta G [dB]}{8,686 \text{ dB}} = \dots$$

$$\text{Güte } Q = \frac{1}{\tan \delta}$$