

Отчет по лабораторной работе № 1.3.1

«Определение модуля Юнга на основе
исследования деформаций растяжения и
изгиба»

Выполнил Смирнов Иван и Сапронов Юрий, студент Б02-004

13 декабря 2020 г.

Аннотация

Работа заключается в экспериментальном получении значения модуля Юнга. Для этого в первой части эксперимента с помощью прибора Лермантова измеряется зависимость между напряжением и деформацией для одноосного растяжения, а во второй части с помощью перечисленного ниже оборудования измеряется та же зависимость для чистого изгиба.

В работе используются: в первой части - прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части - стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

В первой части эксперимента производится растяжение, что соответствует одноосному напряженному состоянию, которое описывается формулой, основанной на эмпирических данных:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (1)$$

где σ - напряжение, E - модуль упругости, он же модуль Юнга, ϵ - деформация, она же в данном случае относительное удлинение.

Во второй части же измерения производят при изгибе балки. Связь между ее прогибом и величиной силы, приложенной посередине между точками опор балки, может быть выражена через модуль Юнга.

Одноосное напряжение

Теоретическая справка

Запишем закон Гука:

$$\frac{P}{S} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (2)$$

где S - площадь поперечного сечения проволоки, P - вес нагрузки.

При малых ΔL угол α также можно считать малым, тогда, пользуясь геометрией установки, распишем тангенс угла между рычагом и горизонталью, который, как может быть видно, также равен углу между лучами из трубки:

$$2\alpha = \frac{\Delta L}{r}, \Delta S \approx 2\alpha h \Rightarrow \Delta L \approx \frac{\Delta S r}{2h}. \quad (3)$$

Рассчитаем величину предельной нагрузки, действие которой приводит к необратимой деформации. Она составляет не более 30% от разрушающей равной $900H/\text{мм}^2$. То есть, говоря о массе грузов, мы можем навесить не больше

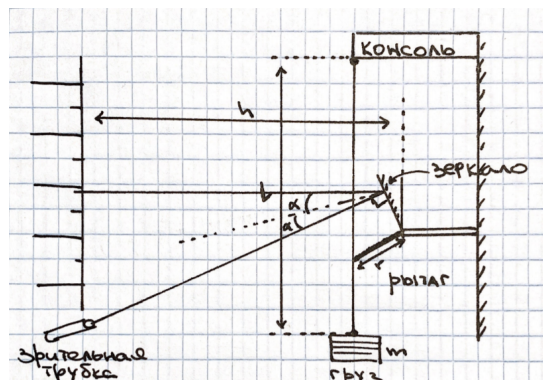
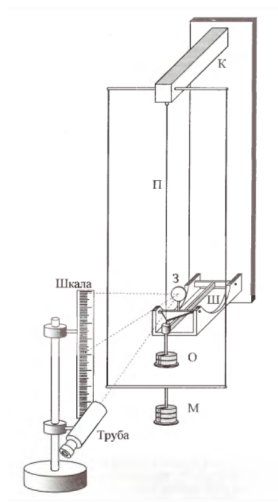


Рис. 1: L - длина проволоки, r - длина рычага, ΔL - удлинение проволоки, α - угол отклонения зеркала, h - расстояние от шкалы до зеркала, ΔS - изменение по шкале.

10 килограмм. Выходит так, что лабораторная установка не позволяет использовать и половины такой нагрузки, поэтому необратимой деформацией мы пренебрегаем.

Измерения, погрешности и конечный результат

Снимем зависимость удлинения проволоки, то есть числа делений n по шкале, от массы грузов m при увеличении и уменьшении нагрузки. Результаты приведем в таблице 2. Усредним измерения для каждой нагрузки и учтем погрешности - таблица 2. Подставим измерения по шкале в формулу (4), рассчитаем погрешности, результаты вынесем в таблицу 3 и на основании них построим график зависимости удлинения проволоки от нагрузки - рисунок 2. На рисунке 2 видим аппроксимирующую прямую, которая была построена по МНК. Коэффициент наклона известен и погрешность рассчитана, вычисления приведены не будут.

Модуль Юнга будем рассчитывать по следующей формуле:

$$E = \frac{4kl}{\pi d^2}, \quad (4)$$

Где $d = 0,73 \times 10^{-4}$ м, $l = (17747 \pm 7) \times 10^{-4}$ м. В результате имеем таблицу 4 с конечными результатами измерения.

Вес нагрузки, Н	Измерение 1, мм	Измерение 2, мм
4.6	16.7	16.8
9.6	19.5	19.5
14.6	21.3	21.6
19.5	23.2	23.5
24.4	26.5	26.5
29.3	28.9	29.1
24.4	26.5	26.6
19.5	23.5	23.7
14.6	21.5	21.6
9.6	19.9	20.1
4.6	16.8	16.5

Таблица 1: *Измерение изменения на шкале в зависимости от нагрузки.*

Измерение по шкале, мм	Случайная, мм	Статистическая, мм	Полная, мм
16.7	1.62	0.05	1.62
19.8	0.30	0.05	0.30
21.5	0.14	0.05	0.15
23.5	0.21	0.05	0.21
26.5	0.06	0.05	0.08
29.0	0.14	0.05	0.15

Таблица 2: *Усреднение измерений и их погрешности.*

Вес нагрузки, Н	Удлинение, мм	Погрешность, мм
4.6	0.079	0.008
9.6	0.094	0.001
14.6	0.102	0.001
19.5	0.112	0.001
24.4	0.126	0.000
29.3	0.138	0.001

Таблица 3: *Точки для графика.*

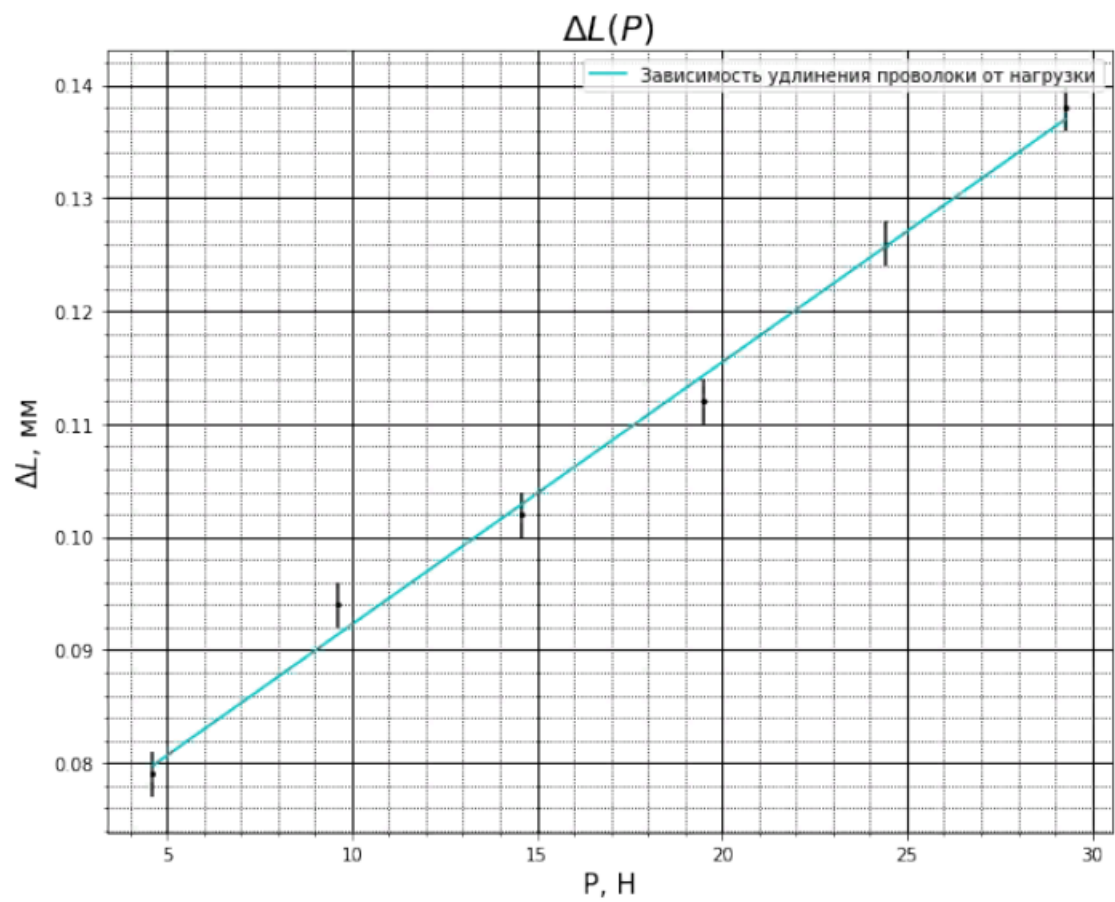


Рис. 2: График зависимости удлинения проволоки от веса нагрузки.

Коэффициент наклона k [Н/мм]	430.98
Коэффициент смещения b [мм]	0.069
Погрешность коэффициента наклона k [Н/мм]	8.444
Модуль Юнга [Н/м ²]	1.4×10^{11}
Погрешность определения модуля Юнга [Н/м ²]	3×10^9

Таблица 4: Итог первого эксперимента.

Изгиб балки

Теоретическая справка

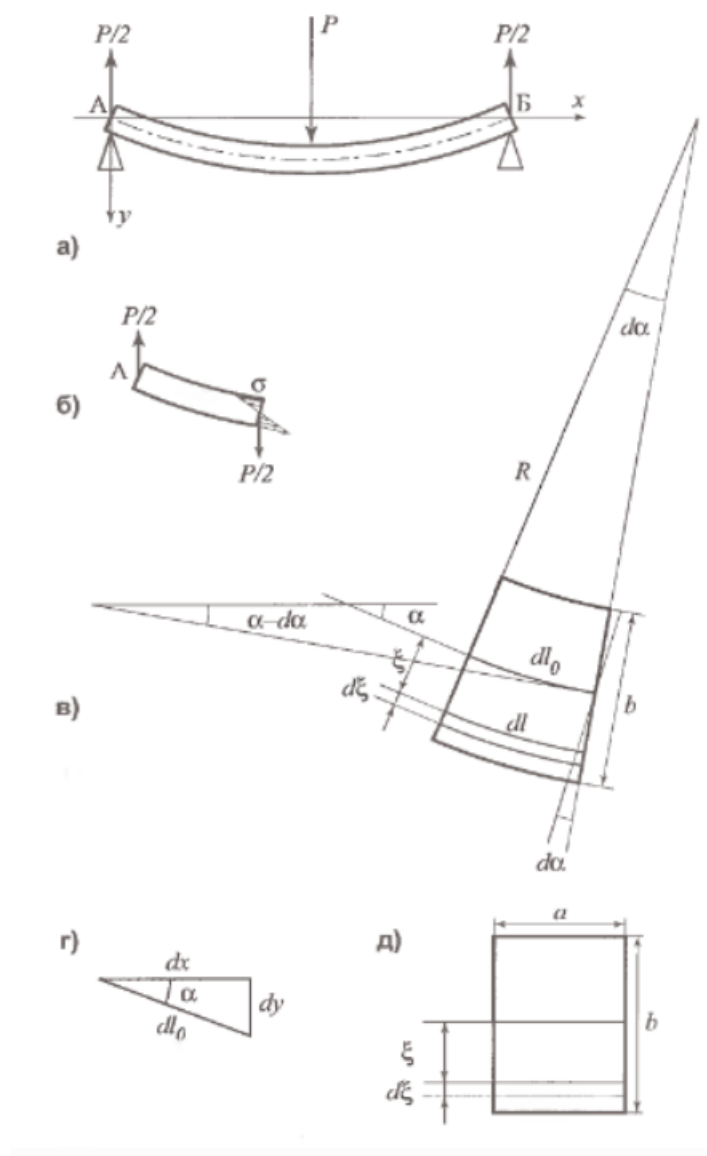


Рис. 3: Изгиб балки.

Рассмотрим деформацию балки. В силу симметричного расположения призм опоры можем считать, что если в центр балки действует сила P , то в точках

опоры действуют силы $P/2$. Считаем, что напряжения в слоях связаны с их деформацией законом Гука:

$$\sigma = E \frac{dl - dl_0}{dl_0}. \quad (5)$$

В выделенном на рисунке элементе балки наклон средней линии на ее длине dl_0 меняется от α до $\alpha - d\alpha$. Длину дуги можно выразить через радиус ее кривизны R :

$$dl_0 = -Rd\alpha. \quad (6)$$

Знак минус здесь потому, что R мы считаем положительным, а угол наклона средней линии балки в выбранных на рисунке координатах уменьшается по длине балки. Если $y(x)$ - зависимость, описывающая форму средней линии балки в выбранной системе координат x, y , то угол наклона средней линии определяется выражением, соответствующий геометрическому смыслу производной функции:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan \alpha. \quad (7)$$

Длину средней линии малого элемента балки можно выразить следующим образом:

$$dl_0 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (8)$$

Из этого же треугольника:

$$\frac{dx}{dl_0} = \cos \alpha. \quad (9)$$

Дифференцируя (6) по x и пользуясь (2), получаем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{dl_0}{dx}\right)^3 \frac{1}{R}. \quad (10)$$

Отсюда и из (7) следует:

$$\frac{1}{R} = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Сумма сил упругости, действующих в сечении балки, равна нулю, поэтому их суммарный момент не зависит от положения точки, относительно которой он вычисляется. Выберем эту точку на средней линии балки, проинтегрируем элементарный момент по dS и получим:

$$M = \frac{E}{R}I. \quad (12)$$

I - момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через среднюю линию балки. Из рисунка видно, что для части балки от $x = 0$ до x равновесие обеспечивается равенством сил, приложенных в точке опоры и в рассматриваемом сечении, а также равенством моментов этих сил и момента, определяемого формулой (11). Равенство моментов дает:

$$\frac{EI}{R} = \frac{xP}{2}. \quad (13)$$

Тогда при малых прогибах $y'' \ll 1$ из (12) следует:

$$y'' = -\frac{P}{2EI}x \Rightarrow y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + C. \quad (14)$$

C - постоянная, которая определяется из условия симметрии прогиба балки $y' = 0$ при $x = l/2$. Тогда:

$$y' = -\frac{P}{4EI}(x^2 - \frac{l^2}{4}) \Rightarrow y = \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2). \quad (15)$$

Максимальный прогиб балки, который определяется величиной y при $x = l/2$, равен:

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}. \quad (16)$$

В случае прямоугольного сечения балки:

$$I = - \int_{-b/2}^{b/2} \xi^2 dS = a \int_{-b/2}^{b/2} \xi^2 d\xi = \frac{ab^3}{12}. \quad (17)$$

Тогда окончательно получаем выражение для модуля Юнга:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{max}}. \quad (18)$$

Здесь P - нагрузка, вызывающая прогиб стержня, l - расстояние между призмами А и Б, a и b - ширина и высота сечения стержня.

Измерения, погрешности и конечный результат

Измерим указанные геометрические параметры каждой балки и результаты выведем в таблицу 5. В ней же рассчитаем полную погрешность для каждого параметра - она равна корню из суммы квадратов инструментальной и случайной погрешностей:

Деревянная балка 1			Металлическая балка			Деревянная балка 2		
Длина, см	Высота, мм	Ширина, мм	Длина, см	Высота, мм	Ширина, мм	Длина, см	Высота, мм	Ширина, мм
50.5	9.17	19.1	50.5	3.92	21.7	50.5	10.25	19.86
-	9.12	19.3	-	3.98	21.9	-	10.17	20.72
-	9.13	19.1	-	3.97	21.9	-	10.21	20.81
-	9.03	19.3	-	4.03	22.0	-	10.21	20.70
-	9.05	19.5	-	4.06	22.2	-	9.95	20.56
-	8.97	19.6	-	3.94	21.9	-	9.96	20.43
-	8.9	19.4	-	3.98	21.7	-	10.04	20.40
-	9.17	19.3	-	3.93	21.6	-	10.15	20.45
-	9.21	19.2	-	3.94	21.5	-	10.19	20.51
-	9.23	18.9	-	3.93	21.6	-	10.22	20.51
Средние значения			Средние значения			Средние значения		
50.5	9.10	19.27	50.5	3.97	21.8	50.5	10.14	20.495
Случайная погрешность измерения			Случайная погрешность измерения			Случайная погрешность измерения		
-	0.108	0.206	-	0.046	0.22	-	0.111	0.261
Инструментальная погрешность			Инструментальная погрешность			Инструментальная погрешность		
0.05	0.005	0.005	0.05	0.005	0.005	0.05	0.005	0.005
Полная погрешность			Полная погрешность			Полная погрешность		
0.005	0.108	0.206	0.005	0.047	0.22	0.005	0.111	0.261

Таблица 5: Измерение геометрических параметров балок.

Изучение первой деревянной балки

Положим первую деревянную балку на стойку. Снимем зависимость стрелы прогиба y_{max} от величины нагрузки P . Затем сместим точку приложения нагрузки. Перевернем балку и продelaем те же действия. Будем снимать зависимость при возрастании и убывании нагрузки. Результаты выведем в таблице 6.

Построим графики зависимостей величины прогиба от величины нагрузки для каждого из измерений - рисунок 4. На графиках изображены аппроксимирующие прямые, построенные по МНК. Коэффициенты наклона и смещения прямых, их погрешности - отразим в таблице 7.

Получив коэффициент наклона и его погрешность, подставим необходимые данные в формулу (18). Погрешность посчитаем как для степенной зависимости:

$$\sigma_E = E \times \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}.$$

Получим итоговое значение модуля Юнга первой деревянной балки:

$$E = (669 \pm 55) \times 10^8 \text{ Па}$$

Величина нагрузки, Н	Прогиб посередине, мм сторона 1	Прогиб со смещением, мм сторона 1	Прогиб посередине балки, мм сторона 2	Прогиб со смещением, мм сторона 2
4.5	0.58	0.56	0.61	0.59
9.5	1.25	1.24	1.25	1.23
14.1	1.85	1.84	1.86	1.83
18.7	2.50	2.43	2.47	2.48
14.1	1.88	1.87	1.90	1.89
9.5	1.28	1.24	1.28	1.28
4.5	0.60	0.55	0.59	0.58
Усреднение величин				
4.5	0.59	0.56	0.60	0.59
9.5	1.27	1.24	1.27	1.26
14.1	1.87	1.86	1.88	1.86
18.7	2.50	2.43	2.47	2.48
Статистическая погрешность во всех измерениях составляет 0,02 мм - погрешность инструмента.				

Таблица 6: Зависимость величины прогиба от величины нагрузки для первой деревянной балки.

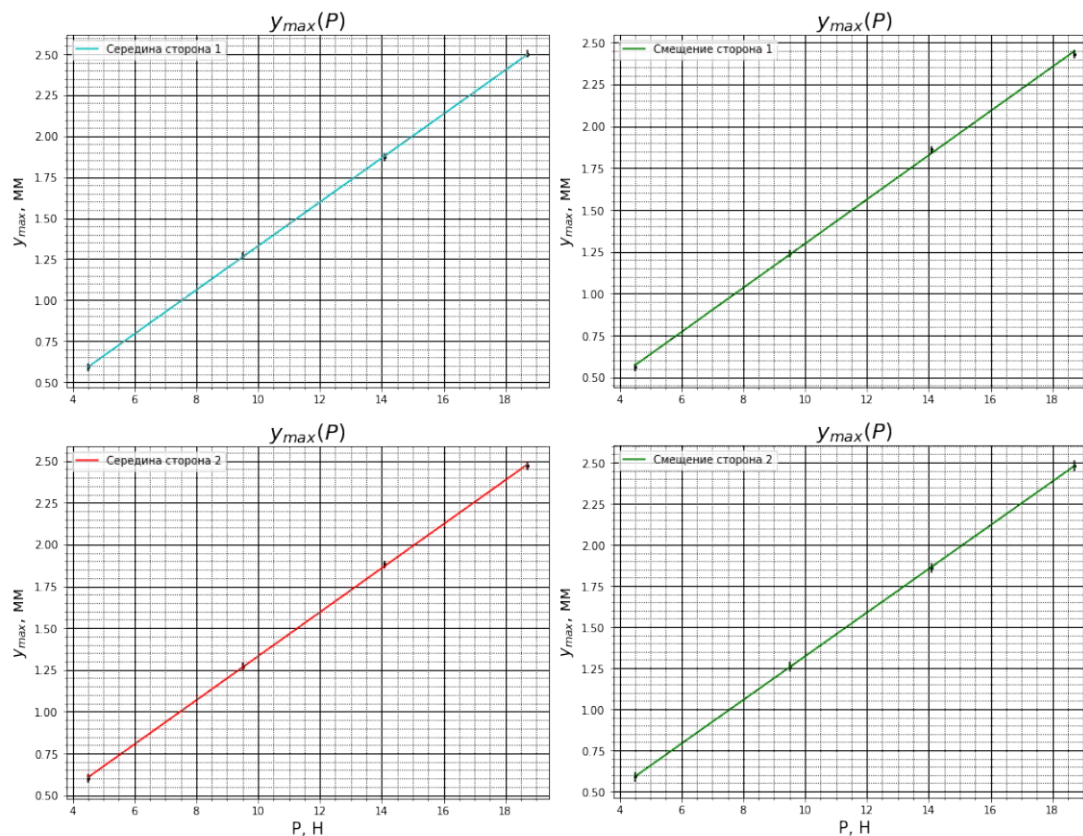


Рис. 4: Графики зависимостей величины прогиба y_{max} от величины нагрузки P для каждого из экспериментов.

МНК для зависимостей прогиба от нагрузки		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]	0.134	
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]	0.132	
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]	0.132	
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]	0.133	
Коэффициент смещения для первого эксперимента [мм]	-0.012	
Коэффициент смещения для второго эксперимента [мм]	-0.022	
Коэффициент смещения для третьего эксперимента [мм]	0.013	
Коэффициент смещения для четвертого эксперимента [мм]	-0.007	
Погрешность вычисления коэффициентов МНК		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]	0.00889	6.63%
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]	0.01716	13.00%
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]	0.00774	5.87%
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]	0.00534	4.02%
Итоговый коэффициент наклона [мм/Н]		
Усредненный коэффициент наклона [мм/Н]	0.1327	-
Случайная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0009	-
Статистическая погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0098	-
Полная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0098	7.40%

Таблица 7: Коэффициенты МНК для первой деревянной балки.

Изучение металлической балки

Положим металлическую балку на стойку. Снимем зависимость стрелы прогиба y_{max} от величины нагрузки P . Затем сместим точку приложения нагрузки. Перевернем балку и продедаем те же действия. Будем снимать зависимость при возрастании и убывании нагрузки. Результаты выведем в таблице 8.

Построим графики зависимостей величины прогиба от величины нагрузки для каждого из измерений - рисунок 5. На графиках изображены аппроксимирующие прямые, построенные по МНК. Коэффициенты наклона и смещения прямых, их погрешности - отразим в таблице 7.

Получив коэффициент наклона и его погрешность, подставим необходимые данные в формулу (18). Погрешность посчитаем как для степенной зависимости:

$$\sigma_E = E \times \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}.$$

Получим итоговое значение модуля Юнга первой деревянной балки:

$$E = (135 \pm 15) \times 10^8 \text{Па}.$$

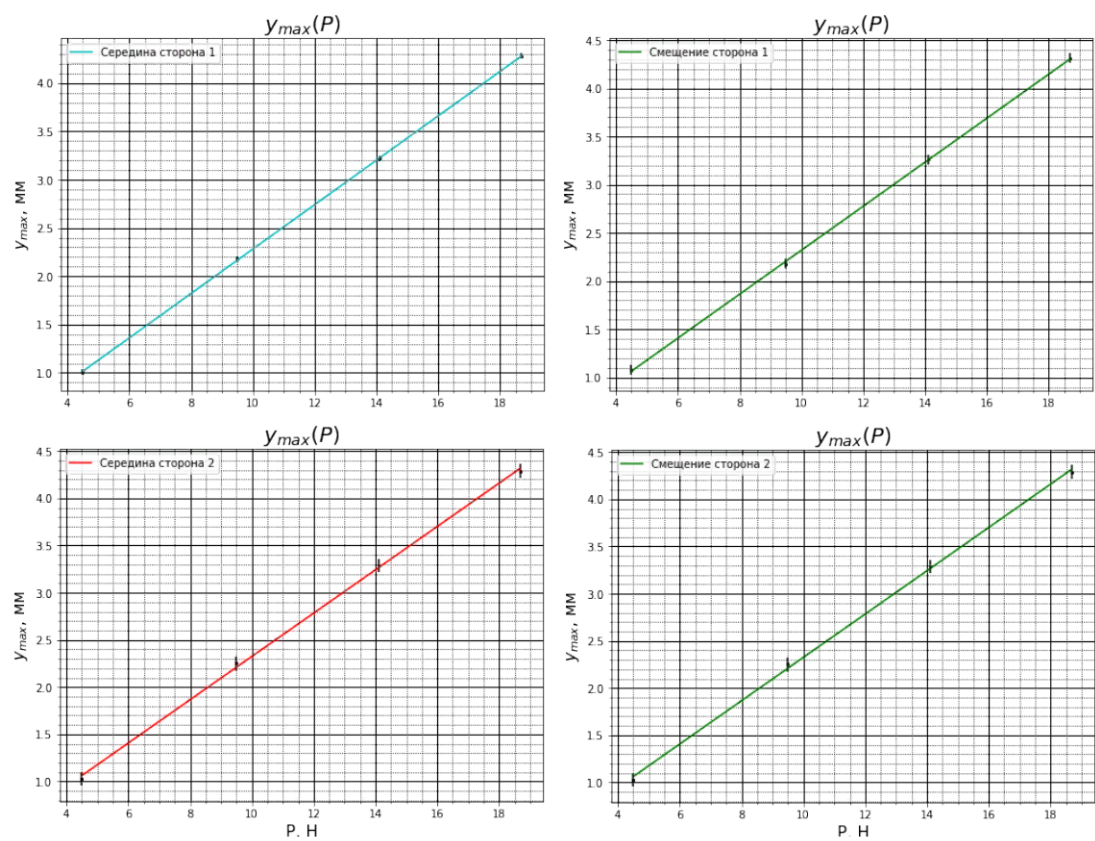


Рис. 5: Графики зависимостей величины прогиба y_{max} от величины нагрузки P для каждого из экспериментов.

Величина нагрузки, Н	Прогиб посередине, мм сторона 1	Прогиб со смещением, мм сторона 1	Прогиб посередине, мм сторона 2	Прогиб со смещением, мм сторона 2
4.5	1.01	0.99	1.03	0.96
9.5	2.19	2.10	2.30	2.15
14.1	3.19	3.25	3.35	3.23
18.7	4.28	4.31	4.54	4.29
14.1	3.25	3.26	3.49	3.35
9.5	2.17	2.25	2.45	2.35
4.5	1.01	1.16	1.22	1.10
Усреднение величин				
4.5	1.01	1.08	1.13	1.03
9.5	2.18	2.18	2.38	2.25
14.1	3.22	3.26	3.42	3.29
18.7	4.28	4.31	4.54	4.29
Статистическая погрешность во всех измерениях составляет 0,02 мм - погрешность инструмента.				

Таблица 8: Зависимость величины прогиба от величины нагрузки для первой деревянной балки.

МНК для зависимостей прогиба от нагрузки		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]		0.229899497
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]		0.228122757
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]		0.238837042
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]		0.229361091
Коэффициент смещения для первого эксперимента [мм]		-0.017324121
Коэффициент смещения для второго эксперимента [мм]		0.038463747
Коэффициент смещения для третьего эксперимента [мм]		0.073106604
Коэффициент смещения для четвертого эксперимента [мм]		0.031475233
Погрешность вычисления коэффициентов МНК		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]	0.00928	4.04%
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]	0.01951	8.55%
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]	0.02721	11.39%
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]	0.03880	16.91%
Итоговый коэффициент наклона [мм/Н]		
Усредненный коэффициент наклона [мм/Н]	0.2316	-
Случайная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0043	-
Статистическая погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0237	-
Полная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0241	10.40%

Таблица 9: Коэффициенты МНК для металлической балки.

Изучение второй деревянной балки

Положим металлическую балку на стойку. Снимем зависимость стрелы прогиба y_{max} от величины нагрузки P . Затем сместим точку приложения нагрузки. Перевернем балку и продelaем те же действия. Будем снимать зависимость при возрастании и убывании нагрузки. Результаты выведем в таблице 10.

Построим графики зависимостей величины прогиба от величины нагрузки

для каждого из измерений - рисунок 6. На графиках изображены аппроксимирующие прямые, построенные по МНК. Коэффициенты наклона и смещения прямых, их погрешности - отразим в таблице 7.

Получив коэффициент наклона и его погрешность, подставим необходимые данные в формулу (18). Погрешность посчитаем как для степенной зависимости:

$$\sigma_E = E \times \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}.$$

Получим итоговое значение модуля Юнга первой деревянной балки:

$$E = (447 \pm 38) \times 10^8 \text{Па}.$$

Вывод

Изучена зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений были вычислены модули Юнга для каждого из материалов.

Величина нагрузки, Н	Прогиб посередине, мм сторона 1	Прогиб со смещением, мм сторона 1	Прогиб посередине, мм сторона 2	Прогиб со смещением, мм сторона 2
4.5	0.58	0.56	0.52	0.54
9.5	1.36	1.27	1.22	1.24
14.1	1.95	1.89	1.85	1.83
18.7	2.63	2.53	2.49	2.50
14.1	2.01	1.93	1.89	1.91
9.5	1.38	1.32	1.31	1.32
4.5	0.69	0.65	0.65	0.68
Усреднение величин				
4.5	0.64	0.61	0.59	0.61
9.5	1.37	1.30	1.27	1.28
14.1	1.98	1.91	1.87	1.87
18.7	2.63	2.53	2.49	2.50
Статистическая погрешность во всех измерениях составляет 0,02 мм - погрешность инструмента.				

Таблица 10: Зависимость величины прогиба от величины нагрузки для второй деревянной балки.

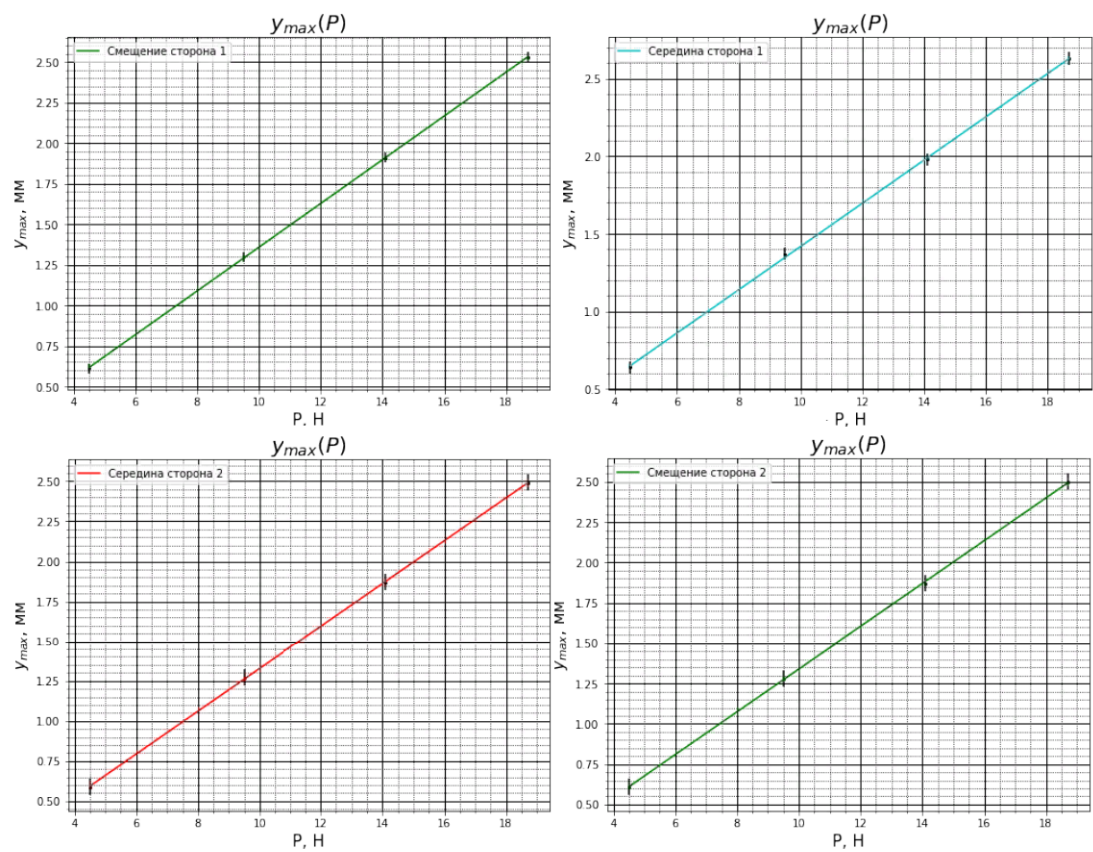


Рис. 6: Графики зависимостей величины прогиба y_{max} от величины нагрузки P для каждого из экспериментов.

МНК для зависимостей прогиба от нагрузки		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]		0.139447236
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]		0.134978464
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]		0.133488873
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]		0.132627423
Коэффициент смещения для первого эксперимента [мм]		0.023467337
Коэффициент смещения для второго эксперимента [мм]		0.008251974
Коэффициент смещения для третьего эксперимента [мм]		-0.006819813
Коэффициент смещения для четвертого эксперимента [мм]		0.013259153
Погрешность вычисления коэффициентов МНК		
Коэффициент наклона для первого эксперимента [мм/Н]	0.01713	12.28%
Коэффициент наклона для второго эксперимента [мм/Н]	0.00701	5.20%
Коэффициент наклона для третьего эксперимента [мм/Н]	0.00646	4.84%
Коэффициент наклона для четвертого эксперимента [мм/Н]	0.00972	7.33%
Итоговый коэффициент наклона [мм/Н]		
Усредненный коэффициент наклона [мм/Н]	0.1351	-
Случайная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0026	-
Статистическая погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0101	-
Полная погрешность вычисления коэффициента наклона	0.0104	7.71%

Таблица 11: Коэффициенты МНК для металлической балки.