Matematyka dyskretna L, Lista 11 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 2

Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(n+m)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i<j$.

Poniższy algorytm stopniowo usuwa wierzchołki o stopniu wchodzącym 0 (a więc nie wchodzi w nie żadna krawędź). Kolejność usuwania wierzchołków jest szukanym rozwiązaniem, nazwy takich wierzchołków będą wypisywane. Gdy po usunięciu wszystkich wierzchołków o $\deg_{\text{in}}(v)=0$ zostaną jakieś wierzchołki, oznacza to, że w grafie istnieje cykl, a więc podany graf D nie był acykliczny.

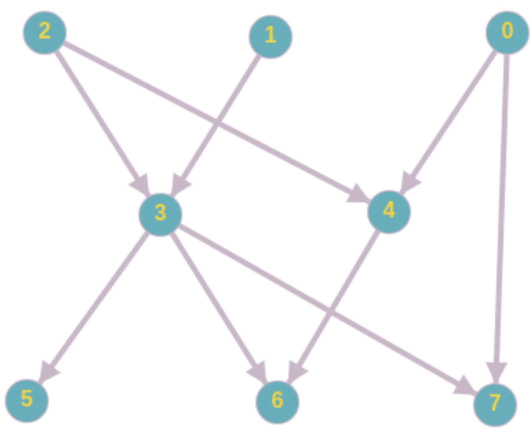
```
def topological_sort(D):
    Q = {queue of vertices with deg_in == 0}

    while Q is not empty:
        remove v from the front of Q
        print v

        for each edge e to u (neighbour of v):
            remove e from D
            if u has no more incoming edges:
                push u to Q

    if G has vertices:
        print "there are cycles in D (which is not acyclic)"
```

Taki algorytm nie wyznacza jednoznacznie takiego porządku. Spowodowane jest to tym, w jaki sposób tworzymy kolejkę na samym początku algorytmu. Za przykład niech posłuży nam poniższy graf. Kolejkę wierzchołków o stopniu wchodzącym 0 możemy stworzyć na kilka sposobów, na przykład $Q_1=\{2,1,0\}$ czy $Q_2=\{1,0,2\}$ (oczywiście to nie są wszystkie możliwości). Ponadto, usuwając kolejne krawędzie (np. od wierzchołka 2), możemy je wybierać w różnej kolejności.



Wtedy dla Q_1 możemy otrzymać np. $\{2,1,0,3,4,5,7,6\}$, a dla Q_2 możemy uzyskać $\{1,0,2,4,3,5,6,7\}$. Tak jak wspomniałem wyżej, nie są to jedyne możliwości.

Zadanie 3
Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy turniejem (jest to skierowany graf pełny). Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

Weźmy wierzchołek v o największej ilości łuków wychodzących, a w przypadku gdy istnieje kilka takich łuków, wybierzmy dowolny z nich. Załóżmy, że liczba łuków wychodzących jest mniejsza od liczby krawędzi tego grafu, w przeciwnym wypadku sytuacja byłaby trywialna, gdyż do każdego wierzchołka możnaby było dojść po drodze długości 1, co kończyłoby dowód.

Załóżmy nie wprost, że istnieje wierzchołek u, do którego nie można dojść z v w po ścieżce długości 2. Wierzchołek u ma krawędzie skierowane do każdego innego wierzchołka: są to wierzchołki, do których można dojść z v jednym ruchem oraz v. Aby nie można było dojść do tego wierzchołka u w dwóch ruchach, to wymienione przed chwilą krawędzie musiałyby wychodzić z u - to oznaczałoby, że u ma więcej łuków wychodzących niż v, ponieważ wychodziłyby z niego krawędzie skierowane do wierzchołków wychodzących z v oraz do v. Dochodzimy więc do sprzeczności, gdyż

$$\deg_{\text{out}}(v) + 1 = \deg_{\text{out}}(u)$$

lecz wcześniej założyliśmy, że wybrany wierzchołek v ma najwięcej łuków wychodzących. Przeczy to założeniu, że nie ma wierzchołka z większą ilości krawędzi wychodzących z v, czyli nie ma wierzchołka do u, do którego nie da się dojść w dwóch krokach.

Zadanie 4
Pierwsza część: Podaj warunek konieczny na to, by graf dwudzielny był grafem hamiltonowskim.

Dla grafu dwudzielnego G, aby był on grafem hamiltonowskim, a więc grafem, który zawiera cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz, dwa rozłączne zbiory A i B, takie że $A \cup B = V(G)$ i $A \cap B = \emptyset$, muszą spełniać własność $|A| = |B|$. Aby to udowodnić, załóżmy bez straty ogólności, że $|A| > |B|$. Załóżmy, że graf G zawiera cykl Hamiltona, który zaczyna się w wierzchołku $u \in B$. Po przejściu $2\,|B|$ krawędzi, pozostanie $|A| - |B|$ nieodwiedzonych wierzchołków w A, co oznacza, że w grafie G nie może powstać cykl hamiltonowski.

Druga część: Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

Szukając zamkniętej ścieżki konika szachowego należy przyjrzeć się temu, w jaki sposób odbywa się ruch skoczka po szachownicy. Zawsze przechodzi on z pola jednego koloru na pole innego koloru. Oznacza to, że zaczynając na polu białym, konik musiałby wylądować w ostatnim ruchu na tym samym polu, analogicznie w przypadku pola czarnego. Oznacza to, że ścieżka zamknięta skoczka istnieje tylko dla szachownic o parzystej liczbie pól, a więc dla szachownicy 5×5 nie istnieje żadna taka ścieżka zamknięta.

Zadanie 5
Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwa jest sytuacja, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Taka sytuacja nie jest możliwa. Pokolorujmy wszystkie kostki na biało-czarno i załóżmy, że rogi są koloru czarnego. Mamy wtedy 14 kostek czarnych i 13 kostek białych. Z założenia z zadania, możemy przechodzić tylko do sąsiednich kostek, co w naszym przypadku oznacza przejścia z kostek białych do czarnych lub na odwrót. Kostka w samym środku jest biała, a więc jeśli zaczniemy przechodzić od niej (możemy zacząć wędrówkę od wewnętrznej kostki, gdyż tę ścieżkę możemy wtedy "odwrócić"), trasa będzie wyglądać następująco:

$$\underbrace{B \to C \to B \to C \to \cdots \to B \to C}_{\text{13 ruchów między różnymi kolorami}} \to ?$$

Niestety, ostatnią kostką jaka nam została, jest kostka C, jednak ruch między kostkami tego samego koloru jest niedozwolony. Oznacza to, że mysz nie będzie mogła zjeść środkowego pola jako ostatniego.