**RPiS, Lista 1 - Tomasz Woszczyński**

## Zadanie 1

Sprawdzić, że:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

**Podpunkt (a):** skorzystajmy z dwumianu Newtona, a więc ze wzoru

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

i weźmy $x = 1-p$ oraz $y = p$. Wtedy, po podstawieniu mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ((1-p)+p)^n = 1^n = 1, \text{ co należało dowieść.}$$

**Podpunkt (b):** skorzystajmy z własności $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Przekształćmy wzór:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{dla } k=0 \text{ jest to } 0} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \cdot ((1-p)+p)^n = 1^n = np \cdot 1^n = np
\end{aligned}$$

Dowiedliśmy więc, że $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

## Zadanie 2

Sprawdzić, że:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$

**Podpunkt (a):**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \\
&= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\left(\lambda^0 \cdot \frac{1}{0!} + \lambda^1 \cdot \frac{1}{1!} + \lambda^2 \cdot \frac{1}{2!} + \lambda^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots\right)}_{\text{szereg Maclaurina na } e^\lambda} = \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{\lambda-\lambda} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Szereg Maclaurina na $e^\lambda$ wynika z tego, że $e^\lambda = f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = \ldots = 1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots$, czyli powyższe przekształcenie jest dowodem wzoru.

**Podpunkt (b):**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} &= \\ = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} &= \\ = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda\end{aligned}$$

**Zadanie 3**
**Funkcją Γ-Eulera** nazywamy wartość całki:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \ p > 0$$

Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnimy to indukcyjnie po $n$:

1. Baza indukcyjna: $n = 1$, wtedy:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1 = 0!, \text{ czyli prawda } \checkmark$$

2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ jest $\Gamma(n) = (n-1)!$, musimy pokazać, że dla $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt &= \begin{vmatrix} u = t^n & du = nt^{n-1} \\ v = -e^{-t} & dv = e^{-t}dt \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{-\frac{t^n}{e^t}\Big|_0^\infty}_{0} + \underbrace{\int_0^\infty t^{n-1} n e^{-t} dt}_{n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt} = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!\end{aligned}$$

Udowodniliśmy więc, że dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $\Gamma(n) = (n-1)!$.

**Zadanie 4**
Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartość całek:

(a) $\int\limits_0^\infty f(x)dx$,

(b) $\int\limits_0^\infty xf(x)dx$.

**Podpunkt (a):**

$$\int\limits_0^\infty f(x)dx = \int\limits_0^\infty \lambda \exp(-\lambda x)dx = \lambda \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda x)dx = \lambda \cdot \left.\frac{-\exp(-\lambda x)}{\lambda}\right|_0^\infty =$$
$$= -\exp(-\lambda x)\Big|_0^\infty = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \exp(-\lambda b)}_{0} - \underbrace{(-\exp(0))}_{-1} = 0 - (-1) = 1$$

**Podpunkt (b):**

$$\int\limits_0^\infty xf(x)dx = \int\limits_0^\infty x\lambda \exp(-\lambda x)dx = \lambda \int\limits_0^\infty x \exp(-\lambda x)dx =$$
$$= \begin{vmatrix} u = x & du = 1 \\ v = -\frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda} & dv = \exp(-\lambda x) \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda \left( \left[ \frac{x\exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^\infty - \int\limits_0^\infty -\frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda} dx \right) =$$
$$= \lambda \left( \left[ -\frac{x\exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^\infty + \left[ \frac{\exp(-\lambda x)}{\lambda^2} \right]_0^\infty \right) =$$
$$= \left[ \frac{(\lambda x + 1)\exp(-\lambda x)}{\lambda} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

**Zadanie 5**
Wykazać, że $D_n = n$, gdzie

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Dodajmy do pierwszego wiersza wszystkie kolejne, a więc od drugiego do $n$-tego. Wtedy otrzymamy następującą macierz:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Otrzymana macierz jest macierzą dolnotrójkątną, a więc obliczenie wyznacznika tej macierzy sprowadza się do przemnożenia wszystkich wartości z przekątnej. Otrzymamy więc $\det(D_n) = n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = n$, co kończy dowód.

**Zadanie 7**

Symbol $\bar{s}$ oznacza średnią ciągu $s_1, \ldots, s_n$. Udowodnić, że:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}$.

**Podpunkt (a):**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_1\bar{x} - 2x_2\bar{x} - 2x_3\bar{x} - \ldots - 2x_n\bar{x} + n \cdot \bar{x}^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\bar{x}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \cdot n + n \cdot \bar{x}^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\bar{x}^2 \cdot n + n \cdot \bar{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2, \text{ c.n.d. } \checkmark
\end{aligned}$$

**Podpunkt (b):**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - \bar{x}y_k - \bar{y}x_k + \bar{x}\bar{y}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{x}y_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{y}x_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{x}\bar{y} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} y_k - \bar{y}\sum_{k=1}^{n} x_k + n\bar{x}\bar{y} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}n\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}, \text{ c.n.d. } \checkmark
\end{aligned}$$

**Zadanie 8**

Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Niech $S = (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu})$ oraz $Y = A \cdot X$, gdzie macierz $A$ jest odwracalna. Sprawdzić, że

$$S = (Y - A\vec{\mu})^T \left(A\Sigma A^T\right)^{-1} (Y - A\vec{\mu})$$

Przy rozwiązywaniu tego zadania skorzystajmy z dwóch ważnych własności macierzy transponowanych, jak i odwracalnych:

1. $(AB)^T = B^T A^T$, podobnie $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, podobnie $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$.

Działania rozpoczniemy od końca, a następnie przekształcając równanie dojdziemy do postaci wyjściowej. Rozpiszmy więc:

$$\begin{aligned}
S &= (Y - A\vec{\mu})^T \left(A\Sigma A^T\right)^{-1} (Y - A\vec{\mu}) = \\
&= (AX - A\vec{\mu})^T \left(A\Sigma A^T\right)^{-1} (AX - A\vec{\mu}) = \\
&= (A(X - \vec{\mu}))^T \left(A\Sigma A^T\right)^{-1} (A(X - \vec{\mu})) = \\
&= (X - \vec{\mu})^T \underbrace{\underbrace{A^T (A^T)^{-1}}_{I} \Sigma^{-1} \underbrace{A^{-1} A}_{I}}_{\Sigma^{-1}} (X - \vec{\mu}) = \\
&= (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu}), \text{ c.n.d. } \checkmark
\end{aligned}$$