RPiS, Lista 1 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1

Sprawdzić, że:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

Podpunkt (a): skorzystajmy z dwumianu Newtona, a więc ze wzoru

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

i weźmy $x = 1-p$ oraz $y = p$. Wtedy, po podstawieniu mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ((1-p)+p)^n = 1^n = 1, \text{ co należało dowieść.}$$

Podpunkt (b): skorzystajmy z własności $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Przekształćmy wzór:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{dla } k=0 \text{ jest to } 0} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \cdot ((1-p)+p)^n = 1^n = np \cdot 1^n = np
\end{aligned}$$

Dowiedliśmy więc, że $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

Zadanie 2

Sprawdzić, że:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$

Podpunkt (a):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \\
&= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\left(\lambda^0 \cdot \frac{1}{0!} + \lambda^1 \cdot \frac{1}{1!} + \lambda^2 \cdot \frac{1}{2!} + \lambda^3 \cdot \frac{1}{3!} + \ldots\right)}_{\text{szereg Maclaurina na } e^{\lambda}} = \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{\lambda-\lambda} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Szereg Maclaurina na e^λ wynika z tego, że $e^\lambda = f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = \ldots = 1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots$, czyli powyższe przekształcenie jest dowodem wzoru.

Podpunkt (b):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$