Matematyka dyskretna L, Lista 11 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 8

Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

Twierdzenie Diraca: jeśli graf jest prosty i $n \geqslant 3$ oraz jeśli dla każdego wierzchołka v zachodzi $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to jest on hamiltonowski (a więc zawiera cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz).

Korzystając z tego twierdzenia wiemy, że w tym grafie musi być cykl Hamiltona. W tym cyklu krawędzie oznaczają możliwe usadzenia przyjaciół w ławkach. Aby wybrać kto z kim siedzi, musimy wziąć co drugą krawędź (jako że jedna osoba nie może siedzieć w dwóch miejscach jednocześnie). Możliwości na wybranie co drugiej krawędzi mamy dwie, co kończy dowód.

Zadanie 10

Pokaż przykład grafu pokazujący, że założenie $\deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $\deg(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$.

Weźmy graf przedstawiony poniżej. Ma on 5 wierzchołków, czyli $n = 5$, a wartości stopni wszystkich wierzchołków są następujące: $\{2, 2, 2, 3, 3\}$. Oznacza to, że wszystkie wierzchołki spełniają słabszy warunek, a więc $\deg(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$. W naszym grafie jednak nie da się znaleźć cyklu Hamiltona, co możemy udowodnić usuwając wierzchołki $\{2, 3\}$ - graf zostanie podzielony na 3 spójne składowe, więc ścieżka Hamiltona nie może w nim istnieć.