Matematyka dyskretna L, Lista 9 - Tomasz Woszczyński

Zadanie 1

Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb (DFS). Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

Aby dowiedzieć się, czy graf jest dwudzielny, możemy wykorzystać kolorowanie wierzchołków. Jeżeli graf da się pokolorować na dwa kolory, to graf jest dwudzielny.

```
visited = [False, ..., False] # length n
color   = [False, ..., False] # length n; assume False is red
                              # and True is green

# execute DFS with colouring from any vertex v, but make sure
# that visited[v] is True and color[v] is False (red)
def is_bipartite(G, v, visited, color):
    for u in neighbours[v]:
        # if vertex u has not been visited, mark it as
        # visited, color it according to v's color, then
        # execute DFS from vertex u to go deeper and deeper
        # until we check all neighbours of u
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            color[u] = not color[v]

            # run DFS on currently visited vertex
            if not DFS(G, u, visited, color)
                return False

        # if vertex u has been visited and v's and its
        # colors are the same, then G is not bipartite
        elif color[v] == color[u]:
            return False

    return True
```

Jako że korzystamy z lekko zmodyfikowanego DFS i przechodzimy wszystkie wierzchołki i krawędzie, to złożoność tego algorytmu to $O(m+n)$, gdzie n to liczba wierzchołków, a m to liczba krawędzi. W zależności od gęstości krawędzi w grafie G, wartość $O(m)$ może być pomiędzy $O(1)$ i $O(n^2)$.

Zadanie 2

Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba niezależy od t_2?

Wiemy, że liczbę krawędzi dla n-wierzchołkowego drzewa można policzyć na kilka sposobów, nas szczególnie interesują dwa poniższe:

1. z lematu o uściskach dłoni:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot t_i) \Longrightarrow |E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i \cdot t_i)$$

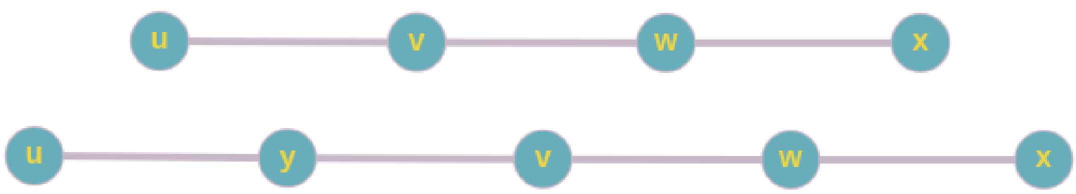
2. sumując stopnie wierzchołków i odejmując 1 (bo jest $n-1$ krawędzi):

$$n - 1 = |E| = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1$$

Przyrównajmy więc te wzory do siebie:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1 \\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i \cdot t_i) - \sum_{i=1}^{n} t_i + 1 = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}(i \cdot t_i) - \sum_{i=1}^{n} 2t_i + 2 = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}(i-2)t_i + 2 = 0 \\
-t_1 + 0 + \sum_{i=3}^{n}(i-2)t_i + 2 = 0 \\
t_1 = \sum_{i=3}^{n}(i-2)t_i + 2
\end{gathered}$$

Jak widać, liczba liści nie zależy od tego ile jest wierzchołków o stopniu 2 w drzewie. Spowodowane jest to tym, że dodanie takiego wierzchołka "przedłuży" tylko daną część drzewa, ale nie powstaną żadne nowe liście.



Na powyższym rysunku wierzchołki u, x mają stopień 1, a v, w są stopnia 2. Dodajemy nowy wierzchołek y taki, że z krawędzi $\{u, v\}$ powstają dwie nowe: $\{u, y\}$ oraz $\{y, w\}$. Jak widzimy, zmieniła się ilość krawędzi w grafach G_1 oraz G_2, jednak liczba liści t_1 pozostała taka, jak na samym początku.

Zadanie 3

Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

Mamy udowodnić poniższą tożsamość:

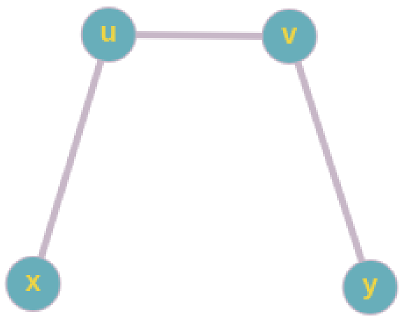
$$G \text{ jest drzewem} \iff \text{jest tylko jedna ścieżka pomiędzy } u, v \text{ w } G$$

Załóżmy, że G jest spójny, bo gdyby nie był, to G nie byłoby drzewem. Aby udowodnić twierdzenie z zadania. Przeprowadźmy więc dowód implikacji w obie strony:

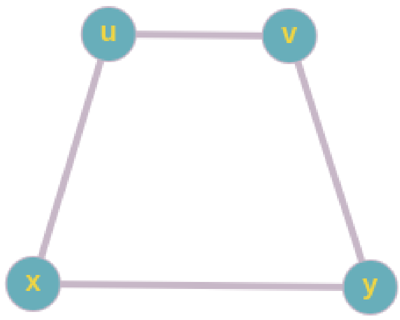
$\Longrightarrow$: Z definicji wiemy, że aby G było drzewem, to w grafie G nie może istnieć żaden cykl, a więc więcej niż jedna ścieżka pomiędzy wierzchołkami u, v. ✓

$\Longleftarrow$: Weźmy dowolny graf G, w którym jest tylko jedna ścieżka między wierzchołkami u, v. Dołożenie jakiejkolwiek krawędzi do tego grafu (bez dodawania nowych wierzchołków) sprawiłoby, że w grafie G powstałby jakiś cykl, co byłoby sprzeczne z definicją drzewa, która mówi o tym, że w drzewie dla n wierzchołków jest dokładnie $n - 1$ krawędzi, przez co G nie byłoby już drzewem.

Weźmy drzewo T o wierzchołkach u, v i dołóżmy do niego dwa kolejne wierzchołki x, y, a następnie utwórzmy krawędzie $\{u, x\}$ i $\{v, y\}$. Po takich operacjach drzewo T będzie wyglądać nastepująco:



Jak widzimy, dla n wierzchołków mamy $n - 1$ krawędzi. Dołóżmy teraz do drzewa T dowolną krawędź, może być to np. $\{x, y\}$ (lecz dla innych krawędzi utworzonych na tym drzewie też będzie to widoczne). Nowy graf wygląda tak:



Jak widać, dodana krawędź tworzy w drzewie cykl, a więc drzewo T przestaje być drzewem.

Udowodniliśmy więc, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy między dowolnymi wierzchołkami istnieje tylko jedna ścieżka.

Zadanie 5

Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, przeprowadzę dowód w dwie strony:

$\Longrightarrow$: Drzewo o n wierzchołkach ma $n-1$ krawędzi, a więc z lematu o uściskach dłoni mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\,|E| = 2(n-1)$$

$\Longleftarrow$: Załóżmy bez straty ogólności, że ciąg stopni jest posortowany malejąco, a więc $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, wtedy dwa ostatnie wyrazy będą stopnia 1, gdyż są liśćmi. Udowodnię indukcyjnie po n, że wzór z twierdzenia zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_+$:

1. Podstawa indukcji: $n = 2$, wtedy $d_1 + d_2 = 2$, a wiedząc, że wszystkie wyrazy ciągu d są dodatnie, mamy $d_1 = d_2 = 1$, czyli jest to krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami (liściami). ✓

2. Krok indukcyjny: załóżmy, że dla n zachodzi $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ i pokażmy, że dla $n+1$ prawdziwe jest $\sum\limits_{i=1}^{n+1} d_i = 2\left((n+1)-1\right) = 2n$. Dodajmy teraz nowy wierzchołek v_{n+1} o stopniu $d_{n+1} = 1$. Niech będzie on połączony z dowolnym wierzchołkiem v_j (o stopniu d_j). Otrzymamy wtedy następujący ciąg stopni wierzchołków:

$$d_1, d_2, d_3, \dots, d'_j, \dots, d_n, d_{n+1}$$

Skoro nowy wierzchołek jest połączony z v_j, to stopień wierzchołka v_j w nowym ciągu stopni to $d'_j = d_j + 1$. Zsumujmy więc wszystkie stopnie wierzchołków po dodaniu v_{n+1}:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} d_i + d'_j + d_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} d_i + 1 + d_{n+1} = 2(n-1) + 1 + 1 = 2n$$

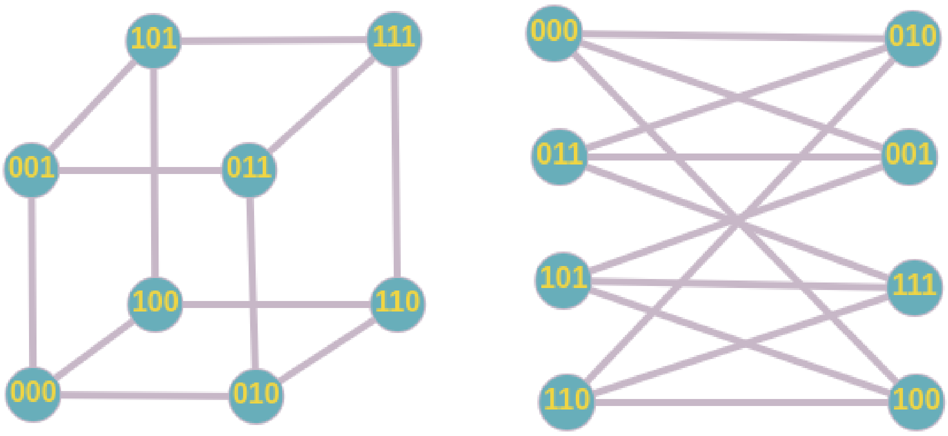
a to chcieliśmy pokazać. ✓

Udowodniliśmy implikacje w obie strony, a więc twierdzenie jest prawdziwe.

Zadanie 6

Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek, i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

Aby graf był dwudzielny, musi mieć dwie rozłączne części V_1, V_2 takie, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oraz $V_1 \cup V_2 = V(G)$. Zgodnie z definicją grafu Q_k mamy, że krawędzie incydentne są wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne różnią się tylko o jedną współrzędną. Podzielmy więc zbiór wszystkich wierzchołków na dwie części: V_1, czyli wierzchołki o parzystej liczbie 1 oraz V_2, czyli wierzchołki o nieparzystej liczbie 1. Wtedy niemożliwe jest, aby wierzchołki z V_1 były swoimi sąsiadami, podobnie w przypadku V_2 - gdyby były, to wtedy wierzchołki z każdej części różniłyby się o więcej niż jedną współrzędną, więc taki graf nie byłby grafem Q_k. Oznacza to więc, że graf Q_k jest dwudzielny, co kończy dowód.



Przykład: Po lewej stronie przedstawiony został graf Q_3 w łatwy sposób do narysowania, a po prawej ten sam graf podzielony na rozłączne części V_1 oraz V_2. Widać, że wierzchołki o takiej samej parzystości nie są ze sobą połączone.

Zadanie 9
Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i $\overline{G}$ ($\overline{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\overline{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E'$.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Graf G jest spójny, wtedy przynajmniej jeden z grafów G oraz $\overline{G}$ jest spójny, co kończy ten przypadek, gdyż spełnia założenie z zadania.

2. Graf G nie jest spójny, wtedy jego wierzchołki tworzą co najmniej dwie spójne składowe. Weźmy $u, v \in V$.

   Jeśli $u, v \in V$ leżą w dwóch różnych spójnych składowych grafu G, więc nie istnieje między nimi krawędź, czyli $\{u, v\} \notin E$, ale z definicji dopełnienia grafu dostajemy, że $\{u, v\} \in E'$.

   Niech $u, v \in V$ leżą teraz w jednej spójnej składowej V_1 grafu G, wtedy zgodnie z założeniem, że wierzchołki G tworzą co najmniej dwie spójne składowe wiemy, że istnieje inna (niepusta) spójna składowa V_2 taka, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Weźmy więc wierzchołek $w \in V_2$, wtedy w grafie G nie jest on sąsiadem ani wierzchołka u, ani v. Oznacza to, że nie istnieją krawędzie $\{u, w\}, \{v, w\}$ w grafie G, a więc muszą one istnieć w $\overline{G}$:

   $$\{u, w\}, \{v, w\} \notin E \Rightarrow \{u, w\}, \{v, w\} \in E'$$

   Skoro istnieją takie krawędzie w dopełnieniu, to istnieje ścieżka między wierzchołkami u i v w $\overline{G}$, która przebiega przez wierzchołek w (czyli $u \to w \to v$).

Udowodniliśmy, że przynajmniej jeden z grafów G i $\overline{G}$ jest spójny.