МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра методов оптимального управления

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ

Курсовая работа (проект)

Кулешов Владислав Вячеславович
студента 3 курса,
специальность «прикладная математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Магистерская диссертация, 20 с., XX рис., X табл., XX источников

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Цель работы и ее актуальность

Объектом исследования является

В процессе работы были получены следующие результаты

Новизна полученных результатов заключается в

Структура магистерской диссертации представлена тремя главами, где раскрываются

ВВЕДЕНИЕ

Объем введения для дипломных работ не менее 1 стр. Для магистерских диссертаций 2-3 стр.

Описать исследуемую в работе проблему, отметить актуальность и новизну задачи или подхода к ее решению.

Еще раз подчеркнуть цель работы (не повторять указанную в реферате).

Кратко изложить содержание работы, примерно в таком виде: В частности, в разд. 1 обосновано .... В разд. 2 исследуется ..... В разд. 3 продолжается исследование задач .... В разд. 4 эффективность предложенных методов иллюстрируется численными примерами... В заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и даются рекомендации о перспективах дальнейших исследований по исследуемой тематике.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Первая глава всегда посвящена обзору литературы. В начале каждой главы необходимо написать небольшую аннотацию о содержании главы (так называемая *врезка*). Например:

В настоящей глава формулируются основные понятия, используемые в диссертации. Приводится классификация (согласно работе [11]) принципов управления, используемых в современной теории управления. Объясняется принцип управления в режиме реального времени в применении к реализации оптимальных обратных связей в задачах оптимального управления с конечным горизонтом планирования [24] и в применении к задачам стабилизации нелинейных объектов согласно теории управления по прогнозирующей модели [51].

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

В западной литературе (см. [33, 44, 51]) управление в реальном времени представлено теорией управления по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (MPC). Основными приложениями теории являются задачи стабилизации динамических систем. Современная теория нелинейного MPC предлагает основанные на решении задач оптимального управления методы построения обратных связей для нелинейных объектов.

Главная идея MPC — использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Рассмотрим задачу стабилизации нелинейной системы

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t = 0, 1, \dots, \tag{1.1}$$

где
$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы в момент времени t;
$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ – значение управляющего воздействия в момент времени t;
$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ – заданная функция.

Пусть $f(0, 0) = 0$, следовательно точка равновесия системы находится в начале координат, и при тривиальном управлении $u \equiv 0$ система остаётся в состоянии покоя.

При заданном управлении $u(\cdot)$, траектория системы (1.1) обозначается как $x(t|0, z, u(\cdot))$, $t = 0, 1, \ldots$, где начальное состояние системы в момент времени $t = 0$ задаётся условием $x(0) = z$.

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать так, чтобы максимально приблизить траектории $x(t|0, x_0, u(\cdot))$, $t = 0, 1, \ldots, N$, к началу координат.

Определение 1 Стоимость этапа - функция $l(x(t), u(t))$ вдоль траектории $x(\cdot)$ и управления $u(\cdot)$, с помощью которой для всех моментов времени $t = 0, 1, \ldots$ оценивается качество выбранного урпавления $u(\cdot)$.

Чаще всего стоимость этапа l выбирается следующим образом:

1. Взвешенная сумма расстояний до начала координат:

$$l(x, u) = \| x \|^2 + \lambda \| u \|^2, \quad \lambda \geq 0 \text{ – параметр, } \| \cdot \| \text{ – евклидова норма.}$$

2. Квадратичные функции

$$l(x, u) = x' Q x + u' R u, \quad R, Q > 0 \text{ – положительно-определённые матрицы.}$$

Таким образом задача оптимального управления состоит в минимизации функционала, где минимум ищем вдоль траекторий $x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), t = 0, 1, \ldots, N-1$, системы (1.1) с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием объекта $x(0) = x^*(\tau)$ и при некоторых ограничениях:

$$J(x^*(\tau)) = min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), u(t)). \tag{1.2}$$

Ограничения (1.2) состояит из двух групп:

1. Физические ограничения системы (например, неотрицательность переменных, максимальное ограничение на управляющее воздействие и другие);

2. Ограничения накладываемые алгоритмом MPC (например, терминальное ограничение вида $x(N) = 0$ или принадлежность $x(N)$ множеству X_f).

Обозначим оптимальное программное решение задачи (1.2) через $u^0(\cdot|x^*(\tau))$ Для построения обратных связей будем считать, что на объект управления подано первое значение оптимальной программы

$$\mu(x^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau)).$$

Далее в момент времени $\tau+1$ процесс повторяется для состояния $x^*(\tau+1)$. Тогда в этот момент времени решается задача о минимизации следующего функционала:

$$J(x^*(\tau+1)) = min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau+1), u(\cdot)), u(t)).$$

При этом будет получено очередное значение обратной связи:

$$\mu(x^*(\tau+1)) = u^0(0|x^*(\tau+1)).$$

После процесс повторяется при $\tau+2, \tau+3$ и так далее. Таким образо, алгоритм управления по прогнозирующей модели, в каждый момент времени $\tau = 0, 1, \ldots$ состоит из следующих шагов:

1. Измеряется в текущее состояние $x^*(\tau)$
2. Находится оптимальное программное решение $u^0 * t|x^*(\tau)$ задачи (1.2).
3. Подаётся на объект системы управляющее воздействие

$$\mu^*(\tau) \equiv \mu(x^*(\tau)) = \mu^0(0|x^*(\tau))$$

1.2 Задачи оптимального управления

1.2.1 Классификация задач оптимального управления

По времени

- непрерывным $t \in R$
- дискретным $k \in Z_+$

По промежутку управления

- конечный $t \in [t_0, t_f]$, $t_0 < t_f$
- бесконченый $t \in [0, +\infty]$

По времени окончания процесса

- фиксированный t_f задан

- не фиксированный t_f не задан

По управлению

- кусочно-непрерывная функция
- измеримые функции
- дискретные функции
- релейное
- инерционное

1.2.2 Критерий качества

Критерий 1 (Терминальный критерий качества типа Майера)

$$J(u) = \varphi(x(t_f))$$

$$\varphi : R^n \to R.$$

Критерий 2 (Интегральный критерий типа Лагранжа)

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$f_0 \ : \ R^n * R^r * R \to R$$

Критерий 3 (Критерий качества типа Бальса)

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int\limits_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t)\, dt$$

Критерий 4 (Критерий быстрдействия)

$$J(u) = t_f - t_0 \to min$$

1.2.3 Принцип максимума Потрягина

Принцип максимума - классическое необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления. Оно является самым сильным из известных необходимых условий оптимальности первого порядка.

1.3 Представление входных и выходных сигналов дискретных стационарных линейных систем на основе матрицы Ганкеля

1.3.1 Построение матрицы Ганкеля

Рассмотрим систему с $u(k) \in \mathbb{R}^l, y(k) \in \mathbb{R}^m, x(k) \in \mathbb{R}^n$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ke(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k)$$

где $B \in \mathbb{R}^{n \times l}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, D \in \mathbb{R}^{m \times l}$ – матрицы системы. Траектория сигналов $z_d = z(1), \ldots, z(k), \ldots, z(T)) \in (\mathbb{R}^z)^T$ линейной многомерной системы P. Система P удовлетворяет $P \subset (\mathbb{R}^z)^T$ с сегментом ввода-вывода $z = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \in P$, где $u \in (\mathbb{R}^m)^N$ – ввод, $y \in (\mathbb{R}^l)^N$ – вывод.

Матрица Ганкеля $H(z_d)$ с N строками и $T - N$ столбцами составленная из ограниченного сигнала $z_d \in (R^z)^T$ обозначается как:

$$H(z_d) = \begin{pmatrix} z(1) & z(2) & \cdots & z(T-N+1) \\ z(2) & z(3) & \cdots & z(T-N+2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z(N) & z(N+1) & \cdots & z(T) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Построенная матрица будет использоваться в MPC вместо модели без каких-либо промежуточных шагов.

ГЛАВА 2

УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ

(Врезка) ...

2.1 Основные предположения

Пусть $A_{[a,b]}$ -множество целых чисел на отрезке $[a, b]$. Для вектора x и положительно определённой матрицы $P = P^T > 0$ запишем $\|x\|_p = \sqrt{x^T P x}$. Далее определим максимальное и минимальное собственные значения матрицы P $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$.
Для матриц $P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T$ запишем,

$$\lambda_{\min}(P1, P2) = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\},$$

$$\lambda_{\max}(P1, P2) = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\}$$

. Также $\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots, \|x\|_\infty$ - Евклидовы $\ell_1, \ldots, \ell_\infty$ нормы x соответсвенно.
Для $\delta > 0$, мы определим $\mathbb{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq \delta\}$.
Последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ инициирует матрицу Ганкеля

$$H_L(x) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-L} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-L+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_L - 1 & x_L & \ldots & x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad x_{[a,b]} = \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

x - сама последовательность или наборный вектор $x_{[0,N-1]}$, содержащий все компоненты.

Определение 2 Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ с $x_l \in \mathbb{R}^n$ - постоянно возбуждающий порядка L, если $\operatorname{rank}(H_L(x)) = nL$.

Наша цель - управление неизвестной линейной стационарной системой G с порядком n, с m вводами и p выводами.

Определение 3 Последовательность $\{u_k, y_k\}_{k=0}^{N-1}$ - траектория линейной стационарной системой G, если $\exists$ исходное состояние $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, а также состояние последовательности такое, что $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ такое, что

$$x_{k+1} = Ax_{k+1} + Bu_k;\ x_0 = \overline{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k,\ k = 0, \dots, N-1,$$

(A, B, C, D) – минимальные реализация G.

Теорема 2.1 Предположим, что $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ – траектория линейной стационарной системы G, где u – постоянно возбуждающий порядка $L+n$. Тогда $\{\overline{u}_k, \overline{y}_k\}_{k=0}^{L-1}$ – траектория G, тогда и только тогда, когда $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{N-L+1}$ такое, что

$$\begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Определение 4 Пара $(u^s) \in \mathbb{R}^{m+p}$ – равновесие линейной стационарной системой G, если последовательность $\{\overline{u}_k, \overline{y}_k\}_{k=0}^{n-1}$ с $(\overline{u}_k), \overline{y}_k) = (u^s, y^s)\ \forall k \in A_{[0,n-1]}$ – траектория G.

Для равновесия (u^s, y^s) мы определим u_n^s, y_n^s как столбец векторов содержащий n раз u^s и y^s, соответственно. Предположим, что система подчиняется точечному вводу и вывоводу ограничений, т.е. $u_t \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, y_t \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^p\ \forall t \geq 0$, и предположим, что $(u^s, y^s) \in int(\mathbb{U} \times \mathbb{Y})$.
$\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ – априори измеряемые траектории длинной N, использующиеся в (2.1). Прогнозируемые входные и выходные траектории в момент времени t в течение некоторого горизонта прогнозирования L записываются как $\{\overline{u}_k(t), \overline{y}_k(t)\}_{k=-n}^{L-1}$.
Обратим внимание, что индексы времени начинаются с $k = -n$, так как последние n входов и выходов будут использоваться для вызова уникального начального состояния в момент времени t. Кроме того, входс обратной связью, состояние в некоторой минимальной реализации и выход в момент времени t обозначаются как u_t, x_t, y_t, соответственно.

2.2 Простейшая прогнозирующая задача на основе данных

Теорема 2.1 обеспечивает привлекательную альтернативу модели, так как (2.1) достаточно, чтобы охватить все траектории системы. Таким образом, для реализации схемы MPC, основанной на данных, можно просто заменить ограничение динамики системы ограничением, которому удовлетворяют прогнозируемые траектории ввода-вывода (1). Чтобы быть более точным, предложенная управляемая данными схема MPC минимизирует, в момент времени t, учитывая последние n входных и выходных пар, следующую стоимость без обратной связи

$$J_L(u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}, \alpha(t)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}_k(t), \overline{y}_k(t)), \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{(}u)_{[-n,-L-1]}(t) \\ \overline{(}y)_{[-n,-L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \overline{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Ограничение (2.3) заменяет динамику системы по сравнению с классическими схемами MPC на основе моделей. Кроме того, (2.4) гарантирует, что внутреннее состояние истинной траектории совпадает с внутренним состоянием прогнозируемой траектории в момент времени t. Начальные траектории указываются до временного шага $t-1$, поскольку входной сигнал в момент времени t может уже влиять на выходной сигнал в момент времени t в случае проходного элемента установки. Стоимость без обратной связи зависит только от решающей переменной $\alpha(t)$, поскольку $\overline{u}(t)$ и $\overline{y}(t)$ неявно фиксируются через динамическое ограничение (2b).

2.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами

В этом пункте рассмотрим простое терминальное ограничение, которое может быть включено непосредственно в структуру управления данными MPC.

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}) = \min_{\substack{\alpha(t) \\ \overline{u}(t), \overline{y}(t)}} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}_k(t), \overline{y}_k(t)) \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{(}u)_{[-n,-L-1]}(t) \\ \overline{(}y)_{[-n,-L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \overline{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \overline{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\overline{u}_k(t) \in \mathbb{U}, \overline{y}_k(t) \in \mathbb{Y}, k \in A_{[0,L-1]} \tag{2.9}$$

Ограничение терминального равенства (2.8) подразумевает, что $\overline{x}_L(t)$, который является внутренним состоянием, предсказанным на L шагов вперед, соответствующей предсказанной траекторией ввода-вывода, выравнивается с постоянным состоянием x^s, соответствующим (u^s, y^s), то есть $\overline{x}_L(t) = x^s$ в любой минимальной реализации. В то время как задача требует, чтобы (u^s, y^s) было равновесием неизвестной системы в смысле определения (4), это требование может быть отброшено, когда u^s, y^s заменено искусственным равновесием, которое также оптимизируется онлайн. Расширение представленной схемы MPC до такой настройки является предметом будущей работы. Как и в стандартном MPC, задача решена в виде отступающего горизонта, который обобщен в алгоритме (1).

Алгоритм 1 (Схема управления данными MPC)

1. В момент времени t взять прошлые n вычеслений $u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}$ и решить задачу.

2. Взять за ввод $u_t = \overline{u}_0^*(t)$

3. Установить $t = t + 1$ и вернуться к пункту 1).

2.4 Асимптотическая устойчивость замкнутого контура

Без ограничения общности мы предполагаем для анализа, что $u^s = 0, y^s = 0$ и, следовательно, $x^s = 0$. Далее определим множество начальных состояний, для которых выполнимо (2.5 – 2.8), с помощью $x_L = \{x \in \mathbb{R}^n | J_L^*(x) < \infty\}$. Для доказательства экспоненциальной устойчивости предложенной схемы предположим, что функция оптимальных значения (2.5 – 2.8) квадратично ограничена сверху.

Предположение 1 Функция оптимальных значения $J*_L(x)$ - квадратично ограничена сверху на $\mathbb{X}_\mathbb{L}$, т.е. $\exists\, c_u > 0$ такое, что $J_L^*(x) \leq c_u \|x\|_2^2 \forall x \in \mathbb{X}_L$

Теорема 2.2 Пусть предположение (1) верно, $L \geq, \{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ – траектория линейной стационарной системы G, где u^d – постоянно возбуждающий порядка $L+2n$. Если задача MPC (2.5 – 2.8) возможно в начальный момент времени $t=0$:

1. это возможно $\forall\, t$,
2. замкнутый цикл удовлетворяет ограничениям $u_t \in \mathbb{U}, y_t \in \mathbb{Y} \forall t \in \mathbb{N}$,
3. равновесие $x^s = 0$ экспоненциально устойчиво для полученного замкнутого цикла.

Доказательство (Экспоненциальная устойчивость)
Цена в момент времени t+1

$$J_L(x_{t+1}, \alpha'(t+1)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}'_k(t+1), \overline{y}'_k(t+1)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}^*_k(t), \overline{y}^*_k(t)) = J^*_L(x_t) - \ell(\overline{u}^*_0(t), \overline{y}^*_0(t)).$$

Откуда следует, что

$$J^*_L(x_{t+1}) \leq J^*_L(x_t) - \ell(\overline{u}^*_0(t), \overline{y}^*_0(t)) \tag{2.10}$$

Поскольку – состояние наблюдаемой (и, следовательно, обнаруживаемой) минимальной реализации, существует матрица $P \succ 0$ такая, что $W(x) = \|x\|_P^2$ – функция стабильности Ляпунова и удовлетворяет

$$W(Ax+Bu) - W(x) \geq -\frac{1}{2}\|x\|_2^2 + c_1\|u\|_2^2 + c_2\|y\|_2^2, c_1, c_2 > 0. \tag{2.11}$$

где $\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y = Cx + Du,$. Определим функцию Ляпунова $V(x) = \gamma W(x) + J^*_L(x)$ при некоторой $\gamma > 0$. Т.к. V квадратично ограничена снизу, $V(x) \geq \gamma W(x) \geq \gamma \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L$. По предположению (1) J^*_L квадратично ограничена сверху, т.е. $J^*_L(x) \leq c_u\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L$.

$$V(x) = J*_L(x) + \gamma W(x) \leq (c_u + \gamma\lambda_{\max}(P))\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L,$$

т.е. V - квадратично ограничена сверху.
Вдоль траекторий с замкнутым контуром, используя (2.10) и (2.11), получим

$$V(x_{t+1}) - V(x_t) \leq \gamma(-frac12\|x_t\|_2^2 + c_1\|u_t\|_2^2 + c_2\|y_t\|_2^2) - \|u_t\|_R^2 - \|y_t\|_Q^2 \leq -\tfrac{\gamma}{2}\|x_t\|_2^2$$

Таким образом, V затухает экспоненциально вдоль траекторий замкнутого контура, он квадратично ограничен сверху и снизу и удовлетворяет условию $V(0) = 0$. Следовательно, из стандартных аргументов Ляпунова следует, что равновесие $x^s = 0$ экспоненциально устойчиво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе/ магистерской диссертации рассмотрена задача... . Для исследуемой задачи сформулировны/доказаны/предложены... Проведен анализ... Результаты проиллюстрированы численными экспериментами для ...

Привести краткие выводы и рекомендации по дальнейшему развитию или использованию результатов.

Объем примерно 0,7-1 стр.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Агаев, Р.П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев // УБС. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 470–505.

2 Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.

3 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.

4 Балашевич, Н.В. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838-859.

5 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Инностранная литература, 1960. – 400 с.

6 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

7 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах опти-мального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.

8 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.

9 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.

10 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

11 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

12 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.

13 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.

14 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.

15 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.

16 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии

17 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени //Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.

18 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996

19 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.

20 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления //Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.

21 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.

22 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института матема-тики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

23 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы

коллективного управления в группах роботов //М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

24 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

25 Кряжимский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжимский, Н.В. Стрелковский// Труды Институт математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

26 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

27 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

28 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

29 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе //Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

30 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

31 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

32 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

33 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

34 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

35 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

36 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.

37 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.

38 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.

39 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.

40 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.

41 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.

42 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.

43 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.

44 Keerthi, S.S. Optimal, ininite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.

45 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.

46 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009

47 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.

48 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

49 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.

50 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.

51 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

52 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.

53 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.

54 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.

55 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479–487.

56 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.