

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ
МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ**

Курсовая работа

Кулешов Владислав Вячеславович
студента 3 курса,
специальность «прикладная
математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ	3
ВВЕДЕНИЕ.	4
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	5
1.1 Теория управления по прогнозирующей модели.	5
1.2 Задачи оптимального управления	7
1.3 Представление входных и выходных сигналов дискретных стационарных линейных систем на основе матрицы Ганкеля	9
ГЛАВА 2 Управление по прогнозирующей модели на основе данных.	12
2.1 Основные предположения	12
2.2 Простейшая прогнозирующая задача на основе данных	14
2.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами	15
2.4 Асимптотическая устойчивость замкнутого контура	16
ГЛАВА 3 Результаты численных экспериментов	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	21
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	22

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Курсовая работа, 22 с., 2 рис., 5 источников

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ, МРС

Объектом исследования курсовой работы является управление по прогнозирующей модели.

Цель работы - анализ схемы управления по прогнозирующей модели.

Работа состоит из трёх глав. В первой главе определяются основные понятия в области управления с прогнозирующей моделью. Во второй главе рассматриваются способы решения прогнозирующих задач. В третьей главе показываются результаты численных экспериментов и проводится их анализ.

ВВЕДЕНИЕ

В западной литературе управление в реальном времени представлено теорией управления по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (МРС). Основными приложениями теории являются задачи стабилизации динамических систем. Современная теория нелинейного МРС предлагает основанные на решении задач оптимального управления методы построения обратных связей для нелинейных объектов.

В главе 1 происходит ознакомление с управлением по прогнозирующей модели, представление модели через матрицу Ганкеля, а также рассматриваются задачи оптимального управления и их классификация. В главе 2 исследуются методы решения простейшей прогнозирующей задачи на основе данных и задачи с терминальными ограничениями-равенствами. В главе 3 показаны результаты численных экспериментов, и проводится их анализ.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей главе описываются основные понятия МРС. Приводится классификация принципов управления, используемых в современной теории управления. А также рассматривается возможность представления входных и выходных сигналов дискретных стационарных линейных систем на основе матрицы Ганкеля для МРС.

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Главная идея МРС — использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Рассмотрим задачу стабилизации нелинейной системы

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t ;

$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управляющего воздействия в момент времени t ;

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданная функция.

Пусть $f(0, 0) = 0$, следовательно точка равновесия системы находится в начале координат, и при тривиальном управлении $u \equiv 0$ система остаётся в состоянии покоя.

При заданном управлении $u(\cdot)$, траектория системы (1.1) обозначается как $x(t|0, z, u(\cdot))$, $t = 0, 1, \dots$, где начальное состояние системы в момент времени $t = 0$ задаётся условием $x(0) = z$.

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать так, чтобы максимально приблизить траектории $x(t|0, x_0, u(\cdot))$, $t = 0, 1, \dots, N$, к началу координат.

Определение 1 Стоимость этапа - функция $l(x(t), u(t))$ вдоль траектории $x(\cdot)$ и управления $u(\cdot)$, с помощью которой для всех моментов времени $t = 0, 1, \dots$ оценивается качество выбранного управления $u(\cdot)$.

Чаще всего стоимость этапа l выбирается следующим образом:

1. Взвешенная сумма расстояний до начала координат:

$l(x, u) = \|x\|^2 + \lambda \|u\|^2$, $\lambda \geq 0$ – параметр, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

2. Квадратичные функции

$l(x, u) = x'Qx + u'Ru$, $R, Q > 0$ – положительно-определённые матрицы.

Таким образом задача оптимального управления состоит в минимизации функционала, где минимум ищем вдоль траекторий $x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot))$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, системы (1.1) с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием объекта $x(0) = x^*(\tau)$ и при некоторых ограничениях:

$$J(x^*(\tau)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), u(t)). \quad (1.2)$$

Ограничения (1.2) состоят из двух групп:

1. Физические ограничения системы (например, неотрицательность переменных, максимальное ограничение на управляющее воздействие и другие);
2. Ограничения накладываемые алгоритмом МРС (например, терминальное ограничение вида $x(N) = 0$ или принадлежность $x(N)$ множеству X_f).

Обозначим оптимальное программное решение задачи (1.2) через $u^0(\cdot|x^*(\tau))$. Для построения обратных связей будем считать, что на объект управления подано первое значение оптимальной программы

$$\mu(x^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau)).$$

Далее в момент времени $\tau + 1$ процесс повторяется для состояния $x^*(\tau + 1)$. Тогда в этот момент времени решается задача о минимизации следующего функционала:

$$J(x^*(\tau + 1)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau + 1), u(\cdot)), u(t)).$$

При этом будет получено очередное значение обратной связи:

$$\mu(x^*(\tau + 1)) = u^0(0|x^*(\tau + 1)).$$

После процесс повторяется при $\tau + 2, \tau + 3$ и так далее. Таким образом, алгоритм управления по прогнозирующей модели, в каждый момент времени $\tau = 0, 1, \dots$ состоит из следующих шагов:

1. Измеряется в текущее состояние $x^*(\tau)$
2. Находится оптимальное программное решение $u^0 * t | x^*(\tau)$ задачи (1.2).
3. Подаётся на объект системы управляющее воздействие

$$\mu^*(\tau) \equiv \mu(x^*(\tau)) = \mu^0(0 | x^*(\tau))$$

1.2 Задачи оптимального управления

1.2.1 Классификация задач оптимального управления

Задачи оптимального управления классифицируются:

- По промежутку времени, который может быть непрерывным $t \in R$ или дискретным $k \in Z_+$.
- По промежутку управления, он может быть конечным $t \in [t_0, t_f]$, $t_0 < t_f$ или бесконечным $t \in [0, +\infty]$.
- По классу управления (кусочно-непрерывная функция, измеримые функции, дискретные функции, релейное, инерционное).
- По времени окончания процесса, которое может фиксированным, т.е. t_f задан, или не фиксированным – t_f не задан.
- По ограничениям на траекторию, которые в общем виде имеют следующий вид:

$$x \in \mathbb{X}(t), t \in [t_0, t_f].$$

Ограничения на траекторию могут накладываться:

- на правом конце траектории (терминальные ограничения), т.е. $x(t_f) \in \mathbb{X}_f$;
- на левом конце, т.е. $x(t_0) \in \mathbb{X}_\nu$;
- в промежуточные моменты времени, т.е. $x(t_i) \in \mathbb{X}_i, t_i \in [t_0, t_f], i = 1, \dots, l$, при этом $t_0 < t_1 < \dots < t_l < t_f$

Также существуют смешанные ограничения на траекторию.

1.2.2 Критерий качества

Критерий 1 (Терминальный критерий качества типа Майера)

$$J(u) = \varphi(x(t_f))$$

$$\varphi : R^n \rightarrow R.$$

Критерий 2 (Интегральный критерий типа Лагранжа)

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

$$f_0 : R^n * R^r * R \rightarrow R$$

Критерий 3 (Критерий качества типа Бальса)

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

Критерий 4 (Критерий быстрдействия)

$$J(u) = t_f - t_0 \rightarrow \min$$

1.2.3 Принцип максимума

Принцип максимума - классическое необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления. Оно является самым сильным из известных необходимых условий оптимальности первого порядка.

Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления на промежутке времени $[t_0, t_f]$ в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$J(u) = \phi(x(t_f)) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in \mathbb{U}, t \in [t_0, t_f]$$

Пусть $u^0(t), t \in [t_0, t_f]$ – оптимальное управление, $x^0(t), t \in [t_0, t_f]$ – оптимальная траектория, $\psi^0(t), t \in [t_0, t_f]$ – сопряжённая траектория – решение сопряженного уравнения

$$\psi' = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi, u^0(t), t)}{\partial x},$$

$$\psi = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_f))}{\partial x}$$

. Тогда выполняется условие максимума гамильтониана:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in \mathbb{U}} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), t \in [t_0, t_f].$$

1.3 Представление входных и выходных сигналов дискретных стационарных линейных систем на основе матрицы Ганкеля

1.3.1 Построение матрицы Ганкеля

Рассмотрим систему с $u(k) \in \mathbb{R}^l, y(k) \in \mathbb{R}^m, x(k) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + e(k) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $B \in \mathbb{R}^{n \times l}, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, D \in \mathbb{R}^{m \times l}$ – матрицы системы. Траектория сигналов $z_d = z(1), \dots, z(k), \dots, z(T) \in (\mathbb{R}^z)^T$ линейной многомерной системы P . Система P удовлетворяет $P \subset (\mathbb{R}^z)^T$ с сегментом ввода-вывода $z = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \in P$, где $u \in (\mathbb{R}^m)^N$ – ввод, $y \in (\mathbb{R}^l)^N$ – вывод.

Матрица Ганкеля $H(z_d)$ с N строками и $T - N$ столбцами составленная из ограниченного сигнала $z_d \in (\mathbb{R}^z)^T$ обозначается как:

$$H(z_d) = \begin{pmatrix} z(1) & z(2) & \dots & z(T - N + 1) \\ z(2) & z(3) & \dots & z(T - N + 2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z(N) & z(N + 1) & \dots & z(T) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Построенная матрица будет использоваться в МРС вместо модели без каких-либо промежуточных шагов.

1.3.2 Прогнозирование на основе матрицы Ганкеля

Для произвольного момента времени k , принятого за текущее время, ограничение $P|_T$ поведения P для интервала $[1, T]$ определяется с использованием траектории сигнала как $z_d = (z(1), \dots, z(t), \dots, z(T)), z(t) \in \mathbb{R}^z$.

В идее подпространства идентификации обозначений вектор столбца данных над горизонтом для выхода и ввода z , аналогично определяется как:

$$z_p = z_{k-N|k} = \begin{bmatrix} y(k-N) \\ \vdots \\ y(k) \\ u(k-N) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+m)N} \quad (1.5)$$

$$z_f = z_{k|k+N-1} = \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k+1) \\ \vdots \\ z(k+N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+m)N_1} \quad (1.6)$$

Индекс p обозначает относительное «прошлое», а f - «будущее» соответственно. Чтобы избежать промежуточного шага для идентификации представления системы, прогнозирование траектории выполняется с помощью матрицы Ганкеля данных $H(z_d)$. При построении ганкелевой матрицы $H(z_d)$ все данные можно разделить на две части. Прошлый и будущий входной блок ганкелевых матриц определяется следующим образом.

$$U_p = \begin{vmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(j) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-1) & u(N) & \dots & u(N+j-1) \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

$$U_f = \begin{vmatrix} u(N) & u(N+1) & \dots & u(N+j-1) \\ u(N+1) & u(N+2) & \dots & u(N+j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2N-1) & u(2N) & \dots & u(2N+j-2) \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Обозначения «прошлого» и «будущего» можно понять в первом столбце. Матрица Ганкеля «будущего» блока следует за данными матрицы Ганкеля «прошлого» блока во временной последовательности. Число N - это размерность строки блоков векторов данных, а j - номер строки матрицы Ханкеля, которая должна быть достаточно большой. Это соотношение справедливо для всех столбцов. Размерность строки U_f может отличаться от размерности U_p , что обеспечит дополнительную степень свободы для настройки предложенного алгоритма прогнозного управления. Прошлый и будущий выходной

блок-ганкелевых матриц Y_p и Y_f определяются аналогично. В данной работе используются следующие сокращенные обозначения:

$$H_p = \begin{bmatrix} Y_p \\ U_p \end{bmatrix}, H_f = \begin{bmatrix} Y_f \\ U_f \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Наблюдения z также можно разделить на две части:

$$z^T = \begin{bmatrix} Z_p^T & z_f^T \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Где z_p – известные данные, а z_f – вектор будущих данных. Матрица проекции также может быть разделена на две части таким же образом:

$$Z = \begin{bmatrix} z_p \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p & H_f \end{bmatrix} g \quad (1.11)$$

Если известная часть данных z_p используется для параметра g оценки \hat{g} , получается следующее соотношение.

$$\hat{g} = (H_p^T H_p)^{-1} H_p^T z_p \quad (1.12)$$

Где $\hat{g} = [g - 0, g_1, \dots, g_r]$ – вектор оцененного вектора изображения. Тогда оценки траекторий всех переменных для предсказания z_f :

$$\hat{z}_f = H_f \hat{g} = H_f (H_p^T H_p)^{-1} H_p^T z_p \quad (1.13)$$

Оценка $\hat{z}_f = [y_f^T u_f^T]^T$ с использованием матриц данных H_f , H_p и z_p эффективна для будущих траекторий. Он выполняет ту же роль, что и оценки состояния (Фильтры Калмана и т. Д.) для прогнозирования будущих траекторий в традиционных подходах МРС. Эти методы используют прошлые данные до текущего момента времени для оценки будущих данных. Для управляемых систем можно рассчитать значения будущих траекторий над горизонтом управления.

Идея управления по прогнозирующей модели заключается в оптимизации будущего поведения системы в каждый момент времени, нахождение оптимального управления и его использования в качестве значений обратной связи для следующего момента времени.

ГЛАВА 2

УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ

В данной главе будут рассматриваться способы решения простейшей прогнозирующей задачи на основе данных, а также задачи с терминальными ограничениями-равенствами.

2.1 Основные предположения

Пусть $A_{[a,b]}$ -множество целых чисел на отрезке $[a, b]$. Для вектора x и положительно определённой матрицы $P = P^T > 0$ запишем $\|x\|_p = \sqrt{x^T P x}$. Далее определим максимальное и минимальное собственные значения матрицы P $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$.

Для матриц $P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T$ запишем,

$$\lambda_{\min}(P_1, P_2) = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\},$$

$$\lambda_{\max}(P_1, P_2) = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\}$$

. Также $\|x\|_1, \|x\|_2, \dots, \|x\|_\infty$ - Евклидовы $\ell_1, \dots, \ell_\infty$ нормы x соответственно. Для $\delta > 0$, мы определим $\mathbb{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq \delta\}$.

Последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ иницирует матрицу Ганкеля

$$H_L(x) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-L} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-L+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_L & \dots & x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad x_{[a,b]} = \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

x - сама последовательность или наборный вектор $x_{[0,N-1]}$, содержащий все компоненты.

Определение 2 Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ с $x_l \in \mathbb{R}^n$ - постоянно возбуждающий порядка L , если $\text{rank}(H_L(x)) = nL$.

Наша цель - управление неизвестной линейной стационарной системой G с порядком n , с m входами и p выводами.

Определение 3 Последовательность $\{u_k, y_k\}_{k=0}^{N-1}$ - траектория линейной стационарной системой G , если \exists исходное состояние $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, а также состояние последовательности такое, что $\{x_k\}_{k=0}^N$ такое, что

$$x_{k+1} = Ax_{k+1} + Bu_k; \quad x_0 = \bar{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

(A, B, C, D) - минимальные реализация G .

Теорема 2.1 Предположим, что $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ - траектория линейной стационарной системы G , где u - постоянно возбуждающий порядка $L + n$. Тогда $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{L-1}$ - траектория G , тогда и только тогда, когда $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{N-L+1}$ такое, что

$$\begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Определение 4 Пара $(u^s) \in \mathbb{R}^{m+p}$ - равновесие линейной стационарной системой G , если последовательность $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{n-1}$ с $(\bar{u}_k, \bar{y}_k) = (u^s, y^s) \forall k \in A_{[0,n-1]}$ - траектория G .

Для равновесия (u^s, y^s) мы определим u_n^s, y_n^s как столбец векторов содержащий n раз u^s и y^s , соответственно. Предположим, что система подчиняется

точечному вводу и выводу ограничений, т.е. $u_t \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, y_t \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \forall t \geq 0$, и предположим, что $(u^s, y^s) \in \text{int}(\mathbb{U} \times \mathbb{Y})$.

$\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ – априори измеряемые траектории длиной N , использующиеся в (2.1). Прогнозируемые входные и выходные траектории в момент времени t в течение некоторого горизонта прогнозирования L записываются как $\{\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)\}_{k=-n}^{L-1}$.

Обратим внимание, что индексы времени начинаются с $k = -n$, так как последние n входов и выходов будут использоваться для вызова уникального начального состояния в момент времени t . Кроме того, входс обратной связью, состояние в некоторой минимальной реализации и выход в момент времени t обозначаются как u_t, x_t, y_t , соответственно.

2.2 Простейшая прогнозирующая задача на основе данных

Теорема 2.1 обеспечивает привлекательную альтернативу модели, так как (2.1) достаточно, чтобы охватить все траектории системы. Таким образом, для реализации схемы МРС, основанной на данных, можно просто заменить ограничение динамики системы ограничением, которому удовлетворяют прогнозируемые траектории ввода-вывода (1). Чтобы быть более точным, предложенная управляемая данными схема МРС минимизирует, в момент времени t , учитывая последние n входных и выходных пар, следующую стоимость без обратной связи

$$J_L(u_{[t-n, t-1]}, y_{[t-n, t-1]}, \alpha(t)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)), \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n, t-1]} \\ y_{[t-n, t-1]} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ограничение (2.3) заменяет динамику системы по сравнению с классическими схемами МРС на основе моделей. Кроме того, (2.4) гарантирует, что внут-

ренное состояние истинной траектории совпадает с внутренним состоянием прогнозируемой траектории в момент времени t . Начальные траектории указываются до временного шага $t - 1$, поскольку входной сигнал в момент времени t может уже влиять на выходной сигнал в момент времени t в случае проходного элемента установки. Стоимость без обратной связи зависит только от решающей переменной $\alpha(t)$, поскольку $\bar{u}(t)$ и $\bar{y}(t)$ неявно фиксируются через динамическое ограничение (2b).

2.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами

В этом пункте рассмотрим простое терминальное ограничение, которое может быть включено непосредственно в структуру управления данными МРС.

$$J_L^*(u_{[t-n, t-1]}, y_{[t-n, t-1]}) = \min_{\alpha(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)) \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n, t-1]} \\ y_{[t-n, t-1]} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[L-n, L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[L-n, L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\bar{u}_k(t) \in \mathbb{U}, \bar{y}_k(t) \in \mathbb{Y}, k \in A_{[0, L-1]} \quad (2.9)$$

Ограничение терминального равенства (2.8) подразумевает, что $\bar{x}_L(t)$, который является внутренним состоянием, предсказанным на L шагов вперед, соответствующей предсказанной траекторией ввода-вывода, выравнивается с постоянным состоянием x^s , соответствующим (u^s, y^s) , то есть $\bar{x}_L(t) = x^s$ в любой минимальной реализации. В то время как задача требует, чтобы (u^s, y^s) было равновесием неизвестной системы в смысле определения (4), это требование может быть отброшено, когда u^s, y^s заменено искусственным

равновесием, которое также оптимизируется онлайн. Расширение представленной схемы МРС до такой настройки является предметом будущей работы. Как и в стандартном МРС, задача решена в виде отступающего горизонта, который обобщен в алгоритме (1).

Алгоритм 1 (Схема управления данными МРС)

1. В момент времени t взять прошлые n вычислений $u_{[t-n, t-1]}, y_{[t-n, t-1]}$ и решить задачу.
2. Взять за ввод $u_t = \bar{u}_0^*(t)$
3. Установить $t = t + 1$ и вернуться к пункту 1).

2.4 Асимптотическая устойчивость замкнутого контура

Без ограничения общности мы предполагаем для анализа, что $u^s = 0, y^s = 0$ и, следовательно, $x^s = 0$. Далее определим множество начальных состояний, для которых выполнимо (2.5 – 2.8), с помощью $x_L = \{x \in \mathbb{R}^n | J_L^*(x) < \infty\}$. Для доказательства экспоненциальной устойчивости предложенной схемы предположим, что функция оптимальных значения (2.5 – 2.8) квадратично ограничена сверху.

Предположение 1 Функция оптимальных значения $J *_{L}(x)$ - квадратично ограничена сверху на $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$, т.е. $\exists c_u > 0$ такое, что $J_L^*(x) \leq c_u \|x\|_2^2 \forall x \in \mathbb{X}_L$

Теорема 2.2 Пусть предположение (1) верно, $L \geq, \{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ – траектория линейной стационарной системы G , где u^d – постоянно возбуждающий порядка $L + 2n$. Если задача МРС (2.5 – 2.8) возможно в начальный момент времени $t = 0$:

1. это возможно $\forall t$,
2. замкнутый цикл удовлетворяет ограничениям $u_t \in \mathbb{U}, y_t \in \mathbb{Y} \forall t \in \mathbb{N}$,
3. равновесие $x^s = 0$ экспоненциально устойчиво для полученного замкнутого цикла.

Доказательство (Экспоненциальная устойчивость)

Цена в момент времени $t+1$

$$J_L(x_{t+1}, \alpha'(t+1)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}'_k(t+1), \bar{y}'_k(t+1)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}^*_k(t), \bar{y}^*_k(t)) = J_L^*(x_t) - \ell(\bar{u}^*_0(t), \bar{y}^*_0(t)).$$

Откуда следует, что

$$J_L^*(x_{t+1}) \leq J_L^*(x_t) - \ell(\bar{u}^*_0(t), \bar{y}^*_0(t)) \quad (2.10)$$

Поскольку x^s – состояние наблюдаемой (и, следовательно, обнаруживаемой) минимальной реализации, существует матрица $P \succ 0$ такая, что $W(x) = \|x\|_P^2$ – функция стабильности Ляпунова и удовлетворяет

$$W(Ax + Bu) - W(x) \geq -\frac{1}{2}\|x\|_2^2 + c_1\|u\|_2^2 + c_2\|y\|_2^2, c_1, c_2 > 0. \quad (2.11)$$

где $\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y = Cx + Du$. Определим функцию Ляпунова $V(x) = \gamma W(x) + J_L^*(x)$ при некоторой $\gamma > 0$. Т.к. V квадратично ограничена снизу, $V(x) \geq \gamma W(x) \geq \gamma \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L$. По предположению (1) J_L^* квадратично ограничена сверху, т.е. $J_L^*(x) \leq c_u\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L$.

$$V(x) = J *_{L}(x) + \gamma W(x) \leq (c_u + \gamma \lambda_{\max}(P))\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}_L,$$

т.е. V – квадратично ограничена сверху.

Вдоль траекторий с замкнутым контуром, используя (2.10) и (2.11), получим

$$V(x_{t+1}) - V(x_t) \leq \gamma(-\frac{1}{2}\|x_t\|_2^2 + c_1\|u_t\|_2^2 + c_2\|y_t\|_2^2) - \|u_t\|_R^2 - \|y_t\|_Q^2 \leq -\frac{\gamma}{2}\|x_t\|_2^2$$

Таким образом, V затухает экспоненциально вдоль траекторий замкнутого контура, он квадратично ограничен сверху и снизу и удовлетворяет условию $V(0) = 0$. Следовательно, из стандартных аргументов Ляпунова следует, что равновесие $x^s = 0$ экспоненциально устойчиво.

Было показано, что замкнутый контур в n -ступенчатой схеме управления по прогнозирующей модели рекурсивно выполним и практически экспоненциально стабилен, следовательно, он является и асимптотически устойчивым.

ГЛАВА 3

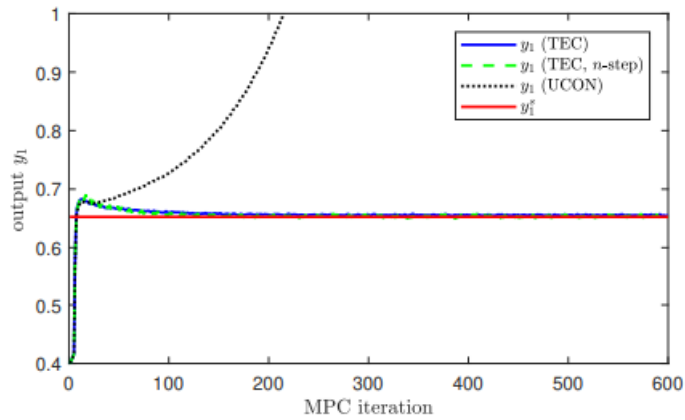
РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

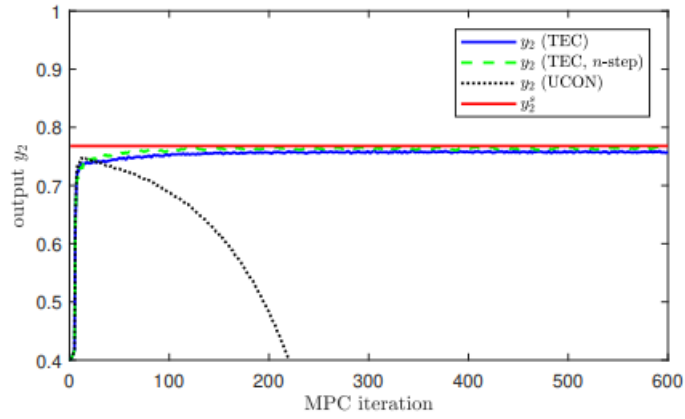
В этой главе применим схему МРС из главы (2). Рассмотрим систему, которая принимает вид

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Я не буду рассматривать никаких ограничений на ввод или вывод. В эксперименте с разомкнутым контуром измеряется траектория ввода-вывода длиной $N = 400$, где вход выбирается случайным образом из единичного интервала, т.е. $u_k^d \in [-1, 1]$. Также выберу $L = 30$ для горизонта прогнозирования.





Выход замкнутого контура, полученный в результате применения задачи (2.5-2.8) в одноэтапной схеме МРС, показан на рисунке. Видно, что цель управления выполнена, с небольшими отклонениями от желаемого равновесия. С другой стороны, если к системе применяется та же схема без терминальных ограничений, то замкнутый контур нестабилен и расходится с выбранными параметрами как для одношаговой, так и для пошаговой схемы МРС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были описаны основные определения теории управления по прогнозирующей модели, проанализированы схемы управления по прогнозирующей модели и показаны способы решений простейшей прогнозирующей задачи и задачи с терминальными ограничениями-равенствами, в которых для прогнозирования используются только прошлые измеренные данные без какого-либо предварительного шага идентификации системы. Также было показано, что замкнутый контур в n -ступенчатой схеме управления по прогнозирующей модели рекурсивно выполним и практически экспоненциально стабилен.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 2 Методы оптимизации. Учебное пособие / В.В. Альсевич [и др.] – Мн.: «Четыре четверти», 2011.
- 3 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allgöwer // arXiv, 2019 – 6p. (preprint arXiv:1903.10723).
- 4 Yang, H. A data-driven predictive controller design based on reduced hankel matrix / H. Yang, S. Li // Asian Control Conference: proc. of the 10th ACC – 2015. – 7p.
- 5 Coulson, J. Data-enabled predictive control: in the shallows of the DeePC / J.Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // European Control Conference: proc of the 18thECC. – 2019. – P. 307-312.