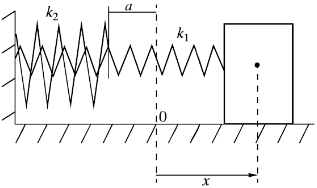
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ И СТУПЕНЧАТЫХ СИСТЕМ

Левина Елизавета Леонидовна

Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра методов оптимального управления

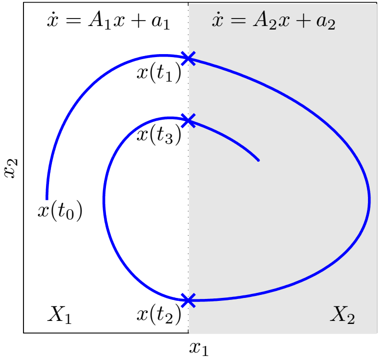
Дипломная работа

Мотивация: кусочно-линейные системы



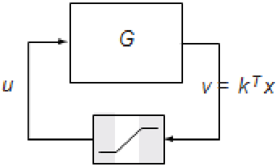
$\ddot{x} = -k_1 x,\ x \geq -a$

$\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x - k_2 a,\ x < -a$

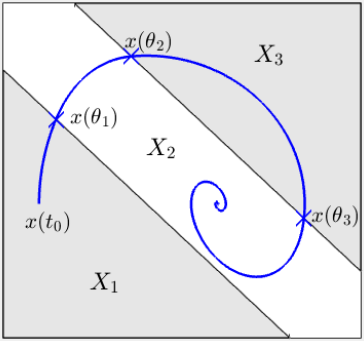


- движение в областях с различными условиями

Мотивация: кусочно-линейные системы



$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + b, & x \in X_1 \\ (A + bk')x, & x \in X_2 \\ Ax - b, & x \in X_3 \end{cases}$$

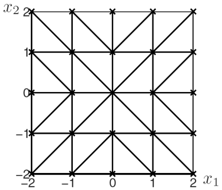


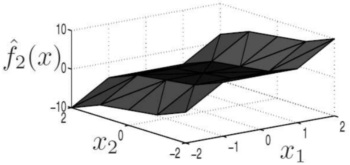
- движение в областях с различными условиями
- линейная обратная связь с насыщением

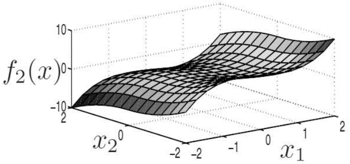
Мотивация: кусочно-линейные системы

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x) = -x_2|x_2| - x_1(1 + x_1^2)$$







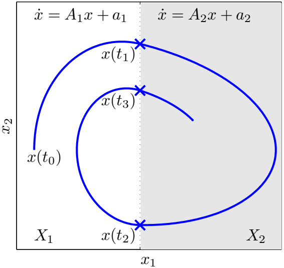
- движение в областях с различными условиями
- линейная обратная связь с насыщением
- кусочно-линейная аппроксимация и т.д.

Содержание

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- кусочно-линейная система

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t),\ \ x \in X_i,\ \ i = \overline{1, q}$$



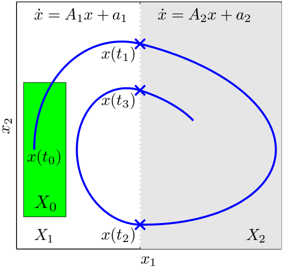
Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- кусочно-линейная система

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t),\ \ x \in X_i,\ \ i = \overline{1, q}$$

- априорная неопределенность

$$x(t_0) \in X_0 \subset X_1$$



Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- кусочно-линейная система

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t), \;\; x \in X_i, \;\; i = \overline{1, q}$$

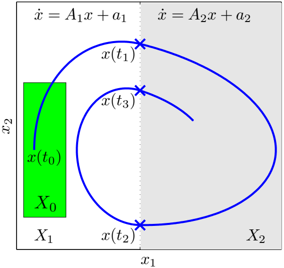
- априорная неопределенность

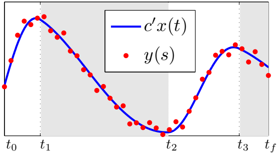
$$x(t_0) \in X_0 \subset X_1$$

- измерительное устройство

$$y(s) = c'(s)x(s) + \xi(s), \;\; s \in T_h$$

$$\xi(s) \in \Xi$$





Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- кусочно-линейная система

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t), \;\; x \in X_i, \;\; i = \overline{1, q}$$

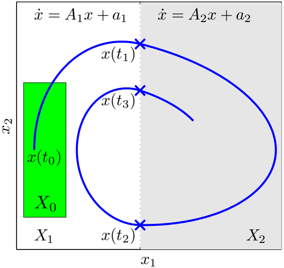
- априорная неопределенность

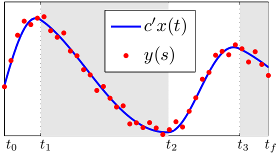
$$x(t_0) \in X_0 \subset X_1$$

- измерительное устройство

$$y(s) = c'(s)x(s) + \xi(s), \;\; s \in T_h$$

$$\xi(s) \in \Xi$$





Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- кусочно-линейная система

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t), \ x \in X_i, \ i = \overline{1, q}$$

- априорная неопределенность

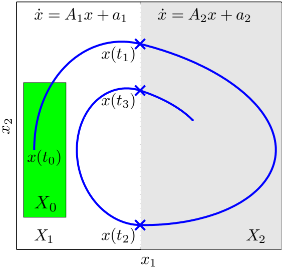
$$x(t_0) \in X_0 \subset X_1$$

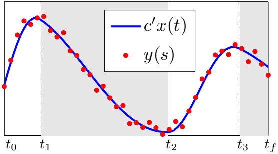
- измерительное устройство

$$y(s) = c'(s)x(s) + \xi(s), \ s \in T_h$$

$$\xi(s) \in \Xi$$

- задача наблюдения





построение оценок неизвестного начального состояния по результатам измерений

Определения и формулировка ЗОН

Начальное состояние z согласуется с записанным сигналом

$$y^*(t_0), y^*(t_0+h), ..., y^*(t_f-h), y^*(t_f),$$

если $\exists \xi(s), s \in T_h$, такое что

$$y^*(s) = c'x(s|z) + \xi(s), s \in T_h$$

Апостериорное распределение

$$X_0^* = \{x \in X_0, z \text{ согласуется с } y^*(\cdot)\}$$

Задача оптимального наблюдения

$$\hat{\alpha} = \max p'z$$

$$z \in X_0^*$$

Алгоритм решения

Параметризация

Линеаризация

Внутренняя итерация

Внешняя итерация

Алгоритм решения

Параметризация

Линеаризация

Внутренняя итерация

Внешняя итерация

- Траектория $x(t|z), t \in T$ проходит $X_1^*, \dots, X_{i^*}^*$ и пересекает границы в $\theta_1, \dots, \theta_{i-1^*}$
- Фиксируем последовательность $X_1^*, \dots, X_{i^*}^*$
- Параметризованная задача

$$\hat{\alpha}(\theta) = \max_{z,\theta} p'z,$$

$$\dot{x} = A_i(t)x + a_i(t), t \in [\theta_{i-1}, \theta_i[, i \in I,$$

$$x(t_0) = z$$

$$\xi_* \leq y(t) - c_i'x(t) \leq \xi^*, t \in [\theta_{i-1}, \theta_i[\cap T_h$$

$$h_i'x(\theta_i) = \gamma_i, i \in \bar{I},$$

$$d_* \leq z \leq d^*, g_* \leq Hz \leq g^*$$

Алгоритм решения

Параметризация

Линеаризация

Внутренняя итерация

Внешняя итерация

- Фиксируем моменты перехода θ
- $A(t) = A_i, a(t) = a_i, t \in [\theta_{i-1}, \theta_i[, i \in \bar{I}$
- Линеаризованная задача

$$\hat{\alpha}(\theta) = \max_{z} p'z$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + a(t), x(t_0) = z$$

$$\xi_* \leq y(t) - c'x(t) \leq \xi^*, t \in [\theta_{i-1}, \theta_i[\cap T_h,$$

$$h_i'x(\theta_i) = \gamma_i, i \in \bar{I}$$

$$d_* \leq z \leq d^*, g_* \leq Hz \leq g^*$$

Алгоритм решения

Параметризация

Линеаризация

Внутренняя итерация

Внешняя итерация

- Линеаризованная задача сводится к задаче линейного программирования

$$p'z \to \max_{z}$$

$$\xi_* \leq d'(t)z \leq \xi^*$$

$$\gamma_{i*} \leq h_i' x(\theta_i) \leq \gamma_i^*$$

$$d_* \leq z \leq d^*, g_* \leq Hz \leq g^*$$

Алгоритм решения

Параметризация

Линеаризация

Внутренняя итерация

Внешняя итерация

- $\bar{\theta} = \theta - \sigma \dfrac{\partial \hat{\alpha}(\theta)}{\partial \theta}$
- Градиенты

$$\frac{\partial^+ \hat{\alpha}(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{t>\theta_i} \nu^0(t|\theta)' c(t) \frac{\partial^+ x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} - \sum_{j \in \bar{I}} \nu_j^0(\theta) h_j \frac{\partial^+ x^0(\theta_j|\theta)}{\partial \theta_i}, i \in \bar{I}$$

$$\frac{\partial^- \hat{\alpha}(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{t>\theta_i} \nu^0(t|\theta)' c(t) \frac{\partial^- x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} - \sum_{j \in \bar{I}} \nu_j^0(\theta) h_j \frac{\partial^- x^0(\theta_j|\theta)}{\partial \theta_i} +$$

$$+\nu^0(\theta_i, \theta)'[(c_{i+1} - c_i) x^0(\theta_i, \theta)], i \in \bar{I}$$

где

$$\frac{\partial x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} = 0, t < \theta_i$$

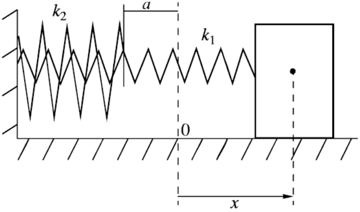
$$\frac{\partial^- x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} = A_i x^0(t|\theta) + a_i, \frac{\partial^+ x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} = A_{i+1} x^0(t|\theta) + a_{i+1}, t = \theta_i$$

$$\frac{\partial x^0(t|\theta)}{\partial \theta_i} = F_j(t-\theta_{j-1}) \Phi_{j-1,i}[(A_i - A_{i+1}) \Phi_{i,0} x^0(\theta_i|\theta) + (a_i - a_{i+1})], t > \theta_i,$$

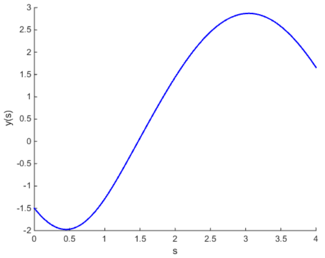
$$t \in]\theta_{j-1}, \theta_j]$$

Пример решения для кусочно-линейной системы

- Математическая модель
$$\ddot{x} = -k_1 x, x \geq -a;$$
$$\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x - k_2 a, x < -a$$
- Начальное состояние удовлетворяет
$$d_* \leq x(0) \leq d^*,$$
$$b_* \leq \dot{x}(0) \leq b^*, d^* < -a, b > 0$$
- Измерительное устройство
$$y(s) = x(s) + \xi(s)$$
- Ошибка измерения
$$|\xi(s)| \leq \xi^*$$



$t_0 = 0$, $t_f = 4$, $a = 0.5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $d_* = -2$, $d^* = -0.5$, $b_* = 0$, $b^* = 3$, $\xi^* = 0.4$, $h = 0.04$

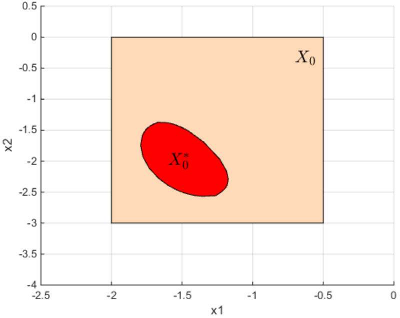


Пример решения для кусочно-линейной системы

Результаты

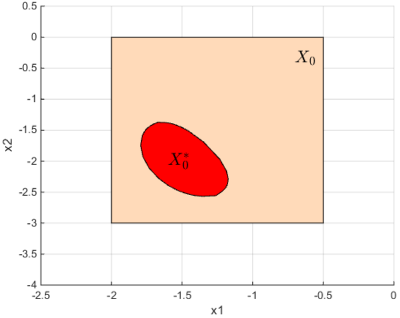
Пример решения для кусочно-линейной системы

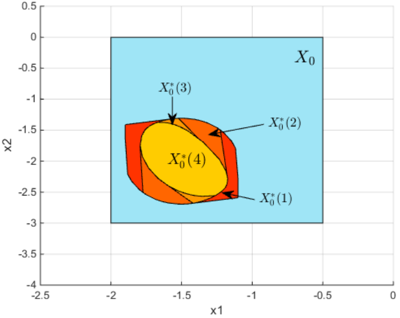
Результаты



Пример решения для кусочно-линейной системы

Результаты





Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- ступенчатая система

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t),\ x_k \in X_k \in R^{n_k}$$

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- ступенчатая система

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t),\ \ x_k \in X_k \in R^{n_k}$$

- условия перехода

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- ступенчатая система

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t),\ x_k \in X_k \in R^{n_k}$$

- условия перехода

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

- априорная неопределенность

$$x_1(t_0) \in X_0 \subset R^{n_1}$$

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- ступенчатая система

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t),\ \ x_k \in X_k \in R^{n_k}$$

- условия перехода

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

- априорная неопределенность

$$x_1(t_0) \in X_0 \subset R^{n_1}$$

- измерительное устройство

$$y(s) = c_k'(s)x_k(s) + \xi(s)\ \ s \in T_h$$

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)

- ступенчатая система

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t),\ x_k \in X_k \in R^{n_k}$$

- условия перехода

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

- априорная неопределенность

$$x_1(t_0) \in X_0 \subset R^{n_1}$$

- измерительное устройство

$$y(s) = c_k'(s)x_k(s) + \xi(s)\ s \in T_h$$

- задача наблюдения

$$\chi^* = \max p'x, x \in X_0^*$$

ЗОН с фиксированными моментами перехода

Задача при фиксированных θ

$$\chi^* = \max_{z} p'z,$$

$$\dot{x} = A_k(t)x_k(t) + a_k(t), t \in T_k = [\theta_{k-1}, \theta_k], x_1(t_0) = z$$

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

$$y^*(s) - c_k' x_k(s) \in \Xi, s \in T_k \cap T_h, k \in K$$

$$z \in X_0$$

ЗОН с фиксированными моментами перехода

Задача при фиксированных θ

$$\chi^* = \max_{z} p'z,$$

$$\dot{x} = A_k(t)x_k(t) + a_k(t), t \in T_k = [\theta_{k-1}, \theta_k], x_1(t_0) = z$$

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

$$y^*(s) - c_k' x_k(s) \in \Xi, s \in T_k \cap T_h, k \in K$$

$$z \in X_0$$

Задача линейного программирования

$$p'z \to \max$$

$$\xi_*(s) \le d'(s)z \le \xi^*(s), s \in T_h$$

$$d_* \le z \le d^*$$

ЗОН с нефиксированными моментами перехода

Задача наблюдения

$$\chi^* = \max_{z,\theta} p'z$$

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t), t \in T_k = [\theta_{k-1}, \theta_k], x_1(t_0) = z$$

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

$$y^*(s) - c_k' x_k(s) \in \Xi, s \in T_k \cap T_h, k \in K$$

$$z \in X_0$$

ЗОН с нефиксированными моментами перехода

Задача наблюдения

$$\chi^* = \max_{z,\theta} p'z$$

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k(t) + a_k(t), t \in T_k = [\theta_{k-1}, \theta_k], x_1(t_0) = z$$

$$x_{k+1}(\theta_k) = H_k x_k(\theta_k) + g_k, k \in \bar{K}$$

$$y^*(s) - c_k' x_k(s) \in \Xi, s \in T_k \cap T_h, k \in K$$

$$z \in X_0$$

Алгоритм

- Задача решается для фиксированного θ относительно z.
- Проводится оптимизация по Θ, составленному из моментов времени перехода:

$$\hat{\Theta} = \Theta - \sigma \frac{\partial \chi^0(\Theta)}{\partial \Theta}$$

Пример решения для ступенчатой системы

- Система

$$\dot{x}_1^1 = x_1^2, \dot{x}_1^2 = x_1^1$$

$$x_1(t_0) = x_0, t \in T_1 = [t_0, \theta]$$

$$\dot{x}_2^1 = x_2^2, \dot{x}_2^2 = 1.25x_2^1 - 0.125x_2^4$$

$$\dot{x}_2^3 = x_2^4, \dot{x}_2^4 = 0.25x_2^1 - 0.125x_2^4, t \in T_2 = [\theta, t_f]$$

- Условия перехода

$$x_2^1(\theta) = x_1^1(\theta), x_2^2(\theta) = x_1^2(\theta), x_2^3 = 0, x_2^4 = g$$

- Априорное распределение

$$X_0 = \left\{(x_1^1, x_2^1) : |x_1^j| \leq d^*, j = 1, 2\right\}$$

- Измерительное устройство

$$y(s) = x_1^1(s) + \xi(s), s \in T_h \cap T_1, y(s) = x_2^1(s) + xi(s), s \in T_h \cap T_2$$

Пример решения для ступенчатой системы

- Параметры

$$t_0 = 0, t_f = 2, h = 0.01, d^* = 0.5, \xi^* = 0.2, g = 15$$

- Результаты

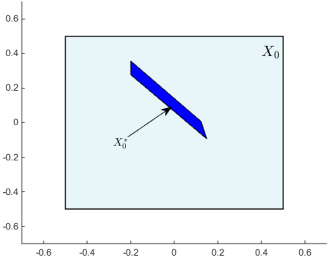
Пример решения для ступенчатой системы

- Параметры

$$t_0 = 0, t_f = 2, h = 0.01, d^* = 0.5, \xi^* = 0.2, g = 15$$

- Результаты

Случай фиксированного θ ($\theta = 1$)



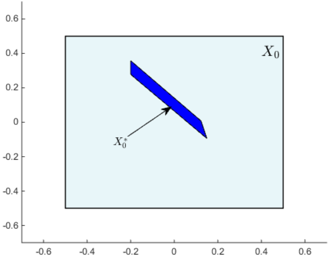
Пример решения для ступенчатой системы

- Параметры

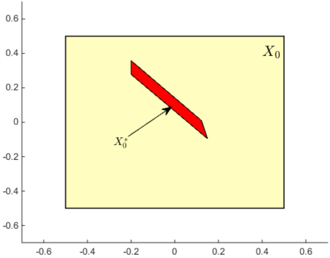
$$t_0 = 0, t_f = 2, h = 0.01, d^* = 0.5, \xi^* = 0.2, g = 15$$

- Результаты

Случай фиксированного θ ($\theta = 1$)



Случай нефиксированного θ



Заключение

- Рассмотрена задача оптимального наблюдения кусочно-линейных систем в условиях неопределенности.
- Предложен общий подход к решению поставленной задачи.
- Рассмотрена задача оптимального наблюдения ступенчатой системы.
- Исследованы случаи фиксированных и нефиксированных моментов времени перехода между этапами.
- Полученные результаты проиллюстрированы на примерах.

Спасибо за внимание!