

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**КУЛЕШОВА**

Владислава Вячеславовича

**УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ  
НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Дипломная работа

Научный руководитель  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ . . . . .	3
РЕФЕРАТ . . . . .	4
ВВЕДЕНИЕ. . . . .	7
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	8
1.1 Теория управления по прогнозирующей модели. . . . .	8
1.2 Задачи оптимального управления . . . . .	10
ГЛАВА 2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ . . . . .	13
2.1 Основные предположения . . . . .	14
2.2 Простейшая прогнозирующая задача на основе данных . . . . .	15
2.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами . . . . .	16
2.4 Асимптотическая устойчивость замкнутого контура . . . . .	17
ГЛАВА 3 УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: НЕТОЧНЫЕ ДАННЫЕ . . . . .	18
3.1 Робастная схема МРС с терминальными ограничениями . . . . .	18
3.2 n-Шаговая схема управления на основе МРС . . . . .	19
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРЕМЕНТЫ . . . . .	21
4.1 Постановка задачи. . . . .	21
4.2 Программная реализация алгоритмов. . . . .	22
4.3 Результаты. . . . .	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	29
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	30

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{I}_{[a,b]}$  – множество целых чисел на отрезке  $[a, b]$ .

Для вектора  $x$  и положительно определённой матрицы  $P = P^T > 0$  запишем  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ .

$$H_L(x) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-L} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-L+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_L & \dots & x_{N-1} \end{bmatrix} - \text{матрица Ганкеля, составленная}$$

из последовательности  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$

Определим максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $P$   $\lambda_{\min}(P)$  и  $\lambda_{\max}(P)$ . Для матриц  $P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T$  запишем,

$$\lambda_{\min}(P_1, P_2) = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\},$$

$$\lambda_{\max}(P_1, P_2) = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\}.$$

$\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty$  – Евклидовы,  $\ell_1$  и  $\ell_\infty$  нормы  $x$ , соответственно.

## РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 30 с., 5 рис., 5 ист.

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ, ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, МАТРИЦА ГАНКЕЛЯ.

Объектом исследования дипломной работы являются линейные стационарные системы, для которых неизвестны их математические модели в пространстве состояний, однако даны априорные траектории входных и выходных переменных, на основе которых требуется строить обратные связи, обеспечивающие стабилизацию рассматриваемой системы.

Целью работы является реализация методов управления по прогнозирующей модели для стабилизации исследуемой линейной стационарной системы на основе доступных априорных данных, как точных, так и содержащих шум во входных переменных.

Основные методы исследования – методы оптимизации, теории систем.

Результатом данной работы является алгоритм решения задачи оптимального управления по прогнозирующей модели для линейных стационарных систем.

# РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 30 с., 5 рис., 5 кр.

АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ, КІРАВАННЕ ПА ПРАГНАЗУЮЦЬ МАДЭЛІ, ЛІНЕЙНАЯ СІСТЭМА, МАТРЫЦА ХАНКЕЛЯ.

Аб'ектам даследавання дыпломнай працы з'яўляюцца лінейныя стацыянарныя сістэмы, для якіх невядомыя іх матэматычныя мадэлі ў прасторы станаў, аднак дадзены апыёрныя траекторыі ўваходных і выходных зменных, на аснове якіх патрабуецца будаваць зваротныя сувязі, якія забяспечваюць стабілізацыю разглядаанай сістэмы.

Мэтай працы з'яўляецца рэалізацыя метадаў кіравання па прагназуюць мадэлі для стабілізацыі доследнай лінейнай стацыянарнай сістэмы на аснове даступных апыёрных дадзеных, як дакладных, так і якія змяшчаюць шум у ўваходных зменных.

Асноўныя метады даследавання – метады аптымізацыі, тэорыі сістэм.

Вынікам дадзенай работы з'яўляецца алгарытм рашэння задачы аптымальнага кіравання па прагназуюць мадэлі для лінейных сістэм.

# ABSTRACT

Degree thesis, 30 pages, 5 pictures, 5 sources  
OPTIMAL CONTROL, MODEL PREDICTIVE CONTROL, LINEAR  
SYSTEM, HANKEL MATRIX.

The research object of the thesis is linear stationary systems, for which their mathematical models in the state space are unknown, but a priori trajectories of input and output variables are given, on the basis of which it is required to build feedbacks that ensure the stabilization of the system under consideration.

The aim of the work is to implement control methods using a predictive model to stabilize the investigated linear stationary system based on available a priori data, both accurate and containing noise in the input variables.

The main research methods are optimization methods, systems theory.

The result of this work is an algorithm for solving the optimal control problem using a predictive model for linear systems.

## ВВЕДЕНИЕ

Методы, ориентированные на данные, в последние годы всё чаще используются для анализа и управления систем, но лишь немногие такие методы дают теоретические гарантии на устойчивость или удовлетворение системных ограничений. Метод управления, который хорошо подходит для достижения этих целей, – это управление по прогнозирующей модели (МРС), которое может обрабатывать нелинейную динамику системы, жесткие ограничения на состояние и входные и выходные сигналы, а также учитывает критерии эффективности [3].

Данные методы сосредоточены на повторяющемся онлайн-решении задачи оптимизации по прогнозируемым системным траекториям. МРС-регулятор данного метода обычно полагается на эмпирическую модель процесса для того, чтобы предсказать дальнейшее его поведение, основываясь на предыдущих значениях переменных состояния. Но также существует привлекательная альтернатива реализации МРС-регулятора основывающегося непосредственно на измеренных данных без предварительного знания точной модели.

В главе 1 приведены основные сведения из теории управления по прогнозирующей модели, а также рассматриваются задачи оптимального управления и их классификация. В главе 2 исследуются методы решения [3] простейшей прогнозирующей задачи на основе данных и задачи с терминальными ограничениями-равенствами. В главе 3 показано решение [3] проблемы зашумленных данных с помощью робастной схемы МРС. В главе 4 применены схемы МРС из глав 2 и 3, рассмотрены программные реализации данных схем и приведены полученные результаты.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей главе описываются основные понятия управления по прогнозирующей модели, а также приводится классификация задач оптимального управления, используемых в современной теории управления.

### 1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Главная идея MPC [1] – использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Рассмотрим задачу стабилизации нелинейной системы

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  – состояние системы в момент времени  $t$ ;

$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$  – значение управляющего воздействия в момент времени  $t$ ;

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  – заданная функция.

Пусть  $f(0, 0) = 0$ , следовательно точка равновесия системы находится в начале координат, и при тривиальном управлении  $u \equiv 0$  система остаётся в состоянии покоя.

При заданном управлении  $u(\cdot)$ , траектория системы (1.1) обозначается как  $x(t|0, z, u(\cdot))$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , где начальное состояние системы в момент времени  $t = 0$  задаётся условием  $x(0) = z$ .

Управление  $u(\cdot)$  будем выбирать так, чтобы максимально приблизить траектории  $x(t|0, x_0, u(\cdot))$ ,  $t = 0, 1, \dots, N$ , к началу координат.

**Определение 1** Стоимость этапа – функция  $l(x(t), u(t))$  вдоль траектории  $x(\cdot)$  и управления  $u(\cdot)$ , с помощью которой для всех моментов времени  $t = 0, 1, \dots$  оценивается качество выбранного управления  $u(\cdot)$ .

Чаще всего стоимость этапа  $l$  выбирается следующим образом:

1. Взвешенная сумма расстояний до начала координат:

$$l(x, u) = \|x\|^2 + \lambda \|u\|^2, \quad \lambda \geq 0 \text{ – параметр, } \|\cdot\| \text{ – евклидова норма.}$$



## 2. Квадратичные функции

$$l(x, u) = x'Qx + u'Ru$$

$R, Q > 0$  – положительно определённые матрицы.

Таким образом, задача оптимального управления состоит в минимизации функционала

$$J(x^*(\tau)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), u(t)). \quad (1.2)$$

Минимум ищем вдоль траекторий  $x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), t = 0, 1, \dots, N-1$ , системы (1.1) с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием объекта  $x(0) = x^*(\tau)$  и при некоторых ограничениях:

Ограничения для задачи (1.2) состоят из двух групп:

1. Физические ограничения системы (например, неотрицательность переменных, максимальное ограничение на управляющее воздействие и другие);
2. Ограничения, накладываемые алгоритмом МРС (например, терминальное ограничение вида  $x(N) = 0$  или принадлежность  $x(N)$  множеству  $X_f$ ), смотрите [1].

Обозначим оптимальное программное решение задачи (1.2) через  $u^0(\cdot|x^*(\tau))$ . Для построения обратных связей будем считать, что на объект управления подано первое значение оптимальной программы

$$\mu(x^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau)).$$

Далее в момент времени  $\tau + 1$  процесс повторяется для состояния  $x^*(\tau + 1)$ . Тогда в этот момент времени решается задача о минимизации следующего функционала:

$$J(x^*(\tau + 1)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau + 1), u(\cdot)), u(t)).$$

При этом будет получено очередное значение обратной связи:

$$\mu(x^*(\tau + 1)) = u^0(0|x^*(\tau + 1)).$$

После процесс повторяется при  $\tau + 2, \tau + 3$  и так далее. Таким образом, алгоритм управления по прогнозирующей модели, в каждый момент времени  $\tau = 0, 1, \dots$  состоит из следующих шагов:

1. Измеряется текущее состояние  $x^*(\tau)$ .
2. Находится оптимальное программное решение  $u^0(t|x^*(\tau))$  задачи (1.2).
3. Подаётся на объект системы управляющее воздействие

$$\mu^*(\tau) \equiv \mu(x^*(\tau)) = \mu^0(0|x^*(\tau)).$$

Во многих задачах целью управления является переход системы как можно ближе к некоторому состоянию  $(x^s, y^s)$ , т.е. стабилизация этого состояния, методы управления по прогнозирующей модели достигают этой цели. Идея управления по прогнозирующей модели заключается в оптимизации будущего поведения системы в каждый момент времени, нахождение оптимального управления и его использования в качестве значений обратной связи для следующего момента времени.

## 1.2 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления классифицируются [2]

- По промежутку управления:
  - задачи оптимального управления разделяются на непрерывные  $T = [t_0, t_f]$  и дискретные, в которых динамический процесс рассматривается в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $N$  – натуральное число.
  - задачи различаются по продолжительности процесса с фиксированным и нефиксированным  $t_f$ .
- По ограничениям на траекторию, которые в общем виде имеют следующий вид:

$$x \in \mathbb{X}(t), t \in [t_0, t_f].$$

Ограничения на траекторию могут накладываться:

- на правом конце траектории (терминальные ограничения), т.е.  $x(t_f) \in \mathbb{X}_f$ ;
- на левом конце, т.е.  $x(t_0) \in \mathbb{X}_0$ ;

- в промежуточные моменты времени, т.е.  $x(t_i) \in \mathbb{X}_i, t_i \in [t_0, t_f], i = 1, \dots, l$ , при этом  $t_0 < t_1 < \dots < t_l < t_f$ .

Также существуют смешанные ограничения на траекторию.

- По критерию качества:

- Терминальный критерий качества типа Майера

$$J(u) = \varphi(x(t_f)),$$

$$\varphi : R^n \rightarrow R.$$

- Интегральный критерий типа Лагранжа

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt,$$

$$f_0 : R^n \times R^r \times R \rightarrow R.$$

- Критерий качества типа Бальса

$$J(u) = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt.$$

- Критерий быстродействия

$$J(u) = t_f - t_0 \rightarrow \min.$$

Принцип максимума – классическое необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления. Оно является самым сильным из известных необходимых условий оптимальности первого порядка.

Для формулировки принципа максимума введем гамильтониан:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(x, u, t)$$

Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления на промежут-

ке времени  $[t_0, t_f]$  в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$J(u) = \phi(x(t_f)) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in \mathbb{U}, t \in [t_0, t_f].$$

Пусть  $u^0(t), t \in [t_0, t_f]$ , – оптимальное управление,  $x^0(t), t \in [t_0, t_f]$ , – оптимальная траектория,  $\psi^0(t), t \in [t_0, t_f]$  – сопряжённая траектория – решение сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi, u^0(t), t)}{\partial x},$$

$$\psi = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_f))}{\partial x}.$$

Тогда выполняется условие максимума гамильтониана:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in \mathbb{U}} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), t \in [t_0, t_f].$$

В данной главе были приведены основные сведения из теории управления по прогнозирующей модели. В дальнейшем в работе теория управления по прогнозирующей модели будет применена на практическом примере.

## ГЛАВА 2

### УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Являясь передовым методом управления, управление по прогнозирующей модели (МРС) имеет широкий спектр технологически и экономически выгодных приложений. В доступных исследованиях было предложено множество различных реализаций МРС. Однако, базовая структура схем управления обычно включает явную или неявную модель управляемого процесса, а также оптимизацию управляемых переменных в течение заранее определенного горизонта управления для данного горизонта прогнозирования управляемых переменных.

Разработка модели на сегодняшний день является наиболее важным и трудоемким шагом в реализации управления по прогнозирующей модели. Реализация МРС критически зависит от качества модели и возможности онлайн-оптимизации. Но на сегодняшний момент предлагается множество видов управления без моделей [3, 4], в том числе и в МРС.

По сравнению с методами, основанными на моделях, методы, основанные на данных, можно разделить на прямые и косвенные [4]. Подходы, основанные на прямых данных, нацелены на отображение входящих и выходящих сигналов. Косвенные подходы, основанные на данных, нацелены на извлечение признаков или символов из наблюдаемых наборов данных. Извлечение признаков может быть выполнено с использованием методов интеллектуального анализа данных или машинного обучения без учителя.

Метод управления на основе данных должен иметь возможность максимально использовать системные данные. Эти данные используются для выбора и проектирования структур регулятора или используются для настройки его параметров.

В данной работе для описания управляемых процессов вместо модели в пространстве состояний будет применяться матрица данных Ганкеля из [3], основанная на поведении системы. Такое решение особенно подходит для задач управления на основе данных, так как оно рассматривает динамическую систему как набор траекторий, а не уравнений, таким образом, устанавливает явную связь между траекторией и системой, которая генерирует траекторию.

В последующей главе после формулировки требуемых определений и основных предположений в 2.1 рассмотрим построение простейшей про-

гнозирующей задачи на основе данных в 2.2 и задачи с терминальными ограничениями-равенствами в 2.3, а также покажем в 2.4, что замкнутый контур в  $n$ -шаговой схеме управления по прогнозирующей модели является асимптотически устойчивым, как это сделано в [3].

## 2.1 Основные предположения

Цель паботы – управление неизвестной линейной стационарной системой  $G$  с порядком  $n$ , с  $m$  входами и  $p$  выходами.

**Определение 2** Последовательность  $\{u_k, y_k\}_{k=0}^{N-1}$  – траектория линейной стационарной системы  $G$ , если существуют начальное состояние  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , а также соответствующая траектория  $\{x_k\}_{k=0}^N$  такая, что

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k; \quad x_0 = \bar{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$(A, B, C, D)$  – минимальные реализация  $G$ .

**Определение 3**  $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$  с  $u_k \in \mathbb{R}^r$  постоянно возбуждающая порядка  $L$ , если  $\text{rank}(H_L(x)) = nL$ .

**Теорема 2.1** Предположим, что  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  – траектория линейной стационарной системы  $G$ , где  $u$  – постоянно возбуждающее управление порядка  $L + n$ . Тогда  $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{L-1}$  – траектория  $G$ , тогда и только тогда, когда  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{N-L+1}$  такое, что

$$\begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

**Определение 4** Пара  $(u^s, y^s) \in \mathbb{R}^{m+p}$  – положение равновесия линейной стационарной системой  $G$ , если последовательность  $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{n-1}$  с  $(\bar{u}_k, \bar{y}_k) = (u^s, y^s) \forall k \in \mathbb{I}[0, n-1]$  – траектория  $G$ .

Для равновесия  $(u^s, y^s)$  мы определим  $u_n^s, y_n^s$  как столбец векторов содержащий  $n$  раз  $u^s$  и  $y^s$ , соответственно. Предположим, что система подчиняется ограничениям,  $u_t \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, y_t \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \forall t \geq 0$ , и предположим, что  $(u^s, y^s) \in \text{int}(\mathbb{U} \times \mathbb{Y})$ .  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  – априорно измеренные траектории длиной  $N$ , используемые в (2.1). Прогнозируемые входные и выходные траектории в момент времени  $t$  в течение некоторого горизонта прогнозирования  $L$  записываются как  $\{\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)\}_{k=-n}^{L-1}$ .

Обратим внимание, что индексы времени начинаются с  $k = -n$ , так как последние  $n$  входных и выходных сигналов будут использоваться для вызова уникального начального состояния в момент времени  $t$ . Кроме того, обратная связь, состояние в некоторой минимальной реализации и выход в момент времени  $t$  обозначаются как  $u_t, x_t, y_t$ , соответственно.

## 2.2 Простейшая прогнозирующая задача на основе данных

Теорема 2.1 обеспечивает привлекательную альтернативу математической модели в пространстве состояний, так как (2.1) достаточно, чтобы охватить все траектории системы. Таким образом, для реализации схемы МРС, основанной на данных, можно просто заменить динамику системы ограничением, которому удовлетворяют прогнозируемые траектории входа-выхода (2.1). Чтобы быть более точным, предложенная схема МРС решает задачу на основе данных

$$J_L(u_{[t-n, t-1]}, y_{[t-n, t-1]}, \alpha(t)) = \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)), \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n, -1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n, -1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n, t-1]} \\ y_{[t-n, t-1]} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где  $\ell(\bar{u}, \bar{y}) = \|\bar{u} - u^s\|_R^2 + \|\bar{y} - y^s\|_Q^2$ ,  $Q, R \succ 0$ .

Ограничение (2.3) заменяет динамику системы по сравнению с классическими схемами МРС на основе моделей. Кроме того, (2.4) гарантирует, что внутреннее состояние истинной траектории совпадает с внутренним состоянием прогнозируемой траектории в момент времени  $t$ . Начальные траектории указываются до временного шага  $t - 1$ , поскольку входной сигнал в момент времени  $t$  может уже влиять на выходной сигнал в момент времени  $t$ . Стоимость (2.2) зависит только от переменной оптимизации  $\alpha(t)$ , поскольку  $\bar{u}(t)$  и  $\bar{y}(t)$  неявно фиксируются через динамическое ограничение (2.3).

## 2.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами

В этом пункте рассмотрим простое терминальное ограничение, предложенное в [3], которое может быть включено непосредственно в структуру управления данными МРС. Задачу сформулируем в виде

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}) = \min_{\alpha(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)), \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\bar{u}_k(t) \in \mathbb{U}, \bar{y}_k(t) \in \mathbb{Y}, k \in \mathbb{I}_{[0,L-1]}. \quad (2.9)$$

Терминальное ограничение-равенство (2.8) подразумевает, что  $\bar{x}_L(t)$ , который является внутренним состоянием, предсказанным на  $L$  шагов вперед, соответствующей предсказанной траекторией, равно постоянному состоянию  $x^s$ , соответствующему  $(u^s, y^s)$ , то есть  $\bar{x}_L(t) = x^s$  в любой минимальной реализации. В то время как задача требует, чтобы  $(u^s, y^s)$  было равновесием неизвестной системы по определению 4, это требование может быть отброшено, когда  $(u^s, y^s)$  заменено искусственным равновесием, которое также оптимизируется онлайн. Как и в стандартном МРС, задача решена в виде отступающего горизонта, который обобщен в алгоритме 1.

### Алгоритм 1 (Схема управления на основе МРС)

1. В момент времени  $t$  взять прошлые  $n$  измерений  $u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}$  и решить задачу (2.5)–(2.9).
2. Взять за управление  $u_t = \bar{u}_0^*(t)$ , где  $\bar{u}_0^*(t)$  – найденное оптимальное управление.
3. Установить  $t = t + 1$  и вернуться к пункту 1).



## 2.4 Асимптотическая устойчивость замкнутого контура

Для анализа предположим, что  $u^s = 0, y^s = 0$  и, следовательно,  $x^s = 0$ . Далее определим множество начальных состояний, для которых (2.5) – (2.8) имеет решение,  $x_L = \{x \in \mathbb{R}^n | J_L^*(x) < \infty\}$ . Для доказательства экспоненциальной устойчивости предложенной схемы предположим, что функция оптимальных значения (2.5) – (2.8) ограничена сверху.

**Предположение 1** Функция оптимальных значения  $J_L^*(x)$  – ограничена сверху на  $\mathbb{X}_L$ , т.е.  $\exists c_u > 0$  такое, что  $J_L^*(x) \leq c_u \|x\|_2^2 \forall x \in \mathbb{X}_L$

**Теорема 2.2** [3] Пусть предположение (1) верно,  $L \geq n$ ,  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  – траектория линейной стационарной системы  $G$ , где  $u^d$  – постоянно возбуждающий порядка  $L + 2n$ . Если задача MPC (2.5) – (2.8) имеет решение в начальный момент времени  $t = 0$ :

1. задача (2.5) – (2.8) имеет решение при  $\forall t$ ,
2. выполняются ограничения  $u_t \in \mathbb{U}, y_t \in \mathbb{Y} \forall t \in \mathbb{N}$ ,
3. равновесие  $x^s = 0$  экспоненциально устойчиво для полученного замкнутого цикла.

## ГЛАВА 3

### УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ: НЕТОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Применение схемы МРС из Главы 2 может привести к проблемам с существованием решения или может сделать замкнутый контур неустойчивым. В этой главе решается проблема зашумленных измерений с помощью робастной схемы МРС с терминальными ограничениями [3].

#### 3.1 Робастная схема МРС с терминальными ограничениями

На практике выходной сигнал неизвестной системы  $G$  обычно является неточным. Это означает, что матрицы Ганкеля, зависящие от данных, в (2.1) не покрывают пространство траекторий системы точно и, следовательно, выходные траектории не могут быть точно предсказаны. Более того, измерения выходного сигнала с зашумлением входят в начальные условия в задаче (2.5)-(2.9), что еще больше ухудшает точность прогноза.

В данной главе будет предполагаться, что выходные сигналы с ограниченным аддитивным шумом находятся в изначально доступных данных  $\tilde{y}_k^d = y_k^d + \varepsilon_k^d$  и в измерениях  $\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k$ . Мы не делаем никаких предположений о природе шума, но требуем, чтобы он был ограничен как  $\|\varepsilon_k^d\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$  и  $\|\varepsilon_k\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$  для некоторого  $\bar{\varepsilon}$ . Ключевой идеей для учета зашумленных измерений является ослабление ограничения-равенства (2.6). При зашумленной начальной траектории  $(u_{[t-n, t-1]}, \tilde{y}_{[t-n, t-1]})$  длины  $n$ , предлагается следующая модификация (2.5)-(2.9).

$$J_L^*(u_{[t-n, t-1]}, \tilde{y}_{[t-n, t-1]}) = \min_{\alpha(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t), \sigma(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)) + \lambda_\alpha \bar{\varepsilon} \|\alpha(t)\|_2^2 + \lambda_\sigma \|\sigma(t)\|_2^2 \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) + \sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(\tilde{y}^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \bar{u}_k \in \mathbb{U}, \quad (3.4)$$

$$\|\sigma_k(t)\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}(1 + \|\alpha(t)\|_1), k \in \mathbb{I}_{[0,L-1]}. \quad (3.5)$$

По сравнению с задачей (2.5-2.9) траектория выходных данных  $\tilde{y}^d$  и начальный выходной сигнал  $\tilde{y}_{[t-n,t-1]}$ , полученные из онлайн измерений, были заменены их зашумленными аналогами. Также были добавлены следующие элементы:

1. Вспомогательная переменная  $\sigma$  для онлайн измерений  $\tilde{y}_{[t-n,t-1]}$  и для зашумленных данных  $\tilde{y}^d$ , используемых для предсказаний.
2. Квадратичная норма для  $\sigma$  и  $\alpha$  с весами  $\lambda_\alpha \bar{\varepsilon}, \lambda_\sigma > 0$ , норма  $\alpha$  зависит от уровня шума.

Приведенная выше регуляризация по  $l_2$ -норме для  $\alpha(t)$  означает, что предпочтительны небольшие значения  $\|\alpha(t)\|_2^2$ . Поскольку зашумленная матрица Ганкеля  $H_{L+n}(\tilde{y}^d)$  умножается на  $\alpha(t)$  в (3.2), это неявно снижает влияние шума на точность предсказания. Интуитивно понятно, что при увеличении  $\lambda_\alpha$  член  $\lambda_\alpha \bar{\varepsilon} \|\alpha(t)\|_2^2$  снижает сложность описания системы (3.2), аналогично методам регуляризации в линейной регрессии, что позволяет найти компромисс между производительностью отслеживания и избеганием переобучения. Для теоретических результатов  $\lambda_\sigma$  может быть выбрано равным нулю, поскольку  $\sigma(t)$  уже становится малым из-за ограничения (3.5). Однако ограничение (3.5) невыпукло, но им можно пренебречь, если  $\lambda_\sigma$  достаточно большое. Выбор норм в ограничении (3.5) не зависит от норм в стоимости и следует из оценки  $l_\infty$ -шума и доказательства верхней границы функции цены (лемма 1 в [3]) и рекурсивной выполнимости (предложение 1 в [3]).

## 3.2 $n$ -Шаговая схема управления на основе МРС

В этой главе мы рассматриваем управление по замкнутому контуру, полученное в результате применения (3.1)-(3.5) в  $n$ -шаговой схеме МРС. Чтобы быть более точным, мы рассматриваем сценарий, в котором сразу после решения (3.1)-(3.5) первые  $n$  вычисленных входных сигналов применяются к системе. После этого горизонт сдвигается на  $n$  шагов, прежде чем вся схема повторяется.

## Алгоритм 2 (n-шаговая схема управления на основе MPC)

1. В момент времени  $t$  взять прошлые  $n$  измерений  $\{u_{[t-n, t-1]}, \tilde{y}_{[t-n, t-1]}\}$  и решить задачу (3.1)-(3.5).
2. Взять за управление  $u_{[t, t+n-1]} = \bar{u}_{[t, n-1]}^*(t)$ .
3. Установить  $t = t + n$  и вернуться к пункту 1).

Задача (3.1) - (3.4) – это строго выпуклая квадратичная задача и она может быть эффективно решена. Однако ограничение на  $\sigma$  в (3.5) невыпукло из-за зависимости правой части от  $\|\alpha(t)\|_1$ , что затрудняет эффективную реализацию (3.1) - (3.5). Условие (3.5) требуется для доказательства рекурсивной допустимости и практической экспоненциальной устойчивости. Однако его можно заменить (выпуклым) ограничением  $\|\sigma_k(t)\|_\infty \leq c \cdot \bar{\varepsilon}$  для достаточно большой постоянной  $c > 0$  сохранением тех же теоретических гарантий. Как правило, больший выбор  $c$  увеличивает область притяжения, но также увеличивает размер экспоненциально устойчивого множества, к которому сходится замкнутый контур. Кроме того, ограничение (3.5) может быть реализовано неявно, выбирая  $\lambda_\sigma$  достаточно большим. В примерах моделирования было замечено, что ограничение (3.5) обычно выполняется (для достаточно большого выбора  $\lambda_\sigma$ ), не применяя его явно в задаче оптимизации, и, таким образом, в большинстве случаев им можно пренебречь при онлайн-оптимизации.

**Замечание 1** Вспомним номинальный случай из главы 2, где  $\bar{\varepsilon} = 0$ , что в условиях новой задачи означает, что в (3.5)  $\sigma = 0$ . Также при  $\bar{\varepsilon} = 0$  исчезнет регуляризация  $\alpha$ , а динамика системы (3.2) и начальные условия (3.3) приблизятся к своим номинальным аналогам. Таким образом, при  $\bar{\varepsilon} = 0$  задача (3.1) - (3.5) сводится к номинальной задаче (2.5) - (2.9).

# ГЛАВА 4

## ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРЕМЕНТЫ

В данной главе применим обычную и робастную схемы управления МРС из глав 2 и 3 для управления системы из четырёх сообщающихся резервуаров. А также приведём и проанализируем результаты, полученные их программными реализациями.

### 4.1 Постановка задачи

Рассмотрим пример, который описывает систему из четырёх сообщающихся резервуаров [3], смотрите рисунок 4.1.

Это хорошо изученная в теории управления и в частности в теории МРС система. Она описывает достаточно медленный и устойчивый динамический процесс. Однако, известно также, что при выборе короткого горизонта управления система может стать неустойчивой. Линеаризованная динамика системы в дискретном времени описывается уравнениями

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k.$$

Целью управления будет являться отслеживание заданного значения системы

$$u^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y^s = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.77 \end{bmatrix},$$

Предположим, что системные матрицы неизвестны, но доступна одна траектория входа-выхода  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  длины  $N = 400$ , которая генерируется путем равномерной выборки  $u_k^d$  из  $[-1, 1]^2$ . Горизонт прогнозирования установим в  $L = 30$ , и следующие параметры  $Q = 3 \cdot E_2$ ,  $R = 10^{-4} \cdot E_2$ ,  $\lambda_\sigma = 1000$ ,  $\lambda_\alpha \bar{\varepsilon} = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.005$ .

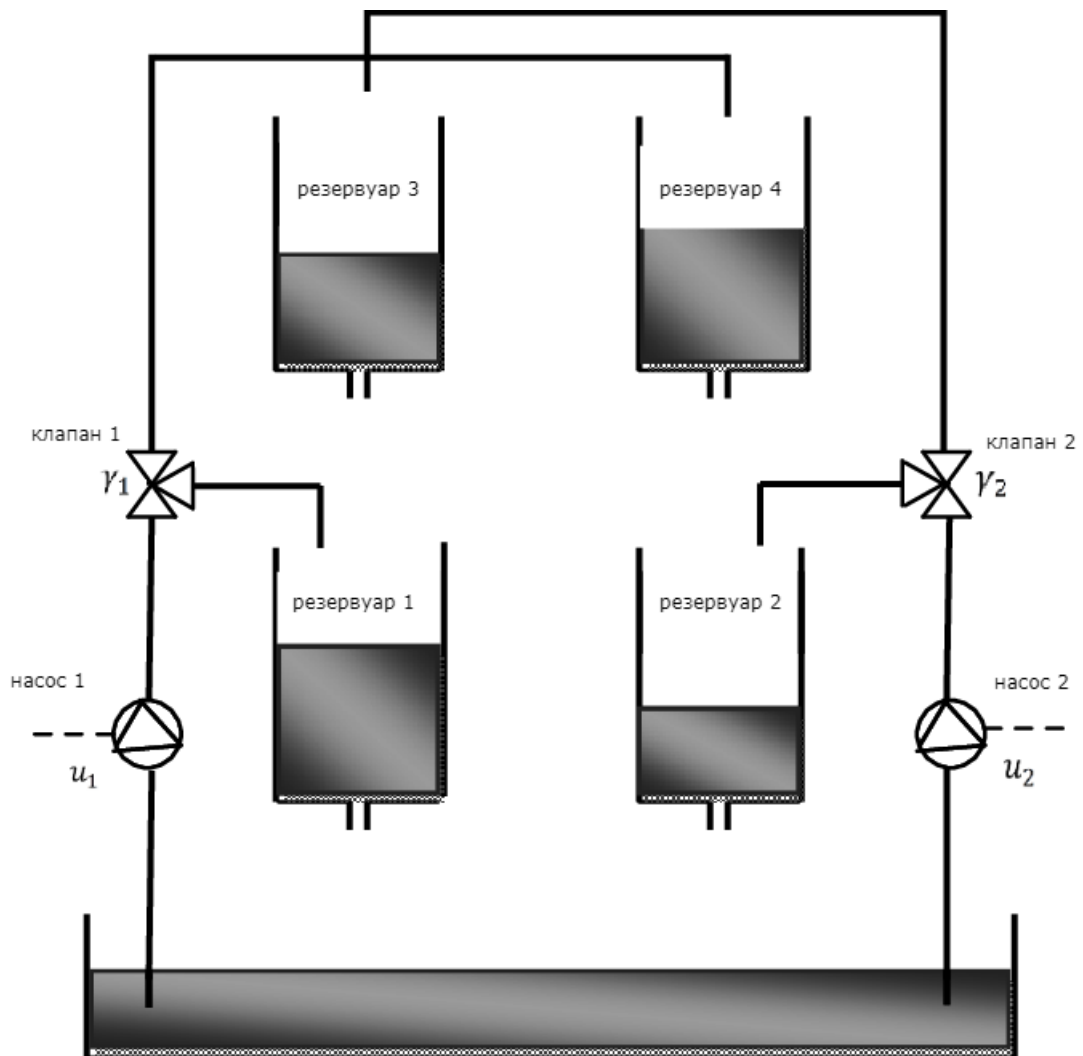


Рис. 4.1: Схема системы из четырёх сообщающихся резервуаров

## 4.2 Программная реализация алгоритмов

Рассмотрим способ реализации алгоритмов 1-2 на языке Matlab.

Рассчитаем траекторию входных и выходных сигналов  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ .

```

for i = 1:N
    uData(1, [i * 2 - 1 i * 2]) = [ - 1 + 2 / N * (i - 1)];
    yData(1, [i * 2 - 1 i * 2]) = [(C * curX)];
    curX = A * curX + B * uData(1, [i * 2 - 1 i * 2])';
end

```

Сперва зададим матрицу и вектор ограничений-равенств для quadprog.  
Для алгоритма (1):

```

for i = 1:4:(L + n) * 4
    Aeq(i, i) = 1;
    Aeq(i + 1, i + 1) = 1;
end

```

```

    Aeq(i + 2, i + 2) = 1;
    Aeq(i + 3, i + 3) = 1;
    hIndex = fix(i / 4) + 1;
    Aeq(i, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 1, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 2);
    Aeq(i + 2, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 3, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 2);
end
j = 0;
for i = (L + n) * 4 + 1: numel(Aeq(:, 1))
    Aeq(i, steadyFirstIndex + j) = 1;
    j = j + 1;
end
beq(1, (L + n) * 4 + 1:(L + n) * 4 + (L * 4)) = 1;

```

Для алгоритма (2):

```

for i = 1:4:(L + n) * 4
    Aeq(i, i) = 1;
    Aeq(i + 1, i + 1) = 1;
    Aeq(i + 2, i + 2) = 1;
    Aeq(i + 3, i + 3) = 1;
    hIndex = fix(i / 4) + 1;
    Aeq(i, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 1, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 2);
    Aeq(i + 2, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 3, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 2);

    Aeq(i + 2, sigmaShift + sigmaIndex) = 1;
    Aeq(i + 3, sigmaShift + sigmaIndex + 1) = 1;

    sigmaIndex = sigmaIndex + 2;
end

```

Сведём задачу к минимизации функции

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T,$$

где  $H$  и  $f$  задаются следующим образом.

Для алгоритма (1):

```

quadH = zeros(((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4));
quadF = zeros(1, ((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4));
for i = n * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    quadH(i, i) = coeffR;
    quadH(i + 1, i + 1) = coeffR;
    quadH(i + 2, i + 2) = coeffQ;
    quadH(i + 3, i + 3) = coeffQ;
    for j = steadyFirstIndex:4: numel(quadH(1, :))
        quadH(i, j) = -2 * uSteady(1) * coeffR;
        quadH(i + 1, j + 1) = -2 * uSteady(2) * coeffR;
    end
end

```

```

quadH(i + 2, j + 2) = -2 * ySteady(1) * coeffQ;
quadH(i + 3, j + 3) = -2 * ySteady(2) * coeffQ;
end
end
squares = L * 4 * ...
    (coeffR * uSteady(1)^2 + coeffR * uSteady(2)^2 ...
    + coeffQ * ySteady(1)^2 + coeffQ * ySteady(2)^2);
quadF(1, steadyFirstIndex) = squares;
quadH = quadH * 2;

```

Для алгоритма (2):

```

quadH = zeros(((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4) + (L + n) * 2);
quadF = zeros(1, ((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4) + (L + n) * 2);
for i = alphaShift+1:alphaRange(end)
    quadH(i,i)=lambdaAlphaEps;
end
for i = sigmaShift+1:sigmaRange(end)
    quadH(i,i)=lambdaSigma;
end
for i = n * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    quadH(i, i) = coeffR;
    quadH(i + 1, i + 1) = coeffR;
    quadH(i + 2, i + 2) = coeffQ;
    quadH(i + 3, i + 3) = coeffQ;
    for j = steadyFirstIndex:4:numel(quadH(1, :))
        quadH(i, j) = -2 * uSteady(1) * coeffR;
        quadH(i + 1, j + 1) = -2 * uSteady(2) * coeffR;
        quadH(i + 2, j + 2) = -2 * ySteady(1) * coeffQ;
        quadH(i + 3, j + 3) = -2 * ySteady(2) * coeffQ;
    end
end
end
squares = L * 4 * ...
    (coeffR * uSteady(1)^2 + coeffR * uSteady(2)^2 ...
    + coeffQ * ySteady(1)^2 + coeffQ * ySteady(2)^2);
quadF(1, steadyFirstIndex) = squares;
quadH = quadH * 2;

```

После начнём итерационный процесс от 0 до  $N$ . В начале которого будем вычислять вектор ограничений.

Для алгоритма (1):

```

for i = 1:4:L * 4
    beq(i) = uRes(j, 1);
    beq(i + 1) = uRes(j, 2);
    beq(i + 2) = yRes(j, 1);
    beq(i + 3) = yRes(j, 2);
    j = j + 1;
end

```

Для алгоритма (2):



```

Aeq(i + 2, sigmaRange) = 0;
Aeq(i + 3, sigmaRange) = 0;

beq(i) = uRes(j, 1);
beq(i + 1) = uRes(j, 2);
beq(i + 2) = yRes(j, 1);
beq(i + 3) = yRes(j, 2);
j = j + 1;

```

Зададим терминальные ограничения.

Для алгоритма (1):

```

for i = L * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    beq(i) = uSteady(1, 1);
    beq(i + 1) = uSteady(2, 1);
    beq(i + 2) = ySteady(1, 1);
    beq(i + 3) = ySteady(2, 1);
end

```

Для алгоритма (2):

```

for i = L * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    Aeq(i + 2, sigmaRange) = 0;
    Aeq(i + 3, sigmaRange) = 0;

    beq(i) = uSteady(1, 1);
    beq(i + 1) = uSteady(2, 1);
    beq(i + 2) = ySteady(1, 1);
    beq(i + 3) = ySteady(2, 1);
end

```

Решим задачи (2.5 - 2.8) и (3.1 - 3.5) с помощью quadprog.

```

options = optimoptions('quadprog', ...
    'MaxIter', 10000, ...
    'TolFun', 1e-15, ...
    'TolX', 1e-15);
[res, value] = quadprog(quadH, quadF, [], [], ...
    Aeq, beq, [], [], [], options);

```

И запишем результат.

```

j = timeIndex - n;
for i = 1:4:(L + n) * 4
    uRes(j, 1) = res(i);
    uRes(j, 2) = res(i + 1);
    [dsResY, dsResX] = dynamicSystemFunc(uRes(j,:) ', xRes(j,:) ');
    yRes(j,:) = dsResY;
    j = j + 1;
    xRes(j,:) = dsResX';
end

```

### 4.3 Результаты

На рисунках приведены результаты вычислений. Красная и фиолетовая прямые – отслеживаемые значения  $y_1^s$ ,  $y_2^s$ , соответственно. Синяя и желтая кривые – полученные в ходе выполнения программы значения  $y_1$ ,  $y_2$

На графиках 4.2 и 4.3 видно, что значения выходных сигналов  $y_1$ ,  $y_2$  достигают отслеживаемых значений  $y_1^s$ ,  $y_2^s$ . Следовательно, замкнутый контур в схеме из главы 2 рекурсивно разрешим и экспоненциально устойчив.

По результатам на графиках 4.4, 4.5 программной реализации схемы из главы 3 можно сделать вывод, что, при наличии зашумлений в условиях задачи, замкнутый контур относительно уровня шума практически экспоненциально устойчив.

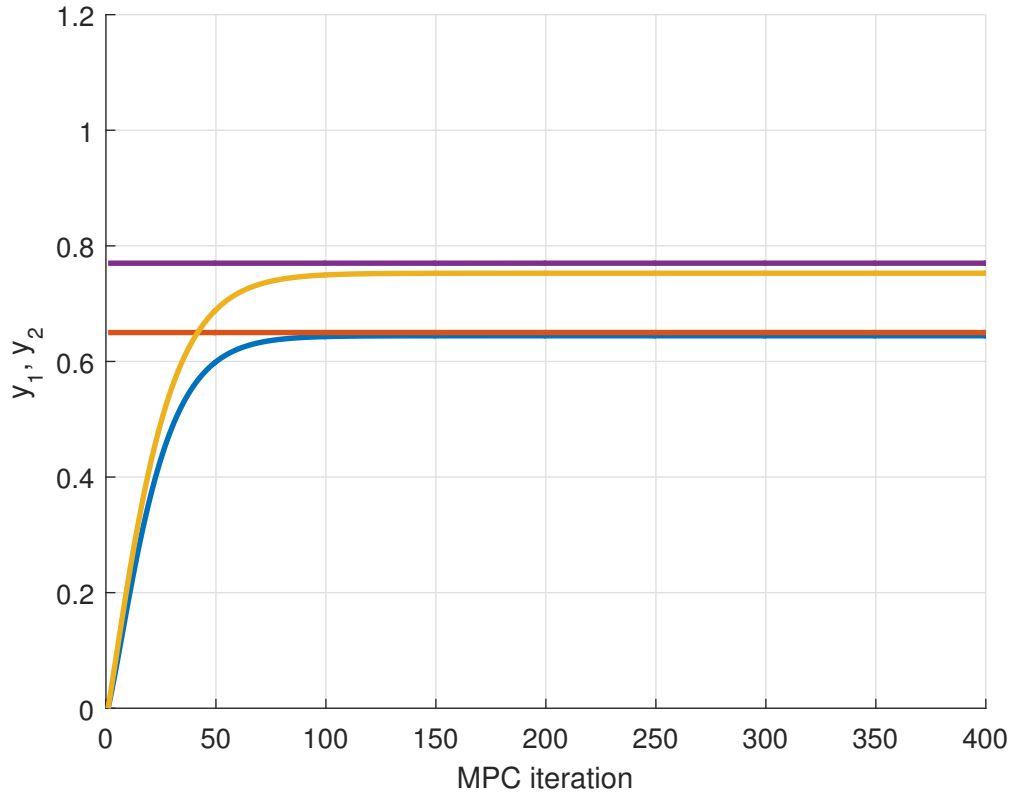


Рис. 4.2: Результаты программной реализации схемы из главы 2, при начальном состоянии  $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$

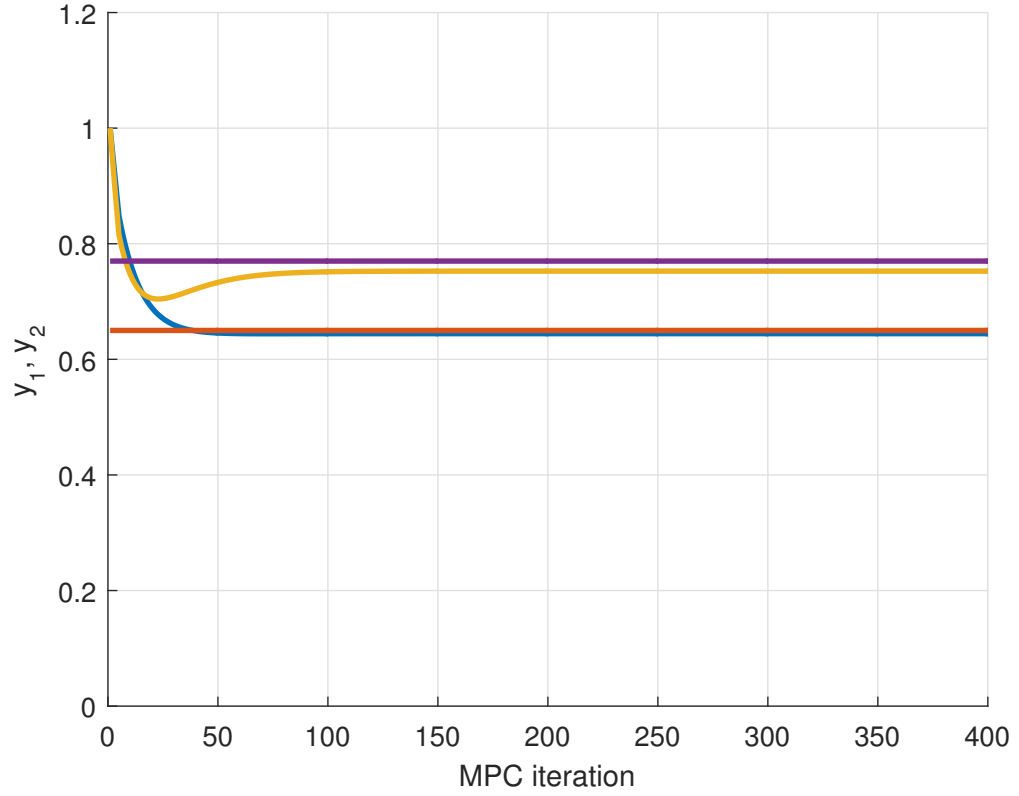


Рис. 4.3: Результаты программной реализации схемы из главы 2, при начальном состоянии  $x_0 = (1, 1, 1, 1)^T$

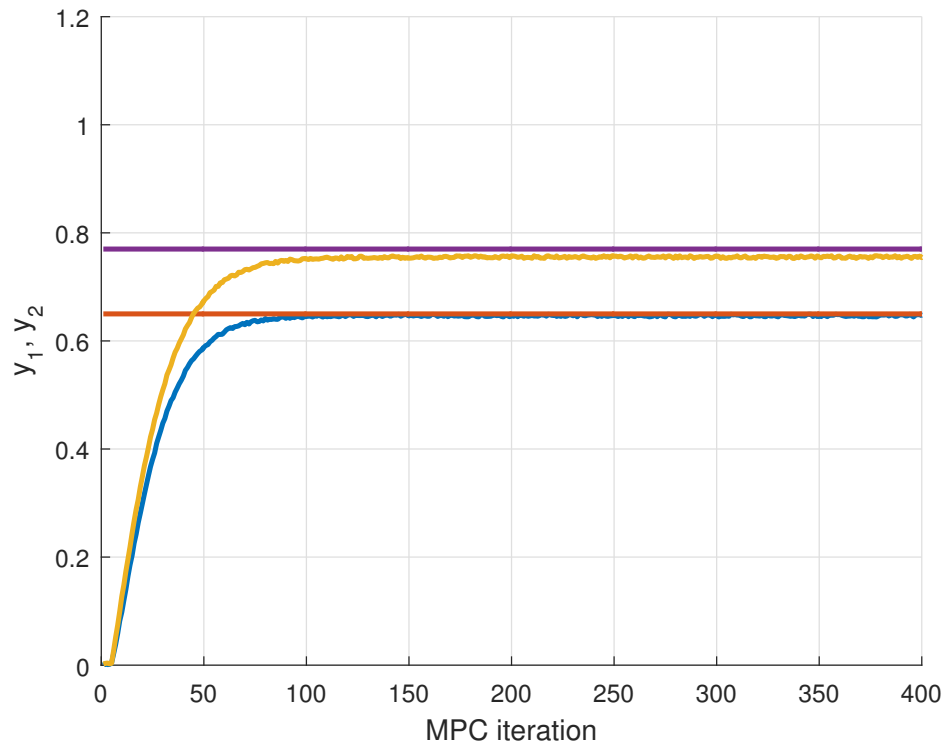


Рис. 4.4: Результаты программной реализации схемы из главы 3, при начальном состоянии  $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ .

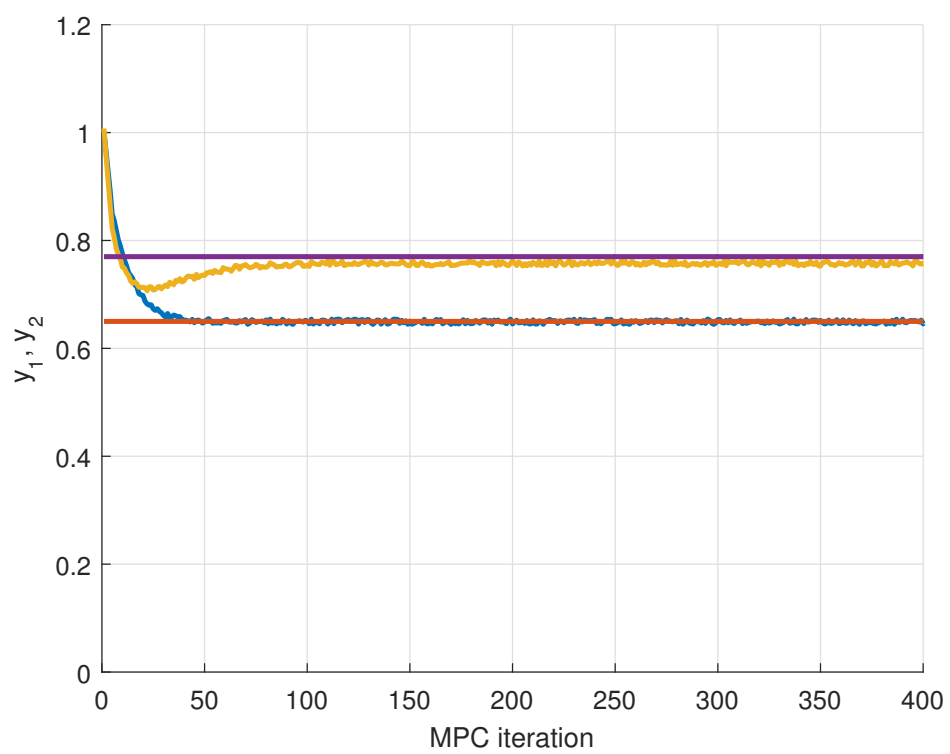


Рис. 4.5: Результаты программной реализации схемы из главы 3, при начальном состоянии  $x_0 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описанны и проанализированы схемы управления по прогнозирующей модели и показаны способы решений простейшей прогнозирующей задачи и задачи с терминальными ограничениями-равенствами, в которых для описания контролируемых процессов используются матрица данных Ганкеля вместо модели или динамической матрицы, то есть только прошлые измеренные данные без какого-либо предварительного шага идентификации системы. А также программно реализованы схемы для управления хорошо известной в теории МРС линейной системы в дискретном времени, которая описывает систему из четырёх сообщающихся резервуаров, и приведены результаты, по которым можно сделать вывод, что при малой амплитуде шума и при правильно настроенных параметрах замкнутый контур в  $n$ -ступенчатой схеме МРС рекурсивно осуществим и относительно уровня шума практически экспоненциально устойчив.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 2 Методы оптимизации. Учебное пособие / В.В. Альсевич [и др.] – Мн.: «Четыре четверти», 2011.
- 3 Berberich, J. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees / J. Berberich, Johannes Köhler, Matthias A. Müller, F. Allgöwer // arXiv, 2019 – 15p. (preprint arXiv:1906.04679v1).
- 4 Yang, H. A data-driven predictive controller design based on reduced hankel matrix / H. Yang, S. Li // Asian Control Conference: proc. of the 10th ACC – 2015. – 7p.
- 5 Coulson, J. Data-enabled predictive control: in the shallows of the DeePC / J.Coulson, J. Lygeros, F. Dörfler // European Control Conference: proc of the 18thECC. – 2019. – P. 307-312.