БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОУ: кафедра методов оптимального управления

УПРАВЛЕНИЕ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Кулешов Владислав Вячеславович

Цель работы

Объектом исследования дипломной работы являются линейные стационарные системы, для которых неизвестны их математические модели в пространстве состояний, однако даны априорные траектории входных и выходных переменных, на основе которых требуется строить обратные связи, обеспечивающие стабилизацию рассматриваемой системы.

Целью работы является реализация методов управления по прогнозирующей модели для стабилизации исследуемой линейной стационарной системы на основе доступных априорных данных, как точных, так и содержащих шум во входных переменных.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему G вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k; \; x_0 = \overline{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \; k = 0, \dots, N-1,$$

где (A, B, C, D) – минимальная реализация G;
$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы в момент времени t;
$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ – значение управляющего воздействия в момент времени t;
$y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ – выходной сигнал.

Определение

Последовательность $\{u_k, y_k\}_{k=0}^{N-1}$ *– траектория линейной стационарной системы* G*, если существуют начальное состояние* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$*, а также соответсвующая траектория* $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ *такая, что*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k;\ x_0 = \overline{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k,\ k = 0, \dots, N-1,$$

(A, B, C, D) *– минимальные реализация* G*.*

Определение

$\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ *с* $u_k \in \mathbb{R}^r$ *постоянно возбуждающая порядка* L*, если* $\mathrm{rank}(H_L(x)) = nL$*.*

Теорема

Предположим, что $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ *– траектория линейной стационарной системы* G*, где* u *– постоянно возбуждающее управление порядка* L*, т.е.* $rank(H_L(u)) = nL$*.*
Тогда $\{\overline{u}_k, \overline{y}_k\}_{k=0}^{L-1}$ *– траектория* G*, тогда и только тогда, когда* $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{N-L+1}$ *такое, что*

$$\begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{y} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Задача с терминальными ограничениями

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}) = \min_{\alpha(t)} \min_{\overline{u}(t),\overline{y}(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}_k(t), \overline{y}_k(t)) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[-n,-L-1]}(t) \\ \overline{y}_{[-n,-L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \overline{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \overline{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\ell(\overline{u}, \overline{y}) = \|\overline{u} - u^s\|_R^2 + \|\overline{y} - y^s\|_Q^2, \; Q, R \succ 0. \tag{6}$$

$$\overline{u}_k(t) \in \mathbb{U}, \overline{y}_k(t) \in \mathbb{Y}, k \in \mathbb{I}_{[0,L-1]}. \tag{7}$$

Алгоритм 1

Алгоритм

(Схема управления на основе MPC)

1. *В момент времени t взять прошлые n измерений $[u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}]$ и решить задачу (2)-(5).*
2. *Взять за управление $u_t = \overline{u}_0^*(t)$*
3. *Установить $t = t + 1$ и вернуться к пункту 1).*

Неточные данные

$$\widetilde{y}_k^d = y_k^d + \varepsilon_k^d;$$

$$\widetilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k;$$

$$\|\varepsilon_k^d\|_\infty \leq \overline{\varepsilon}$$

Задача с терминальными ограничениями

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, \widetilde{y}_{[t-n,t-1]}) = \min_{\alpha(t),\overline{u}(t),\overline{y}(t),\sigma(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\overline{u}_k(t), \overline{y}_k(t)) + \\ + \lambda_\alpha \overline{\varepsilon} \|\alpha(t)\|_2^2 + \lambda_\sigma \|\sigma(t)\|_2^2 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}(t) \\ \overline{y}(t) + \sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(\widetilde{y}^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \overline{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \overline{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \overline{u}_k \in \mathbb{U}, \quad (11)$$

$$\|\sigma_k(t)\|_\infty \leq \overline{\varepsilon}(1 + \|\alpha(t)\|_1), k \in \mathbb{I}_{[0,L-1]}. \quad (12)$$

Пример

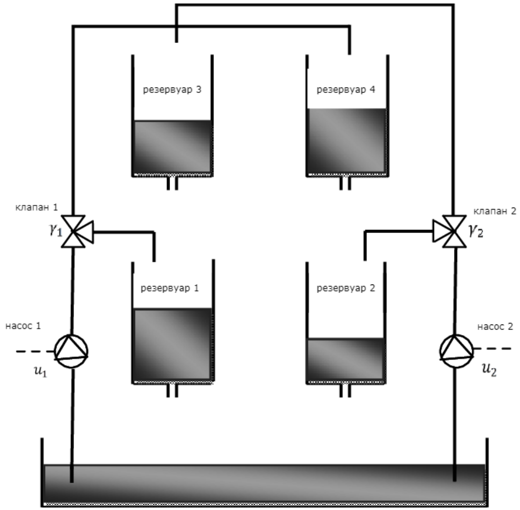

Рис.: Схема системы из четырёх сообщающихся резервуаров

Пример

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k.$$

$$(u^s, y^s) = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.77 \end{bmatrix}).$$

Предположим, что системные матрицы неизвестны, но доступна одна траектория $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$ длины $N = 400$, которая генерируется путем равномерной выборки u_k^d из $[-1, 1]^2$. Горизонт прогнозирования установим в $L = 30$, и следующие параметры $Q = 3 \cdot E_2$, $R = 10^{-4} \cdot E_2, \lambda_\sigma = 1000, \lambda_\alpha \overline{\varepsilon} = 0.1$.

Результаты

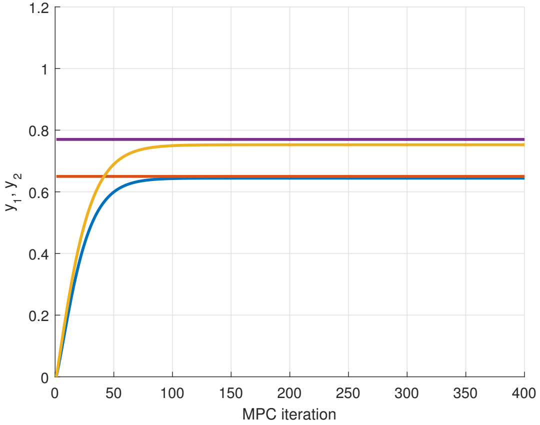

Рис.: Результаты программной реализации схемы с точными данными, при начальном состоянии $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$

Результаты

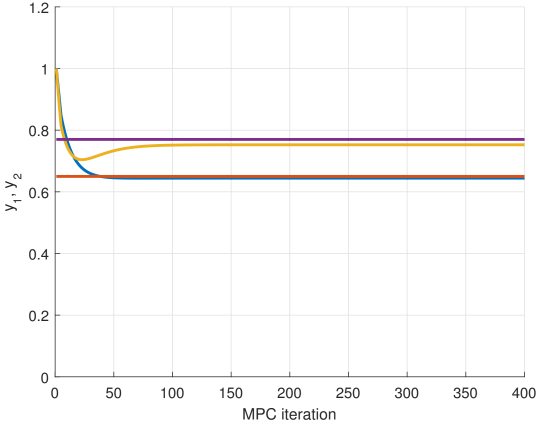

Рис.: Результаты программной реализации схемы с точными данными, при начальном состоянии $x_0 = (1, 1, 1, 1)^T$

Результаты

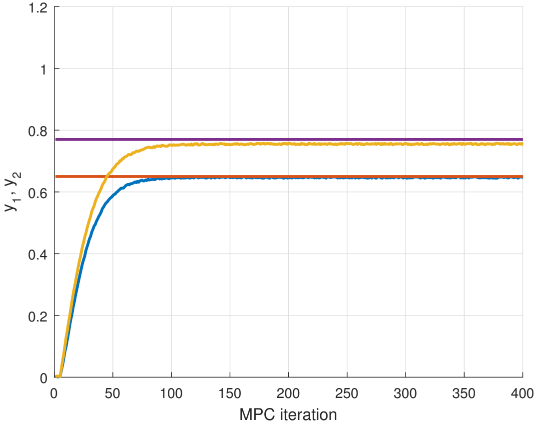

Рис.: Результаты программной реализации схемы с неточными данными, при начальном состоянии $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$.

Результаты

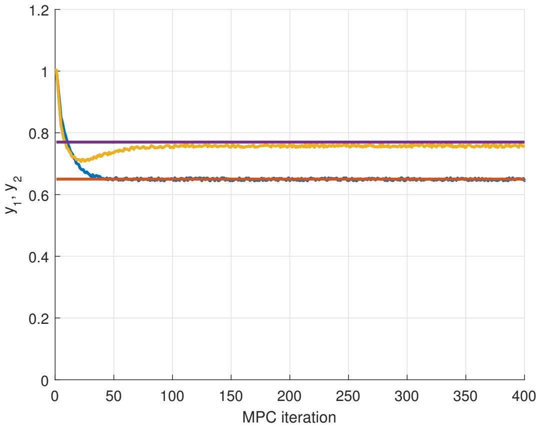

Рис.: Результаты программной реализации схемы с неточными данными, при начальном состоянии $x_0 = (1,1,1,1)^T$.

Спасибо за внимание!