

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ

Кафедра методов оптимального управления

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ  
МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
СИСТЕМ**

Отчёт по практике

Кулешова Владислава Вячеславовича  
студента 4 курса,  
специальность «прикладная  
математика»

Руководитель практики:  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

C.

<b>ГЛАВА 1 Теория . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1 Теория управления по прогнозирующей модели . . . . .	3
1.2 Основные предположения . . . . .	5
1.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами . . . . .	7
1.4 Робастная схема МРС с терминальными ограничениями . . . . .	8
1.5 n-Шаговая схема управления на основе МРС . . . . .	9
<b>ГЛАВА 2 Численные эксперименты . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 Пример . . . . .	11
2.2 Программная реализация алгоритмов . . . . .	12
2.3 Результаты . . . . .	14
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>17</b>

# ГЛАВА 1

## ТЕОРИЯ

### 1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Главная идея MPC [1] – использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Рассмотрим задачу стабилизации нелинейной системы

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), t = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  – состояние системы в момент времени  $t$ ;

$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$  – значение управляющего воздействия в момент времени  $t$ ;

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  – заданная функция.

Пусть  $f(0, 0) = 0$ , следовательно точка равновесия системы находится в начале координат, и при тривиальном управлении  $u \equiv 0$  система остаётся в состоянии покоя.

При заданном управлении  $u(\cdot)$ , траектория системы (1.1) обозначается как  $x(t|0, z, u(\cdot))$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , где начальное состояние системы в момент времени  $t = 0$  задаётся условием  $x(0) = z$ .

Управление  $u(\cdot)$  будем выбирать так, чтобы максимально приблизить траектории  $x(t|0, x_0, u(\cdot))$ ,  $t = 0, 1, \dots, N$ , к началу координат.

**Определение 1** Стоимость этапа – функция  $l(x(t), u(t))$  вдоль траектории  $x(\cdot)$  и управления  $u(\cdot)$ , с помощью которой для всех моментов времени  $t = 0, 1, \dots$  оценивается качество выбранного управления  $u(\cdot)$ .

Чаще всего стоимость этапа  $l$  выбирается следующим образом:

1. Взвешенная сумма расстояний до начала координат:

$$l(x, u) = \|x\|^2 + \lambda \|u\|^2, \quad \lambda \geq 0 \text{ – параметр, } \|\cdot\| \text{ – евклидова норма.}$$

2. Квадратичные функции

$$l(x, u) = x'Qx + u'Ru$$

$R, Q > 0$  – положительно-определенные матрицы.

Таким образом задача оптимального управления состоит в минимизации функционала, где минимум ищем вдоль траекторий  $x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), t = 0, 1, \dots, N - 1$ , системы (1.1) с начальным состоянием, совпадающим с текущим состоянием объекта  $x(0) = x^*(\tau)$  и при некоторых ограничениях:

$$J(x^*(\tau)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau), u(\cdot)), u(t)). \quad (1.2)$$

Ограничения для задачи (1.2) состоят из двух групп:

1. Физические ограничения системы (например, неотрицательность переменных, максимальное ограничение на управляющее воздействие и другие);
2. Ограничения, накладываемые алгоритмом МРС (например, терминальное ограничение вида  $x(N) = 0$  или принадлежность  $x(N)$  множеству  $X_f$ ).

Обозначим оптимальное программное решение задачи (1.2) через  $u^0(\cdot|x^*(\tau))$ . Для построения обратных связей будем считать, что на объект управления подано первое значение оптимальной программы

$$\mu(x^*(\tau)) = u^0(0|x^*(\tau)).$$

Далее в момент времени  $\tau + 1$  процесс повторяется для состояния  $x^*(\tau + 1)$ . Тогда в этот момент времени решается задача о минимизации следующего функционала:

$$J(x^*(\tau + 1)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{t=0}^{N-1} l(x(t|0, x^*(\tau + 1), u(\cdot)), u(t)).$$

При этом будет получено очередное значение обратной связи:

$$\mu(x^*(\tau + 1)) = u^0(0|x^*(\tau + 1)).$$

После процесс повторяется при  $\tau + 2, \tau + 3$  и так далее. Таким образом, алгоритм управления по прогнозирующей модели, в каждый момент времени  $\tau = 0, 1, \dots$  состоит из следующих шагов:

1. Измеряется текущее состояние  $x^*(\tau)$
2. Находится оптимальное программное решение  $u^0(t|x^*(\tau))$  задачи (1.2).

3. Подаётся на объект системы управляющее воздействие

$$\mu^*(\tau) \equiv \mu(x^*(\tau)) = \mu^0(0|x^*(\tau)).$$

Идея управления по прогнозирующей модели заключается в оптимизации будущего поведения системы в каждый момент времени, нахождение оптимального управления и его использования в качестве значений обратной связи для следующего момента времени.

## 1.2 Основные предположения

Пусть  $\mathbb{I}_{[a,b]}$  – множество целых чисел на отрезке  $[a, b]$ . Для вектора  $x$  и положительно определённой матрицы  $P = P^T > 0$  запишем  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ . Далее определим максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $P$   $\lambda_{\min}(P)$  и  $\lambda_{\max}(P)$ .

Для матриц  $P_1 = P_1^T, P_2 = P_2^T$  запишем,

$$\lambda_{\min}(P_1, P_2) = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\},$$

$$\lambda_{\max}(P_1, P_2) = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\}.$$

Также  $\|x\|_2, \|x\|_1, \|x\|_\infty$  – Евклидовы,  $\ell_1$  и  $\ell_\infty$  нормы  $x$ , соответственно. Для  $\delta > 0$ , мы определим  $\mathbb{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq \delta\}$ .

Из последовательности  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$  составим матрицу Ганкеля

$$H_L(x) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-L} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-L+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_L & \dots & x_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$x_{[a,b]} = \begin{bmatrix} x_a \\ \vdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

**Определение 2**  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$  с  $x_k \in \mathbb{R}^n$  постоянно возбуждающая порядка  $L$ , если  $\text{rank}(H_L(x)) = nL$ .

Цель работы – управление неизвестной линейной стационарной системой  $G$  с порядком  $n$ , с  $m$  входами и  $p$  выходами.

**Определение 3** Последовательность  $\{u_k, y_k\}_{k=0}^{N-1}$  – траектория линейной стационарной системы  $G$ , если существуют начальное состояние  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , а также соответствующая траектория  $\{x_k\}_{k=0}^N$  такая, что

$$x_{k+1} = Ax_{k+1} + Bu_k; \quad x_0 = \bar{x},$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$(A, B, C, D)$  – минимальные реализации  $G$ .

**Теорема 1.1** Предположим, что  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  – траектория линейной стационарной системы  $G$ , где  $u$  – постоянно возбуждающее управление порядка  $L+n$ .

Тогда  $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{L-1}$  – траектория  $G$ , тогда и только тогда, когда  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{N-L+1}$  такое, что

$$\begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

**Определение 4** Пара  $(u^s, y^s) \in \mathbb{R}^{m+p}$  – положение равновесия линейной стационарной системой  $G$ , если последовательность  $\{\bar{u}_k, \bar{y}_k\}_{k=0}^{n-1}$  с  $(\bar{u}_k, \bar{y}_k) = (u^s, y^s) \forall k \in \mathbb{I}[0, n-1]$  – траектория  $G$ .

Для равновесия  $(u^s, y^s)$  мы определим  $u_n^s, y_n^s$  как столбец векторов содержащий  $n$  раз  $u^s$  и  $y^s$ , соответственно. Предположим, что система подчиняется ограничениям,  $u_t \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, y_t \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \forall t \geq 0$ , и предположим, что  $(u^s, y^s) \in \text{int}(\mathbb{U} \times \mathbb{Y})$ .  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  – априори измеряемые траектории длиной  $N$ , использующиеся в (1.3). Прогнозируемые входные и выходные траектории в момент времени  $t$  в течение некоторого горизонта прогнозирования  $L$  записываются как  $\{\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)\}_{k=-n}^{L-1}$ . Обратим внимание, что индексы времени начинаются с  $k = -n$ , так как последние  $n$  входов и выходов будут использоваться для вызова уникального начального состояния в момент времени  $t$ . Кроме того, вход с обратной связью, состояние в некоторой минимальной реализации и выход в момент времени  $t$  обозначаются как  $u_t, x_t, y_t$ , соответственно.

### 1.3 Задача с терминальными ограничениями-равенствами

В этом пункте рассмотрим простое терминальное ограничение, которое может быть включено непосредственно в структуру управления данными MPC.

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}) = \min_{\alpha(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)) \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(y^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[L-n,L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[L-n,L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\bar{u}_k(t) \in \mathbb{U}, \bar{y}_k(t) \in \mathbb{Y}, k \in \mathbb{I}_{[0,L-1]}. \quad (1.8)$$

Терминальное ограничение-равенство (1.7) подразумевает, что  $\bar{x}_L(t)$ , который является внутренним состоянием, предсказанным на  $L$  шагов вперед, соответствующей предсказанной траекторией, выравнивается с постоянным состоянием  $x^s$ , соответствующим  $(u^s, y^s)$ , то есть  $\bar{x}_L(t) = x^s$  в любой минимальной реализации. В то время как задача требует, чтобы  $(u^s, y^s)$  было равновесием неизвестной системы по определению (4), это требование может быть отброшено, когда  $(u^s, y^s)$  заменено искусственным равновесием, которое также оптимизируется онлайн. Расширение представленной схемы MPC до такой настройки является предметом будущей работы. Как и в стандартном MPC, задача решена в виде отступающего горизонта, который обобщен в алгоритме (1).

#### Алгоритм 1 (Схема управления на основе MPC)

1. В момент времени  $t$  взять прошлые  $n$  измерений  $u_{[t-n,t-1]}, y_{[t-n,t-1]}$  и решить задачу.

2. Взять за управление  $u_t = \bar{u}_0^*(t)$
3. Установить  $t = t + 1$  и вернуться к пункту 1).

## 1.4 Робастная схема МРС с терминальными ограничениями

На практике выходной сигнал неизвестной системы  $G$  обычно является неточным. Это означает, что сложенные матрицы Ганкеля, зависящие от данных, в 1.3 не покрывают пространство траекторий системы точно и, следовательно, выходные траектории не могут быть точно предсказаны. Более того, измерения выходного сигнала с зашумлением входят в начальные условия в задаче (1.4-1.8), что еще больше ухудшает точность прогноза.

В данном разделе будет предполагаться, что выходные сигналы с ограниченным аддитивным шумом находятся в изначально доступных данных  $\tilde{y}_k^d = y_k^d + \varepsilon_k^d$  и в измерениях  $\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k$ . Мы не делаем никаких предположений о природе шума, но требуем, чтобы он был ограничен как  $\|\varepsilon_k^d\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$  и  $\|\varepsilon_k\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$  для некоторого  $\bar{\varepsilon}$ . Ключевой идеей для учета зашумленных измерений является ослабление ограничения равенства (1.5). При зашумленной начальной траектории  $(u_{[t-n,t-1]}, \tilde{y}_{[t-n,t-1]})$  длины  $n$ , предлагается следующая надежная модификация (1.4-1.8).

$$J_L^*(u_{[t-n,t-1]}, \tilde{y}_{[t-n,t-1]}) = \min_{\alpha(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t), \sigma(t)} \sum_{k=0}^{L-1} \ell(\bar{u}_k(t), \bar{y}_k(t)) + \lambda_\alpha \bar{\varepsilon} \|\alpha(t)\|_2^2 + \lambda_\sigma \|\sigma(t)\|_2^2 \quad (1.9)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) + \sigma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{L+n}(u^d) \\ H_{L+n}(\tilde{y}^d) \end{bmatrix} \alpha(t), \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[-n,-1]}(t) \\ \bar{y}_{[-n,-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{[t-n,t-1]} \\ y_{[t-n,t-1]} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{[L-n, L-1]}(t) \\ \bar{y}_{[L-n, L-1]}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n^s \\ y_n^s \end{bmatrix}, \bar{u}_k \in \mathbb{U}, \quad (1.12)$$

$$\|\sigma_k(t)\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}(1 + \|\alpha(t)\|_1), k \in \mathbb{I}_{[0, L-1]}. \quad (1.13)$$

По сравнению с задачей (1.4-1.8) траектория выходных данных  $\tilde{y}^d$  и начальный выходной сигнал  $\tilde{y}_{[t-n, t-1]}$ , полученные из онлайн измерений, были заменены их зашумленными аналогами. Также были добавлены следующие элементы:

1. Вспомогательная переменная  $\sigma$  для онлайн измерений  $\tilde{y}_{[t-n, t-1]}$  и для зашумленных данных  $\tilde{y}^d$ , используемых для предсказаний.
2. Квадратичная норма для  $\sigma$  и  $\alpha$  с весами  $\lambda_\alpha \bar{\varepsilon}, \lambda_\sigma > 0$ , норма  $\alpha$  зависит от уровня шума.

## 1.5 n-Шаговая схема управления на основе MPC

В этой главе мы рассматриваем управление по замкнутому контуру, полученное в результате применения (1.9-1.13) в  $n$ -шаговой схеме MPC. Чтобы быть более точным, мы рассматриваем сценарий, в котором сразу после решения (1.9-1.13) первые  $n$  вычисленных входных сигналов применяются к системе. После этого горизонт сдвигается на  $n$  шагов, прежде чем вся схема повторяется.

### Алгоритм 2 (n-Шаговая схема управления на основе MPC)

1. В момент времени  $t$  взять прошлые  $n$  измерений  $\{u_{[t-n, t-1]}, \tilde{y}_{[t-n, t-1]}\}$  и решить задачу (1.9)-(1.13).
2. Взять за управление  $u_{[t, t+n-1]} = \bar{u}_{[t, n-1]}^*(t)$
3. Установить  $t = t + n$  и вернуться к пункту 1).

Задача (1.9-1.13) - это строго выпуклая квадратичная задача и она может быть эффективно решена. Однако ограничение на  $\sigma$  в (1.13) невыпукло из-за зависимости правой части от  $\|\alpha(t)\|_1$ , что затрудняет эффективную реализацию (1.9-1.13). (1.13) требуется для доказательства рекурсивной выполнимости и практической экспоненциальной устойчивости. Однако его можно заменить (выпуклым) ограничением  $\|\sigma_k(t)\|_\infty \leq c \cdot \bar{\varepsilon}$  для достаточно большой постоянной  $c > 0$  сохранением тех же теоретических гарантий. Как правило, больший выбор  $c$  увеличивает область притяжения, но также увеличивает размер экспоненциально устойчивого множества, к которому сходится замкнутый контур. Кроме того, ограничение (1.13) может быть реализовано неявно, выбирая  $\lambda_\sigma$  достаточно большим. В примерах моделирования было замечено, что ограничение (1.13) обычно выполняется (для достаточно большого выбора  $\lambda_\sigma$ ), не применяя его явно в задаче оптимизации, и, таким образом, в большинстве случаев им можно пренебречь при онлайн-оптимизации.

## ГЛАВА 2

### ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

#### 2.1 Пример

Рассмотрим пример, который описывает систему из 4 сообщающихся резервуаров [3]. Это хорошо изученная в теории управления и в частности в теории MPC система. Она описывает достаточно медленный и устойчивый динамический процесс. Однако, известно также, что при выборе короткого горизонта управления система может стать неустойчивой. Линеаризованная динамика системы в дискретном времени описывается уравнениями

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.921 & 0 & 0.041 & 0 \\ 0 & 0.918 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 0.924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.937 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.017 & 0.001 \\ 0.001 & 0.023 \\ 0 & 0.061 \\ 0.072 & 0 \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k.$$

Целью управления будет являться отслеживание заданного значения системы

$$(u^s, y^s) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.77 \end{bmatrix} \right).$$

Предположим, что системные матрицы неизвестны, но доступна одна траектория входа-выхода  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{N-1}$  длины  $N = 400$ , которая генерируется путем

равномерной выборки  $u_k^d$  из  $[-1, 1]^2$ . Горизонт прогнозирования установим в  $L = 30$ , и следующие параметры  $Q = 3 \cdot E_2$ ,  $R = 10^{-4} \cdot E_2$ ,  $\lambda_\sigma = 1000$ ,  $\lambda_\alpha \bar{\varepsilon} = 0.1$ .

## 2.2 Программная реализация алгоритмов

Рассмотрим способ реализации алгоритма (2) на языке Matlab. Сперва зададим матрицу и вектор ограничений-равенств для quadprog.

```

for i = 1:4:(L + n) * 4
    Aeq(i, i) = 1;
    Aeq(i + 1, i + 1) = 1;
    Aeq(i + 2, i + 2) = 1;
    Aeq(i + 3, i + 3) = 1;
    hIndex = fix(i / 4) + 1;
    Aeq(i, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 1, alphaRange) = -uHankel(hIndex, :, 2);
    Aeq(i + 2, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 1);
    Aeq(i + 3, alphaRange) = -yHankel(hIndex, :, 2);

    Aeq(i + 2, sigmaShift + sigmaIndex) = 1;
    Aeq(i + 3, sigmaShift + sigmaIndex + 1) = 1;

    sigmaIndex = sigmaIndex + 2;
end

```

Сведём задачу к минимизации функции

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T,$$

где  $H$  и  $f$  задаются следующим образом.

```

quadH = zeros(((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4) + (L + n) * 2);
quadF = zeros(1, ((L + n) * 4) + (N - (L + n) + 1) + (L * 4) + (L + n) * 2);
for i = alphaShift+1:alphaRange(end)
    quadH(i, i)=lambdaAlphaEps;
end
for i = sigmaShift+1:sigmaRange(end)
    quadH(i, i)=lambdaSigma;
end
for i = n * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    quadH(i, i) = coeffR;
end

```

```

quadH(i + 1, i + 1) = coeffR;
quadH(i + 2, i + 2) = coeffQ;
quadH(i + 3, i + 3) = coeffQ;
for j = steadyFirstIndex:4:numel(quadH(1, :))
    quadH(i, j) = -2 * uSteady(1) * coeffR;
    quadH(i + 1, j + 1) = -2 * uSteady(2) * coeffR;
    quadH(i + 2, j + 2) = -2 * ySteady(1) * coeffQ;
    quadH(i + 3, j + 3) = -2 * ySteady(2) * coeffQ;
end
squares = L * 4 * ...
    (coeffR * uSteady(1)^2 + coeffR * uSteady(2)^2 ...
    + coeffQ * ySteady(1)^2 + coeffQ * ySteady(2)^2);
quadF(1, steadyFirstIndex) = squares;
quadH = quadH * 2;

```

После начнём итерационный процесс от 0 до  $N$ . В начале которого будем вычислять вектор ограничений.

```

Aeq(i + 2, sigmaRange) = 0;
Aeq(i + 3, sigmaRange) = 0;

beq(i) = uRes(j, 1);
beq(i + 1) = uRes(j, 2);
beq(i + 2) = yRes(j, 1);
beq(i + 3) = yRes(j, 2);
j = j + 1;

```

Зададим терминальные ограничения.

```

for i = L * 4 + 1:4:(L + n) * 4
    Aeq(i + 2, sigmaRange) = 0;
    Aeq(i + 3, sigmaRange) = 0;

    beq(i) = uSteady(1, 1);
    beq(i + 1) = uSteady(2, 1);
    beq(i + 2) = ySteady(1, 1);
    beq(i + 3) = ySteady(2, 1);
end

```

Решим задачу (1.9 - 1.13) с помощью quadprog.

```

options = optimoptions('quadprog', ...
    'MaxIter', 10000, ...
    'TolFun', 1e-15, ...

```

```

    'TolX' , 1e-15);
[ res , value] = quadprog(quadH, quadF, [] , [] , ...
Aeq, beq, [] , [] , [] , options);

```

И запишем результат.

```

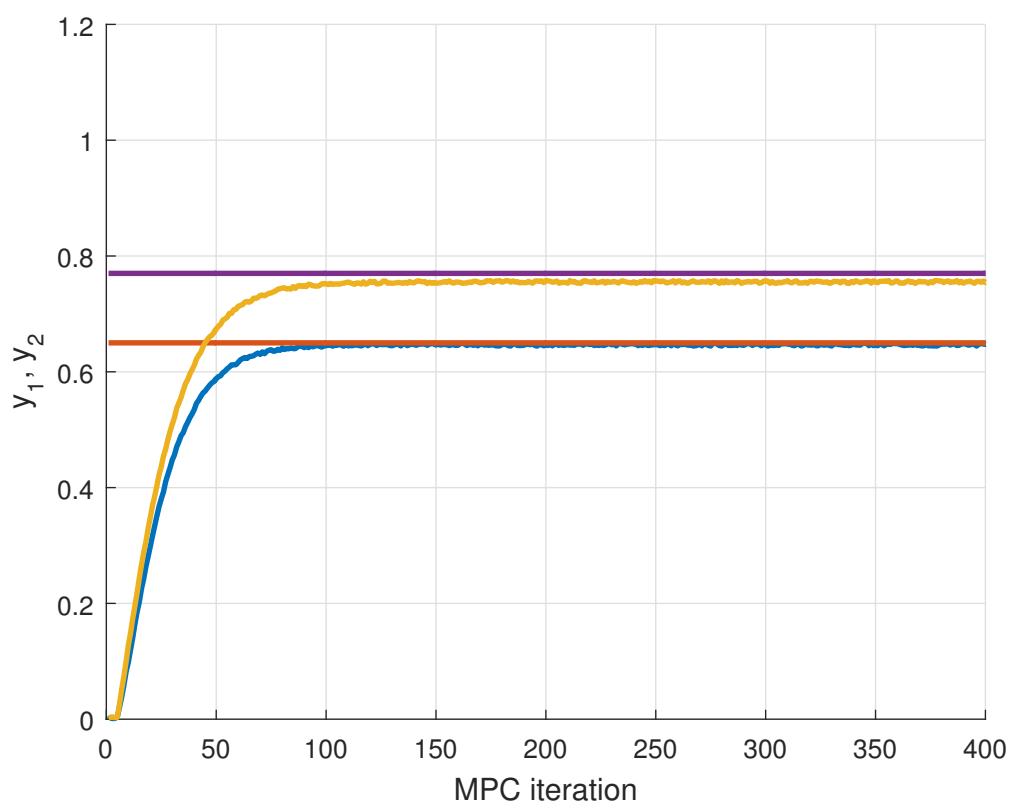
j = timeIndex - n;
for i = 1:4:(L + n) * 4
    uRes(j , 1) = res(i);
    uRes(j , 2) = res(i + 1);
    [dsResY , dsResX] = dynamicSystemFunc(uRes(j ,:) ' , xRes(j ,:) ' , A, B, C);
    yRes(j ,:) = dsResY + rand(2,1) * epsilon;
    j = j + 1;
    xRes(j ,:) = dsResX';
end

```

## 2.3 Результаты

Ниже приведен график результата программы, описанной выше. Прямые на графике – соответствующее отслеживаемые значения  $y_1^s$ ,  $y_2^s$ , которые, судя по графику, достигаются данной системой.

Результаты программной реализации алгоритма (2):



## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе описаны основные определения теории управления по прогнозирующей модели, проанализированы схемы управления по прогнозирующей модели и показаны способы решений простейшей прогнозирующей задачи и задачи с терминальными ограничениями-равенствами, в которых для прогнозирования используются только прошлые измеренные данные без какого-либо предварительного шага идентификации системы. А также с помощью численных экспериментов продемонстрирована эффективность данного метода.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 2 Методы оптимизации. Учебное пособие / В.В. Альсевич [и др.] – Мн.: «Четыре четверти», 2011.
- 3 Berberich, J. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control / J. Berberich, F. Allg?wer // arXiv, 2019 – 6p. (preprint arXiv:1903.10723).
- 4 Yang, H. A data-driven predictive controller design based on reduced hankel matrix / H. Yang, S. Li // Asian Control Conference: proc. of the 10th ACC – 2015. – 7p.
- 5 Coulson, J. Data-enabled predictive control: in the shallows of the DeePC / J.Coulson, J. Lygeros, F. D?rfler // European Control Conference: proc of the 18thECC. – 2019. – P. 307-312.