

1 Wstęp

W matematyce często rozważamy problemy następującej postaci

$$Au = 0, \quad (1)$$

gdzie $A : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami Banacha X, Y . Jeśli problem ma naturę wariacyjną, istnieje funkcjonal $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, który jest słabą pochodną odwzorowania A . Dzięki temu, szukanie rozwiązań problemu (1) sprowadza się często do wyznaczenia kresu dolnego wprowadzonego funkcjonału ϕ . Przy takich problemach z pomocą często przychodzą takie rezultaty jak twierdzenie o przełęczy górskiej, warunek Palais-Smale czy zasada Edekelanda. Takie podejście może być użyte m.in. przy rozważaniu problemu Dirichleta, w którym występuje operator Laplace'a. Innym sposobem jest wykazanie istnienia rozwiązań tego problemu wykorzystując lemat Maxa-Milgrama. W kolejnych rozdziałach tej pracy wprowadzimy pojęcie słabej pochodnej oraz jej podstawowe własności i przykłady. Następnie rozważymy problem Dirichleta za pomocą wprowadzonego wcześniej lematu Maxa-Milgrama.

2 Słaba pochodna

Definicja 1. Niech $u, v \in L^1(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym oraz $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie multiindeksem oraz $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że v jest słabą pochodną u oznaczaną przez

$$D^\alpha u = v, \quad (2)$$

jeśli

$$\int_U u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \psi dx \quad (3)$$

dla każdej funkcji $\psi \in C_c^\infty(U)$.

Przykład.1.1. Rozważymy funkcję

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{for } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{for } t \in (1, 2) \end{cases}.$$

Sprawdzimy, iż słabą pochodną funkcji u jest następująca funkcja

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{for } t \in (1, 2) \end{cases}.$$

Istotnie,

$$\int_0^2 u D\psi dx = \int_0^1 x D\psi dx + \int_1^2 D\psi dx = - \int_0^2 v \psi dx.$$

Pojęcie słabej pochodnej umożliwia nam rozważanie rezultatów wynikających m.in. ze wzoru na całkowanie przez części oraz pochodną iloczynu również dla funkcji, które niekoniecznie są k -krotnie różniczkowalne oraz wprowadzenie przestrzeni Sobolewa i pewnych własności zdefiniowanej powyżej słabej pochodnej.

Definicja 2. Mówimy, że funkcja $u \in L^p(U)$ należy do przestrzeni Sobolewa $W^{k,p}(U)$ jeśli dla każdego multiindeksu α takiego, że $|\alpha| \leq k$, słaba pochodna $D^\alpha u$ istnieje oraz należy do przestrzeni $L^p(U)$.

Definicja 3. (Norma w przestrzeni Sobolewa)

Jeśli $u \in W^{k,p}(U)$, definiujemy normę w przestrzeni Sobolewa następujący sposób

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{dla } p \in [1, \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u|, & \text{dla } p = \infty \end{cases}.$$

Twierdzenie 1. (Własności słabej pochodnej)

Niech $u, v \in W^{k,p}(U)$ oraz $|\alpha| < k$. Wówczas

(a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ oraz $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ dla dowolnych multiindeksów α, β takich, że $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(b) Dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v \in W^{k,p}(U)$$

oraz

$$D^\alpha (\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v.$$

(c) Jeśli $V \subset U$ jest zbiorem otwartym, to $u \in W^{k,p}(V)$.

Dowód. Rozpoczynamy od wykazania tezy (a). Niech β będzie multiindeksem takim, że $|\alpha| + |\beta| \leq k$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} \int_U D^\alpha u D^\beta \psi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta} \psi dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \psi dx = \\ &= (-1)^{\beta+2\alpha} \int_U D^{\alpha+\beta} u \psi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \psi dx. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że

$$\int_U D^\alpha u D^\beta \psi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \psi dx.$$

Stąd otrzymujemy następujący wniosek dla słabej pochodnej

$$D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

W analogiczny sposób możemy pokazać, że

$$D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Stąd

$$D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Przechodzimy teraz do wykazania tezy (b). Rozważmy

$$\begin{aligned} \int_U (\alpha_1 u + \alpha_2 v) D^\alpha \psi dx &= \alpha_1 \int_U u D^\alpha \psi dx + \alpha_2 \int_U v D^\alpha \psi dx \\ &= \alpha_1 (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi D^\alpha u dx + \alpha_2 (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi D^\alpha v dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U (\alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v) \psi dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$D^\alpha (\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v$$

oraz

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v \in W^{k,p}(U).$$

Aby wykazać tezę (c) korzystamy z własności całki. Skoro V jest podzbiorem U , to dostajemy

$$\int_V |D^\alpha u|^p dx \leq \int_U |D^\alpha u|^p dx < \infty.$$

Stąd

$$u \in W^{k,p}(V).$$

□

3 Lemat Maxa-Milgramma

Lemat 1. Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem dwuliniowym takim, że istnieją liczby $\alpha, \beta > 0$ spełniające warunek

$$|B(u, v)| \leq \alpha \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad (\text{ciągłość}) \quad (4)$$

oraz

$$\beta \cdot \|u\|_H^2 \leq B(u, u) \quad (\text{koercywność}) \quad (5)$$

dla dowolnych $u, v \in H$. Jeśli $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowym, ograniczonym funkcjonalem, to wówczas istnieje dokładnie jedno $u \in H$ takie, że

$$B(u, v) = f(v)$$

dla każdego $v \in H$.

Dowód. Rozpoczynamy od przypomnienia twierdzeniu Riesz o reprezentacji, które zostanie wykorzystane w dowodzie lematu 1.

Twierdzenie 2. Dla każdego elementu przestrzeni dualnej $u^* \in H^*$, gdzie H – przestrzeń Hilberta, istnieje dokładnie jedno $u \in H$ takie, że

$$u^*(v) = \langle u, v \rangle$$

dla każdego $v \in H$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza iloczyn skalarny. Odwzorowanie $u^* \rightarrow u$ jest liniowym izomorfizmem z H^* w H .

Zauważmy teraz, że dla każdego ustalonego elementu $u \in H$ odwzorowanie $v \mapsto B(u, v)$ jest liniowe oraz ograniczone na H . Z twierdzenia 2 wiemy, iż istnieje dokładnie jedno $w \in H$ takie, że

$$B(u, v) = \langle w, v \rangle \quad \text{dla } v \in H.$$

Oznaczmy $Au = w$. Wtedy

$$B(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \text{dla } u, v \in H. \quad (6)$$

Z nierówności (4) dostajemy

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = B(u, Au) \leq \alpha \|u\|_H \cdot \|Au\|_H.$$

Otrzymujemy zatem, że

$$\|Au\|_H^2 \leq \alpha \|u\|_H$$

dla $u \in H$ oraz pewnego $\alpha > 0$. Stąd $A : H \rightarrow H$ jest ograniczone. Ponadto, jeśli $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, u_1, u_2 \in H$, to wówczas

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v \rangle &= B(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 B(u_1, v) + \alpha_2 B(u_2, v) \\ &= \alpha_1 \langle Au_1, v \rangle + \alpha_2 \langle Au_2, v \rangle = \langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v \rangle \end{aligned}$$

dla $v \in H$. Stąd

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).$$

Zatem $A : H \rightarrow H$ jest liniowe. Ponadto,

$$\beta \|u\|_H^2 \leq B(u, u) \leq \langle Au, u \rangle \leq \|Au\|_H \cdot \|u\|_H.$$

Zatem

$$\beta \|u\|_H \leq \|Au\|_H$$

dla pewnego $\beta > 0$. Stąd i z ciągłości dostajemy domkniętość obrazu operatora A . \square

Pokażemy teraz, że operator A działa na cały zbiór H . Istotnie, jeśli istnieje $w \in H \setminus \{0\}$ taki, że w jest elementem dopełnienia ortogonalnego obrazu A . Prowadzi to jednak do sprzeczności, gdyż wtedy

$$\beta \|w\|_H^2 \leq B(w, w) \leq \langle Aw, w \rangle = 0. \quad (7)$$

Wnioskujemy zatem, że $A : H \rightarrow H$ jest ciągłą bijekcją. Jeśli $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe oraz ograniczone to z twierdzenia 2 dostajemy istnienie jednoznacznego rozwiązania $u \in H$ dla

$$B(u, v) = \langle Au, v \rangle = \langle w, v \rangle = f(v), \quad (8)$$

gdzie $v \in H$.

4 Zagadnienie Dirichleta

W tej części pracy wykażemy istnienie rozwiązania zagadnienia Dirichleta. Jak wcześniej zostało to już zaznaczone, dokonamy tego wykorzystując Lemat Maxa-Milgramma.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ oraz $f \in C(\Omega)$. Rozważmy problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{dla } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a.

Zauważmy, że dla dowolnej funkcji $v \in C_0^\infty(\Omega)$ dostajemy

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Zatem

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Korzystając z definicji słabej pochodnej dostajemy, że

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Stąd

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Dodatkowo zakładamy, że $f \in L^2(\Omega)$, $\Delta u, \Delta v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Oznaczmy teraz przez $W_0^{1,2}(\Omega)$ domknięcie zbioru $C_c^1(\Omega)$ w $W^{1,2}(\Omega)$.

Otrzymujemy wówczas problem znalezienia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takiego, że

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx = \int_{\Omega} f v dx \tag{9}$$

dla każdego $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$$

oraz $l : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Zauważmy, iż odwzorowanie $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwuliniowe oraz (na mocy nierówności Höldera i Poincare) spełnia nierówności

$$|B(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \right| \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 \cdot \|\Delta v\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \cdot \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2.$$

oraz

$$B(u, u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 \geq c \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Ponadto, $l : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe i ciągłe, gdyż

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{c} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

gdzie $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Na mocy lematu Maxa-Milgramma otrzymujemy istnienie jednoznacznego rozwiązania rozważanego problemu.