1 Wstęp

W matematyce często rozważamy problemy następującej postaci

$$Au = 0, \tag{1}$$

gdzie $A : X \to Y$ jest odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami Banacha $X,\ Y$. Jeśli problem ma naturę wariacyjną, istnieje funkcjonał $\phi : X \to \mathbb{R}$, który jest słabą pochodną odwzorowania A. Dzięki temu, szukanie rozwiązań problemu (1) sprowadza się często do wyznaczenia kresu dolnego wprowadzonego funkcjonału ϕ. Przy takich problemach z pomocą często przychodzą takie rezultaty jak twierdzenie o przełęczy górskiej, warunek Palais-Smale czy zasada Edekelanda. Takie podejście może być użyte m.in. przy rozważaniu problemu Dirichleta, w którym występuje operator Laplace'a. Innnym sposobem jest wykazanie istnienie rozwiązań tego problemu wykorzystując lemat Maxa-Milgramma. W kolejnych rozdziałach tej pracy wprowadzimy pojęcie słabej pochodnej oraz jej podstawowe własności i przykłady. Następnie rozważymy problem Dirichleta za pomocą wprowadzonego wcześniej lematu Maxa-Milgramma.

2 Słaba pochodna

Definicja 1. *Niech $u, v \in L^1(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym oraz $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ będzie multiindeksem oraz $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że v jest słabą pochodną u oznaczaną przez*

$$D^\alpha u = v, \tag{2}$$

jeśli

$$\int_U u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \psi dx \tag{3}$$

dla każdej funkcji $\psi \in C_c^\infty(U)$.

Przykład.1.1. Rozważymy funkcję

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{for } x \in (0,1] \\ 1, & \text{for } t \in (1,2) \end{cases}.$$

Sprawdzimy, iż słabą pochodną funkcji u jest następująca funkcja

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in (0,1] \\ 0, & \text{for } t \in (1,2) \end{cases}.$$

Istotnie,

$$\int_0^2 uD\psi dx = \int_0^1 xD\psi dx + \int_1^2 D\psi dx = -\int_0^2 v\psi dx.$$

Pojęcie słabej pochodnej umożliwia nam rozważanie rezultatów wynikających m.in. ze wzoru na całkowanie przez części oraz pochodną iloczynu również dla funkcji, które niekoniecznie są $k-$krotnie różniczkowalne oraz wprowadzenie przestrzeni Sobolewa i pewnych własności zdefiniowanej powyżej słabej pochodnej.

Definicja 2. *Mówimy, że funkcja $u \in L^p(U)$ należy do przestrzeni Sobolewa $W^{k,p}(U)$ jeśli dla każdego multiindeksu α takiego, że $|\alpha| \leqslant k$, słaba pochodna $D^\alpha u$ istnieje oraz należy do przestrzeni $L^p(U)$.*

Definicja 3. ***(Norma w przestrzeni Sobolewa)***
Jeśli $u \in W^{k,p}(U)$, definiujemy normę w przestrzeni Sobolewa następujący sposób

$$\|u\|_{W^{k,p}(u)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{dla } p \in [1,\infty) \\ \sum_{|\alpha|\leqslant k} \operatorname{ess\,sup}_U |D^\alpha u|, & \text{dla } p = \infty \end{cases}.$$

Twierdzenie 1. ***(Własności słabej pochodnej)***
Niech $u, v \in W^{k,p}(U)$ oraz $|\alpha| < k$. Wówczas

(a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ oraz $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ dla dowolnych multiindesków α, β takich, że $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

(b) Dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v \in W^{k,p}(U)$$

oraz

$$D^\alpha(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v.$$

(c) Jeśli $V \subset U$ jest zbiorem otwartym, to $u \in W^{k,p}(V)$.

Dowód. Rozpoczynamy od wykazania tezy (a). Niech β będzie multiindeksem takim, że $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie,

$$\int_U D^\alpha u D^\beta \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u D^{\alpha+\beta}\psi dx = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u\psi dx = \\ (-1)^{\beta+2\alpha} \int_U D^{\alpha+\beta} u\psi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u\psi dx.$$

Otrzymaliśmy, że

$$\int_U D^\alpha u D^\beta \psi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \psi dx.$$

Stąd otrzymujemy następujący wniosek dla słabej pochodnej

$$D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

W analogiczny sposób możemy pokazać, że

$$D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Stąd

$$D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u.$$

Przechodzimy teraz do wykazania tezy (b). Rozważmy

$$\begin{aligned}\int_U (\alpha_1 u + \alpha_2 v) D^\alpha \psi dx &= \alpha_1 \int_U u D^\alpha \psi dx + \alpha_2 \int_U v D^\alpha \psi dx \\ &= \alpha_1 (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi D^\alpha u dx + \alpha_2 (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi D^\alpha v dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U (\alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v) \psi dx.\end{aligned}$$

Zatem

$$D^\alpha(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 D^\alpha u + \alpha_2 D^\alpha v$$

oraz

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v \in W^{k,p}(U).$$

Aby wykazać tezę (c) korzystamy z własności całki. Skoro V jest podzbiorem U, to dostajemy

$$\int_V |D^\alpha u|^p dx \leqslant \int_U |D^\alpha u|^p dx < \infty.$$

Stąd

$$u \in W^{k,p}(V).$$

$\square$

3 Lemat Maxa-Milgramma

Lemat 1. *DO UZUPEŁNIENIA*

4 Zagadnienie Dirichleta

W tej części pracy wykażemy istnienie rozwiązania zagadnienia Dirichleta. Jak wcześniej zostało to już zaznaczone, dokonamy tego wykorzystując Lemat Maxa-Milgramma.

Niech $\Omega \subset R^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ oraz $f \in C(\Omega)$. Rozważmy problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{dla } x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{dla } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a.

Zauważmy, że dla dowolnej funkcji $v \in C_0^\infty(\Omega)$ dostajemy

$$\int_\Omega (-\Delta u) v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Zatem

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = \int_U f v dx.$$

Korzystając z definicji słabej pochodnej dostajemy, że

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Stąd

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Dodatkowo zakładamy, że $f \in L^2(\Omega), \Delta u, \Delta v \in L^2(\Omega, R^n)$. Oznaczmy teraz przez $W_0^{1,2}(\Omega)$ domknięcie zbioru $C_c^1(\Omega)$ w $W^{1,2}(\Omega)$.

Otrzymujemy wówczas problem znalezienia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ takiego, że

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx \tag{4}$$

dla każdego $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$B(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$$

oraz $l : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx.$$

Zauważmy, iż odwzorowanie $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest dwuliniowe oraz (na moce nierówności Höldera i Poincare) spełnia nierówności

$$|B(u,v)| = \left| \int_\Omega \Delta u \Delta v dx \right| \leqslant \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega, R^n)} \cdot \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega, R^n)} \leqslant \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \cdot \|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

oraz

$$B(u,u) = \int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega, R^n)} \geqslant c\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Ponadto, $l : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest liniowe i ciągłe, gdyż

$$|l(v)| = \left| \int_\Omega fv dx \right| \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \widetilde{c}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

gdzie $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$. Na mocy lematu Maxa-Milgramma otrzymujemy istnienie jednoznacznego rozwiązania rozważanego problemu.