HIMPUNAN

Muhammad Imron H

Universitas Gunadarma

HIMPUNAN

Himpunan : Sekumpulan objek-objek dengan syarat tertentu dan dapat didefinisikan secara jelas

Objek itu dinamakan unsur/elemen/anggota himpunan

Lambang yang menunjukkan himpunan adalah pasangan kurawal { }

Untuk menyatakan himpunan digunakan huruf Kapital

Untuk menyatakan anggota himpunan digunakan huruf kecil

Contoh : A = Himpunan warna lampu pengatur lalu lintas

A = {merah, kuning, hijau}

B = Kota besar di Jawa

B = {Jakarta, Bandung, Semarang, Yogyakarta, Surabaya}

Cara Menyatakan Himpunan

1. Cara Pendaftaran/ Pendataan (Roster Method) : menuliskan unsur-unsurnya

   Contoh : A = {ahad, senin, selasa, rabu, kamis, jumat, sabtu}

   B = {1, 3, 5, 7, 9, ... }

   C = {2, 3, 5, 7, 11, 13}

   D = {1, 4, 9, 16}

2. Cara menyebutkan syarat keanggotaannya (Cara pencirian/Rule method)

   Contoh : A = {nama hari dalam 1 pekan}

   B = {x| x bilangan ganjil}

   C = {x| x < 15, x ϵ Prima}

   D = {x| x = n^2 , n bilangan asli < 5 }

LATIHAN

1. Tuliskan himpunan berikut dengan cara pendaftaran (roster method)
   a. $A = \{x | x < 7, x \in \text{asli}\} = \{\}$
   b. $G = \{x | 0 < x < 16, x \text{ bilangan ganjil}\}$
   c. $W = \{x | x^2 - 1 = 0\}$
   d. $Z = \{\text{warna pelangi}\}$
   e. $K = \{x \mid 2 < x \leq 5, x \in R\}$

2. Tuliskan himpunan berikut dengan cara pencirian (rule method)
   a. $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   b. $G = \{1, 4, 9, 16\}$
   c. $F = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
   d. $H = \{4, 9, 5, 2, -1, 3\}$

Ada himpunan yang dapat dituliskan dengan cara roster method tetapi tidak dapat dituliskan dengan rule method

Ada himpunan yang dapat dituliskan dengan rule method tetapi tidak dapat dituliskan dengan cara pendaftaran

ISTILAH-ISTILAH DALAM HIMPUNAN

1. Anggota ($\in$) dan Bukan anggota ($\notin$)

   Setiap obyek dalam suatu himpunan adalah merupakan anggota dari himpunan tersebut

   Contoh : $x \in A$ dibaca "x anggota/unsur/elemen himpunan A"

   $x \notin B$ dibaca "x bukan anggota/unsur/elemen himpunan B"

2. Bilangan Cardinal menyatakan <u>banyaknya anggota himpunan</u>.

   Bilangan cardinal dari himpunan A dinotasikan dengan n(A) atau |A|

   Contoh : A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17} maka n(A) = |A| = 9

   B = {a, b, c, d, e, f} maka n(B) = |B| = 6

3. Himpunan Kosong : himpunan yang tidak mempunyai anggota

   dilambangkan dengan { } atau $\varnothing$

   Contoh : - Himpunan siswa SD berusia dibawah 3 tahun

   - Himpunan sepeda motor dengan kecepatan 500 km/jam

ISTILAH-ISTILAH DALAM HIMPUNAN

4. Himpunan Berhingga dan Tak berhingga

   Himpunan berhingga adalah himpunan yang banyaknya anggota himpunan berhingga. Jika tidak demikian dikatakan himpunan tersebut tak berhingga.

   Contoh : A = {q, w, e, r, d} B = {1, 2, 3, 4} → himpunan berhingga

   C = {2, 4, 6, 8, ...} D = {..., 5, 7, 9, ...} → himpunan takberhingga

5. Himpunan Sederajat / Ekivalen

   Dua himpunan A dan B dikatakan sederajat/ekivalen jika n(A) = n(B)

   Contoh : Jika A = {a, b, c, d, e} dan B = {3, 2, 4, 6, 1} maka n(A) = n(B) sehingga himpunan A dan B sederajat

6. Himpunan Sama

   Dua himpunan dikatakan sama jika kedua himpunan mempunyai anggota yang sama. Walaupun urutannya berbeda. (elemen-elemennya sama dan banyaknya anggota sama)

   Contoh : Jika A = {1, 2, 3, 4} dan B = {3, 2, 4, 1} maka A = B

ISTILAH-ISTILAH DALAM HIMPUNAN

7. Himpunan Semesta / HIMPUNAN UNIVERSAL / HIMPUNAN BESAR
   Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua elemen yang dibicarakan.
   Notasi dari himpunan semesta adalah S atau U.

8. Disjoin (Himpunan yang saling lepas)
   Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (A//B) jika tidak mempunyai anggota sekutu.
   Elemen A tidak termuat di B dan elemen B tidak termuat di A.
   Contoh : A = {2, 3, 5, 6, 1} dan B = {4, 7, 8, 9}

9. Sub Set / Sub Himpunan / Himpunan Bagian
   A adalah sub himpunan B (ditulis $A \subseteq B$) jika setiap elemen A merupakan elemen B
   Contoh : A = {1, 2, 3, 5, 7}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, dan C = {1, 3, 5}
   Dikatakan $A \subseteq B$, $C \subseteq A$, dan $C \subseteq B$

ISTILAH-ISTILAH DALAM HIMPUNAN

Beberapa sifat himpunan bagian :

a. Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan
b. Setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari dirinya sendiri
c. Jika $A \subseteq B$, dan $B \subseteq A$ maka $A = B$.
d. Himpunan A dikatakan **himpunan bagian sejati/Proper sub set** dari B **($A \subset B$)** jika A adalah himpunan bagian dari B dan ada unsur B yang tidak termuat dalam A.
e. **Himpunan semua sub set dari A** disebut **Himpunan Kuasa/Power set** dari A. Himpunan kuasa dari A dilambangkan dengan P(A)

Contoh : Jika $A = \{2,3\}$ maka semua sub set dari A adalah : $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, dan $\{2,3\}$

Sehingga $P(A) = \{ \varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

Jika $B = \{a, b, c\}$ maka $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Banyaknya anggota Himpunan kuasa dari suatu himpunan yang memiliki n anggota adalah sebanyak 2^n.

Contoh : Jika A = {2,3} maka P(A) = { ∅, {2}, {3}, {2,3}}

n(A) = 2 sehingga n(P(A)) = 2^2 = 4

Jika B = {a, b, c} maka P(B) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

n(B) = 3 sehingga n(P(B)) = 2^3 = 8

LATIHAN

Tentukan himpunan kuasa dari C = {1, 3, 5, 7}

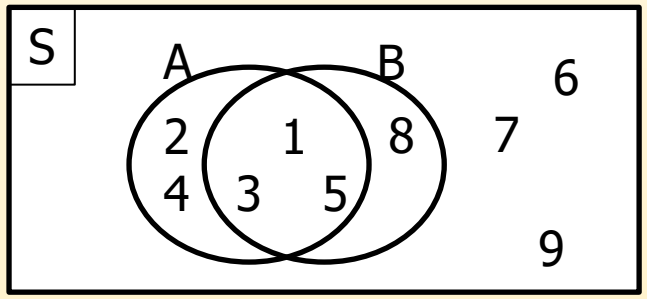
Diagram Venn

Diagram Venn digunakan untuk menggambarkan beberapa himpunan secara visual.

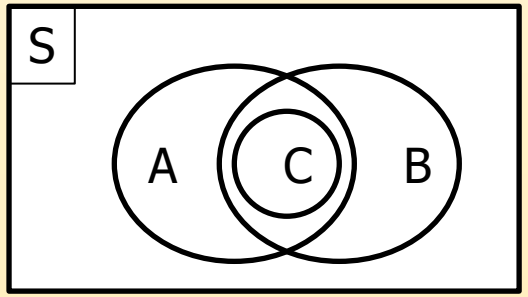
Pada diagram ini, himpunan semesta digambarkan dengan persegi panjang dan himpunan lainnya ditunjukkan dengan kurva lengkung tertutup.

Contoh :

1. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
   A = {1, 2, 3, 4, 5}
   B = {1, 3, 5, 8}



2. S = Himpunan Segitiga
   A = himpunan segitiga lancip
   B = Himpunan segitiga sama kaki
   C = Himpunan segitiga sama sisi



OPERASI HIMPUNAN

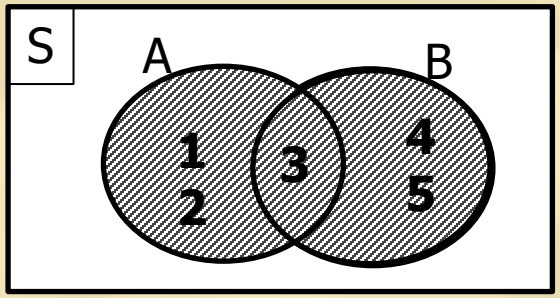
OPERASI HIMPUNAN

1. **Union** adalah gabungan dari dua himpunan atau lebih yang hasilnya merupakan seluruh anggota kedua himpunan tersebut.

   $A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ atau } x \in B\}$

   Misalnya : $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4,5\}$

   Maka, $A \cup B$ adalah $\{1,2,3,4,5\}$, atau

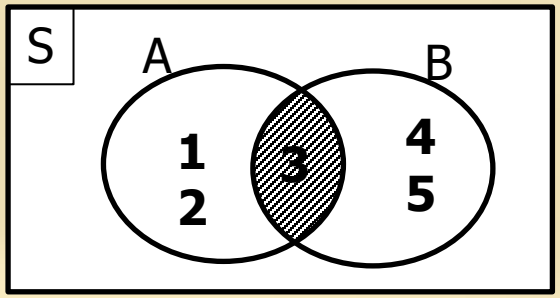


2. **Irisan** adalah bagian yang serentak menjadi anggota kedua himpunan tersebut (himpunan semua elemen dari kedua himpunan yang mempunyai unsur yang sama)

   $A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ dan } x \in B\}$

   Misalnya : $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,4,5\}$

   Maka, $A \cap B = \{3\}$



OPERASI HIMPUNAN

3. **Set Pengurangan/set difference** adalah selisih dua himpunan.

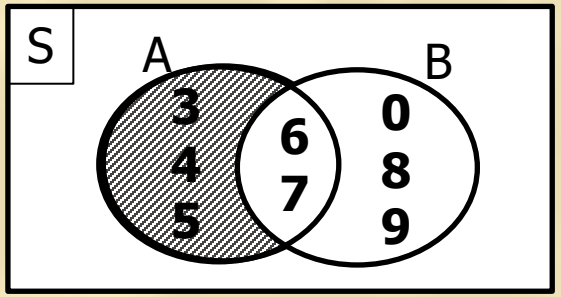
   Notasi dari set difference ini adalah – (tanda minus)

$$A - B = \{x;\ x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

Misalnya A = {3,4,5,6,7} dan B = {6,7,8,9,0}

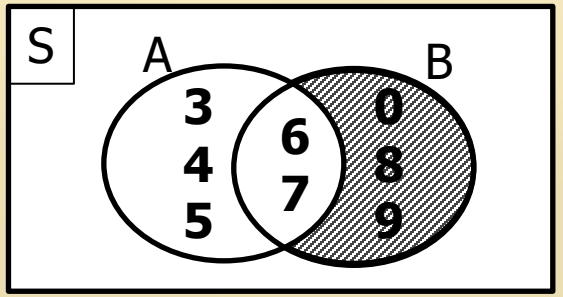
$A - B = \{x;\ x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

Maka, A – B = {3,4,5}



$B - A = \{x;\ x \in B \text{ dan } x \notin A\}$

maka B – A = {8,9,0}



OPERASI HIMPUNAN

4. **Komplemen** adalah penyisihan himpunan yang objeknya bukan merupakan unsur himpunan tersebut, tetapi masih anggota himpunan universalnya.

   Notasi komplemen dari himpunan A adalah : $A^{\complement}$ atau A^{c} atau $\bar{A}$

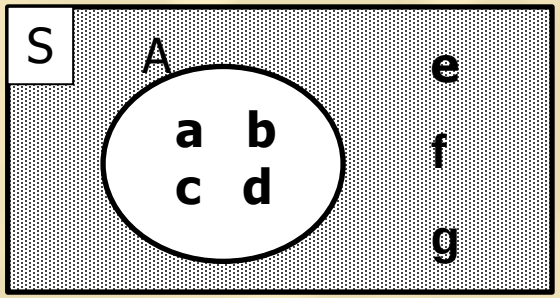
$$A^{c} = S - A$$

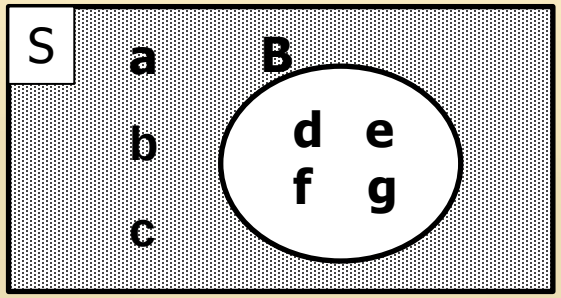
Misalnya :

S = {a,b,c,d,e,f,g}, A = {a,b,c,d} dan B = {d,e,f,g}

Maka, A^{c} = {e,f,g}

B^{c} = {a,b,c}

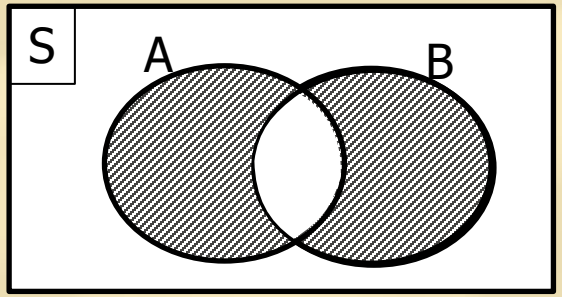




OPERASI HIMPUNAN

5. **Beda Setangkup (Simmetric Difference)** dari himpunan A dan B merupakan himpunan yang beranggotakan unsur A atau unsur B tetapi bukan keduanya

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$= (A - B) \cup (B - A)$$



Contoh 1 :

Jika A = { 2, 4, 6 } dan B = { 2, 3, 5 }

maka $A \oplus B$ = { 3, 4, 5, 6 }

TEOREMA: Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

OPERASI HIMPUNAN

6. **Perkalian Himpunan** (Cartesian Product)

   Hasil kali himpunan A dan B (ditulis **A x B**) adalah suatu haimpunan yang elemennya terdiri dari pasangan berurutan (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

   Contoh :

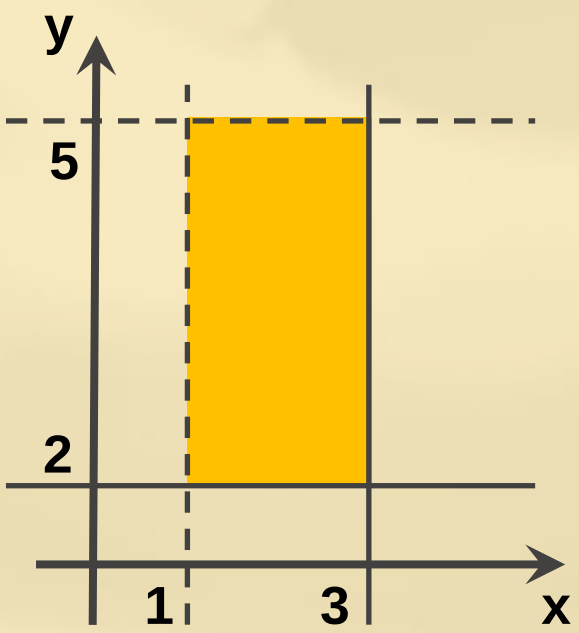
   a. $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{4, 5\}$

      Maka $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

   b. $A = \{x \mid 1 < x \leq 3, x \in R\}$

      $B = \{y \mid 2 \leq y < 5, y \in R\}$

      Maka $A \times B = \{(x, y) \mid 1 < x \leq 3 \text{ dan } 2 \leq y < 5\}$



HUKUM-HUKUM
(SIFAT-SIFAT)
TEORI HIMPUNAN

HUKUM-HUKUM TEORI HIMPUNAN

Hukum Komutatif

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Hukum Asosiatif

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Hukum Distributif

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hukum Absorbsi

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Hukum De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Hukum Identitas

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap S = A$

Hukum null/dominasi

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup S = S$

Hukum Komplemen

$A \cup A^c = S$

$A \cap A^c = \varnothing$

Hukum Idempoten

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Hukum Involusi

$(A^c)^c = A$

Hukum 0/1

$S^c = \varnothing$

$\varnothing^c = S$

PRINSIP DUALITAS DALAM HIMPUNAN

PRINSIP DUALITAS

Misalkan S adalah suatu kesamaan (identity) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen.

Jika S* diperoleh dari S dengan mengganti

$\cup$ dengan $\cap$

$\cap$ dengan $\cup$

S dengan $\varnothing$

$\varnothing$ dengan S

sedangkan komplemen dibiarkan seperti adanya, maka kesamaan S* juga bernilai benar dan disebut ***dual dari kesamaan S***.

Contoh :	S	dualnya adalah	S*
	$A \cap B = B \cap A$	dualnya adalah	$A \cup B = B \cup A$
	$(A \cup B) \cap S^c = A \cap \varnothing$	dualnya adalah	$(A \cap B) \cup \varnothing^c = A \cup S$

DUALITAS PADA HUKUM-HUKUM TEORI HIMPUNAN

Hukum Komutatif

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Hukum Asosiatif

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Hukum Distributif

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hukum Absorbsi

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Hukum De Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Hukum Identitas

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap S = A$

Hukum nunll/dominasi

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup S = S$

Hukum Komplemen

$A \cup A^c = S$

$A \cap A^c = \varnothing$

Hukum Idempoten

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Hukum Involusi

$(A^c)^c = A$

Hukum 0/1

$S^c = \varnothing$

$\varnothing^c = S$

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Untuk dua himpunan A dan B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh :

Berapa banyak bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 3 atau 5 ?

Penyelesaian :

A = Himpunan bilangan asli habis dibagi 3

B = Himpunan bilangan asli habis dibagi 5

$A \cap B$ = himpunan bilangan asli habis dibagi 3 dan 5 (habis dibagi 15)

Ditanyakan : $|A \cup B|$

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi ada 47 bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 3 atau 5

RELASI

Matematika Informatika 1

Muhammad Imron H

PRODUK KARTESIUS

- Produk Kartesius dari himpunan $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

- Notasi: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

  (a, b) disebut pasangan terurut

- Banyak anggota produk kartesis $A \times B$:

  $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

  Contoh : Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2\}$, maka

  $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

  $n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$.

RELASI

- $R : A \rightarrow B$, artinya R relasi dari himpunan A ke himpunan B
- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

  Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- ${}_aR_b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- ${}_a\not{R}_b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a dan b tidak dihubungkan oleh relasi R atau a dan b tidak berrelasi.
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut daerah Tujuan (*Kodomain*) dari R.
- **Relasi pada himpunan *A*** adalah relasi dari himpunan A *ke* himpunan A, dimana $R \subseteq (A \times A)$.

Contoh 1 :

Misalkan A adalah himpunan mahasiswa dan B adalah himpunan tingkat.

$$A = \{\text{Ali, Budi, Candra}\}, \quad B = \{1,2,3\}$$

$A \times B =$ {(Ali,1),(Ali,2),(Ali,3),(Budi,1),(Budi,2),(Budi,3),(Candra,1),(Candra,2),(Candra,3)}

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan hubungan himpunan A dengan tingkatannya.

Diketahui Ali tingkat 1, Budi tingkat 3, dan Candra tingkat 1.

Maka, dapat kita buat relasi R yaitu R = {(Ali, 1), (Budi, 3), (Candra,1) }

- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah tujuan R.
- (Ali,1) $\in R$ atau Ali R 1
- (Ali,2) $\notin R$ atau Ali $\not R$ 2.

Contoh 2 :

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

maka kita peroleh:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

Contoh 3 :

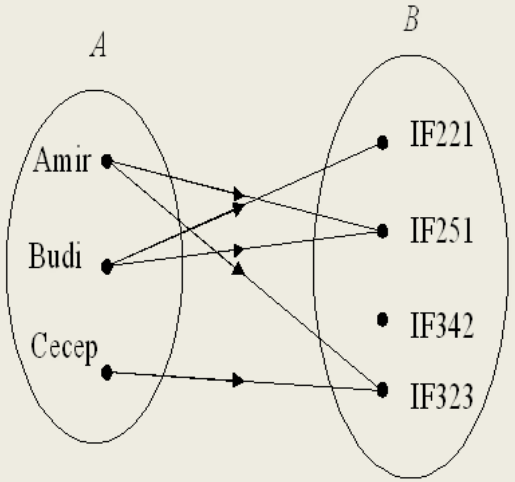
Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$

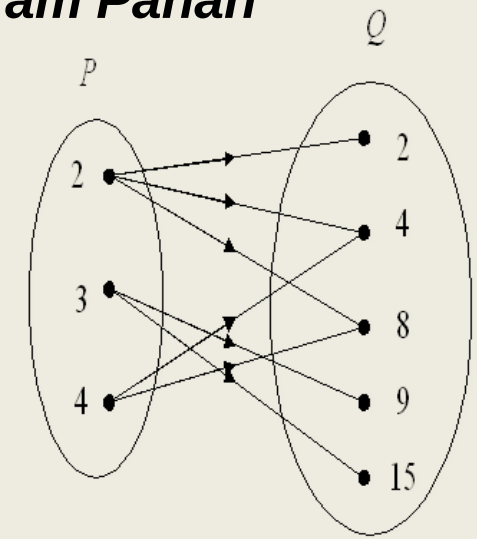
${}_{\mathbf{x}}R_{\mathbf{y}}$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka kita peroleh:

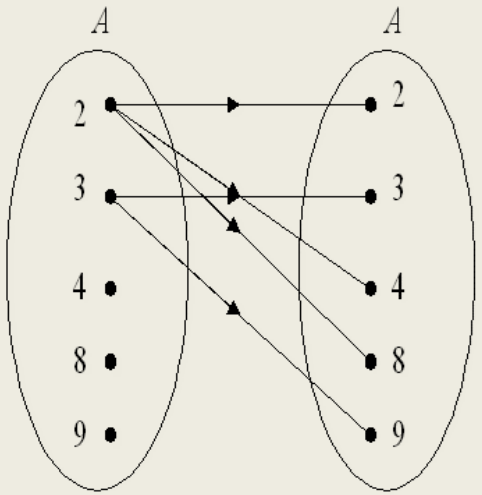
$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah







2. Representasi Relasi dengan Tabel

A	B
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

P	Q
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

A	A
2	2
2	4
2	8
3	3
3	9

3. Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 4 :

Misalkan $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

Jika kita definisikan relasi R dari A ke B dengan

$(a, b) \in R$ jika a habis membagi b

maka kita peroleh matriks:

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 8 & 9 & 15 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

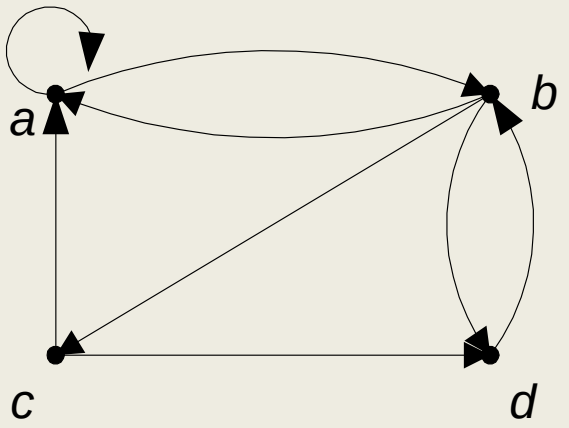
4. *Representasi Relasi dengan Graf Berarah*

Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*.
Simpul *a* disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan
Simpul *b* disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).

Pasangan terurut (*a*, *a*) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri.
Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh 5.
Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$
adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb :



Relasi Inversi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B.
Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1},
adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 6.

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

Maka $R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

Sehingga diperoleh

$$R^{-1} = \{(2,2), (4,2), (4,4), (8,2), (8,4), (9,3), (15,3)\}$$

Relasi Inversi

Jika M adalah Matriks yang merepresentasikan Relasi R

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka Matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M

$$N = M^{t} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \\ 15 \\ Q \end{array}$$

Operasi pada Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 7. Misalkan A = {a, b, c} dan B = {a, b, c, d}.

Relasi R_1 = {(a, a), (b, b), (c, c)}
Relasi R_2 = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)}

$R_1 \cap R_2$ = {(a, a)}
$R_1 \cup R_2$ = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)}
$R_1 - R_2$ = {(b, b), (c, c)}
$R_2 - R_1$ = {(a, b), (a, c), (a, d)}
$R_1 \oplus R_2$ = {(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)}

Komposisi Relasi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B,
dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C.
Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

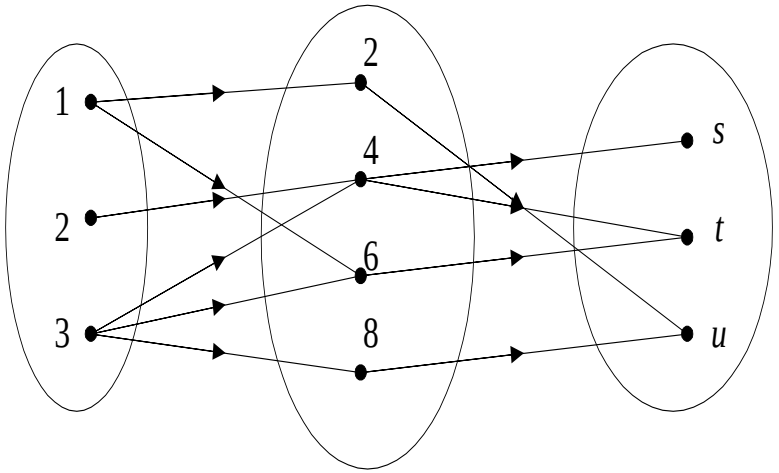
$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$$

Contoh 8.

Misalkan R = {(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)}
adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8}
dan S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)}
adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {s, t, u}.
Maka komposisi relasi R dan S adalah

$S \circ R$ = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u) }

Komposisi relasi *R* dan *S* lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



Sifat-sifat Relasi Biner

Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat :

1. Refleksif (*reflexive*)

Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika untuk setiap $a \in A$, maka $(a, a) \in R$.

Contoh 9.

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R berikut didefinisikan pada himpunan A, maka

Relasi $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ bersifat **refleksif** karena untuk setiap $a \in A$, $(a, a) \in R$, yaitu (1,1), (2,2), (3,3), dan (4,4).

Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ **tidak refleksif** karena $3 \in A$, tapi $(3, 3) \notin R$.

Contoh 10.

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

2. transitif (*transitif*)

Relasi *R* pada himpunan *A* disebut **transitif**

Jika untuk setiap ${}_aR_b$ dan ${}_bR_c$,

maka ${}_aR_c$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 12.

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A,

a. R = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat **transitif**.

b. R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } **tidak transitif**

karena (2, 4) dan (4, 2) $\in$ R, tetapi (2, 2) $\notin$ R,

begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in$ R, tetapi (4, 3) $\notin$ R.

c. Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) } jelas **transitif**

d. Relasi R = {(1, 2), (3, 4)} **transitif** karena

tidak ada (a, b) $\in$ R dan (b, c) $\in$ R sedemikian sehingga (a, c) $\in$ R.

e. Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4, 5)} selalu **transitif**

Contoh 13.

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat transitif.

Misalkan bahwa a habis membagi b dan b habis membagi c.

Maka terdapat bilangan positif m dan n sedemikian sehingga b = ma dan c = nb.

Di sini c = nma, sehingga a habis membagi c. Jadi, relasi "habis membagi" bersifat transitif.

Contoh 14.

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

R : x lebih besar dari y, **Transitif**

karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$

S : $x + y = 6$, **Tidak transitif**

misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S tetapi $(4, 4) \notin S$.

T : $3x + y = 10$ **Tidak transitif**

$T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$

3. Simetri

- Relasi R pada himpunan A disebut **simetri** jika memenuhi:
  jika untuk setiap $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.

- Relasi R pada himpunan A **tidak simetri** jika**:**
  ada $(a, b) \in R$, tetapi $(b, a) \notin R$.

- Relasi R pada himpunan A disebut **asimetri** jika memenuhi**:**
  jika untuk setiap $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$.

4. Antisimetri

- Relasi R pada himpunan A disebut **antisimetri** jika:

  $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$.

  Dengan kata lain:

  Jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$, kecuali ketika $a = b$.

- Relasi R pada himpunan A **tidak antisimetri** jika:
  ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Contoh 15.

Contoh untuk sifat Simetri dan Anti simetri.

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himp A, maka :

a. Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat:

- Simetri, karena jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$.

  Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.

- Tidak anti simetri, karena $1 \neq 2$, tapi $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$

b. Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ bersifat:

- Tidak simetri, karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.
- Tidak anti simetri, karena $2 \neq 4$, tapi $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$,

c. Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ bersifat:

- Simetri untuk $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$
- Anti simetri, karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$
  dan $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$,
  dan $(3, 3) \in R$ dan $3 = 3$.

d. Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$

- Tidak simetri, kerena $(1, 2) \in R$, tapi $(2, 1) \notin R$
- Anti simetri karena $(1, 2) \in R$ dan $(2, 1) \notin R$,
  $(2, 3) \in R$ dan $(3, 2) \notin R$.
  $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$.

e. Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$

- Simetri, karena $(1, 1) \in R$, $(2, 4) \in R$ dan $(4, 2) \in R$ dan $(3, 3) \in R$
- Tidak anti simetri karena $2 \neq 4$ tetapi $(2, 4)$ dan $(4, 2)$ anggota R

f. Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)}
   - Tidak simetri karena (4, 2) $\in$ R tetapi (2, 4) $\notin$ R.
   - Tidak anti simetri karena 2 $\neq$ 3 , tetapi (2, 3) $\in$ R dan (3, 2) $\in$ R

Contoh 16.

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif tidak simetri karena jika *a* habis membagi *b*, *b* tidak habis membagi *a*, kecuali jika *a* = *b*. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, (2, 4) $\in$ *R* tetapi (4, 2) $\notin$ *R*.

Relasi "habis membagi" **anti simetri** karena jika *a* habis membagi *b* dan *b* habis membagi *a* maka *a* = *b*. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, (4, 4) $\in$ *R* dan 4 = 4.

FUNGSI

Matematika Informatika 1

FUNGSI

Misalkan A dan B himpunan.
Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B.

Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan
$f : A \rightarrow B$ dibaca : f **memetakan** A ke B.

A disebut **daerah asal** (*domain)* dari f, notasi $\boldsymbol{D_f}$
dan B disebut **daerah hasil** (*kodomain*) dari f, notasi $\boldsymbol{K_f}$

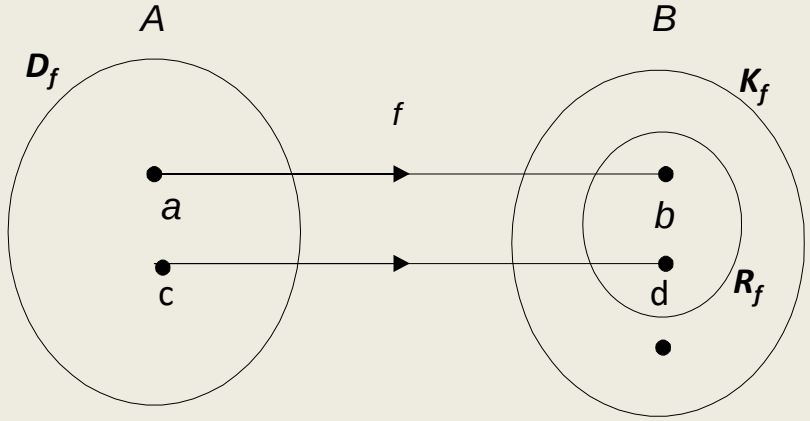
Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan/peta** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan/pra peta** (*pre-image*) dari b.

Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f, notasi $\boldsymbol{R_f}$.

Perhatikan bahwa range dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



Fungsi adalah relasi yang khusus:

Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.

Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

Fungsi dapat disajikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut. (Seperti pada relasi)
2. Diagram Panah
3. Formula pengisian nilai (*assignment*).

   Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

Contoh 1.

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B.

Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$.

Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B.

Range dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 2.

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A.

Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan

Range fungsi adalah $\{u, v\}$.

Contoh 3.

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ apakah fungsi ??

Jawab : ***Bukan fungsi,***

karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Contoh 4.

Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ apakah fungsi ??

Jawab : ***Bukan fungsi,***

karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 5. Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$.

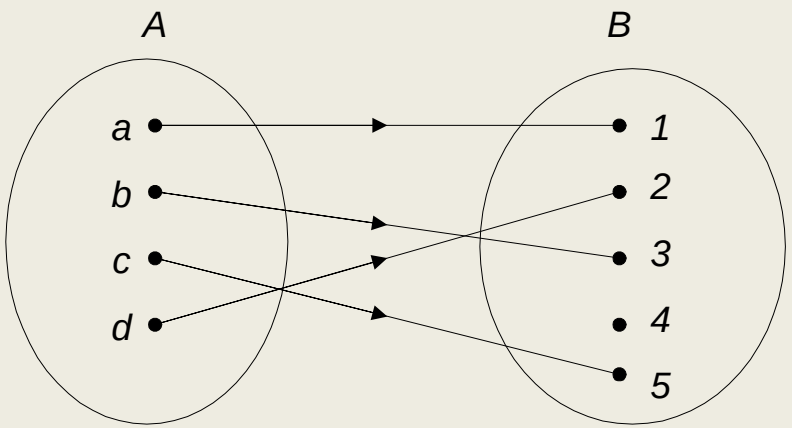
Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat,

dan range dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif.

JENIS-JENIS FUNGSI

1. Fungsi Injektif (satu-satu)

Fungsi *f* dikatakan **satu-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika
Tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



Contoh 6.

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$
adalah fungsi satu-satu

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$
bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

Contoh 7. Misalkan f : **Z** $\rightarrow$ **Z**. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-satu,

karena untuk $x_2 = -x_1$ dimana $(x_2 \neq x_1)$ tetapi $f(x_2) = f(x_1)$

misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-satu

karena untuk setiap $a \neq b$, maka $a - 1 \neq b - 1$.

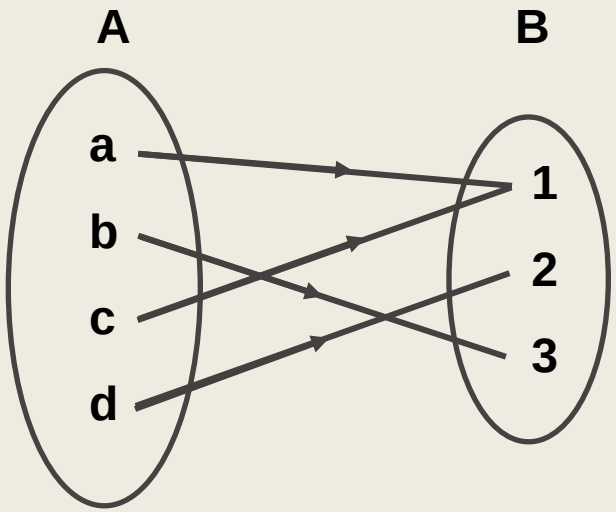
Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

2. Fungsi Surjektif (Pada)

Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika
Setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.

Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah (range) dari *f*.
Fungsi *f* disebut fungsi **pada** himpunan *B*.

$$R_f = K_f$$



Contoh 8.

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ ***bukan fungsi surjektif*** karena ada w yang bukan range dari f.

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ ***merupakan fungsi surjektif*** karena semua anggota B merupakan range dari f.

Contoh 9.

Misalkan f : **z** $\rightarrow$ **z**. (z $\in$ Bulat)

Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi surjektif?

Penyelesaian:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi surjektif,
karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi surjektif
karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi,
yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

3. Fungsi Bijektif (korespondensi satu-satu)

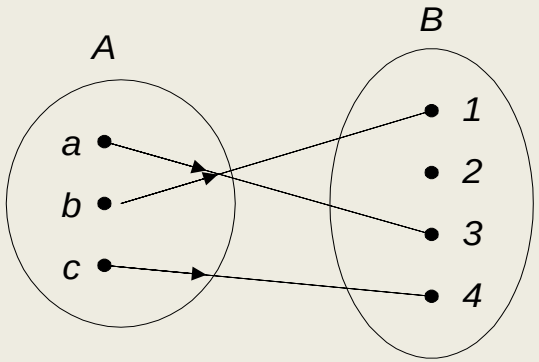
Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi Injektif dan juga fungsi surjektif.

Contoh 10.

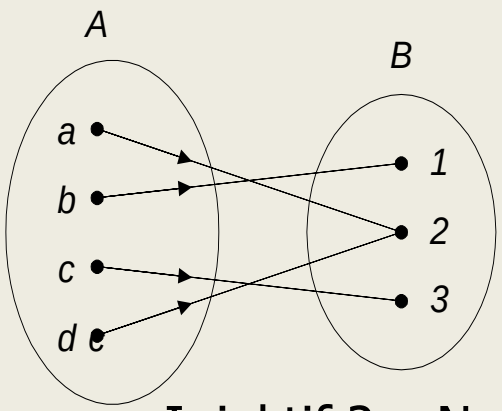
Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi injektif maupun fungsi surjektif.

Contoh 11.

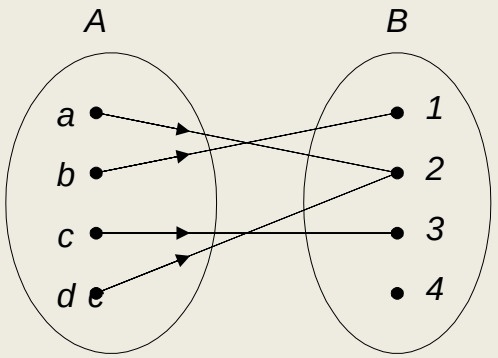
Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi injektif maupun fungsi surjektif.



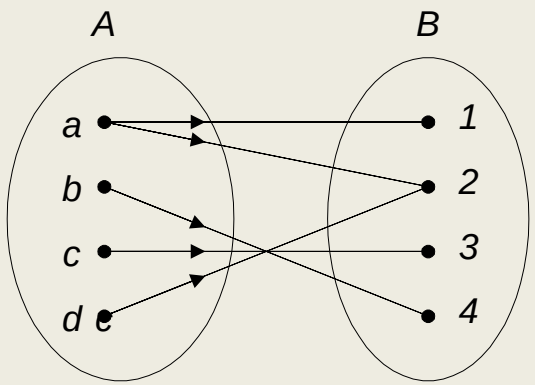
Injektif ? Ya
Surjektif ? No



Injektif ? No
Surjektif ? Ya



Injektif ? No
Surjektif ? No



Injektif ?
Surjektif ?

Bukan fungsi

4. Fungsi Invers (Balikan)

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **Invers** (*balikan*) dari f.

Invers fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

Fungsi yang berkoresponden satu-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena dapat didefinisikan fungsi balikannya.
Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 12.
Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-satu.
Balikan fungsi f adalah

$$f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$$

Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

Contoh 13.

Tentukan balikan/invers fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.

Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$.

Jadi, balikan fungsi inversnya adalah $f^{1}(y) = y + 1$.

Contoh 14.

Tentukan invers fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Dari Contoh 7 dan 9 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada.

Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah funsgi yang *not invertible*.

Komposisi dari dua buah fungsi.

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himp unan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 15.

Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$,

dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$.

Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

Contoh 16.

Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(x^2 + 1)$

$= (x^2 + 1) - 1$

$= x^2$

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x - 1)$

$= (x - 1)^2 + 1$

$= (x^2 - 2x + 1) + 1$

$= x^2 - 2x + 2$

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi Floor dan Ceiling

Misalkan x adalah bilangan riil,

Fungsi floor dari x: $\lfloor x \rfloor$

menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

(Pembulatan ke bawah)

Fungsi ceiling dari x: $\lceil x \rceil$

menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

(Pembulatan ke atas)

Contoh :

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$	$\lceil 3{,}5 \rceil = 4$
$\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$	$\lceil 0{,}5 \rceil = 1$
$\lfloor 4{,}8 \rfloor = 4$	$\lceil 4{,}8 \rceil = 5$
$\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$	$\lceil -0{,}5 \rceil = 0$
$\lfloor -3{,}5 \rfloor = -4$	$\lceil -3{,}5 \rceil = -3$
$\lfloor 5 \rfloor = 5$	$\lceil 5 \rceil = 5$

Contoh 42

Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian byte.
Satu byte terdiri atas 8 bit.

Jika panjang data 125 bit,
maka jumlah byte yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah

$\lceil 125/8 \rceil = 16$ byte.

Perhatikanlah bahwa 16 x 8 = 128 bit,
sehingga untuk byte yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu byte tetap 8 bit

(bit ekstra yang ditambahkan untuk menggenapi 8 bit disebut padding bits).

Beberapa Fungsi Khusus

2. Fungsi Modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

a mod m memberikan sisa pembagian bilangan bulat dari a dibagi dengan m

a mod m = r jika a = mq + r , dengan $0 \leq r < m$.

Contoh :

25 mod 7 =	4	karena 25 = 3 x 7 + **4**
15 mod 4 =	3	karena 15 = 3 x 4 + **3**
102 mod 45 =	12	karena 102 = 2 x 45 + **12**
2 mod 5 =	2	karena 2 = 0 x 5 + **2**
–25 mod 7 =	3	karena –25 = (– 4) x 7 + **3**

Beberapa Fungsi Khusus

3. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

4. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

5. Fungsi Logaritmik

Fungsi Logaritmik berbentuk :

$$y = {}^{a}\log x \leftrightarrow x = a^y$$

LATIHAN

1. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut :
   a. $f = \{(a, 3), (b, 5), (c, 7), (d, 9)\}$ dari $A = \{a, b, c, d\}$ ke $B = \{3, 5, 7, 9\}$
   b. $f = 2x + 4 = (x-4)/2$
   c. $f = \frac{1}{2} x - 3 = 2y+6$
   d. $f = x^2 - 4$

2. Diketahui fungsi-fungsi $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$, $h(x) = 9 - 3x$. Tentukan :
   a. $f \circ g(x) =$
   b. $g \circ f(x) =$
   c. $f \circ h(x) =$
   d. $h(f(x)) =$
   e. $h(g(x)) =$
   f. $g(h(x)) =$

3. Tentukan :
   a. $57 \bmod 3 = 0$
   b. $134 \bmod 8 =$
   c. $-76 \bmod 6 = 2$
   d. $5! = 120$
   e. $\frac{6!}{2!} = 360$
   f. $\frac{7!}{3!4!} = 35$
   g. ${}^{2}\log 64 = 6$
   h. ${}^{3}\log 81 =$
   i. ${}^{2}\log \sqrt{8} =$

JENIS-JENIS FUNGSI

1. Berdasar bentuk operator dalam persamaan
   a. Fungsi Aljabar
      - Fungsi Rasional Bulat (Fungsi Polinom)

        Bentuk umum : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$

        Contoh :

Fungsi Linier	$f(x) = ax + b$	(polinom berderajat 1)
Fungsi kuadrat	$f(x) = ax^2 + bx + c$	(polinom berderajat 2)
Fungsi pangkat tiga	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	(polinom berderajat 3)

      - Fungsi Rasional Pecahan

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

      - Fungsi Irrasional

        Contoh : $f(x) = \sqrt{2x+3}$ atau ditulis $f(x) = (2x + 3)^{1/2}$

   b. Fungsi Transenden
      - Fungsi Trigonometri contoh : $f(x) = 3 \text{ Sin } 2x$
      - Fungsi Logaritma contoh : $f(x) = {}^2\log 5x$
      - Fungsi Eksponen contoh : $f(x) = 5^x$

2. Berdasar Letak variabelnya
   a. Fungsi Eksplisit : Fungsi yang variabelnya dipisahkan dengan tanda "="
      Contoh : $y = 3x^2 - 10$
   b. Fungsi Implisit : Fungsi yang variabel-variabelnya berada dalam ruas yang sama.
      Contoh : $y - 3x^2 = 10$
3. Fungsi Komposisi (Fungsi Majemuk) : Fungsi yang didapatkan dengan substitusi suatu fungsi lain dalam fungsi tersebut. Jika $y = f(x)$ sedangkan x merupakan suatu fungsi $g(z)$, maka fungsi komposisi $y = f(g(z))$

   Contoh : Jika $f(x) = 2x^2 + x - 3$ dan $g(x) = x + 1$ maka fungsi komposisi

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= 2(g(x))^2 + (g(x)) - 3 \\
&= 2(x+1)^2 + (x+1) - 3 \\
&= 2(x^2 + 2x + 1) + (x+1) - 3 \\
&= 2x^2 + 4x + 2 + x + 1 - 3 \\
&= 2x^2 + 5x
\end{aligned}
$$

GRAFIK FUNGSI

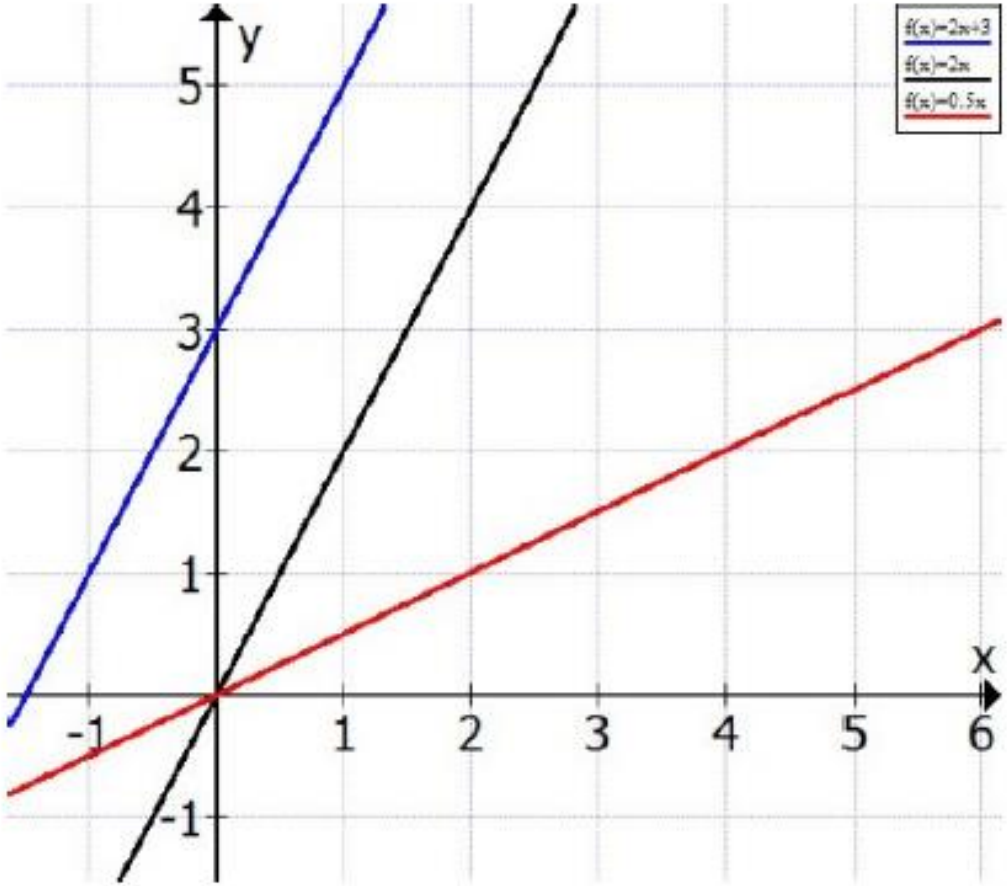
1. Fungsi Linier

Grafik fungsi linier berbentuk garis lurus

Misal : $y = f(x) = 2x$

$y = f(x) = 2x + 3$

$y = f(x) = \frac{1}{2} x$



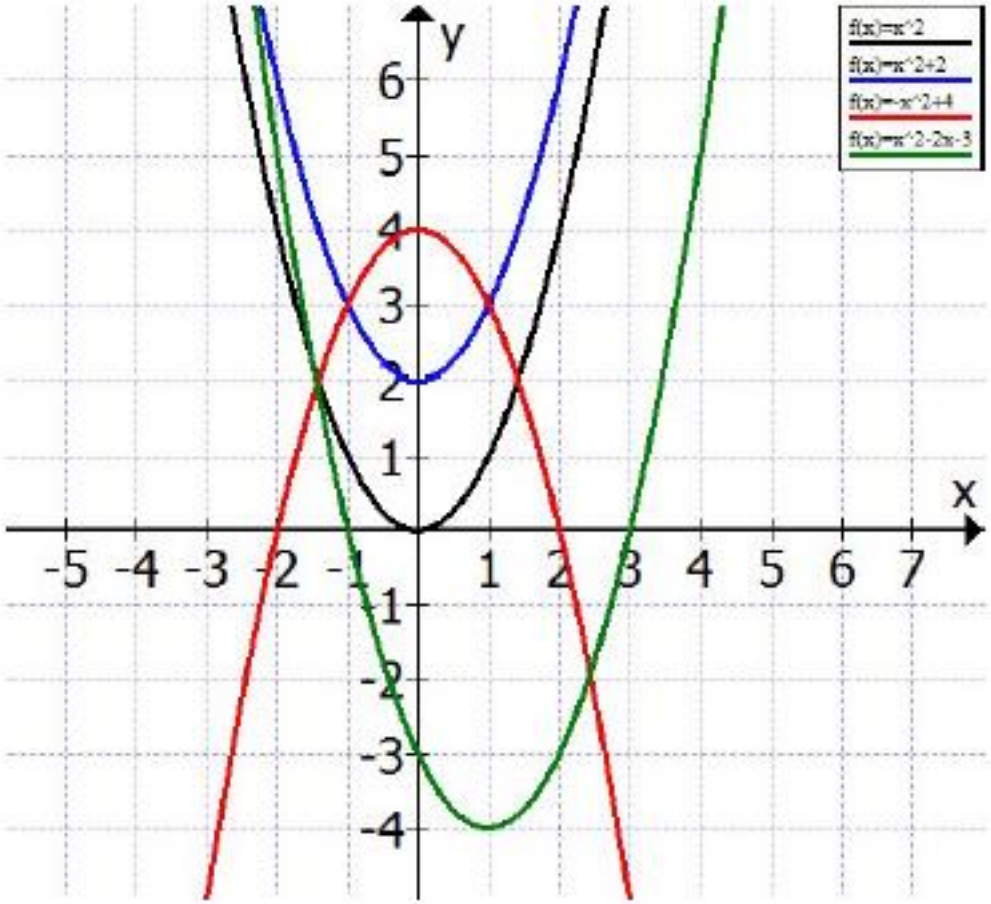
2. Fungsi Kuadrat

Contoh : $y = f(x) = x^2$

$y = f(x) = x^2 + 2$

$y = f(x) = -x^2 + 4$

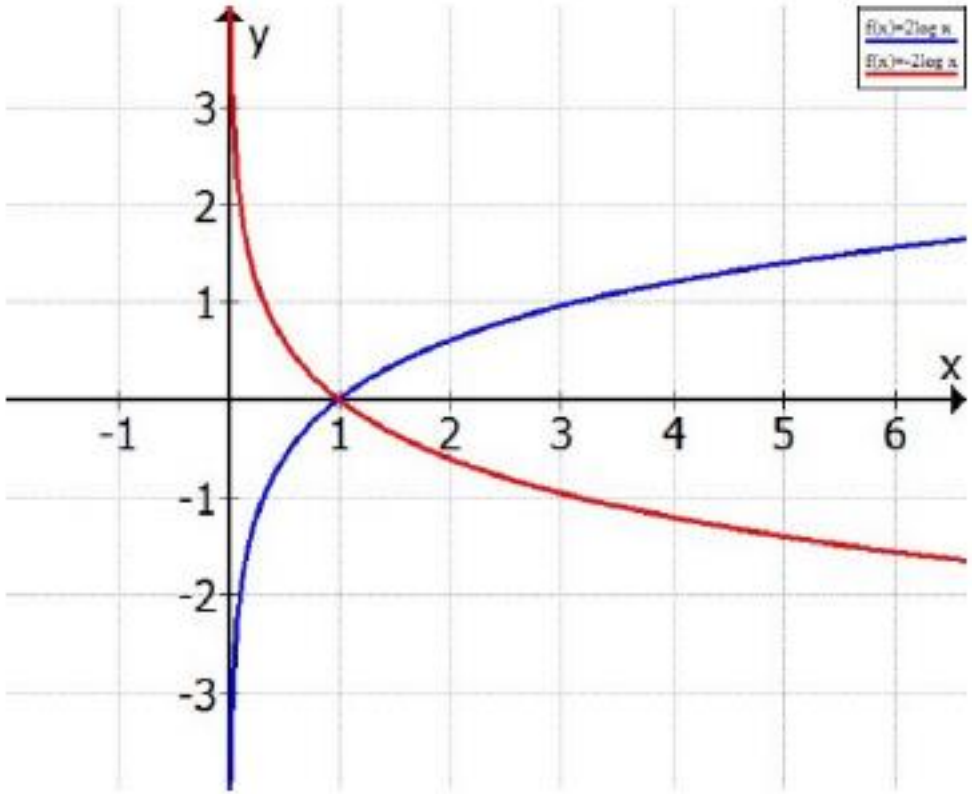
$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$



3. Fungsi Logaritma

Contoh : $y = f(x) = 2 \log x$

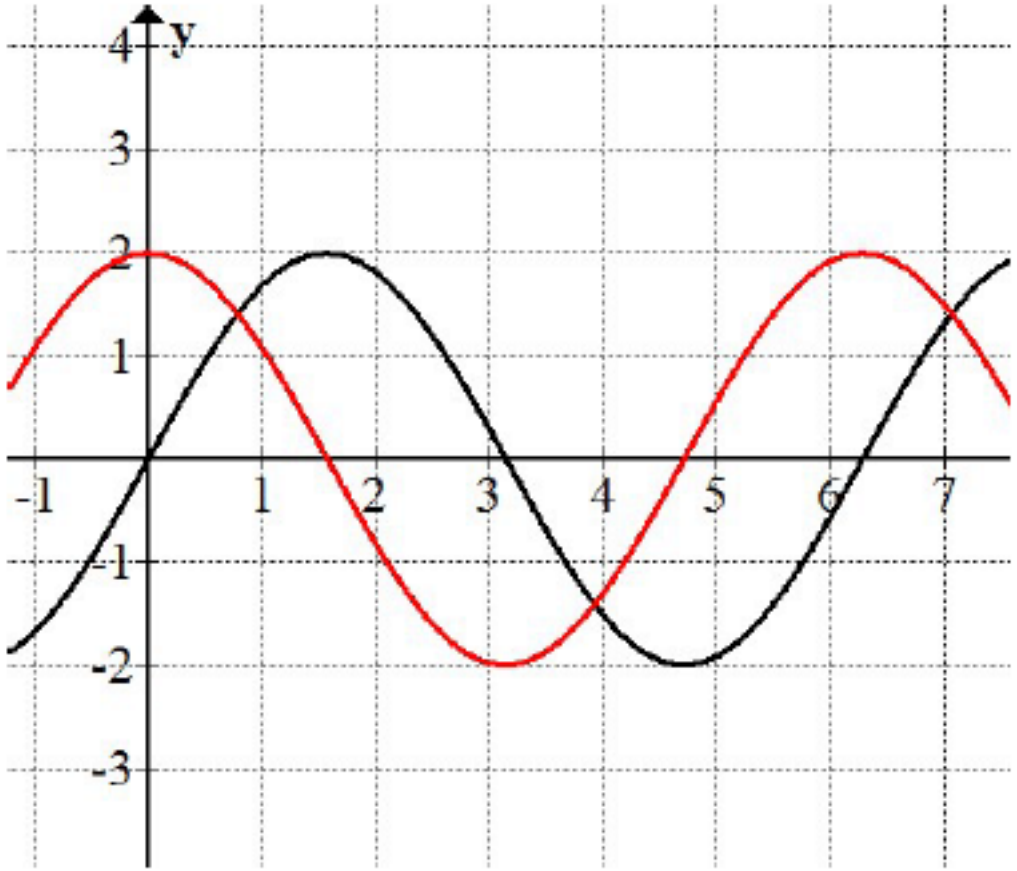
$y = f(x) = -2 \log x$



4. Fungsi Trigonometri

Contoh : $y = f(x) = 2 \sin x$

$y = g(x) = 2 \cos x$



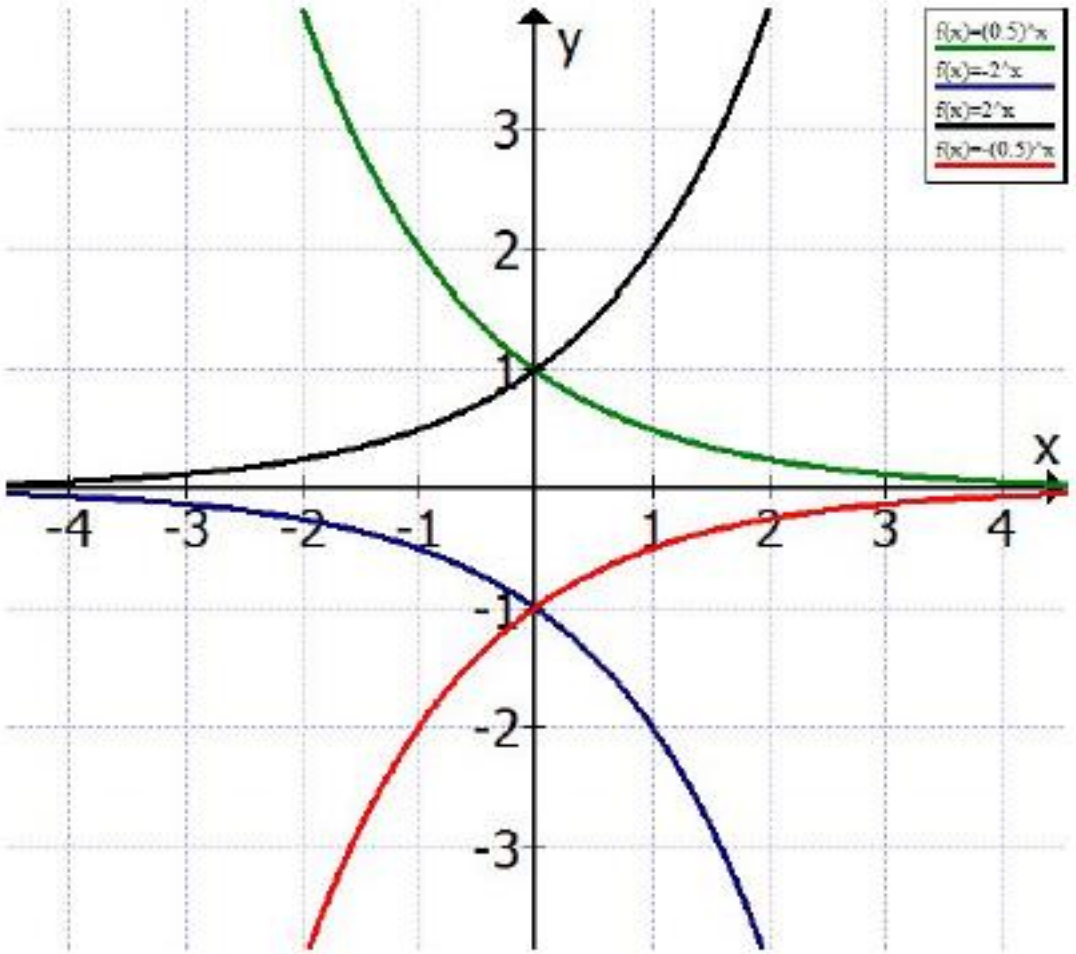
5. Fungsi Eksponen

Contoh : $y = f(x) = 2^x$

$y = f(x) = -2^x$

$y = f(x) = (½)^x$

$y = f(x) = -(½)^x$



THANK YOU

Seri Materi Kuliah Matematika

Welcome !!

Muhammad Imron Hadisantosa

ALJABAR PROPOSISI

Konsep, Notasi Dasar,
Proposisi dan Tabel Kebenaran,
Tautologi dan Kontradiksi, Ekivalen Logika,
Aljabar Proposisi

Konsep dan Notasi Dasar

Proposisi merupakan Kalimat deklaratif yang bernilai benar (T) atau salah (F), tetapi tidak keduanya

Contoh Proposisi :

a) 13 adalah bilangan ganjil
b) $1 + 2 = 2$
c) $8 \geq$ akar kuadrat dari 16
d) Ada monyet di bulan
e) Hari ini adalah hari Rabu
f) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap
g) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil.

Contoh bukan Proposisi :

a) $x > 3$
b) $x + 3 = 8$
c) Isilah gelas tersebut dengan air

Konsep dan Notasi Dasar

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ...

Contoh :

p : 13 adalah bilangan ganjil

q : Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka 2n adalah bilangan genap

r : 2 + 2 = 5

Konjungsi, Disjungsi dan Negasi

Misal p dan q adalah proposisi

1) Konjungsi (conjunction) : p dan q — Notasi : $p \wedge q$

2) Disjungsi (Disjunction) : p atau q — Notasi : $p \vee q$

3) Ingkaran (Negation) dari p : tidak p — Notasi : $\sim p$

TABEL KEBENARAN

Menentukan nilai kebenaran sebuah proposisi majemuk

Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Contoh Proposisi Konjungsi :

p : saat ini masa pandemi covid 19

q : mahasiswa belajar dari rumah

$p \wedge q$: saat ini masa pandemi covid 19 dan mahasiswa belajar dari rumah

Nilai Keberanan (Hanya bernilai ***benar*** jika keduanya ***benar***)

a) Manusia pasti mati dan 2 bilangan genap — Benar (T)

b) 3+4 = 7 dan 2x3 = 5 — Salah (F)

c) 3 bilangan genap dan 2 bilangan prima — Salah (F)

d) Semarang ada di Jawa Timur dan Surabaya di Jawa Barat — Salah (F)

Disjungsi

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh Proposisi Disjungsi :

p : Besi itu keras

q : Air itu cair

$p \vee q$: Besi itu keras atau air itu cair

Nilai Keberanan (Hanya bernilai ***salah*** jika keduanya ***salah***)

a) Manusia pasti mati atau 2 bilangan genap — Benar (T)

b) 3+4 = 7 atau 2x3 = 5 — Benar (T)

c) 3 bilangan genap atau 2 bilangan prima — Benar (T)

d) Semarang ada di Jawa Timur atau Surabaya di Jawa Barat — Salah (F)

Negasi

p	~q
T	F
F	T

Contoh Proposisi Negasi:

p : Hari ini Hujan
~p : Hari ini tidak hujan
~p : Tidak benar hari ini hujan

Nilai Keberanan

a) p : Langit berwarna biru
b) q : Air sungai itu jernih
c) r : 5 x 3 = 15

~p : Langit tidak berwarna biru
~q : Air sungai itu tidak jernih
~r : 5 x 3 ≠ 15

Latihan

Diketahui proposisi-proposisi berikut :

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik :

a) Pemuda itu tinggi dan tampan → $p \wedge q$

b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan → $p \wedge \sim q$

c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan → $\sim p \wedge \sim q$

d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan → $\sim(\sim p \vee \sim q)$

e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan → $p \vee (\sim p \wedge q)$

f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan → $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Lanjut

Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh Proposisi Implikasi :

$p \rightarrow q$ dibaca :*"Jika p maka q"*

p : 2 bilangan genap

q : 2+1 bilangan ganjil

$p \rightarrow q$: Jika 2 bilangan genap maka 2+1 bilangan ganjil

Nilai Keberanan

(Hanya bernilai salah jika proposisi pertama benar dan proposisi kedua salah)

a) Jika manusia bernafas maka ia pasti akan mati — Benar (T)

b) Jika 3 > 2 maka 3+4 < 2+4 — Salah (F)

c) Jika semangka berduri maka gajah mempunyai belalai — Benar (T)

d) Jika manusia normal tidak bertelinga maka tidak bisa mendengar — Benar (T)

Konvers, Invers dan Kontraposisi

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
p	**q**	**~p**	**~q**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**	**$\sim p \rightarrow \sim q$**	**$\sim q \rightarrow \sim p$**
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Bi-implikasi

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p ↔ q dibaca :*" p jika dan hanya jika q"*

Contoh Proposisi :

p : bilangan genap habis dibagi dua

q : bilangan genap merupakan bilangan kelipatan dua

p ↔ q : bilangan genap habis dibagi dua jika dan hanya jika kelipatan dua

Nilai Keberanan

(Hanya bernilai benar jika kedua proposisi bernilai sama)

a) 10 habis dibagi 2 jika dan hanya jika 10 bilangan genap — Benar (T)

b) 3 x 2 = 6 jika dan hanya jika 6 bilanganganjil — Salah (F)

c) Sapi berkaki dua jika dan hanya jika ayam berkaki dua — Salah (F)

d) Roti terbuat dari kayu jika dan hanya jika kayu bisa dimakan — Benar (T)

Tabel Kebenaran 3 proposisi

Buatlah tabel kebenaran untuk $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)$

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim q \vee r$	$(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T

TAUTOLOGI

Proposisi majemuk disebut TAUTOLOGI jika selalu bernilai benar

Contoh : Buktikan bahwa $p \vee \sim(p \wedge q)$ merupakan sebuah tautologi !

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Diperoleh hasil bernilai benar semua, sehingga proposisi majemuk tersebut merupakan sebuah TAUTOLOGI

KONTRADIKSI

Proposisi majemuk disebut KONTRADIKSI jika selalu bernilai salah

Contoh : Buktikan bahwa $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ merupakan sebuah kontradiksi !

p	q	$p \wedge q$	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$(p \vee q) \wedge \sim (p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Diperoleh hasil bernilai salah semua, sehingga proposisi majemuk tersebut merupakan sebuah KONTRADIKSI

EKIVALENSI LOGIKA

Dua buah proposisi majemuk disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai nilai tabel kebenaran yang sama/identik

Contoh : Buktikan bahwa $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$! (Hukum DeMorgan)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Diperoleh nilai kebenaran $\sim(p \wedge q)$ bernilai sama dengan nilai kebenaran $\sim p \vee \sim q$,
Jadi $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

EKIVALENSI LOGIKA

Contoh 2 : Buktikan bahwa $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Diperoleh nilai kebenaran $\sim(p \rightarrow q)$ bernilai sama dengan nilai kebenaran $p \wedge \sim q$, Jadi

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Ekivalensi pada Konvers, Invers dan Kontraposisi

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
p	**q**	**~p**	**~q**	**$p \rightarrow q$**	**$q \rightarrow p$**	**$\sim p \rightarrow \sim q$**	**$\sim q \rightarrow \sim p$**
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Konvers ≡ Invers

Implikasi ≡ Kontraposisi

ALJABAR PROPOSISI

Dalam Proposisi majemuk berlaku hukum-hukum berikut ini :

1. Hukum Identitas

$p \vee F \equiv p$

$p \wedge T \equiv p$

2. Hukum Null/dominasi

$p \wedge F \equiv F$

$p \vee T \equiv T$

3. Hukum Negasi

$p \vee \sim p \equiv T$

$p \wedge \sim p \equiv F$

4. Hukum Idempoten

$p \vee p \equiv p$

$p \wedge p \equiv p$

5. Hukum Involusi (negasi ganda)

$\sim(\sim p) \equiv p$

6. Hukum Penyerapan

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

7. Hukum komutatif

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

8. Hukum Asosiatif

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

9. Hukum Distributif

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

10. Hukum De Morgan

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Pembuktian dengan Aljabar Proposisi

Contoh : Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \equiv p \vee \sim q$

Penyelesaian :

$p \vee \sim(p \vee q)$	$\equiv$	$p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	**Hukum De Morgan**
	$\equiv$	$(p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$	**Hukum Distributif**
	$\equiv$	$T \wedge (p \vee \sim q)$	**Hukum Negasi**
	$\equiv$	$(p \vee \sim q)$	**Hukum Identitas**

Pembuktian dengan Tabel kebenaran

Contoh : Buktikan bahwa $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	F

Diperoleh nilai kebenaran $\sim(p \leftrightarrow q)$ bernilai sama dengan $\sim p \leftrightarrow q$ dan $p \leftrightarrow \sim q$

Jadi

$$\mathbf{p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q}$$

Diberikan pernyataan :

”Tidak benar bahwa Dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika”

Nyatakan pernyataan tersebut dalam notasi simbolik !

Misalkan :

p : Dia belajar Algoritma

q : Dia belajar Matematika

maka pernyataan dia atas dalam bentuk simbolik menjadi : $\sim (p \wedge \sim q)$

Apa ekivalensi pernyataan di atas ?

$\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim(\sim q) \equiv \sim p \vee q$

Sehingga ekivalensi pernyataan di atas menjadi :

Dia tidak belajar Algoritma atau belajar Matematika”

Dua pedagang mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli.
Pedagang pertama mengumbar moto “Barang bagus tidak murah”
Pedagang kedua mempunyai moto “Barang murah tidak bagus”.
Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian: p : Barang itu bagus
q : Barang itu murah

Moto I : “Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah” $p \rightarrow \sim q$
Moto II : “Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus” $q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Diperoleh : $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$

Kedua Moto menyatakan hal yang sama

Latihan

Latihan 1:

Buktikan dengan Tabel kebenaran dari proposisi majemuk berikut :

a. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b. $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

Latihan 2 :

Tunjukkan dengan Aljabar proposisi :

a. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

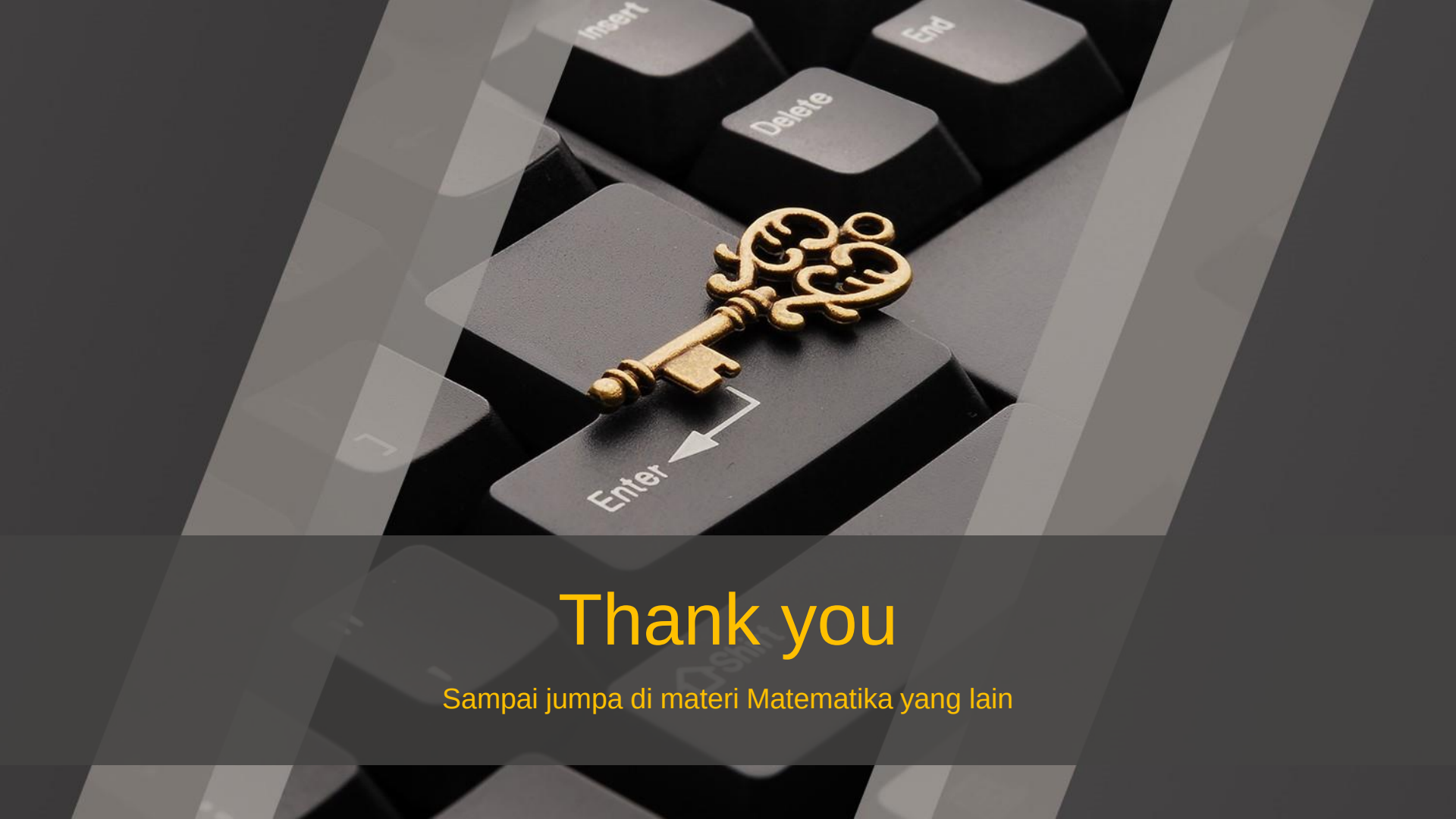
b. $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

Latihan 3 :

Tuliskan pernyataan yang setara/ekivalen dengan pernyataan berikut :

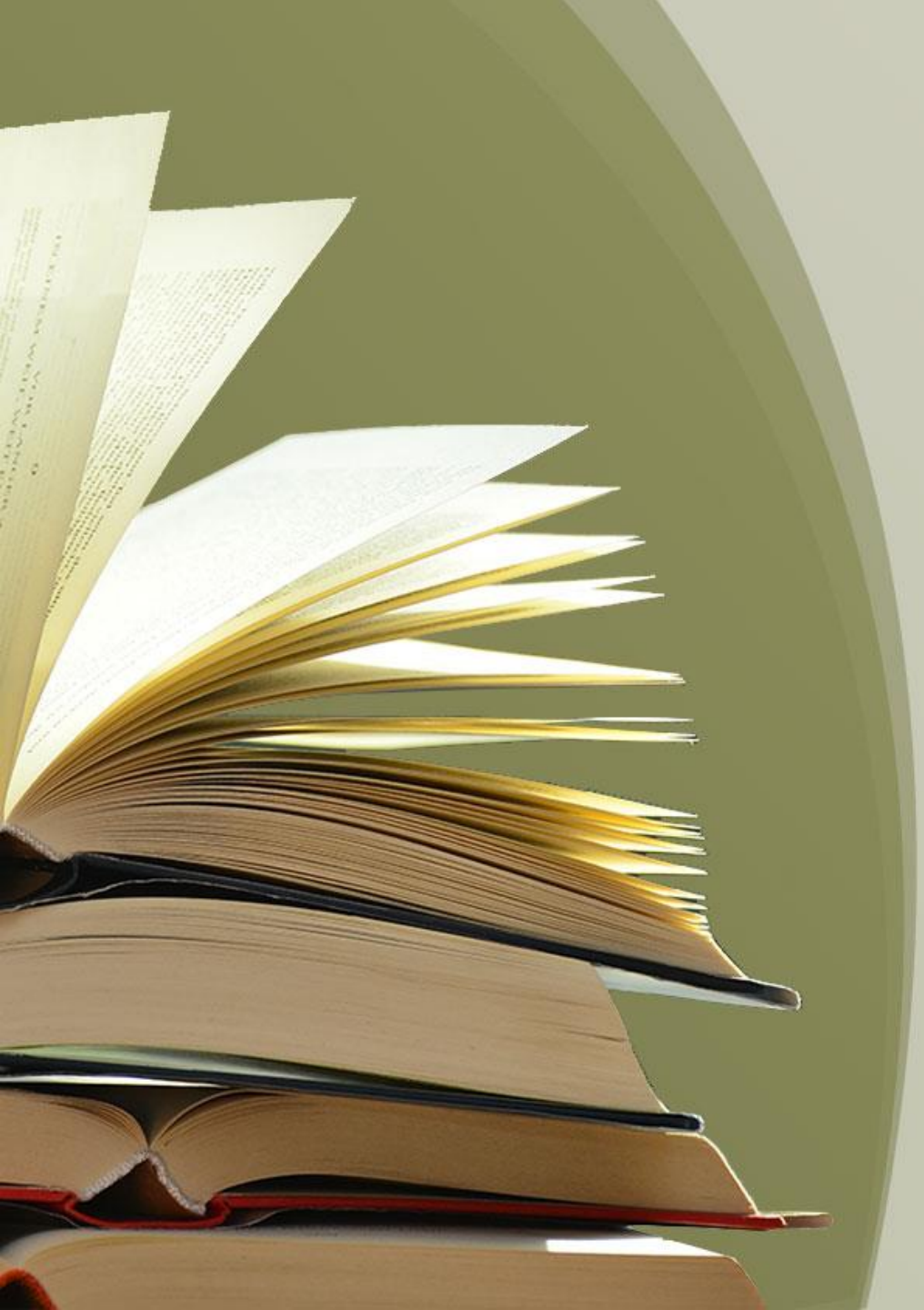
a. Tidak benar bahwa penjualan merosot maupun pendapatan tidak naik

b. Tidak benar bahwa jika jeruk itu manis maka harganya mahal



Thank you

Sampai jumpa di materi Matematika yang lain



POSET

Partially Ordered Set

POSET

Definisi :
Suatu relasi biner *R* pada sebuah himpunan disebut suatu **urutan parsial/ partial ordering** pada S jika R bersifat :

a) REFLEKTIF : ${}_aR_a$, $\forall a \in S$
b) ANTISIMETRI : Jika ${}_aR_b$ dan ${}_bR_a$, maka a = b
c) TRANSITIF : Jika ${}_aR_b$ dan ${}_bR_c$, maka ${}_aR_c$

Pasangan <S ,R > disebut **himpunan terurut parsial / Partially Ordered Set atau POSET**.

Notasi relasi POSET :
" ≤ " , artinya ’mendahului’
"a ≤ b", artinya ’a mendahului b’ atau ’b sesudah a’

Contoh

Contoh:

a) <N , ≤ > adalah sebuah POSET, karena " ≤ " menyatakan relasi ‘lebih kecil dari atau sama dengan’ merupakan suatu **urutan parsial** pada N(bilangan asli). Bukti:

- Karena a = a , maka a ≤ a , ∀a ∈ N (sifat refleksif)
- Jika a ≤ b dan b ≤ a, maka hal ini hanya akan dipenuhi jika a = b (sifat antisimetri)
- Jika a ≤ b dan b ≤ c, maka pasti a ≤ c (sifat transitif)

Terbukti bahwa relasi " ≤ " adalah urutan parsial pada N.

b) B adalah sembarang himpunan dan P(B) adalah *power set* dari B. Relasi “⊆” yang menyatakan “subset dari” merupakan urutan parsial pada P(B), karena relasi “⊆” bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Maka < P(B), ⊆> adalah POSET.

c) Misalkan MK adalah himpunan mata kuliah pada sebuah jurusan. " $mk_1 \leq mk_2$" menyatakan mata kuliah mk_1 sama dengan mk_2 atau mk_1 adalah prasyarat untuk mengambil mk_2.
Karena relasi “≤” bersifat refleksif, antisimetri dan transitif, maka <MK , ≤ > adalah POSET .

POSET

Definisi

Suatu relasi biner pada sebuah himpunan S disebut **urutan parsial ketat/ *quasy order* atau *strict partial order***, jika relasi tersebut besifat :

- **IRREFLEKSIF**
  $a \not R a$ atau a tidak berrelasi dengan a, untuk setiap $a \in S$
- **TRANSITIF**
  Jika aRb dan bRc, maka aRc

BUKAN POSET

Notasi relasi urutan parsial ketat: “<” dibaca ”benar-benar mendahului”
$a < b$ artinya "a benar-benar mendahului b"
$b \geq a$ artinya $a \leq b$ dibaca "b sesudah a".
$b > a$ artinya $a < b$ dibaca "b benar-benar sesudah a".

Urutan parsial ≤ pada suatu himpunan S tidak perlu setiap pasangan elemen nya harus berrelasi.

POSET

Definisi

Misalkan $< S, \leq >$ adalah POSET, dan $a,b \in S$, maka :

- a dan b ***comparable/dapat dibandingkan*** jika $a \leq b$ atau $b \leq a$.
- a dan b ***noncomparable/tidak dapat dibandingkan*** jika $a \nleq b$ dan $b \nleq a$.

a dan b **noncomparable** ditulis dengan $a||b$

Contoh :

Himpunan A={1, 2, 3, 6, 12} terurut oleh pembagian. Maka :

- 3 dan 6 comparable karena $3 \leq 6$ dan $6 \geq 3$
- 2 dan 3 noncomparable karena $2 \nleq 3$ dan $3 \nleq 2$.

POSET

Definisi

Suatu urutan parsial "≤" pada himpunan S disebut suatu **urutan total atau urutan linier/ *total order* atau *linear order*,** jika berlaku:

$\forall a,b \in S$ maka $a \leq b$ atau $b \leq a$**,** artinya setiap pasangan di S *comparable*.

Pasangan <S , ≤ > seperti diatas disebut **himpunan terurut linier/ linearly ordered set** atau sebuah **rantai/ CHAIN.**

Contoh :

Himpunan A={1, 2, 6, 12} terurut oleh pembagian.

Terlihat bahwa $1 \leq 2$, $1 \leq 6$, $1 \leq 12$, $2 \leq 6$, $2 \leq 12$, $6 \leq 12$.

Dalam hal ini setiap dua unsur (pasangan) dari A comparable.

Berarti < A, ≤ > merupakan himpunan terurut linier/ Chain.

Definisi

Bila $< S, \leq >$ adalah sebuah POSET, $A \subseteq S$ dan $A \neq \emptyset$, maka :

- $a \in A$ disebut elemen minimal dari A jika : tidak ada $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq a$.
- $a \in A$ disebut elemen maksimal dari A jika : tidak ada $x \in A$ sedemikian sehingga $a \leq x$.
- $a \in A$ disebut elemen terkecil dari A jika : $a \leq x$, $\forall x \in A$
- $a \in A$ disebut elemen terbesar dari A jika : $x \leq a$, $\forall x \in A$
- $b \in S$ disebut batas bawah dari A jika : $b \leq x$, $\forall x \in A$
- $b \in S$ disebut batas atas dari A jika : $x \leq b$, $\forall x \in A$
- $b \in S$ disebut batas bawah terbesar/infimum dari A jika : untuk setiap c yang merupakan batas bawah lain dari A, berlaku $c \leq b$. *Infimum dari A ditulis Inf(A)*
- $b \in S$ disebut batas atas terkecil/supremum dari A jika : untuk setiap c yang merupakan batas atas lain dari A, berlaku $b \leq c$. Supremum *dari A ditulis Sup(A)*

Diagram Hesse

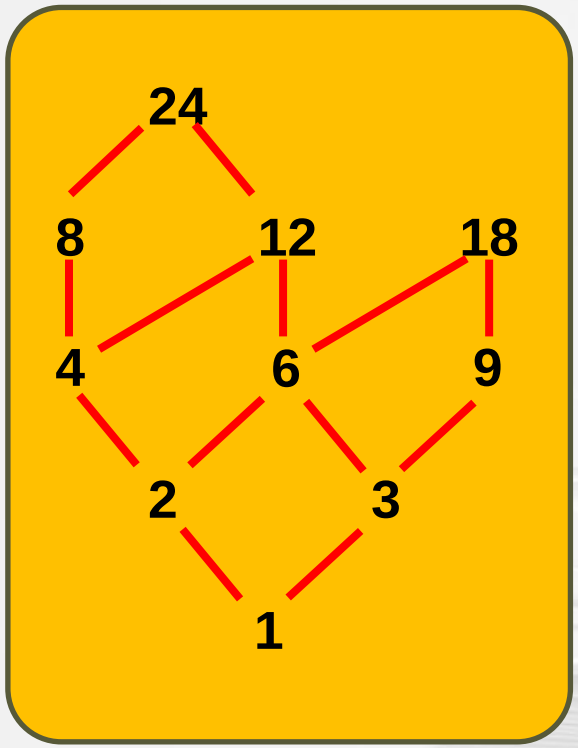
Diagram Hasse dari POSET <S , ≤ > digambarkan sebagai suatu graph tak berarah tanpa loop, dimana *node* menunjukkan elemen dari S dan *edge* menunjukkan relasi.

Aturan membuat Diagram Hasse:

- Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$, maka a terletak di bawah b.
- Jika $a \leq b$ dan tidak ada $c \in S$ sedemikian sehingga $a \leq c$ dan $c \leq b$ maka dari a ke b ditarik sebuah edge/garis.
- Jika $a \leq b$ dan $a \leq c$ maka b dan c terletak pada level yang sama.

Contoh 1

Misalkan S = {1,2,3,4,6,8,9,12,18,24} himpunan terurut oleh pembagian. Maka diagram hasse nya adalah:



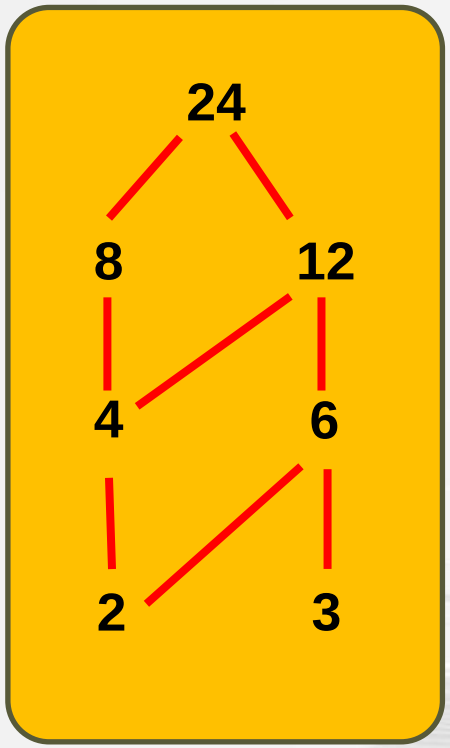
- 1 adalah elemen minimal dan elemen terkecil dari S.
- 18 dan 24 adalah elemen maksimal dari S, karena tidak ada elemen yang dapat dibagi oleh 18 maupun 24.
- S tidak memiliki elemen terbesar, sebab tidak ada elemen yg dapat dibagi oleh semua elemen lain di S
- Jika A = {2, 3, 6} maka :
  - Batas atas dari A adalah 6,12,18,24
  - Batas bawah dari A adalah 1
  - Sup(A) adalah 6
  - Inf(A) adalah 1

Jika B = {4, 6, 9} maka :

- Sup(B) adalah tidak ada
- Inf(B) adalah 1

Contoh 2

Misalkan B = {2,3,4,6,8,12,24} himpunan terurut oleh pembagian. Maka diagram hasse nya adalah:

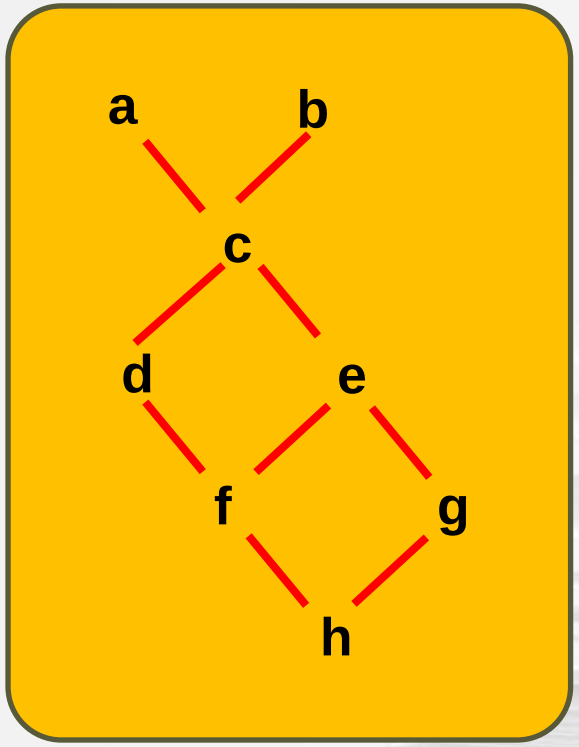


Dari diagram di samping, diperoleh:

- 2 dan 3 adalah elemen minimal dari B, karena tidak ada elemen B yang membagi 2 dan 3.
- B tidak memiliki elemen terkecil, sebab tidak ada elemen B yang dapat membagi semua elemen lain di B
- 24 adalah elemen maksimal dan elemen terbesar dari B.
- Jika G = {4, 6} maka : batas atas dari G adalah 12 dan 24
  batas bawah dari G adalah 2
  supremum dari G adalah 12
  infimum dari G adalah 2
- Jika H = {2, 3, 6} maka : batas atas dari H adalah 6, 12 dan 24
  batas bawah dari H tidak ada
  supremum dari H adalah 6
  infimum dari H tidak ada.

Contoh 3

Misalkan = { a, b, c, d, e, f, g, h} himpunan terurut seperti pada gambar:



Misalkan M = { d, e, g}. Dari diagram di samping, diperoleh:

- Batas atas dari M adalah a, b, dan c
- Batas bawah dari M adalah h
- Supremum dari M adalah c
- Infimum dari M adalah h

Misalkan N = { c, d, e}. Dari diagram di samping, diperoleh:

- Batas atas dari N adalah a, b, dan c
- Batas bawah dari N adalah f dan h
- Supremum dari N adalah c
- Infimum dari N adalah f

Definisi

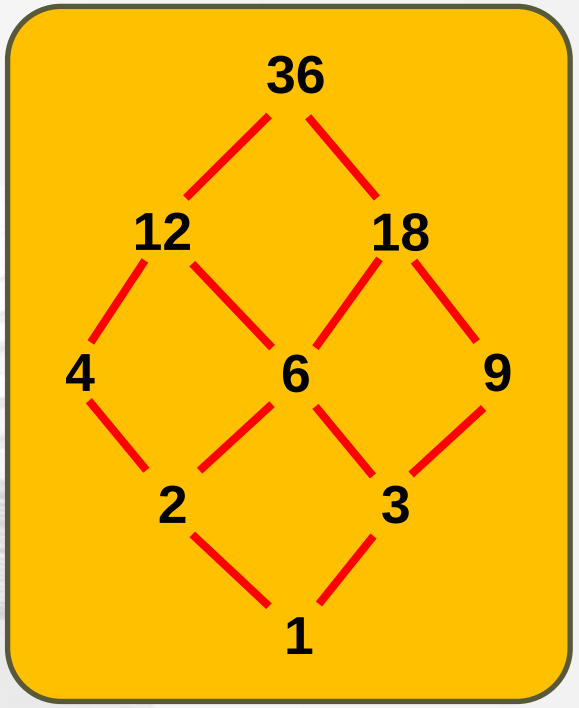
Untuk sembarang bilangan positif m, kita dapat memisalkan Dm menyatakan himpunan pembagi dari m, suatu urutan dengan relasi pembagian.

Maka setiap (a, b) $\in$ Dm berlaku :

- Sup(a, b) = KPK (a, b)
- Inf(a, b) = FPB (a, b)

Contoh :

D_{36} = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} merupakan himpunan pambagi dari 36, maka diagramnya tampak di samping :



Dari diagram di samping terlihat bahwa :

- Inf (a, b) = FPB (a, b)
- Sup (a, b) = KPK (a, b)

LATIHAN

1. $X = \{2,3,6,12,24,36\}$. Didefinisikan dengan $X \leq Y$ sebagai Y habis dibagi X, maka tentukan :
   a) Gambar diagram hasse dari $<X,\leq>$
   b) Cari batas atas dari (2,3)
   c) Cari batas bawah dari (24,36)
   d) Cari batas atas terkecil (supremum) dari (2,3)
   e) Cari batas bawah terkecil (infirmum) dari (24,36)

2. Misalkan $X = \{2,5,10,20,40,100\}$. Definisikan $X \leq Y$ sebagai Y habis dibagi X, maka tentukan:
   a) Diagram hasse untuk$(X,\leq)$
   b) Batas atas dari (2,5)
   c) Batas bawah dari (40,100)
   d) Supremum Dari (2,5)
   e) Infimum dari (40,100)

ALJABAR BOOLEAN

Matematika Informatika

DEFINISI

Aljabar boole merupakan aljabar yang terdiri atas suatu himpunan B dengan dua operator biner yang didefinisikan pada himpunan tersebut, yaitu * (infimum) dan + (supremum).

Atau aljabar boole adalah suatu letis distribusi berkomplemen.

Notasi aljabar boole adalah (B, + , * , ’ , 0 , 1). Dalam aljabar boole terdapat :

1. Letis (B, * , +) dengan dua operasi biner infimum (*) dan supremum (+)
2. Poset (B, ≤) yaitu himpunan terurut bagian.
3. Batas-batas letis yang dinotasikan dengan 0 dan 1 dimana

   0 adalah elemen terkecil dan 1 adalah elemen terbesar dari relasi (B, ≤).

Karena (B, * , +) merupakan letis distribusi berkomplemen maka tiap elemen dari B merupakan komplemen yang unik. Komplemen a adalah a’ (a $\in$ *B)*

Untuk setiap a, b, $c \in B$ berlaku sifat-sifat atau postulat-postulat Huntington (E.V Huntington : 1904) sebagai berikut:

1. *Closure (tertutup)* : (i) $a + b \in B$
   (ii) $a * b \in B$

2. Identitas : (i) $a + 0 = 0 + a = a$
   (ii) $a * 1 = 1 * a = a$

3. Komutatif : (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a * b = b * a$

4. Distributif : (i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
   (ii) $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$
   (iii) $(a * b) + c = (a + c) * (b + c)$

5. Komplemen : (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a * a' = 0$

Notasi aljabar boole :

(B, + , * , ’ , 0 , 1)

(B, + , . , ’)

(B, + , ⊕ , ’)

Operator Biner :
+ dan (*, . , atau ⊕)

Operator Uner :
’ (komplemen)

DEFINISI

Aljabar Boolean dua-nilai didefinisikan pada sebuah himpunan dua buah elemen, $B = \{0, 1\}$.

Akan diselidiki apakah (B, + , * , ’) aljabar boole atau bukan.

a	b	a + b	b + a
0	0	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	1	**1**
1	1	1	**1**

a	b	a * b	b * a
0	0	0	**0**
0	1	0	**0**
1	0	0	**0**
1	1	1	**1**

a	a'
0	1
1	0

Postulat Huntington :

1. Closure

(i) $a + b \in B$
(ii) $a * b \in B$

Terpenuhi postulat Closure

2. Identity

(i) $a + 0 = 0 + a = a$
(ii) $a * 1 = 1 * a = a$

Terpenuhi postulat Identity

3. Komutatif

(i) $a + b = b + a$
(ii) $a * b = b . a$

Terpenuhi postulat Komutatif

4. Distributif

(i) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ ditunjukkan dengan tabel operator biner berikut :

a	b	c	b + c	a * (b + c)	(a * b)	(a * c)	(a * b) + (a * c)
0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	0	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	1	0	1	**1**	**1**	**0**	**1**
1	1	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**

$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

(ii) $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$ juga dapat ditunjukkan dengan tabel operator biner

5. Komplemen

a	a'
0	1
1	0

Dari tabel komplemen memperlihatkan bahwa:

(i) Untuk a = 0 maka

$$a + a' = 0 + 0' = 0 + 1 = 1$$

Untuk a = 1 maka

$$a + a' = 1 + 1' = 1 + 0 = 1$$

$$a + a' = 1$$

(ii) Untuk a = 0 maka

$$a * a' = 0 * 0' = 0 * 1 = 0$$

Untuk a = 1 maka

$$a * a' = 1 * 1' = 1 * 0 = 0$$

$$a * a' = 0$$

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa *B* = {0, 1} bersama-sama dengan operator biner (+ dan *) serta operator komplemen (') merupakan aljabar boolean.

PERJANJIAN

Tanda titik (*) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$	*ditulis*	$a(b + c) = ab + ac$
$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$	ditulis	$a + bc = (a + b)\ (a + c)$
$a * 0$	tidak ditulis	a0

PRINSIP DUALITAS

PRINSIP DUALITAS

Misalkan *S* adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator +, *, dan ’, maka jika pernyataan *S** diperoleh dengan cara mengganti

* dengan +
\+ dengan *
0 dengan 1
1 dengan 0

dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan *S** juga benar. *S** disebut sebagai *dual* dari *S*.

CONTOH :

$(a * 1)(0 + a') = 0$	dualnya	$(a + 0) + (1 * a') = 1$
$a(a' + b) = ab$	dualnya	$a + a'b = a + b$
$a + (bc) = (a + b)(a + c)$	dualnya	$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
$a * 1 = 0$	dualnya	$a + 0 = 1$

HUKUM-HUKUM ALJABAR BOOLE

HUKUM-HUKUM ALJABAR BOOLEAN

1. Hukum Identitas (i) $a + 0 = a$ (ii) $a * 1 = a$	2. Hukum Idempoten (i) $a + a = a$ (ii) $a * a = a$	3. Hukum Komplemen (i) $a + a' = 1$ (ii) $a * a' = 0$
4. Hukum Dominasi (i) $a * 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$	5. Hukum Involusi $(a')' = a$	6. Hukum Penyerapan (Absorbsi) (i) $a + a * b = a$ (ii) $a* (a + b) = a$
7. Hukum Komutatif (i) $a + b = b + a$ (ii) $a * b = b * a$	8. Hukum Asosiatif (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a (b * c) = (a * b) c$	9. Hukum Distributif (i) $a + (b * c) = (a + b) (a + c)$ (ii) $a (b + c) = a * b + a * c$
10. Hukum De Morgan (i) $(a + b)' = a' b'$ (ii) $(a * b)' = a' + b'$	11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

1. Hukum Identitas (i) $a + 0 = a$ (ii) $a * 1 = a$	2. Hukum Idempoten (i) $a + a = a$ (ii) $a * a = a$	3. Hukum Komplemen (i) $a + a' = 1$ (ii) $a * a' = 0$
4. Hukum Dominasi (i) $a * 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$	5. Hukum Involusi $(a')' = a$	6. Hukum Penyerapan (Absorbsi) (i) $a + a * b = a$ (ii) $a* (a + b) = a$
7. Hukum Komutatif (i) $a + b = b + a$ (ii) $a * b = b * a$	8. Hukum Asosiatif (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a (b * c) = (a * b) c$	9. Hukum Distributif (i) $a + (b * c) = (a + b) (a + c)$ (ii) $a (b + c) = a * b + a * c$
10. Hukum De Morgan (i) $(a + b)' = a' b'$ (ii) $(a * b)' = a' + b'$	11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

1

2

$(a + b)$

$= a + b$ *identitas*

$= a\ b$ *identitas*

FUNGSI BOOLEAN

FUNGSI BOOLEAN

Disebut juga fungsi biner adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, yaitu :

$$f : B^n \rightarrow B$$

B^n : himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (ordered n-tuple) di daerah asal B.

Note : Setiap ekspresi Boolean merupakan fungsi Boolean.

Contoh :

Misalkan sebuah fungsi Boolean seperti : $f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$

Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan {0, 1}.

Misal :

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= 1 * 0 * 1 + 1' * 0 + 0' * 1 \\ &= 0 + 0 + 1 * 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Contoh-contoh fungsi Boolean :

1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x' y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x' \; y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

Contoh:

Nyatakan fungsi Booelan $f(x, y, z) = xy z' + xy'$ dalam tabel kebenaran !

x	y	z	z'	x y z'	y'	x y'	x y z' + x y'
0	0	0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	0	1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Fungsi Komplemen

dari fungsi Boolean

FUNGSI KOMPLEMEN

Fungsi komplemen dari $f(x,y,z)$ adalah $f'(x,y,z)$

Untuk menyederhanakan bentuk fungsi yang dikomplemenkan, kita bisa menggunakan 2 cara :

1. Dengan hukum De'Morgan
2. Dengan Prinsip dualitas

Contoh:

Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$ *maka* $f'(x, y, z) = (x(y'z' + yz))'$

Dengan Hukum De'Morgan

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\
&= x' + (y'z' + yz)' \\
&= x' + (y'z')' \,.\, (yz)' \\
&= x' + (y + z) \,.\, (y' + z')
\end{aligned}
$$

Dengan Prinsip Dualitas

Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan f, lalu komplemenkan setiap literal di dalam dual tersebut.

$$f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$$

Dualnya : $x + (y' + z')(y + z)$

Komplemen tiap literalnya : $x' + (y + z)(y' + z')$

Jadi $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

BENTUK KANONIK

Full disjunctive normal function (Full dnf)

BENTUK KANONIK

Suatu pernyataan Boole dibentuk dari literal-literal (berupa variabel atau komplemennya) dengan menggunakan operasi-operasi Boole +, *, dan ’.

Contoh 1 :

xz’
xy’z
x’
yz
x’yz

Bentuk Perkalian dasar

Contoh 2 :

xyxz’
xy’yz
xyx’z
xxy’

Bukan Bentuk Perkalian dasar

Bentuk Normal Disjunctive (dnf) merupakan bentuk perkalian dasar atau jumlah dari dua atau lebih perkalian dasar dimana masing-masing perkalian dasarnya tidak terkandung dalam perkalian dasar lain. Contoh :

xz’ + x’yz + xy’z	Bentuk Normal Disjunctive
xz’ + y’z + xyz’	**Bukan** Normal Disjunctive karena xz’ terkandung dalam xyz’
x’yz + x’y’z + xyz	Bentuk Normal Disjunctive lengkap (**Kanonik Disjunctive/SOP**)

Bentuk Kanonik

Ada dua macam bentuk kanonik:

1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP) → **Kanonik Disjunctive / Full dnf**
2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh:

1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ → *SOP*

   Tiap suku (term) disebut dengan ***minterm***

2. $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$ → *POS*

   Tiap suku (term) disebut dengan ***maxterm***

Setiap minterm / maxterm mengandung **literal lengkap**

Bentuk Kanonik

Tabel Dua Literal

x	y	Minterm		Maxterm	
		Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	x’y’	m_0	x + y	M_0
0	1	x’y	m_1	x + y’	M_1
1	0	xy'	m_2	x' + y	M_2
1	1	xy	m_3	x' + y’	M_3

Tabel Tiga Literal

x	y	z	Minterm		Maxterm	
			Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	x’y’z’	m_0	x + y + z	M_0
0	0	1	x’y’z	m_1	x + y + z’	M_1
0	1	0	x’yz’	m_2	x + y’ + z	M_2
0	1	1	x’yz	m_3	x + y’ + z’	M_3
1	0	0	xy’z’	m_4	x' + y + z	M_4
1	0	1	xy’z	m_5	x' + y + z’	M_5
1	1	0	xyz’	m_6	x' + y’ + z	M_6
1	1	1	xyz	m_7	x' + y’ + z’	M_7

CONTOH 1 :

Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x + y'z$ ke dalam bentuk kanonik SOP dan POS

Penyelesaian : Ubah setiap term menjadi literal lengkap

a) Bentuk SOP :

$x = x\,(y + y')$

$x = xy + xy'$

$x = xy\,(z + z') + xy'\,(z + z')$

$x = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$

$y'z = y'z\,(x + x')$

$y'z = xy'z + x'y'z$

x	y	z	Minterm	
			Suku	Lambang
0	0	0	x'y'z'	m_0
0	0	1	**x'y'z**	$\mathbf{m_1}$
0	1	0	x'yz'	m_2
0	1	1	x'yz	m_3
1	0	0	**xy'z'**	$\mathbf{m_4}$
1	0	1	**xy'z**	$\mathbf{m_5}$
1	1	0	**xyz'**	$\mathbf{m_6}$
1	1	1	**xyz**	$\mathbf{m_7}$

$f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$

$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

$f(x,y,z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$

CONTOH 1 :

Nyatakan fungsi Boolean $f(x,y,z) = x + y'z$ ke dalam bentuk kanonik SOP dan POS

Penyelesaian :

b) Bentuk POS :

$f(x,y,z) = x + y'z$

$f(x,y,z) = (x + y')(x + z)$

$f(x,y,z) = ((x + y') + zz')((x + z) + yy')$

$f(x,y,z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$

$f(x,y,z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

$f(x,y,z) = M_0 M_2 M_3 = \Pi(0, 2, 3)$

x	y	z	Maxterm	
			Suku	Lambang
0	0	0	**x + y + z**	M_0
0	0	1	x + y + z'	M_1
0	1	0	**x + y' + z**	M_2
0	1	1	**x + y' + z'**	M_3
1	0	0	x' + y + z	M_4
1	0	1	x' + y + z'	M_5
1	1	0	x' + y' + z	M_6
1	1	1	x' + y' + z'	M_7

Latihan

Nyatakan dalam bentuk SOP dan POS

1. $y'z + xy$
2. $xy + z'$
3. $xy + z' + yz$

Pembahasan

Bentuk SOP

1. $y'z + xy = y'z\,(x+x') + xy\,(z+z')$

$= xy'z + x'y'z + xyz + xyz'$

$= m_5 + m_1 + m_7 + m_6 \qquad = \Sigma\,(1, 5, 6, 7)$

Bentuk POS

1. $y'z + xy = (x + y'z)\,(y + y'z)$

$= (x + y')(x + z)\,(y + y')\,(y + z)$

$= ((x + y') + zz')\,((x + z) + yy')\,((y + z) + xx')$

$= (x + y' + z)\,(x + y' + z')\,(x + y + z)\,(x + y' + z)(x + y + z)\,(x' + y + z)$

$= M_2 \qquad M_3 \qquad M_0 \qquad M_4 \qquad = \Pi\,(0,2,3,4)$

Pembahasan

Bentuk SOP

2. $xy + z'$ $= xy\,(z+z')\,+\,z'\,(x+x')\,(y+y')$

$= xyz + xyz' + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$

$= m_7 + m_6 + m_4 + m_2 + m_0 = \Sigma\,(0, 2, 4, 6, 7)$

Bentuk POS

2. $xy + z'$ $= (x + z')\,(y + z')$

$= ((x + z') + yy')\,((y + z') + xx')$

$= (x + y + z')\,(x + y' + z')\,(x + y + z')\,(x' + y + z')$

$= M_1 \quad M_3 \quad M_5 = \Pi\,(1, 3, 5)$

Pembahasan

Bentuk SOP

3. $xy + z' + yz = xy(z+z') + z'(x+x')(y+y') + yz(x+x')$

$= xyz + xyz' + xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z' + xyz + x'yz$

$= m_7 + m_6 + m_4 + m_2 + m_0 + m_3 = \Sigma(0, 2, 3, 4, 6, 7)$

Bentuk POS

3. $xy + z' + yz = xy + yz + z'$

$= y(x + z) + z'$

$= (y + z')(x + z + z')$

$= (y + z') . 1$

$= ((y + z') + xx')$

$= (x + y + z')(x' + y + z')$

$= M_1 \quad M_5 = \Pi(1, 5)$

Hasil Latihan

Bentuk SOP

1. $y'z + xy = x'y'z + xy'z + xyz' + xyz = \Sigma(1, 5, 6, 7)$
2. $xy + z' = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' + xyz = \Sigma(0, 2, 4, 6, 7)$
3. $xy + z' + yz = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz' + xyz = \Sigma(0, 2, 3, 4, 6, 7)$

Bentuk POS

1. $y'z + xy = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z) = \Pi(0, 2, 3, 4)$
2. $xy + z' = (x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z') = \Pi(1, 3, 5)$
3. $xy + z' + yz = (x+y+z')(x'+y+z') = \Pi(1, 5)$

CONTOH 2 :

Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS

x	y	z	f(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \Sigma\,(1, 4, 7)$$

POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z')$$

$$f(x, y, z) = M_0\, M_2\, M_3\, M_5\, M_6 = \Pi(0, 2, 3, 5, 6)$$

APLIKASI
ALJABAR BOOLEAN

APLIKASI ALJABAR BOOLEAN

Jaringan Saklar (Switching Network)

Saklar : Objek yang mempunyai dua buah keadaan : *buka* dan *tutup*.

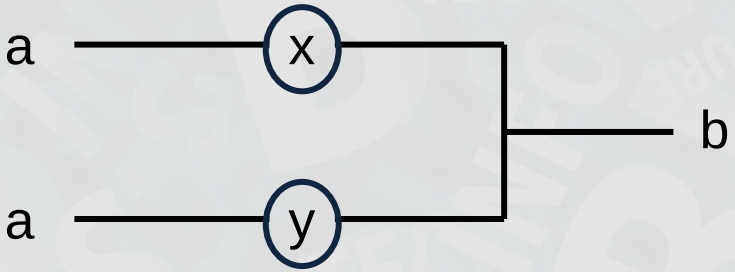
Tiga bentuk gerbang paling sederhana :

1.

   Output b hanya ada jika dan hanya jika x dibuka $\Rightarrow$ x

2.

   Output b hanya ada jika dan hanya jika x dan y dibuka $\Rightarrow$ x y

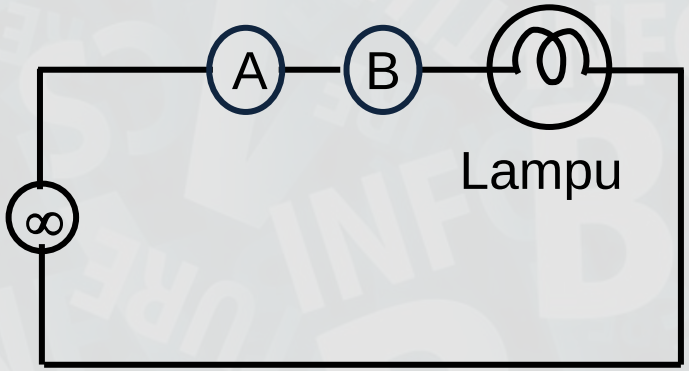
3. 

   Output b hanya ada jika dan hanya jika x atau y dibuka $\Rightarrow$ x + y

Aplikasi Aljabar Boolean

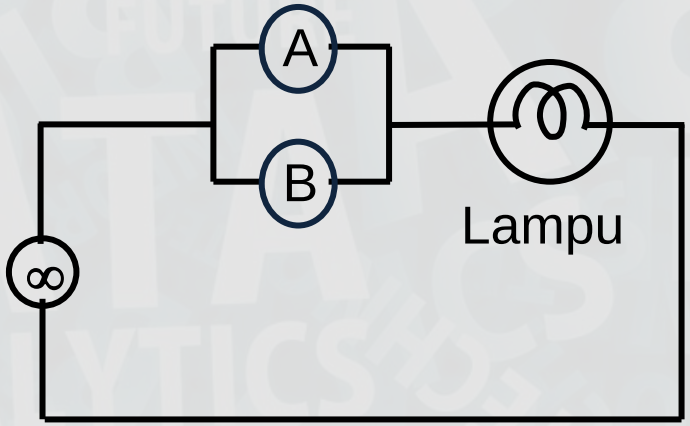
Rangkaian saklar pada rangkaian Listrik

Saklar dalam hubungan **SERI**



Logika : **AND**

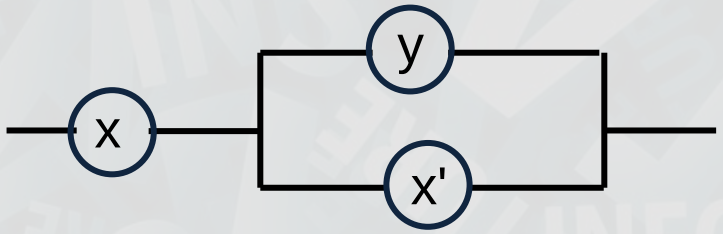
Saklar dalam hubungan **PARALEL**



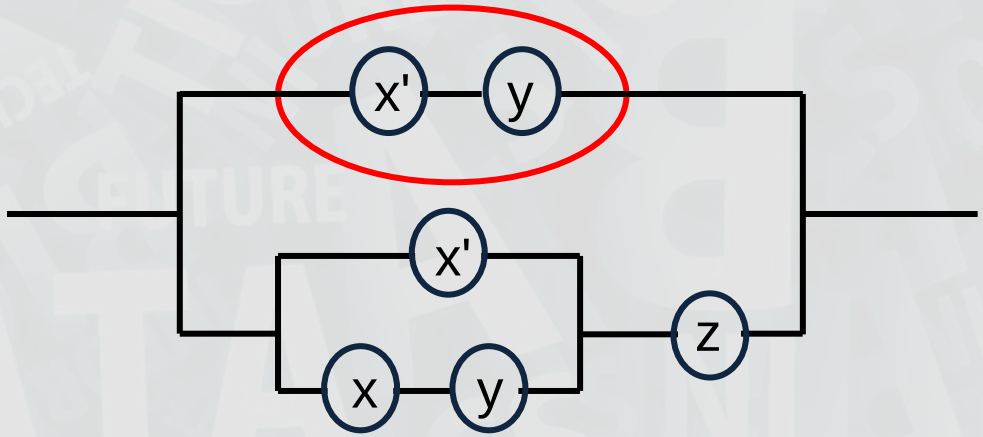
Logika : **OR**

Aplikasi Aljabar Boolean

Nyatakan rangkaian pensaklaran pada gambar di bawah ini dalam ekspresi Boolean



$$x\ (x' + y)$$



$$x'y + (x' + xy)z$$

Gerbang Logika

Penggunaan alat digital sudah menjadi kebutuhan utama di era modern,dimana ia dapat digunakan untuk berbagai macam hal. Namun tahukah Anda bagaimana perangkat digital dapat berfungsi dengan baik? Jawabannya terdapat pada komponen paling dasar atau biasa disebut sistem gerbang logika *(logic gate).*

Sistem ini berfungsi dengan adanya input dan output yang memakai teori Aljabar Boolean. Teori ini menyebutkan terdapat dua kode paling dasar sistem digital,yaitu 1 yang berarti true dan 0 yang berarti false.

Fungsi Gerbang Logika

Fungsi sistem gerbang logika (logic gate) adalah sebagai perintah atau penerjemah, dimana ia menghubungkan banyak perangkat atau komponen di dalamnya. Mulai dari IC (Integrated Circuit),Transistor, Dioda, Optik, Relay,dan beragam perangkat elektronik lainnya.
Umumnya dalam sebuah chip alat elektronik mempunyai jutaan sistem gerbang ini, setiap gerbangnya memiliki tujuan atau fungsi berbeda. Namun secara garis besar ia dapat dikelompokkan menjadi beberapa rangkaian,mulai flip-flop, counter, multiplexer, demultiplexer, dan lain sebagainya.

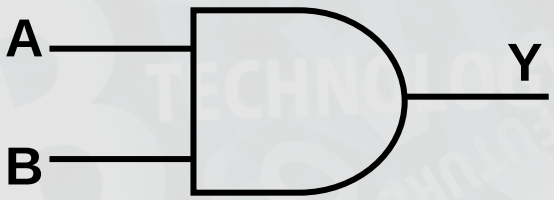
Gerbang Logika

Jenis Gerbang Logika

Sedangkan untukjenis-jenisnya sistem gerbang ini memiliki 7 jenis yang paling utama, setiap jenis memiliki fungsi serta cara kerja yang berbeda-beda.
Selain itu penggunaannya juga disesuaikan dengan kebutuhan,karena setiap sistem mempunyai rangkaian input dan output yang berbeda-beda. Untuk lebih lengkapnya berikut ini adalah ulasan yang bisa Anda simak:

1. Gerbang AND

Gerbang AND termasuk yang paling sederhana diantara lainnya, dimana gerbang ini membutuhkan dua input atau lebih untuk menghasilkan satu output.



A . B = Y

A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Biasanya digunakan untuk sebuah IC alat elektronik seperti TTL Logic AND Gate atau CMOS Logic AND Gate.

Gerbang Logika

2. Gerbang OR

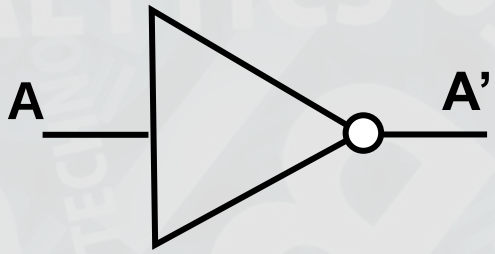
Gerbang ini biasa digunakan untuk melengkapi sebuah sistem digital,dimana ia berfungsi agar sistem digital memiliki opsi yang lebih luas terhadap sistem geraknya. Terutama saat digunakan di samping Gerbang AND yang merupakan opsi lain dari gerbang yang satu ini.

A + B = Y

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Gerbang NOT (Inverter)

Disebut juga sebagai Inverter (pembalik), Gerbang NOT memang memiliki konfigurasi terbalik. Ia dapat mengubah input 0 menjadi output 1,sedangkan input 0 akan menjadi output 1. Gerbang NOT juga sangat berbeda dengan gerbang lainnya, karena ia hanya mempunyai 1 input dan 1 output saja.



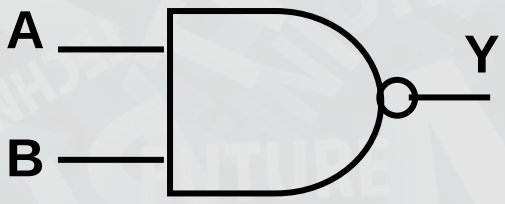
A = A’

A	Output
0	1
1	0

Gerbang Logika

4. Gerbang NAND

Gerbang logika berikutnya ialah Gerbang NAND atau bisa disebut **Not AND**, karena konfigurasi yang dimilikinya berlawanan dengan Gerbang AND. Sehingga penggunaannya juga sangatlah berbeda.

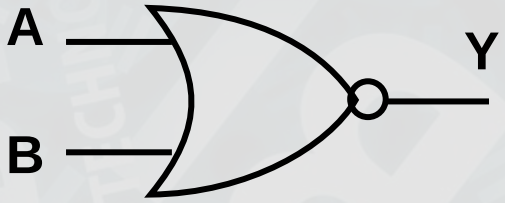


(A . B)' = Y

A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. Gerbang NOR

Selanjutnya gerbang yang menjadi kebalikan dari Gerbang OR, yaitu Gerbang NOR (Not OR).



(A + B)' = Y

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Gerbang Logika

6. Gerbang XOR

Ada juga versi Gerbang X-OR atau bisa disebut Exclusive OR,seperti namanya ia adalah versi pengembangan dari Gerbang OR

$$A \oplus B = Y$$

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7. Gerbang XNOR

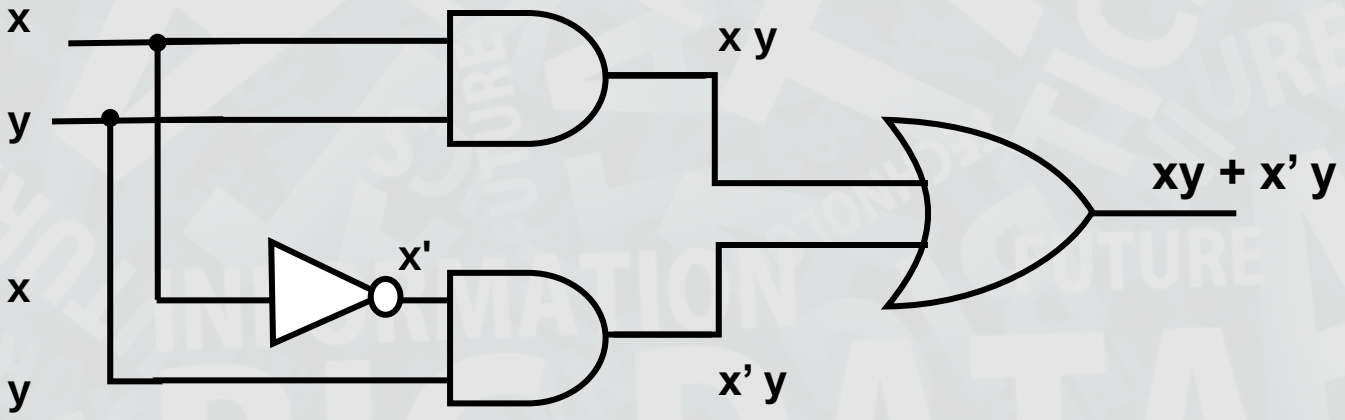
Sarna dengan gerbang lainnya, Gerbang X-NOR juga memiliki konfigurasi dua input dan satu output. Bedanya ia sendiri merupakan pengembang dari Gerbang NOR, sehingga ia dinamai Exclusive NOR.
Seperti nama yang diberikan,konfigurasi gerbang ini adalah pengembangan konfigurasi Gerbang NOR.

$$(A \oplus B)' = Y$$

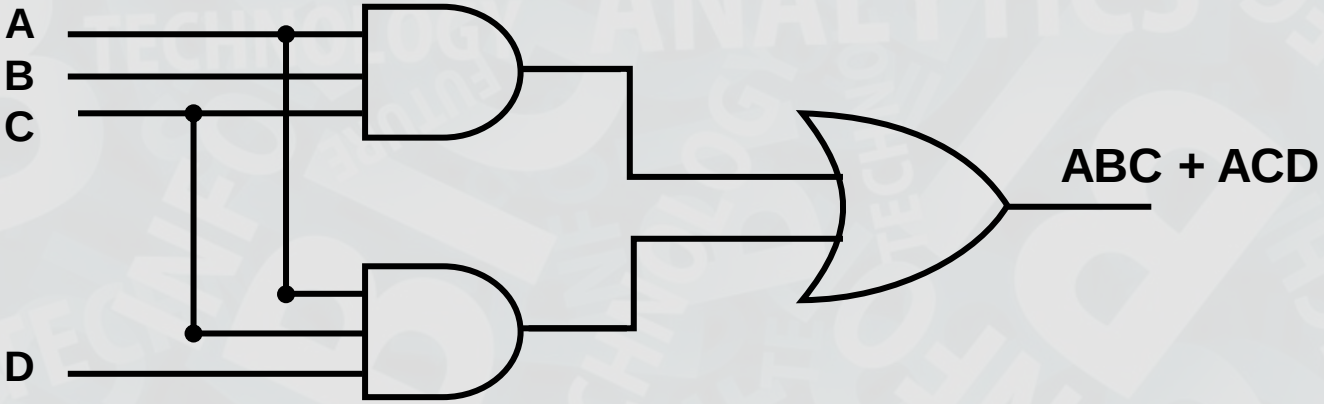
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Gerbang Logika

Contoh : Nyatakan fungsi f(x,y) = xy + x’ y ke dalam rangkaian logika



Nyatakan fungsi f(A,B,C,D) = ABC + ACD ke dalam rangkaian logika



THANK YOU

Insert the Sub Title of Your Presentation

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN

SECARA ALJABAR
dan DENGAN PETA KARNAUGH

Muhammad Imron

Penyederhanaan Fungsi Boolean

Adakalanya fungsi boolean yang ada perlu disederhanakan. Contoh bentuk paling sederhana adalah ***minimal dnf.***

Contoh :

fungsi boolean	$x'y + xy' + y'$
dapat disederhanakan menjadi minimal dnf :	$x' + y'$

Ada beberapa cara menyederhanakan fungsi Boolean diantaranya :

1. Penyederhanaan secara aljabar
2. Penyederhanaan dengan bantuan Peta Karnaugh

PENYEDERHANAAN SECARA ALJABAR

Muhammad Imron

Penyederhanaan secara Aljabar

Penyederhanaan secara aljabar menggunakan hukum-hukum aljabar Boolean

Contoh 1 :

$f(x,y) = x + x'y$		
$= (x + x')(x + y)$	Hukum distributif	$a+(bc) = (a+b)(a+c)$
$= 1 \quad (x + y)$	Hukum kompleman	$a + a' = 1$
$f(x,y) = x + y$	Hukum Identitas	$a \cdot 1 = a$

Contoh 2 :

$f(x,y) = x'y'z + x'yz + xy'$		
$= x'z\,(y' + y) + xy'$	Hukum distributif	$ab + ac = a(b + c)$
$= x'z \cdot 1 + xy'$	Hukum kompleman	
$= x'z + xy'$	Hukum Identitas	

Penyederhanaan secara Aljabar

Muhammad Imron

Contoh 3 :

$f(x,y) = xy + x'z + yz$

$= xy + x'z + yz\,(x + x')$

$= xy + x'z + xyz + x'yz$

$= xy\,(1 + z) + x'z\,(1 + y)$

$= xy\,.\;1 + x'z\,.\;1$

$f(x,y) = xy + x'z$

Contoh 4 :

$f(x,y) = x'y + xy' + y'$

$= x'y + xy' + y'\,(x + x')$

$= x'y + xy' + xy' + x'y'$

$= x'\,(y + y') + xy'$

$= x' + xy'$

$f(x,y) = (x' + x)\,(x' + y')$

$f(x,y) = (x' + y')$

Apakah sudah paling sederhana

Penyederhanaan secara Aljabar

Muhammad Imron

Contoh 3 :

$f(x,y) = xy + x'z + yz$

$= xy + x'z + yz\,(x + x')$

$= xy + x'z + xyz + x'yz$

$= xy\,(1 + z) + x'z\,(1 + y)$

$= xy\,.\;1 + x'z\,.\;1$

$f(x,y) = xy + x'z$

Contoh 4 :

$f(x,y) = x'y + xy' + y'$

$= x'y + (x + 1)\,y'$

$= x'y + y'$

$= (x' + y')\,(y + y')$

$f(x,y) = x' + y'$

Diperlukan kreatifitas dan kejelian penggunaan hukum-hukum aljabar boole untuk menghasilkan bentuk paling sederhana

PENYEDERHANAAN DENGAN PETA KARNAUGH

Muhammad Imron

Mengisi Peta Karnaugh

dari

TABEL KEBENARAN

Mengisi PETA KARNAUGH dari tabel kebenaran

Muhammad Imron

Tabel minterm dua variabel

x	y	suku	lambang
0	0	x'y'	m_0
0	1	x'y	m_1
1	0	xy'	m_2
1	1	xy	m_3

Peta Karnaugh dua variabel

x \ y	0	1
0	m_0	$\mathbf{m_1}$
1	m_2	m_3

Buat Peta Karnaugh dari tabel kebenaran berikut

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

x \ y	0	1
0	1	0
1	0	1

Mengisi PETA KARNAUGH dari tabel kebenaran

Muhammad Imron

Tabel minterm tiga variabel

x	y	z	Suku	Lambang
0	0	0	x'y'z'	m_0
0	0	1	x'y'z	m_1
0	1	0	x'yz'	m_2
0	1	1	x'yz	m_3
1	0	0	xy'z'	m_4
1	0	1	xy'z	m_5
1	1	0	xyz'	m_6
1	1	1	xyz	m_7

x \ yz	00	01	11	10
0	m_0	**m_1**	**m_3**	**m_2**
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Peta Karnaugh tiga variabel

Buat Peta Karnaugh dari tabel kebenaran berikut

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Mengisi PETA KARNAUGH dari tabel kebenaran

Muhammad Imron

Peta Karnaugh 4 variabel

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	$\mathbf{m_1}$	$\mathbf{m_3}$	$\mathbf{m_2}$
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

w	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Buat Peta Karnaugh dari tabel kebenaran di samping

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	0	0	1	1

Mengisi Peta Karnaugh

dari

FUNGSI BOOLEAN

Mengisi PETA KARNAUGH dari Fungsi Boolean 2 Variabel

Muhammad Imron

Nyatakan Fungsi Boolean berikut dalam peta karnaugh

1. $E_1 = xy + xy'$
2. $E_2 = xy + x'y + x'y'$
3. $E_3 = xy + x'y'$

x \ y	0	1
0	0	0
1	1	1

E_1

x \ y	0	1
0	1	1
1	0	1

E_2

x \ y	0	1
0	1	0
1	0	1

E_3

Mengisi PETA KARNAUGH dari Fungsi Boolean 3 Variabel

Muhammad Imron

Nyatakan Fungsi Boolean berikut dalam peta karnaugh

1. $G_1 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z$
2. $G_2 = xyz + x'yz' + xy'z + x'yz + x'y'z$
3. $G_3 = xyz + xyz' + x'y'z' + x'yz' + x'y'z$

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

G_1

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

G_2

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

G_3

Mengisi PETA KARNAUGH dari Fungsi Boolean 4 Variabel

Muhammad Imron

Nyatakan Fungsi Boolean berikut dalam peta karnaugh

1. $H_1 = wx'yz + wx'yz' + w'x'yz + w'x'yz' + wxy'z' + wxy'z + w'xy'z' + w'xy'z$
2. $H_2 = w'xy'z' + w'xy'z + w'xyz + w'xyz' + wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + w'x'y'z$
3. $H_3 = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + w'xyz + w'x'y'z' + w'x'yz' + wx'y'z' + wx'yz'$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	1	1

H_1

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

H_2

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

H_3

LANGKAH PENYEDERHANAAN

Muhammad Imron

Langkah Penyederhanaan dg PETA KARNAUGH

Kita hanya perhatikan angka 1 pada Peta Karnaugh

Angka-angka 1 ini dapat membentuk sebuah GROUP (kelompok).

Satu GROUP berisi DUA, EMPAT atau DELAPAN kotak membentuk **persegi panjang**.

Penyederhanaan Fungsi

Muhammad Imron

Nyatakan fungsi boolean berikut dalam bentuk minimal dnf !

1. $E_1 = xy + xy'$ $= x$
2. $E_2 = xy + x'y + x'y'$ $= x' + y$
3. $E_3 = xy + x'y'$ Sudah dalam bentuk minimal dnf

x \ y	0	1
0	0	0
1	1	1

E_1

x \ y	0	1
0	1	1
1	0	1

E_2

x \ y	0	1
0	1	0
1	0	1

E_3

$E_1 = x$

$E_2 = x' + y$

$E_3 = x'y' + xy$

Penyederhanaan Fungsi

Muhammad Imron

Nyatakan fungsi boolean berikut dalam bentuk minimal dnf !

1. $G_1 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z \qquad = x'y'z + xy + yz'$
2. $G_2 = xyz + x'yz' + xy'z + x'yz + x'y'z \qquad = z + x'y$
3. $G_3 = xyz + xyz' + x'y'z' + x'yz' + x'y'z \qquad = x'y' + xy + yz' \quad = x'y' + xy + x'z'$

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

G_1

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

G_2

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

G_3

$G_1 = x'y'z + xy + yz'$

$G_2 = z + x'y$

$G_3 = x'y' + xy + yz'$

atau $G_3 = x'y' + xy + x'z'$

Penyederhanaan Fungsi

Muhammad Imron

Nyatakan fungsi boolean berikut dalam bentuk minimal dnf !

1. $H_1 = wx'yz + wx'yz' + w'x'yz + w'x'yz' + wxy'z' + wxy'z + w'xy'z' + w'xy'z$
2. $H_2 = w'xy'z' + w'xy'z + w'xyz + w'xyz' + wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + w'x'y'z$
3. $H_3 = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + w'xyz + w'x'y'z' + w'x'yz' + wx'y'z' + wx'yz'$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	1	1

H_1

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

H_2

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

H_3

$H_1 = xy' + x'y$

$H_2 = x + w'y'z$

$H_3 = wx + xyz + x'z'$

Penyederhanaan Fungsi

Muhammad Imron

Nyatakan peta karnaugh berikut dalam bentuk minimal dnf !

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$w'y'z' + yz + wz$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$w'z + wz'$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

$w'xy'z' + w'yz + xyz + x'yz'$

Terimakasih

Muhammad Imron