Přímé ortogonální a hyperkubické propojovací sítě paralelních počítačů (definice, vlastnosti, vnořování)

- $V(G), E(G)$ - množina vrcholů a hran grafu
- $N = V(G)$ - velikost grafu, $\langle u, v \rangle$ - hrana grafu
- $\deg_G(u)$ - stupeň uzlu (tj. # sousedů)
  - maximální stupeň grafu $\Delta(G)$, minimální stupeň grafu $\delta(G)$

    → k regulární graf: $\Delta(G) = \delta(G) = k$
- Excentricita uzlu $\mathrm{exc}(u)$ - vzdálenost nejvzdálenějšího uzlu
- Průměr - největší excentricita grafu
- Poloměr - nejmenší excentricita grafu

Topologie G_n - množina grafů, jejichž velikost a struktura je definovaná parametrem n

- hierarchicky rekurzivní → instance menších dimenzí jsou podgrafy větších
  (inkrementálně / částečně škálovatelná topologie)

Řídká topologie $|E(G_n)| = O|V(G_n)|$ → stupně uzlů jsou omezené konstantou

Hustá topologie $|E(G_n)| = \omega|V(G_n)|$ → —"— rostou s n

Kartézský součin $G = G_1 \times G_2$

- komutativní a asociativní operace zachovávající symetrii (uzlovou)

$$V(G) = \{[x, y];\ x \in V(G_1),\ y \in V(G_2)\}$$

$$E(G) = \{\langle [x_1, y], [x_2, y] \rangle;\ \langle x_1, x_2 \rangle \in E(G_1)\}$$

$$\cup \{\langle [x, y_1], [x, y_2] \rangle;\ \langle y_1, y_2 \rangle \in E(G_2)\}$$

- uzlově symetrický graf:

  $\forall u_1, u_2 \in V(G), \exists$ automorfismus f takový, že $f(u_1) = u_2$

  - všechny uzlově symetrické grafy jsou regulární

Požadavky na PSPP

→ symetrie a hier. rekurzivita (návrh)

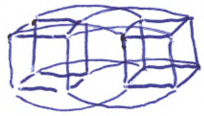
→ vysoká souvislost, bisekční šířka

→ konstantní stupeň uzlu (cena)

→ malý průměr a průměrná vzdálenost

→ vnořitelnost jiných

Ortogonální sítě – kartézský součin → hierarchicky rekurzivní Q_4:



□ **Binární hyperkrychle dimenze n, Q_n**

$|V(Q_n)| = 2^n$ $\deg = n$ – není řídká (log. stupeň uzlu)

$|E(Q_n)| = n2^{n-1}$ $\text{diam} = n$ – hierarchicky rekurzivní

– největší možná bisekční šířka (2^{n-1}) → D&C

– $\exists\, 2^n \times n!$ automorfismů (přeložení, permutace)

– částečně škálovatelná

$M(3,3,2)$

□ **n-rozměrná mřížka rozměrů $m_1 \dots m_n$, $M(m_1 \dots m_n)$**

$|V(M)| = \prod_{i=1}^{n} m_i$ – $M(k,k,\dots,k)$ – k-ární n-krychle

$|E(M)| = \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} m_j$ – není regulární → není uzlově symetrická

– hierarchicky rekurzivní

$M(m_1, \dots m_n) = M(m_1) \times M(\dots) \times M(m_n)$

- topologicky optimální $\exists$ pro mnoho základních problémů
- hamiltonovská kružnice pokud alespoň jedna strana je sudá

□ **n-rozměrný toroid dimenzí $m_1 \dots m_n$, $K(m_1, \dots, m_n)$**

= n-rozměrná kružnice, zabalená mřížka

– je uzlově symetrická

$|V(M)| = |V(K)|$ $\deg = 2n$ – $K(m_1, \dots m_n) = K(m_1) \times \dots \times K(m_n)$

$|E(K)| = n \times \prod_{i=1}^{n} m_i$ $\text{diam} = \sum_{i=1}^{n} \lfloor m_i/2 \rfloor$ – kompromis mezi M a Q → nejlepší

- poloviční průměr, dvojnásobná bisekční šířka

Řídké hyperkubické sítě

- rozvinutí každého uzlu hyperkrychle do více uzlů
  - pohyb po hraně může měnit více dimenzí

Zabalený motýlek dimenze n, wBF_n

v rámci jednoho Q uzlu

$$V(wBF_n) = \{(i,x);\ 0 \le i < n \wedge x \in B^n\} \qquad |V| = n2^n$$

$$E(wBF_n) = \{\langle (i,x), (i \oplus_n 1, x)\rangle, \qquad |E| = n2^{n+1}$$

mezi jednotlivými uzly $\longrightarrow \langle (i,x), (i \oplus_n 1, neg_i(x))\rangle \mid (i,x) \in V(wBF_n)\}$

$deg = 4$, $diam = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $bw_e = 2^n$

- uzlově symetrický, není hierarchicky rekurzivní

Obyčejný motýlek dimenze n, oBF_n

(jeden uzel rozmnožený na dva)

$$V(oBF_n) = \{(i,x);\ 0 \le i \le n \wedge x \in B^n\} \qquad |V| = (n+1)2^n$$

$$E(oBF_n) = \{\langle (i,x), (i+1, x)\rangle, \langle (i,x), (i+1, neg_i(x))\rangle \mid i < n\} \qquad |E| = n2^{n+1}$$

$deg = \{2,4\}$, $diam = 2n$, $bw_e = 2^n$

- není uzlově symetrický, je hierarchicky rekurzivní
- jediná nejkratší cesta $\rightarrow$ permutační síť

(přímý a nepřímý motýlek $\Rightarrow$ směrovací síť)

(dvousměrný motýlek & tlustý strom)

- Lineární pole / kružnice hamilton   load = 1   ecng = 2   dil ≤ 3

- sestrojím kostru grafu a procházím ji DFS
  $\rightarrow$ uzel umístím do uzlů v liché úrovni při první návštěvě a sudé při poslední

Vnořování = Embeding problem $G \to H$

měřítka kvality vnořování: $\varphi : V(G) \to V(H)$ $\xi : E(G) \to P(H)$

množina všech cest

$\mathrm{load}(\varphi, \xi)$ = maximální zatížení cílového uzlu

→ kolik procesů běží na jednom uzlu

$\mathrm{vexp}(\varphi, \xi) = |V(H)| / |V(G)|$

$\mathrm{dil}(\varphi, \xi)$ = maximální dilatace → jak daleko jsou od sebe sousední uzly

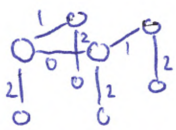
$\mathrm{ecng}(\varphi, \xi)$ = maximální zahlcení cílové hrany

→ zahlcení cílového kanálu

- kvaziizometrické grafy - jdou na obě strany vnořit s konstantními měřítky
  ⇒ výpočetně ekvivalentní (konstantní zpomalení) - neplatí naopak ⇍
- H simuluje G se zpomalením h jestliže jeden krok v G simuluji v $O(h)$ krocích na H

(průměrový argument
$|V(G)| = |V(H)| \wedge \mathrm{load}(\varphi, \xi) = 1 \Rightarrow \mathrm{dil}(\varphi, \xi) \geq \lceil \mathrm{diam}(H) / \mathrm{diam}(G) \rceil$)

○ D&C na krychle (hyper)

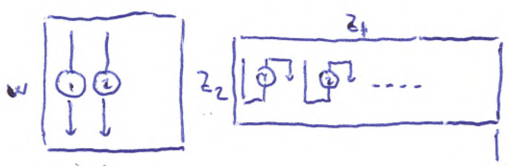


- normální hyperkubický algoritmus
- rozděluj a půlku si nech

○ $M \leftrightarrow K$: $\mathrm{load} = 1$, $\mathrm{dil} = \mathrm{ecng} = 2$ $(K \to M)$

- opačně triviální

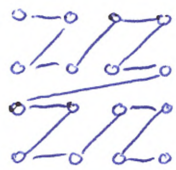
○ čtvercová mřížka do obdélníkové



$\mathrm{dil} = \lceil \sqrt{z_1 / z_2} \rceil$ $\mathrm{load} = 2$ $\mathrm{ecng} = 1 + \mathrm{dil}$

○ hyperkrychle → mřížky / toroidy

Mortonova křivka - spojujeme uzly v lex pořadí střídavě x a y

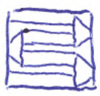


● 2D toroid do 1D toroidu

$\mathrm{load} = 1$, $\mathrm{dil} = \min(m_1, m_2)$, $\mathrm{ecng} = \mathrm{dil} + 2$

- 2D toroid si představíme jako mřížku
  → mapujeme po řádcích / sloupcích

○ obdélník do čtverce



$\mathrm{dil} = 1$
$\mathrm{load} = \mathrm{ecng} = 2$