Matematika neurčitosti: vzdálenosti a další míry podobnosti, fuzzy množiny a operace s nimi, t-normy a t-konormy, entropie a její souvislost s neurčitostí

podobnost objektů → neurčitá shoda jejich vlastností
(obrázky, tvary, dokumenty, shlukování dat)

množina X se vzdáleností d = metrický prostor

<u>vzdálenost</u>: $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, +\infty)$

vlastnosti $\mathcal{X}$:

$$(\forall x,y \in \mathcal{X})\ d(x,y) = 0 \text{ právě když } x = y$$

$$(\forall x,y \in \mathcal{X})\ d(x,y) = d(y,x)$$

$$(\forall x,y,z \in \mathcal{X})\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

<u>míra podobnosti</u>: $s : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$(\exists \mu > 0)(\forall x,y \in \mathcal{X})\ s(x,y) \leq s(x,x) = \mu$$

$$(\forall x,y \in \mathcal{X})\ s(x,y) = s(y,x)$$

Vzdálenosti číselných vektorů

založené na normě vektoru

$$d(x,y) = \|y - x\| \ ^{*}$$

<u>Minkowského</u> <u>norma</u> (vzdálenost)

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \text{kde } p \in [1, \infty]$$

- Eukleidovská norma: $(p = 2)$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

* pro normy na prostoru $\mathbb{R}^n$ platí:
$\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- manhattanská norma $(p = 1)$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- čebyševská norma $p \to \infty$

Vzdálenost realizací stejně rozdělených vektorů X, Y (korelační koeficienty)

- je jich spousta, mají dvě společné vlastnosti
  - maximum pro dvě stejné veličiny = 1
  - minimum pro nezávislé = 0

Pearsonův $\quad corr(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$ ← kovariance náhodných veličin X a Y

Spearmanův $\quad \rho(X,Y) = 12\,\mathbb{E}\left(H(X,Y) - F(X)G(Y)\right)$ ← distribuční funkce jednotlivých veličin

Kendallův $\quad \tau(X,Y) = P\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right] - P\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\right]$

Fuzzy množiny $\quad A = (U, \mu_A)$ - fuzzy množina, $\mu_A\, U \to [0,1]$ - funkce příslušnosti

- $\mu_A(x)$ - stupeň příslušnosti x k A
- $\{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$ - nosič, $\{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}$ - jádro

příklad:
- U - všechny možné teploty vody (klidně diskrétní)
- A - množina „voda je vlažná"
- $\mu_A(x)$ - na kolik teplota x patří do množiny A

Operace nad fuzzy množinami:

- Doplněk - $A^c : \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$
- Průnik - $A \cap B : \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)\, T\, \mu_B(x)$, $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ = t-norma
- Sjednocení - $A \cup B : \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \perp \mu_B(x)$, $\perp : [0,1]^2 \to [0,1]$ = t - konorma

T-normy & konormy

T - množinový součin }
⊥ - množinový součet } mají velmi podobné vlastnosti
- rostoucí v u, v, komutativní a asociativní

$0 < u,v < 1 \Rightarrow 0 \leq uTv \leq \min(u,v)$
$\Rightarrow 1 \geq u\perp v \geq \max(u,v)$

Gödelova (minimová, maximová ~~drastická~~) $T: \min(u,v)$, $\perp: \max(u,v)$

součinová = $T: u \cdot v$, $\perp$ $u + v - u \cdot v$

Łukasiewiczova: $T: \max(0, x+y-1)$ $\perp: \min(1, x+y)$

→ z každé normy mohu dostat konormu pomocí deMorganových zákonů

(Mamdaniho metoda - zobrazení mezi dvěmy univerzy)

- Kopule a jejich souvislost s t-normamy: $C: [0,1]^2 \to [0,1]$

platí:

- $0 \in \{u,v\} \Rightarrow C(u,v) = 0$ } stejné jako t-normy
- $1 \in \{u,v\} \Rightarrow C(u,v) = uT_d v \to C(u,1) = u, C(1,v) = v$ (drastická norma)
- $C(x_2,y_2) - C(x_2,y_1) - C(x_1,y_2) + C(x_1,y_1) \geq 0$
  $(\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2))$

Sklarova věta

- nechť X, Y jsou náhodné veličiny & F a G jejich distribuční funkce $F, G: \mathbb{R} \to [0,1]$
- $H: \mathbb{R}^2 \to [X,Y]$: H je sdružené rozložení náhodného vektoru (X,Y) právě když existuje kopule C taková, že s pr. 1 platí:

$$H(X,Y) = C(F(X), G(Y))$$

Entropie (viz. PST / KOD)

- řeší se chybí hranice mezi entropií a fuzzy matematikou
(resp. chybí ten přechod)

další k fuzzy množinám:

pro t-normy platí:

$$0 \in \{u,v\}, \quad uTv = 0$$

$$1 \in \{u,v\}, \quad uTv = uT_d v$$

$$uT_d v = \begin{cases} v & \text{pokud } u = 1 \\ u & \text{pokud } v = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} uTv &= vTu \\ ((uTv)Tw) &= (uT(vTw)) \end{aligned}\right\} \text{ platí i pro konormy}$$

$$0 \in \{u,v\}, \quad u \perp v = u \perp_d v$$

$$1 \in \{u,v\}, \quad u \perp v = 1$$

$$u \perp_d v = \begin{cases} u & \text{pokud } v = 0 \\ v & \text{pokud } u = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$