MI-SPOL-3 (MI-MPI)

Funkce více proměnných: gradient, Hessián, definitnost matic, extrémy ~~extre~~ funkcí více proměnných bez omezení a s rovnostními omezeními

derivace: fce má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci, je-li f definovaná v okolí bodu a a existuje limita:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$ = derivace funkce f v bodě a

Parciální derivace: – derivace funkce f v bodě a a ve směru v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \varphi_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_v(t) - \varphi_v(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

– v může být jakýkoliv směr, nejčastěji se používají směry souřadných os

$\longrightarrow$ gradient $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

– matice $\overbrace{\text{derivací}}^{}$ parciálních funkce v bodě a ve směrech souřadných os

– pro lokální extrémy platí $\nabla f(x) = 0$ (nutná podmínka)

Jacobiho matice: v podstatě více rozměrný gradient

– m-tice skalárních funkcí $(f_1, \dots, f_m)$ se schodným def. oborem

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

[– pravděpodobně není součástí otázky]

Parciální derivace vyššího řádu pro funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Hessova matice – matice parc. derivací druhých řádů

– pokud je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ v bodě spojitá, musí tam být spojitá i funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a obě parciální derivace se rovnají

$\longrightarrow$ matice je symetrická (pokud jsou spojité všechny)

Definitnost matic

- matice je pozitivně definitní, pokud pro každý $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ platí $\vec{x}^T M \vec{x} > 0$
  - negativně definitní – prohodí se znaménko
- pozitivně semidefinitní : $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{x}^T M \vec{x} \geq 0$ (a zároveň existuje nenulové $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{y}^T M \vec{y} = 0$)
  - negativní opět pouze prohazuji znaménko
- v ostatních případech indefinitní (> i < pro různé vektory)

$$\left[\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right]$$

$$q_M(\vec{x}) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ – kvadratická forma matice M

Sylvestrovo kritérium – pro symetrické matice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$

matice $M_1, M_2, \dots M_k$ – čtvercová matice $k \times k$ ležící v levém horním rohu M

- matice je poz. definitivní, pokud všechny determinanty jsou kladné
  neg. definitivní, ——— || ——— se střídají (ostře) a první je záporný

Extrémy funkcí více proměnných

- kritické body ve více rozměrech $\nabla f = 0$ — lokální minimum $(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$
- ~~[illegible]~~ podmínka pro ostré lokální maximum:
  $\nabla f = 0$, $\nabla^2 f(a)$ je pozitivně definitní
  - obdobně se dá převést na minimum
- indefinitní matice – sedlový bod

- nutná podmínka pro f aby měla v bodě $a \in D$ lokální maximum
  $\nabla f(a) = 0$ & $\nabla^2 f(a)$ je negativně semidefinitní
- postačující podmínka pro ostré lokální maximum
  $\nabla f(a) = 0$ & $\nabla^2 f(a)$ je negativně definitní

Lokální extrémy při omezeních

funkce f má v bodě a ostré lokální minimum při omezeních:

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a \cap J_=)(f(x) < f(a))$$

bod musí splňovat konečný počet rovností

$$g_i(a) = 0, \{1, .., I\} = \hat{I}, \ i \in \hat{I}, \ I \in \mathbb{N}$$

Definujte funkci více proměnných, parciální derivaci, gradient, Hessián, postup hledání lok. extrémů.

<u>funkce více proměnných</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí nejvýše jedno $a \in \mathbb{R}^m$ $\left(f(x) = a \right)$

<u>parciální derivace</u>:

funkce $\varphi_v(t) = f(a+tv)$

v: vektor jednotkové délky $\|v\| = 1$

a: vektor z definičního oboru funkce

derivace funkce f v bodě a a směru v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivace v bodě } 0}}{\varphi_v'(0)} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_v(t) - \varphi_v(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

- v je jedním z nekonečně mnoha směrů

→ říkáme že $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ je parciální derivace.

<u>Gradient</u>: $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ gradient v bodě a

vektor parciálních derivací ve směrech souřadných os.

- určuje směr nejrychlejšího růstu f v bodě a

$$v_\nabla = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

<u>Hessova matice</u>: 2. parciální derivace f v bodě a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u}(a) \quad u \neq v$$

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial u}(a) \quad v = u$$

definice limity ~~fce~~ posloupnosti vektorů $\boxed{(x_k)_{k=1}^{\infty} \quad x_k \in \mathbb{R}^n}$

– konvergují k vektoru $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (tzn. x_0 je její limitou) $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_k = x_0}$

pokud posloupnost čísel $(\|x_k - x_0\|)_{k=1}^{\infty}$ konverguje k 0

tj. $\boxed{\lim_{x \to \infty} \|x_k - x_0\| = 0}$

funkce f má v bodě $x_0 \in D$ limitu $y_0 \in \mathbb{R}^m$

pokud: $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(x_k) = y_0}$

spojitost funkce: (přes limitu)

fce f je spojitá v bodě x_0 pokud platí $\boxed{\lim_{k \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

okolí:

$$H_a = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x - a\| < r\} \text{ pro } r > 0$$

lokální maximum: existuje okolí bodu a H_a takové,

že pro všechny $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$

$f(x,y) = 3x + 4y$ $\qquad g_1 = x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

metoda Lagrangeových multiplikátorů:

$$L(x,y,\lambda) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L_x = 3 + 2\lambda x = 0 \qquad x = -\frac{3}{2\lambda}$$

$$L_y = 4 + 2\lambda y = 0 \qquad y = -\frac{4}{2\lambda} = -\frac{2}{\lambda}$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} - 1 = 0$$

$$9 + \overset{16}{\cancel{4}} = 4\lambda^2$$

$$25 = 4\lambda^2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2\frac{5}{2}} = \pm\frac{3}{5}$$

$$y_{1,2} = -\frac{4}{2\frac{5}{2}} = \pm\frac{4}{5}$$

$\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$ lok. min.

$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow$ lok. max.

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ poz definitní

$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ negativní definitní

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x \;,\; -2y\right)$$

$$2x = 0$$
$$x = 0$$
$$-2y = 0$$
$$y = 0$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Sylvestrovo kritérium mi nic neřekne

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_2^2$$ $\longrightarrow$ indefinitní matice

$\longrightarrow$ sedlový bod