MI - SPOL - 4 (MI - MPI)

1

Integrál funkcí více proměnných (Riemannova konstrukce)

rozdělení intervalu $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ → rozdělení intervalu $[a, b]$

$\nu(\sigma)$ – norma rozdělení σ = největší interval rozdělení

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ ekvidistantní rozdělení – všechny intervaly jsou stejné

supremum na intervalu ($\sup x \in [x_{i-1}, x_i]$)

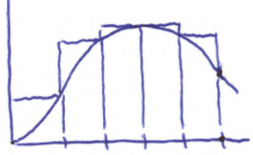
$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i f(x)$$ – horní součet f při rozdělení σ

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i f(x)$$ – dolní součet

infimum ($\inf x \in [x_{i-1}, x_i]$)

dolní součet:

horní součet:



$$\boxed{S(\sigma) \geq s(\sigma)}$$

- pro f omezenou na $[a, b]$: $\inf \{S(\sigma) \mid \sigma$ je rozdělení na $[a, b]\}$

  → horní integrální součet f na $[a, b]$ $\overline{\int_a^b} f$

- ... dolní integrální součet $\underline{\int_a^b} f$

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f}$$

- pokud se integrály rovnají: f integrovatelná na $[a, b]$

  → určitý Riemannův integrál f na $[a, b]$

vlastnosti: f spojitá na $[a, b]$ je integrovatelná na $[a, b]$

pokud $f(x) = g(x)$ se liší pouze v konečném počtu bodů, je g taky integrovatelná

aditivita v mezích: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (pokud jsou na intervalu integrovatelné)

(+ linearita a monotonie k funkčním hodnotám)

– integrování, $I = D^{-1}$ → primitivní funkce (inverzní proces k derivování)

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$ = Newton – Leibnitzova formule

primitivní funkce

(integrál per partes, substituce)

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

→ analogicky se dá definovat pro více dimenzí $R = [a,b] \times [c,d]$

σ – rozdělení na pravoúhelníky

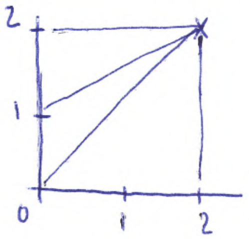
dvojný integrál f na R : $\iint_R f(x,y)\,dx,dy$

$(\forall x \in R)\ f(x) \le g(x) \Rightarrow \iint_R f \le \iint_R g$

- opět platí aditivita přes oblast integrování, linearita a monotonie

$$\iint_R f+g = \iint_R f + \iint_R g\ ,\quad \alpha f = \alpha \iint_R f$$

<u>Dvojný integrál nad obecnou oblastí</u>



$f(x,y) = (x+y)^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad D = \langle 0,3 \rangle \times \langle -1,1 \rangle$

$$\int_{-1}^{1}\int_0^3 x^2+y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_0^3 dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 9 + 3y^2\,dy = \left[9y + \frac{3y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 10 + 10 = \underline{\underline{20}}$$

$$\int_0^2 \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2\int_x^{\frac{x}{2}+1} (x+y)^2\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_x^{\frac{x}{2}+1} dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x + \frac{x}{2} + 1\right)^3 - (2x)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{3x}{2}+1\right)^4 - 2x^4\right]_0^2 = \frac{7}{2}$$

pravoúhelník:

$$R = [a,b] \times [c,d] \subset R^2 \quad a<b,\ c<d$$

$f: D \subset R^n \to \mathbb{R}$, $R \subset D$, f je na R omezená

rozdělení pravoúhelníku R $\quad \sigma = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$

- pro $i = 1 \dots n$ $\quad R_i = [a_i\ b_i] \times [c_i \times d_i] \quad a \leq a_i < b_i \leq b,\ c \leq c_i < d_i \leq d$
- řádné části R_i, R_j se nepřekrývají (pouze dotýkají)
- $R_1 \cup \dots \cup R_n = R$

horní součet f při rozdělení σ

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in R_i} f(x) \cdot \text{plocha } R_1 = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(d_i - c_i) \sup_{x \in R_i} f(x)$$

dolní součet definovaný stejně s infimem

$$s(\sigma) = \dots$$

číslo $\inf(S(\sigma) | \sigma$ je rozdělení $R)$ horní integrální součet f na R

$\sup(s(\sigma) | \sigma$ je rozdělení $R)$ dolní ——— " ———

Primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) je $F(x)$: $\forall x \in (a,b)\ F'(x) = f(x)$