MI-SPOL-18 (MI-SPI.16)

Markovské řetězce s diskrétním časem. Jejich limitní vlastnosti.

Náhodný proces – množina $\{X_t, t \in T\}$ kde X_t jsou náhodné veličiny z pravděpodobnostního prostoru $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- prvky T se obvykle interpretují jako čas
- diskrétní (T jsou celá čísla) a spojité (T je interval $\mathbb{R}$ čísel)

→ indexovaná soustava náhodných veličin

- obecně platí pro $X(t_1), X(t_2)$ pro různá t_1, t_2 že jsou nezávislé (= dvě veličiny v různém čase)

(realizací náhodného procesu je funkce nebo řada)

○ Homogenní náhodný proces – jeho prav. charakteristiky se s časem nemění

→ pst. že se něco stane v příští minutě nezávisí na tom, kolik je hodin

$P(X_{n+j} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$

○ Čítací proces – tvořen událostmi stejného typu → zajímá nás rozložení v čase

platí 1. $N(t) \geq 0$ 2. $N(t)$ jsou celá čísla 3. $N(s) \leq N(t)$ pro každé $s < t$

○ Čítací proces bez paměti – nezávislý na historii → např. Poissonův proces

Poissonův proces – každý bod t značí podívání na měřicí přístroj

- počet emisí mezi dvěma úseky je nezávislý na ostatních úsecích
- počet závisí na délce úseku – ne jeho umístění

- jediný parametr procesu je intenzita λ

(hlavní další strana)

platí: má nezávislé přírůstky

$N(0) = 0$, $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$

$N(s+t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

= počet událostí v intervalu t je Poisson. náhodná proměnná se střední hodnotou λt

Markovské řetězce s diskrétním časem

- posloupnost $X = \{X_0, X_1, \dots X_n\}$ náhodných veličin ze spočetné množiny stavů S, která splňuje Markovskou podmínku
- je definován: množinou stavů S, vektorem počátečního rozdělení, maticí přechodů P

Ireducibilní řetězce - z jakéhokoliv stavu se dostanu do jakéhokoliv jiného

Markovská podmínka: pravděpodobnost budoucích stavů je plně určená současným

→ nezávisí na minulých

(co není homogenní vs nehomogenní !!)

○ matice přechodů

pravděpodobnost přechodu ze stavu i do j → $P_{ij} = p(i,j) = P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i)$

→ můžeme sestavit matici přechodů

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & s_j=1 & & s_j=n \\ s_i=1 & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_i=n & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{array}$$

musí platit:

$$\forall i = 1 \dots n : \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

= součet ~~všech~~ řádku je 1 (každého)

- matice se dá reprezentovat i diagramem

○ více-kroková pravděpodobnost $P(X_n = s_j \mid X_0 = s_i) = P_{ij}^n$

- potřebuji matici umocnit na n-tou

Druhy stavů - po opuštění definujeme pravděpodobnost návratu

$p < 1$: tranzientní stav

$p = 1$: rekurentní stav

neopustitelný stav : absorbční

Absorbční řetězce = obsahují mimojiné i absorbční stavy ($P_{ii} = 1$)

$$\lim_{n \to \infty} = Q^n = 0$$

↖ tranzientní stavy

- časem bude určitě pohlcen

kanonický tvar matice:

$$P = \begin{array}{c|cc|} & TR & ABS \\ TR & Q & R \\ ABS & 0 & 1 \end{array}$$

absorbční stavy

jednotková matice

Q_n - pst že po n krocích nebudeme v absorbčním stavu

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & R^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentální matice absorbčního řetězce

$$N = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{jednotková matice}}}{I} - Q)^{-1} \leftarrow \text{inverzní matice}$$

- udává kolikrát proces projde tranzientními stavy
- $N_{ij} = E$ (počet průchodů stavem j | začínáme v i)

Pravděpodobnostní matice

- pst že spadneme do absorbčního stavu j začínáme li v i

$$B_{ij} = \mathbb{P}(\text{pohlcení v } s_j \mid \text{začátek v } s_i)$$

$$B = N \times R$$

Chapman - Kolmogorova rovnice

platí $\forall n \leq m \leq r \in \mathbb{N}_0$ $\quad \overset{\text{matice přechodu}}{P}(n,r) = P(n,m) \cdot P(m,r)$

Stacionární rozdělení:

- proces je stacionární, pokud jsou jeho konečně-rozměrná rozdělení invariantní vůči posunutí v čase

vektor π takový, že:

$$\forall i \in S: \pi_i \geq 0$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

$$\& \quad \pi \cdot P = \pi$$ → stacionární rozdělení řetězce

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$$

- „v dlouhodobém horizontu stráví řetězec ve stavu j průměrně čas π_j (pro všechna j) nezávisle na počátečním stavu"