Testování statistických hypotéz. T-testy, testy nezávislosti, testy dobré shody.

statistická hypotéza – předpoklad o něčem

parametrické – hypotézy předpoklady týkající se hodnot parametrů rozdělení náh. vel.

× neparametrické

→ snažíme se ověřit a vyjádřit o pravdivosti

H_0 – nulová hypotéza & H_1 – alternativní (H_A)

Statistický test:
- H_0 zamítneme ve prospěch H_A
- H_0 nelze zamítnout, ale ani přijmout

Chyba 1. druhu – hypotéza zamítnuta přestože platí (odsouzení nevinného)

× 2. druhu

	nezamítám H_0	zamítám H_0
platí H_0	✓ – spolehlivost $1-\alpha$	× – α
platí H_A	× – β	✓ – pravděpodobnost $1-\beta$

Testová statistika: funkce náh. vektoru X $(T = T(X))$ u které při platnosti H_0 známe její rozdělení

Postup náhodného testu: předpokládám H_0 platí → vymyslíme náhodný pokus a co bude výsledkem

→ stanovíme hladinu spolehlivosti α (pr. chyby 1. druhu)

→ kritický obor W: tj. část oboru hodnot kam padne výsledek za platnosti H_0 s pst α (W_α)

→ pokud padne výsledek do kritického oboru, zamítám H_0 na hladině α

p-hodnota: $\hat{p} = \hat{p}(X) = \inf\{\alpha \mid X \in W_\alpha\}$

Studentovy t-testy: porovnání střední hodnoty μ s konstantou $H_0: \mu = \mu_0$

při známém rozptylu σ^2 H_0 zamítáme, pokud μ_0 neleží v intervalu

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i \qquad \left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

výběrový průměr — krit. hodnoty stand. norm. rozdělení $N(0,1)$ — výběrový rozptyl

pro neznámý rozptyl:

$$\left(\bar{X}_n - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

směrodatná odchylka

krit. hodnota studentova rozdělení t_{n-1} s $n-1$ stupni volnosti pro jednostranné podobně $\left(\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$ ....

Test: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti alternativě $H_A: \sigma^2 \neq \sigma^2$

$$\left(\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}},\ \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}\right)$$

kritická hodnota rozdělení χ^2 s $n-1$ stupni volnosti na hladině $\alpha/2$

Testové statistiky: známý rozptyl σ^2:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

neznámý rozptyl:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s_n/\sqrt{n}}$$

Párový t-test – zkoumání dvojic měření, které nejsou nezávislé

- náhodný výběr: $((X_1,Y_1)\dots(X_n,Y_n))$
- testujeme hodnoty rozdílu μ_1 a μ_2 (střední hodnoty)

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d \quad X \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d$

- pracuje stejně jako jednovýběrový t-test

$\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$

testová statistika:

$$T = \frac{\bar{Z} - d}{s_Z}\cdot\sqrt{n}$$

Dvouvýběrový t-test – pro dvojice, které jsou nezávislé

- dvě veličiny mají stejný (ikdyž neznámý) rozptyl $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d \ X \ H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq d$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - d}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}}\cdot\sqrt{\frac{n\cdot m\,(n+m-2)}{n+m}}$$

výběrové rozptyly velikosti výběrů

zamítáme, pokud $|T| > t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$

Testy dobré shody – neparametrický test

χ^2 – Chí test – zda odchylka očekávané hodnoty od skutečné je náhoda nebo špatné měření

– výsledky pokusu nastávají s pst: $p_1, p_2, \dots, p_k$

→ $n_1 \dots n_k$ – četnosti naměřené po n nezávislých pokusech

$$H_0: \forall i \in (1,k): p_i = p_i^0 \qquad H_A: \exists i \in (1,k)\ p_i \neq p_i^0$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$ zamítáme, pokud $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

– musí platit pro všechny i: $np_i > 5$, jinak nelze použít
(měření musí být dost, protože je to asymptotický odhad)

Test nezávislosti – máme proměnné $X_1, X_2, \dots, X_n$

– předpokládáme že $P(X_i = \mu) = 0$

$$P(X_i > \mu) = P(X_i < \mu) = \frac{1}{2}$$

N_n = # míst kde se nepřekročí hodnota μ mezi experimenty

pokud jsou nezávislé, platí asymptoticky $N_n \sim N\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{4}\right)$

$$T = \frac{2N_n - n - 1}{\sqrt{n-1}}$$