Politechnika Wrocławska

Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Obliczenia naukowe

Sprawozdanie – Lista nr 2

Autor: Tomasz Kulik

Wrocław 2015r.

**Zadanie 1.**

1. **Opis problemu**

Obliczenie na cztery sposoby w arytmetykach Float32 i Float64 iloczynu skalarnego wektorów :

X1 = [2.718281828, −3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]

Y1 = [1486.2497, 878366.9879, −22.37492, 4773714.647, 0.000185049]

oraz

X2 = [2.718281828, −3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]

Y2 = [1486.2497, 878366.9879, −22.37492, 4773714.647, 0.000185049]

1. **Rozwiązanie**
   1. Obliczenie iloczynu skalarnego w pętli i = 1 do 5:  
      S = S + x[i] \* y[i]
   2. Obliczenie iloczynu skalarnego w pętli i = 5 do 1:  
      S = S + x[i] \* y[i]
   3. Od największego do najmniejszego (dodanie dodatnich liczb w porządku od największej do najmniejszej, dodaj ujemne liczby w porządku od najmniejszej do największej, dodanie do siebie obliczone sumy częściowe),
      1. Posortowanie iloczynów kolejnych wartości wektorów w pętli i=1 do 5:  
         z[i] = x[i] \* y[i]  
         z = sort(z)
      2. Zsumowanie wartości ujemnych rosnąco w pętli i=1 do ostatniej wartości ujemnej:  
         S\_plus = S\_plus + z[i]
      3. Zsumowanie wartości dodatnich malejąco w pętli i=5 w dół do ostatniej wartości dodatniej:  
         S\_minus = S\_minus + z[i]
      4. Dodanie do siebie sum częściowych:

Result = S\_minus + S\_plus

* 1. Od najmniejszego do największego (dodanie dodatnich liczb w porządku od najmniejszej do największej, ujemnych liczb w porządku od największej do najmniejszej, dodanie do siebie obliczonych sum częściowych),
     1. Posortowanie iloczynów kolejnych wartości wektorów w pętli i=1 do 5:  
        z[i] = x[i] \* y[i]  
        z = sort(z)
     2. Zsumowanie wartości ujemnych rosnąco w pętli   
        i=od największej wartości ujemnej do 1:  
        S\_plus = S\_plus + z[i]
     3. Zsumowanie wartości dodatnich malejąco w pętli i=od najmniejszej wartości dodatniej do 5:  
        S\_minus = S\_minus + z[i]
     4. Dodanie do siebie sum częściowych:  
        Result = S\_minus + S\_plus

1. **Wynik**

|  |
| --- |
| Wyniki po wprowadzeniu zmian w danych wejściowych:  Dokładność Float64  Pierwsza wersja iloczynu: -0.004296342739891585 Różnica z wartością prawdziwą: 0.004296342729825875  Druga wersja iloczynu: -0.004296342998713953 Różnica z wartością prawdziwą: 0.004296342988648243  Trzecia wersja iloczynu: -0.004296342842280865 Różnica z wartością prawdziwą: 0.004296342832215154  Czwarta wersja iloczynu: -0.004296342842280865 Różnica z wartością prawdziwą: 0.004296342832215154  Dokładność Float32  Pierwsza wersja iloczynu: -0.4999443 Różnica z wartością prawdziwą: 0.4999443  Druga wersja iloczynu: -0.4543457 Różnica z wartością prawdziwą: 0.4543457  Trzecia wersja iloczynu: -0.5 Różnica z wartością prawdziwą: 0.5  Czwarta wersja iloczynu: -0.5 Różnica z wartością prawdziwą: 0.5  Wyniki przed wprowadzeniem zmian w danych wejściowych:  Dokładność Float64  Pierwsza wersja iloczynu: 1.0251881368296672e-10 Różnica z wartością prawdziwą: 1.1258452438296672e-10  Druga wersja iloczynu: -1.5643308870494366e-10 Różnica z wartością prawdziwą: 1.4636737800494365e-10  Trzecia wersja iloczynu: 0.0 Różnica z wartością prawdziwą: 1.006571070000001e-11  Czwarta wersja iloczynu: 0.0 Różnica z wartością prawdziwą: 1.006571070000001e-11  Dokładność Float32  Pierwsza wersja iloczynu: -0.4999443 Różnica z wartością prawdziwą: 0.4999443  Druga wersja iloczynu: -0.4543457 Różnica z wartością prawdziwą: 0.4543457  Trzecia wersja iloczynu: -0.5 Różnica z wartością prawdziwą: 0.5  Czwarta wersja iloczynu: -0.5 Różnica z wartością prawdziwą: 0.5 |

1. **Wnioski**Po wprowadzeniu zmian na najmniej znaczących miejscach w wektorze x, wynik w dokładności Float64 uległ poważnej zmianie. Jednakże biorąc pod uwagę dokładność Float32 nie ma żadnych zmian w stosunku do wyników z poprzedniego zadania.

**Zadanie 2.**

1. **Opis problemu**

Rozwiązanie równania **Ax=b** przy pomocy eliminacji Gaussa oraz wzoru (x=inv(A)\*b.

1. **Rozwiązanie**

Rozwiązanie sprowadza się do napisania odpowiednich formuł, wprowadzenia odpowiednich danych wejściowych oraz wykorzystania gotowych funkcji służących do generowania macierzy.

1. **Wynik**

|  |
| --- |
| **Obliczanie podanego b = Ax przy podanej macierzy Hilberta przy pomocy eliminacji Gausa oraz wzoru x=inv(A)\*b:**  [4.440892098500626e-16,6.661338147750939e-16]  [8.881784197001252e-16,1.7763568394002505e-15]  [1.4432899320127035e-15,9.547918011776346e-15,9.992007221626409e-15]  [0.0,0.0,0.0]  [1.5543122344752192e-15,2.531308496145357e-14,6.550315845288424e-14,4.374278717023117e-14]  [0.0,0.0,0.0,0.0]  [4.218847493575595e-14,6.084022174945858e-13,2.159494805198392e-12,2.7782220968219917e-12,1.1857181902996672e-12]  [1.1368683772161603e-13,1.8189894035458565e-12,0.0,0.0,7.275957614183426e-12]  [1.1015632850330803e-12,3.1521008025947594e-11,2.1374957359654445e-10,5.570817140920781e-10,6.159324161814084e-10,2.430424750343718e-10]  [9.094947017729282e-13,2.1827872842550278e-11,2.3283064365386963e-10,6.984919309616089e-10,4.656612873077393e-10,0.0]  **Obliczanie podanego b = Ax przy podanej macierzy o okreslonym wsp. conditional przy pomocy eliminacji Gausa oraz wzoru x=inv(A)\*b:**  [1.1102230246251565e-16,0.0,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,0.0]  [0.0,0.0,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,0.0]  [3.3306690738754696e-16,2.220446049250313e-16,4.440892098500626e-16,1.1102230246251565e-16,1.1102230246251565e-16]  [2.220446049250313e-16,0.0,4.440892098500626e-16,0.0,2.220446049250313e-16]  [2.786659791809143e-14,2.8310687127941492e-14,2.609024107869118e-14,2.7422508708241367e-14,3.630429290524262e-14]  [1.7763568394002505e-14,2.1316282072803006e-14,2.4868995751603507e-14,2.1316282072803006e-14,3.197442310920451e-14]  [5.378741896322481e-11,5.864719820891651e-11,4.7338577502387125e-11,4.78821426952436e-11,5.320877072279018e-11]  [2.9103830456733704e-11,2.9103830456733704e-11,2.9103830456733704e-11,2.9103830456733704e-11,2.9103830456733704e-11]  [3.094974022399555e-5,2.3097225628987417e-5,3.5568649170647504e-5,2.4348010285724087e-5,2.937461445817746e-5]  [3.0994415283203125e-5,1.8596649169921875e-5,2.86102294921875e-5,2.3365020751953125e-5,2.193450927734375e-5]  [0.042096546330760765,0.059442793382747494,0.02712123246040188,0.04789390373502023,0.04166666666666663]  [0.0625,0.15625,0.03125,0.15625,0.078125]  [2.220446049250313e-16,4.440892098500626e-16,2.220446049250313e-16,0.0,1.1102230246251565e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,1.1102230246251565e-16,0.0]  [0.0,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,1.1102230246251565e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,0.0,5.551115123125783e-16,2.220446049250313e-16]  [2.220446049250313e-16,4.440892098500626e-16,1.1102230246251565e-16,0.0,4.440892098500626e-16,0.0,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16,2.220446049250313e-16]  [1.1102230246251565e-16,1.1102230246251565e-16,0.0,4.440892098500626e-16,2.220446049250313e-16,4.440892098500626e-16,2.220446049250313e-16,0.0,0.0,2.220446049250313e-16]  [2.8199664825478976e-14,1.709743457922741e-14,1.9317880628477724e-14,1.7985612998927536e-14,2.7755575615628914e-14,2.3314683517128287e-14,2.3314683517128287e-14,1.554312234475219e-14,1.865174681370263e-14,1.2434497875801753e-14]  [2.842170943040401e-14,1.4210854715202004e-14,1.4210854715202004e-14,1.9539925233402755e-14,2.4868995751603507e-14,1.5987211554602254e-14,1.9539925233402755e-14,8.881784197001252e-15,1.9539925233402755e-14,1.2434497875801753e-14]  [4.233156047916964e-10,3.496936074043333e-10,3.725453279201929e-10,2.32742158878807e-10,3.46279449559006e-10,3.75674269470494e-10,1.67073910262161e-10,3.891286182167164e-10,3.1323366123103824e-10,3.374598378513838e-10]  [3.7834979593753815e-10,2.3283064365386963e-10,4.3655745685100555e-10,5.820766091346741e-11,2.9103830456733704e-10,4.656612873077393e-10,1.6007106751203537e-10,2.0372681319713593e-10,3.4924596548080444e-10,3.4924596548080444e-10] |

1. **Wnioski**

Przy zwiększaniu współczynnika condition w macierzy generowanej losowo zwiększa się również błąd względny. Dla dużych wartości n macierzy losowej drastycznie spada dokładność obliczeń. Efekt ten występuje, ponieważ zwiększa się liczba nakładanych na siebie błędów (proporcjonalnie do wielkości macierzy).

**Zadanie 3.**

1. **Opis problemu**

Porównanie wyników funkcji wyliczającej pierwiastki wielomianu Wilkinsona z ich faktycznymi wartościami.

1. **Rozwiązanie**

W celu rozwiązania zadania należy posłużyć się funkcją **root** pakietu Polynomials. Następnie należy zbadać wartości funkcji P dla pierwiastków wyliczonych przy pomocy funkcji root oraz rzeczywistych wartości. Należy również podać błąd względny każdego wyliczonego pierwiastka.

1. **Wynik**

|  |
| --- |
| **Dane z wektora p1:**  |P(z1)|= 230187.5184334416  |p(z1)|= 229077.22309599616  |z1-1|= 1.8831602943691905e-12  |P(z2)|= 1.2049448774096202e6  |p(z2)|= 1.2112764345202812e6  |z2-2|= 1.8919177335874338e-10  |P(z3)|= 5.231622179350376e6  |p(z3)|= 5.250167456133662e6  |z3-3|= 7.380310584892413e-9  |P(z4)|= 2.2983875137451172e7  |p(z4)|= 2.460679292715959e7  |z4-4|= 1.9601274114933176e-7  |P(z5)|= 1.13922661328125e8  |p(z5)|= 1.1605285790588897e8  |z5-5|= 3.6977964725792845e-6  |P(z6)|= 4.721364385e8  |p(z6)|= 5.067220377662679e8  |z6-6|= 4.8439601833649704e-5  |P(z7)|= 2.007177824e9  |p(z7)|= 1.9839859022898273e9  |z7-7|= 0.0004423699590061503  |P(z8)|= 7.266123008e9  |p(z8)|= 6.96914843387858e9  |z8-8|= 0.0028910698579363014  |P(z9)|= 2.0571994112e10  |p(z9)|= 2.149719479063666e10  |z9-9|= 0.013306957810753417  |P(z10)|= 6.8116332544e10  |p(z10)|= 6.5226368764453735e10  |z10-10|= 0.04997403713946724  |P(z11)|= 1.48642594816e11  |p(z11)|= 1.4543192592369525e11  |z11-11|= 0.11398306473093456  |P(z12)|= 5.21365618688e11  |p(z12)|= 5.2239735055675696e11  |z12-12|= 0.35865751923029876  |P(z13)|= 5.89654130688e11  |p(z13)|= 6.153583718321979e11  |z13-13|= 0.4388066058601936  |P(z14)|= 2.669828143424707e12  |p(z14)|= 2.6341999173582505e12  |z14-14|= 0.5610860887429185  |P(z15)|= 2.669828143424707e12  |p(z15)|= 2.6341999173582505e12  |z15-15|= 0.5262119169452244  |P(z16)|= 7.140651565056e12  |p(z16)|= 7.849598258605353e12  |z16-16|= 0.2067945870631469  |P(z17)|= 9.039295545344e12  |p(z17)|= 1.179098959042234e13  |z17-17|= 0.11428331176867701  |P(z18)|= 2.323577307136e13  |p(z18)|= 2.2668335447335188e13  |z18-18|= 0.030097274474776725  |P(z19)|= 4.0664750358528e13  |p(z19)|= 3.8449171301277555e13  |z19-19|= 0.006097819409536243  |P(z20)|= 7.310034337792e13  |p(z20)|= 6.6069971603451984e13  |z20-20|= 0.0005420937027018624  **Dane z wektora p2:**  |P(z1)|= 51013.71481383353  |p(z1)|= 50861.031846036945  |z1-1|= 4.1810999107383395e-13  |P(z2)|= 198560.95623312425  |p(z2)|= 193609.4118468484  |z2-2|= 3.0240254744740014e-11  |P(z3)|= 582215.0447001457  |p(z3)|= 804592.8907638981  |z3-3|= 1.1310392622476684e-9  |P(z4)|= 7.501418358764648e6  |p(z4)|= 5.9614849032708965e6  |z4-4|= 4.7487966448045427e-8  |P(z5)|= 3.64490446875e7  |p(z5)|= 3.601153085016613e7  |z5-5|= 1.1474435952507633e-6  |P(z6)|= 1.758150315e8  |p(z6)|= 1.6594103138144502e8  |z6-6|= 1.5861984355325376e-5  |P(z7)|= 7.18098624e8  |p(z7)|= 6.200836223047799e8  |z7-7|= 0.0001383188344643571  |P(z8)|= 2.139499008e9  |p(z8)|= 1.8908108148862567e9  |z8-8|= 0.0007829021060077324  |P(z9)|= 6.77384192e9  |p(z9)|= 4.146840666722766e9  |z9-9|= 0.0025785988585926845  |P(z10)|= 1.8172772352e10  |p(z10)|= 6.883372151731634e8  |z10-10|= 0.0005227002013832305  |P(z11)|= 5.4763585536e10  |p(z11)|= 5.4493040502271416e10  |z11-11|= 0.0416667853833399  |P(z12)|= 1.73205195896882e11  |p(z12)|= 8.120873893521974e11  |z12-12|= 0.45623647833247727  |P(z13)|= 1.73205195896882e11  |p(z13)|= 8.120873893521974e11  |z13-13|= 0.7346292895482619  |P(z14)|= 1.524684972949833e12  |p(z14)|= 1.6876121173691408e13  |z14-14|= 1.0152848919786692  |P(z15)|= 1.524684972949833e12  |p(z15)|= 1.6876121173691408e13  |z15-15|= 1.1703324390634922  |P(z16)|= 1.010713384257354e13  |p(z16)|= 2.8133686145321434e14  |z16-16|= 1.2430508526845252  |P(z17)|= 1.010713384257354e13  |p(z17)|= 2.8133686145321434e14  |z17-17|= 1.1721976083799337  |P(z18)|= 5.15885900316927e13  |p(z18)|= 2.796794115572356e15  |z18-18|= 0.9199660429535207  |P(z19)|= 5.15885900316927e13  |p(z19)|= 2.796794115572356e15  |z19-19|= 0.6112180948175244  |P(z20)|= 1.43950123892736e14  |p(z20)|= 1.0262679318453014e16  |z20-20|= 0.06679515770983713 |

1. **Wnioski**

Po otrzymanych wynikach dochodzimy do ważnej konkluzji. Współczynniki wielomianu P(x) i p(x)

nie są poprawnie reprezentowane w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Dochodzi międzyinnymi do

obcięć ostatnich cyfr po przecinku. W obu przypadkach pierwiastki znacznie odbiegają od

rzeczywistej wartości. Dlatego trzeba zachować podwójną ostrożność kiedy wykonujemy

obliczenia na pierwiastkach wielomianu!

**Zadanie 4.**

1. **Opis problemu**

Należy przeprowadzić eksperyment w postaci przeprowadzenia 40 iteracji rekurencyjnego wzoru modelu wzrostu populacji:

Należy zaobserwować wyniki w trzech przypadkach:

* 1. W arytmetyce Float32, 40 iteracji.
  2. W arytmetyce Float32, 40 iteracji z zakłóceniem przy 10 iteracji w postaci obcięcia do 3 miejsca po przecinku.
  3. Powtórzyć eksperyment ‘a’ w arytmetyce Float64.

1. **Rozwiązanie**

W celu rozwiązania zadania wykonano implementację pętli wykonującej kolejne iteracje podanego wzoru.

1. **Wynik**

|  |
| --- |
| Wynik 40 iteracji:  0.25860548  Wynik 40 iteracji z zakłóceniem przy 10 iteracji: 0.7305550338104317  Wynik 40 iteracji w dokładności Float64: 0.011611238029748606 |

1. **Wnioski**

Nawet niewielka zmiana dokładności obliczeń wprowadza błędy znaczące błędy. Im wcześniej pojawi się niedokładność tym większe odchylenie od prawidłowego wyniku wystąpi po wprowadzaniu zakłócenia.

**Zadanie 5.**

1. **Opis problemu**

Rozważmy równanie rekurencyjne

gdzie c jest pewną daną stałą.

Przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

1. c = −2 i x0 = 1

2. c = −2 i x0 = 2

3. c = −2 i x0 = 1.99999999999999

4. c = −1 i x0 = 1

5. c = −1 i x0 = −1

6. c = −1 i x0 = 0.75

7. c = −1 i x0 = 0.25

1. **Rozwiązanie**

Implementacja pętli w metodzie liczącej kolejne iteracje wzoru podanego rekurencyjnego z parametrami c, x0 oraz n – liczby iteracji.

1. **Wynik**

|  |
| --- |
| [-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0,-1.0]  [2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0,2.0]  [1.99999999999996,1.9999999999998401,1.9999999999993605,1.999999999997442,1.9999999999897682,1.9999999999590727,1.999999999836291,1.9999999993451638,1.9999999973806553,1.999999989522621,1.9999999580904841,1.9999998323619383,1.9999993294477814,1.9999973177915749,1.9999892711734937,1.9999570848090826,1.999828341078044,1.9993133937789613,1.9972540465439481,1.9890237264361752,1.9562153843260486,1.82677862987391,1.3371201625639997,-0.21210967086482313,-1.9550094875256163,1.822062096315173,1.319910282828443,-0.2578368452837396,-1.9335201612141288,1.7385002138215109,1.0223829934574389,-0.9547330146890065,-1.0884848706628412,-0.8152006863380978,-1.3354478409938944,-0.21657906398474625,-1.953093509043491,1.8145742550678174,1.2926797271549244,-0.3289791230026702]  [0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0]  [0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0]  [-0.4375,-0.80859375,-0.3461761474609375,-0.8801620749291033,-0.2253147218564956,-0.9492332761147301,-0.0989561875164966,-0.9902076729521999,-0.01948876442658909,-0.999620188061125,-0.0007594796206411569,-0.9999994231907058,-1.1536182557003727e-6,-0.9999999999986692,-2.6616486792363503e-12,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0]  [-0.9375,-0.12109375,-0.9853363037109375,-0.029112368589267135,-0.9991524699951226,-0.0016943417026455965,-0.9999971292061947,-5.741579369278327e-6,-0.9999999999670343,-6.593148249578462e-11,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0,-1.0,0.0] |

1. **Wnioski**

Podany wzór ma związek ze Zbiorami Julii, jednakże w tym przypadku zastosowano liczby rzeczywiste, a nie zespolone. Można zauważyć, że od pewnych iteracji wzór stabilizuje się, tj. kolejne wyrazy ciągu przyjmują postać 0, -1, 0, -1… Wartości, które teoretycznie powinny dawać złódzenie losowych liczb nagle stają się przewidywalne. Jest to wywołane występującymi niedokładnościami arytmetyk zmiennoprzecinkowych.