舟木確率論ゼミ

M1 久米啓太

平成 31 年 4 月 24 日

命題 2.25 の証明の補足

1)-3) を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 F が与えられた時, (2.2) を満たすような $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ が一意的に定まることの証明をする.

$Y(w) : (0,1) \to \mathbb{R} : w \mapsto \sup\{y \in \mathbb{R} | F(y) < w\}$, $w \in (0,1)$ とする. 集合 A に対する $y^\star = \sup A$ は以下を満たす $\mathbb{R}$ の元である.

- 任意の $y \in A$ に対して, $y \leq y^\star$.
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $y \in A$ が存在して, $y^\star - \epsilon < y$.

教科書では

> Y は F の左連続な逆関数

であると書かれているが, F に逆関数が存在するとは限らないことに注意する. なぜならば, 1)-3) の条件だけでは F が全単射であることを保証できないからである. F が全単射であるためには, 狭義単調増加, 連続であればよい. Y が左連続であるかは確かめることができなかった.

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\{w \in (0,1) \,|Y(w) \leq x\} = \{w \in (0,1) \,|w \leq F(x)\}$ が成り立つことを示す. 左辺を $A(x)$ 右辺を $B(x)$ と書くことにする.

まず, $A(x) \subset B(x)$ を示す. $w \in A(x)$ とする. ここで, $w > F(x)$ であると仮定する. F の右連続性から, ある $\delta > 0$ に対して, $w > F(x+\delta)$ となる. よって, $Y(w) \geq x + \delta > x$ となる. これは $w \in A(x)$, つまり $Y(w) \leq x$ であることに矛盾するので, $w \leq F(x)$ である. 以上より, $w \in B(x)$, $A(x) \subset B(x)$.

次に, $A(x) \supset B(x)$ を示す. $w \in B(x)$ とすると, $w \leq F(x)$ である. $x \notin \{y \in \mathbb{R} | F(y) < w\}$ より, $Y(w) \leq x$ である. 以上より, $w \in A(x)$, $A(x) \supset B(x)$.

$$B(x) = \{w \in (0,1) \,|w \leq F(x)\} = \begin{cases} (0, F(x)] & \text{if } F(x) > 0 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

なので, 明らかに $B(x) \in \mathcal{B}((0,1))$ である. よって, 任意の $x \in \mathbb{R}$ において $A(x)$ も可測集合であるので, 命題 2.15 より Y は確率変数である.

表記法

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を可測関数とする.

$f = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$, $a_i \in [0, \infty]$, $A_i \in \mathcal{F}$ と有限和でかけるとき, f を単純と呼び, そのときに限り, $f \in SF^+$ と書く. f が非負値関数であるときに限り, $f \in m\mathcal{F}^+$ と書く. f が一般の可測関数であるときに限り, $f \in m\mathcal{F}$ と書く.

集合列 A_n が単調増加し, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A$ となるとき, $A_n \nearrow A$ と書く.

また, 関数列 f_n が各点で単調増加 $(f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \ldots)$ し, $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ となるとき, $f_n \nearrow f$ と書く.

積分の基礎事項

定義 1 (測度の積分)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を可測関数とすると, f の Ω 上の積分を $\mu(f)$ または, $\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$ と表記する.

$f \in SF^+$ のとき,

$$\mu(f) := \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \tag{2}$$

と定義しする. $f \in m\mathcal{F}^+$ のとき,

$$\mu(f) := \sup\left\{\mu(h) | h \in SF^+,\ h \leq f\right\} \tag{3}$$

と定義する (教科書とは異なることに注意). また, $f \in m\mathcal{F}$ であるとき, $f^+(\omega) := \max(f(\omega), 0)$, $f^-(\omega) := \max(-f(\omega), 0)$ とし, さらに $\mu(f^+)\, \mu(f^-)$ のうち少なくとも片方が有限な値を取るとき,

$$\mu(f) := \mu(f^+) - \mu(f^-) \tag{4}$$

と定義する.

補題 2 (単純な関数の積分の性質)**.** $f,\ g \in SF^+$ とする.

(1) 線型性 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ のとき, $\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$ となる.

(2) 単調性 $f \leq g$ のとき, $\mu(f) \leq \mu(g)$ となる.

証明. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ とする. $a_i,\ b_j \in [0, \infty]$, $A_i,\ B_j$ は各々異なる添字同士で互いに素である. $C_{ij} = A_i \cap B_j$ とすると, C_{ij} も異なる $i,\ j$ 同士で互いに素である.

(1)

$$\alpha f + \beta g = \alpha \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} + \beta \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j} \tag{5}$$

$$= \sum_{i,j} (\alpha a_i + \beta b_j)\, 1_{C_i j}, \tag{6}$$

なので,

$$\mu(\alpha f+\beta g)=\sum_{i,j}(\alpha a_i+\beta b_j)\,\mu(C_{ij}) \tag{7}$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}\mu(C_{ij})+\beta\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{i=1}^{n}\mu(C_{ij}) \tag{8}$$
$$=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)+\beta\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j) \tag{9}$$
$$=\alpha\mu(f)+\beta\mu(g). \tag{10}$$

(2) $I:=\{(i,j)|C_{ij}\neq\emptyset\}$ とすると,

$$g-f=\sum_{i,j}(b_j-a_i)1_{C_{ij}} \tag{11}$$
$$=\sum_{(i,j)\in I}(b_j-a_i)1_{C_{ij}}\geq 0, \tag{12}$$

であるので, $(i,j)\in I$ ならば, $b_j-a_i\geq 0$ である. よって, $\mu(g-f)=\sum_{(i,j)\in I}(b_j-a_i)\mu(C_{ij})\geq 0$ であるので, 線形性より $\mu(f)\leq\mu(g)$. □

単調収束定理

単調収束定理は測度論の中でも重要な定理で, 単純な関数で示せる性質を非負値関数, そして一般の可測関数に拡張するためや, Fatou の補題, Lebesugue の収束定理を示す際に使われる定理である. 単調収束定理を証明するためにいくつかの命題, 補題を証明する.

命題 3. $\forall r,n\in\mathbb{N}$ に対して, $y_n^r\in[0,\infty]$ であり, かつ次の 2 つを満たすとする.

- y_n^r が r を固定した時, n について単調増加で, $y^r:=\lim_n y_n^r$ が存在する.
- y_n^r が n を固定した時, r について単調増加で, $y_n:=\lim_r y_n^r$ が存在する.

このとき, $y^\infty:=\lim_r y^r=\lim_n y_n=:y_\infty$ となる.

証明. 任意の $\epsilon>0$ に対し, $y_{n_0}>y_\infty-\frac{1}{2}\epsilon$ となる $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する. また, $y_{n_0}^{r_0}>y_{n_0}-\frac{1}{2}\epsilon$ となる $r_0\in\mathbb{N}$ が存在する. よって, $y^\infty\geq y^{r_0}\geq y_{n_0}^{r_0}>y_{n_0}-\frac{1}{2}>y_\infty-\epsilon$ となり, $y^\infty\geq y_\infty$ であることがわかる. 同様に, $y_\infty\geq y^\infty$ なので, $y^\infty=y_\infty$ が得られた. □

補題 4. $F_n\in\mathcal{F}$ が $F_n\nearrow F$ とする. このとき, $\lim_n\mu(F_n)=\mu(F)$ となる.

証明. $G_1=F_1,\ G_n=F_n\setminus F_{n-1}\ (n\geq 2)$ とすると, 各 G_n はそれぞれ互いに素である. よって, $\mu(F_n)=\mu(\bigcup_{k=1}^n G_k)=\sum_{k=1}^n\mu(G_k)$ であるので, $\lim_n\mu(F_n)=\lim_n\mu\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right)=\lim_n\sum_{k=1}^n\mu(G_k)=\sum_{k=1}^\infty\mu(G_k)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty G_k\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right)=\mu(F)$. □

補題 5. (1) $A\in\mathcal{F},\ h_n\in SF^+,\ h_n\nearrow 1_A$ とする. このとき, $\lim_n\mu(h_n)=\mu(A)$ である.
(2) $f,\ g_n\in SF^+$ で, $g_n\nearrow f$ とする. このとき, $\lim_n\mu(g_n)=\mu(f)$ である.

証明. (1) 補題 2(2) より, $\mu(h_n) \le \mu(1_A) = \mu(A)$ である. よって, $\liminf_n \mu(h_n) \ge \mu(A)$ を示せば十分である.

$\epsilon > 0$ とし, $A_n := \{\omega \in A | h_n(\omega) > 1 - \epsilon\}$ とする. $\omega \in A$ であるとき, h_n は 1_A に各点収束するから, $h_{n_0}(\omega) > 1 - \epsilon$ となるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するので, $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となり, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. よって, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ なので, $A_n \nearrow A$ である. 補題 4 より, $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ となる.

また, A_n の定義から, $(1-\epsilon)1_{A_n} \le h_n$ であるので, 補題 2 より, $\mu((1-\epsilon)1_{A_n}) = (1-\epsilon)\mu(A_n) \le \mu(h_n)$ となり, $\liminf_n \mu(h_n) \ge (1-\epsilon)\mu(A)$ である. $\epsilon > 0$ は任意にとってよいので $\liminf_n \mu(h_n) \ge \mu(A)$ となる.

(2) $f = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$ とし, 各 A_i は互いに素で, $a_i \ge 0$ とする. このとき, 各 i で, $g_n \nearrow f$ であるので, $1_{A_i} g_n \nearrow 1_{A_i} f = a_i 1_{A_i}$ となり, $a_i^{-1} 1_{A_i} g_n \nearrow 1_{A_i}$ となる. よって, 積分の線形性と (1) とより, $\lim_n \mu(a_i^{-1} 1_{A_i} g_n) = a_i^{-1} \lim_n \mu(1_{A_i} g_n) = \mu(A_i)$ から, $\lim_n \mu(1_{A_i} g_n) = a_i \mu(A_i)$ となる. また, $g_n = \sum_{i=1}^m 1_{A_i} g_n$ と表現できる. したがって,

$$\begin{aligned}
\lim_n \mu(g_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} g_n\right) && (13)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m \mu(1_{A_i} g_n) && (14)\\
&= \sum_{i=1}^m \lim_{n\to\infty} \mu(1_{A_i} g_n) && (15)\\
&= \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) && (16)\\
&= \mu(f). && (17)
\end{aligned}$$

□

補題 6 (積分の唯一性)**.** (1) $f \in m\mathcal{F}^+$ とし, 二つの関数列 $f^r,\ f_n \in SF^+$ が各々$f^r \nearrow f,\ f_n \nearrow f$ とする. このとき, $\lim_r \mu(f^r) = \lim_n \mu(f_n)$ である.

(2) $f \in m\mathcal{F}^+$ とし, 関数列 $f_n \in SF^+$ が $f_n \nearrow f$ であるとする. このとき, $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$ である.

証明. (1) $f_n^r : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \min(f^r(\omega), f_n(\omega))$ とする. このとき, r に関して $f_n^r \nearrow f_n$, n に関して $f_n^r \nearrow f^r$ となる. 補題 5(2) より, $\lim_r \mu(f_n^r) = \mu(f_n)$, $\lim_n \mu(f_n^r) = \mu(f^r)$ となり, 命題 3 から, $\lim_r \mu(f^r) = \lim_n \mu(f_n)$ である.

(2) 非負値関数の定義より, 各点で $h_n \le f$ で $\lim_n \mu(h_n) = \mu(f)$ となるような関数列 $h_n \in SF^+$ が存在する. 関数列 $g_n \in SF^+$ が $g_n \nearrow f$ であるとする. ここで, $f_n' := \max(g_n,\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$ とすると, $f_n' \in SF^+$, $f_n' \le f$ となり, $f_n' \ge g$ であるので, $f_n' \nearrow f$ である. 積分の定義から, $\mu(f_n') \le \mu(f)$ である. さらに, $f_n' \ge h_n$ であるので, $\mu(f_n') \ge \mu(h_n)$ である. よって, $\mu(f) = \lim_n \mu(h_n) \le \lim_n \mu(f_n')$ となり, $\lim_n \mu(f_n') = \mu(f)$ であることがわかった.

関数列 $f_n \in SF^+$ が $f_n \nearrow f$ となるように任意に選んできたとき, (1) より, $\lim_n \mu(f_n) = \lim_n \mu(f_n') = \mu(f)$ となる. □

教科書の期待値の定義はこの補題のことを言っている.

定理 7 (単調収束定理)**.** $f_n \in m\mathcal{F}^+,\ f_n \nearrow f\ (\in m\mathcal{F}^{+1)})$ とする. このとき, $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$ となる.

証明. 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\alpha^r : [0,\infty] \to [0,\infty] : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ (i-1)2^{-r} & \text{if } (i-1)2^{-r} < x \le i2^{-r}\ (i \in \mathbb{N}) \\ r & \text{if } x > r, \end{cases} \tag{18}$$

とする. $f_n^r := \alpha^r \circ f_n,\ f^r := \alpha^r \circ f$ とする. 明らかに $f_n^r,\ f^r \in SF^+$ である. α^r は左連続関数で, $f_n \nearrow f$ だから, $f_n^r \nearrow f^r$ となるので, 補題 5(2) より, $\lim_n \mu(f_n^r) = \mu(f^r)$ である. また, $id : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を恒等写像とすると, $a_r \nearrow id$ (証明は Appendix に記載) だから, $f_n^r \nearrow f_n$ となり, 補題 6(2) より, $\lim_r \mu(f_n^r) = \mu(f_n)$ である. さらに, $f^r \nearrow f$ であるので, 補題 6(2) より, $\lim_r \mu(f^r) = \mu(f)$ である. 以上より, 命題 3 より, $\lim_n \mu(f_n) = \lim_r \mu(f^r) = \mu(f)$ とわかる. □

測度論の積分における主要な定理

以下, 単調収束定理を用いて, 非負値可測関数の積分の性質, Fatou の補題, Lebesugue の収束定理を示す.

補題 8 (非負値関数の積分の性質)**.** $f,\ g \in m\mathcal{F}^+$ とする.

(1) 線形性 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ のとき, $\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$ となる.

(2) 単調性 $f \le g$ のとき, $\mu(f) \le \mu(g)$ となる.

証明. $f_r := \alpha^r \circ f,\ g_r := \alpha^r \circ g$ とすると, $f_r,\ g_r \in SF^+$ かつ, $f_r \nearrow f,\ g_r \nearrow g$ となる.

(1) 単純な関数の積分の線形性より, $\mu(\alpha f_r + \beta g_r) = \alpha\mu(f_r) + \beta\mu(g_r)$ となる. また, 明らかに $\alpha f_r + \beta g_r \nearrow \alpha f + \beta g$ であるので, 単調収束定理より, $\mu(\alpha f + \beta g_r) = \lim_r \mu(\alpha f_r + \beta g_r) = \lim_r (\alpha\mu(f_r) + \beta\mu(g_r)) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$.

(2) 単純な関数の積分の単調性より, $\mu(f_r) \le \mu(g_r)$ となる. よって, 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して, $\mu(g_r - f_r) \ge 0$ となる. 明らかに $g_r - f_r \nearrow g - f$ であるので, 単調収束定理より, $\mu(g - f) = \lim \mu(g_r - f_r) \ge 0$ (1) より, $\mu(g) \ge \mu(f)$ となる. □

補題 9 (Fatou の補題)**.**

(1)Fatou の補題 関数列 $f_n \in m\mathcal{F}$ は $\mu(\liminf_n f_n) \le \liminf_n \mu(f_n)$ となる.

(2) 逆 Fatou の補題 関数列 $f_n \in m\mathcal{F}$ はある関数 $g \in m\mathcal{F}$ に対し $f_n \le g$ で, $\mu(g) < \infty$ とする. このとき, $\mu(\limsup_n f_n) \ge \limsup \mu(f_n)$ となる.

証明. (1) 関数列 $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ を $g_k := \inf_{n \le k} f_n$ とすると, $\liminf_n f_n = \lim_k g_k$ となる. 定義より g_k は単調増加なので, 単調収束定理より, $\mu(\lim_k g_k) = \lim_k \mu(g_k)$ である. また, $n \ge k$ であるとき,

---

1) 可測関数の極限は可測関数である.

$f_n \geq g_k$ であるので, 積分の単調性より $\mu(f_n) \geq \mu(g_k)$ となり, $\mu(g_k) \leq \inf_{n \geq k} \mu(f_n)$ である. 以上より, $\mu(\liminf_n f_n) = \mu(\lim_k g_k) = \lim_k \mu(g_k) \leq \lim_k \inf_{n \geq k} \mu(f_n) =: \liminf_n \mu(f_n)$ である.

(2) $g - f_n \in m\mathcal{F}$ に対し, (1) を適用すると $\mu(\liminf_n (g - f_n)) \leq \liminf_n \mu(g - f_n)$ となる. 積分の線形性と $\liminf$ の定義より, $\mu(\liminf_n (g - f_n)) = \mu(g) - \mu(-\liminf_n -f_n) = \mu(g) - \mu(\limsup_n f_n)$, $\liminf_n \mu(g - f_n) = \mu(g) + \liminf_n -\mu(f_n) = \mu(g) - \limsup_n \mu(f_n)$ である. 以上の 2 式を比較すると, $\mu(g) - \mu(\limsup_n f_n) \leq \mu(g) - \limsup_n \mu(f_n)$ より, $\mu(\limsup_n f_n) \leq \limsup_n \mu(f_n)$ となる. □

定理 10 (Lebesugue の収束定理)**.** $f_n,\ f \in m\mathcal{F}$ とし, f_n が f に各点収束するとする. $g \in m\mathcal{F}^+$ が可積分, つまり $\mu(g) < \infty$ で, かつ, 任意の $\omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(\omega)| \leq g(s)$ であるとする. このとき, $\lim_n \mu(|f_n - f|) = 0$ となり, $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$ となる.

証明. $|f_n - f| \leq 2g$ かつ, $\mu(2g) < \infty$ であるから, 逆 Fatou の補題より, $\limsup_n \mu(|f_n - f|) \leq \mu(\limsup_n |f_n - f|) = \mu(0) = 0$ となる. 最後から 2 番目の式に出てくる 0 は常に 0 を返す関数である.

したがって, $|\mu(f_n) - \mu(f)| = |\mu(f_n - f)| \leq \mu(|f_n - f|)$ より, $0 \leq \limsup_n |\mu(f_n - f)| \leq \limsup_n \mu(|f_n - f|) = 0$ であるので, $\lim_n |\mu(f_n - f)| = 0$ となる. したがって, $\lim_n \mu(f_n) = \mu(f)$ となる. □

Appendix

$\alpha_r \nearrow id$ の証明

証明. 任意の $x \in [0, \infty)$, $\epsilon > 0$ に対して, $r_0 = \lceil \max(x, -\log_2 \epsilon) \rceil$ とする. $r > r_0$ とする. $x \leq r_0 < r$ だから, ある $i \in \mathbb{N}$ が存在して $(i-1)2^{-r} < x \leq i2^{-r}$ とできる. よって, $i \geq x2^r$ であるので, $0 < x - \alpha^r(x) = x - (i-1)2^{-r} \leq x - (x2^r - 1)2^{-r} = 2^{-r}$ となる. $-\log_2 \epsilon < r$ だから, $2^{-r} < \epsilon$ となる. したがって, $0 < x - \alpha^r(x) < \epsilon$ を示すことができたので, $\alpha^r \nearrow id.$ □