# 舟木確率論ゼミ

M1 久米啓太

平成 31 年 4 月 22 日

## 命題 2.25 の証明の補足

1)-3) を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 $F$ が与えられた時, (2.2) を満たすような $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 $\mu$ が一意的に定まることの証明をする.

$Y(w) : (0,1) \to \mathbb{R} : w \mapsto \sup\{y \in \mathbb{R} | F(y) < w\}$, $w \in (0,1)$ とする. 集合 $A$ に対する $y^\star = \sup A$ は以下を満たす $\mathbb{R}$ の元である.

- 任意の $y \in A$ に対して, $y \leq y^\star$.
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $y \in A$ が存在して, $y^\star - \epsilon < y$.

教科書では

> $Y$ は $F$ の左連続な逆関数

であると書かれているが, $F$ に逆関数が存在するとは限らないことに注意する. なぜならば, 1)-3) の条件だけでは $F$ が全単射であることを保証できないからである. $F$ が全単射であるためには, 狭義単調増加, 連続であればよい. $Y$ が左連続であるかは確かめることができなかった.

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\{w \in (0,1) \,|Y(w) \leq x\} = \{w \in (0,1) \,|w \leq F(x)\}$ が成り立つことを示す. 左辺を $A(x)$ 右辺を $B(x)$ と書くことにする.

まず, $A(x) \subset B(x)$ を示す. $w \in A(x)$ とする. ここで, $w > F(x)$ であると仮定する. $F$ の右連続性から, ある $\delta > 0$ に対して, $w > F(x+\delta)$ となる. よって, $Y(w) \geq x + \delta > x$ となる. これは $w \in A(x)$ , つまり $Y(w) \leq x$ であることに矛盾するので, $w \leq F(x)$ である. 以上より, $w \in B(x)$, $A(x) \subset B(x)$.

次に, $A(x) \supset B(x)$ を示す. $w \in B(x)$ とすると, $w \leq F(x)$ である. $x \notin \{y \in \mathbb{R} | F(y) < w\}$ より, $Y(w) \leq x$ である. 以上より, $w \in A(x)$, $A(x) \supset B(x)$.

$$B(x) = \{w \in (0,1) \,|w \leq F(x)\} = \begin{cases} (0, F(x)] & \text{if } F(x) > 0 \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

なので, 明らかに $B(x)$ は可測集合である. よって, 任意の $x \in \mathbb{R}$ において $A(x)$ も可測集合であるので, 命題 2.15 より $Y$ は確率変数である.

## 積分の基礎事項

**定義 1** (測度の積分)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を可測関数とすると, $f$ の $\Omega$ 上の積分を $\mu(f)$ または, $\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$ と表記する.

$f = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i},\ a_i \in [0, \infty],\ A_i \in \mathcal{F}$ と有限和でかけるとき, $f$ を単純と呼び, $f \in SF^+$ と書く. $f \in SF^+$ のとき,

$$\mu(f) := \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \tag{2}$$

と定義し, $f$ が非負値関数である ($f \in m\mathcal{F}^+$ と書く) とき,

$$\mu(f) := \sup\left\{\mu(h) | h \in SF^+,\ h \leq f\right\} \tag{3}$$

と定義する (教科書では lim で定義されている). また, $f$ が一般の可測関数である ($f \in m\mathcal{F}$ と書く) とき, $f^+(\omega) := \max(f(\omega), 0)$, $f^-(\omega) := \max(-f(\omega), 0)$ とし, さらに $\mu(|f|) = \mu(f^+) + \mu(f^-) < \infty$ であるとき,

$$\mu(f) := \mu(f^+) - \mu(f^-) \tag{4}$$

と定義する.

**補題 2** (単純な関数の積分の性質)**.** $f,\ g \in SF^+$ とする.

**(1) 線型性** $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ のとき, $\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$ となる.

**(2) 単調性** $f \leq g$ のとき, $\mu(f) \leq \mu(g)$ となる.

**証明.** $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ とする. $a_i,\ b_j \in [0, \infty]$, $A_i,\ B_j$ は各々異なる添字同士で互いに素である. $C_{ij} = A_i \cap B_j$ とすると, $C_{ij}$ も異なる $i,\ j$ 同士で互いに素である.

(1)

$$\alpha f + \beta g = \alpha \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} + \beta \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j} \tag{5}$$

$$= \sum_{i,j} (\alpha a_i + \beta b_j) 1_{C_ij}, \tag{6}$$

なので,

$$\mu(\alpha f + \beta g) = \sum_{i,j} (\alpha a_i + \beta b_j) \mu(C_{ij}) \tag{7}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(C_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mu(C_{ij}) \tag{8}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \tag{9}$$

$$= \alpha\mu(f) + \beta\mu(g). \tag{10}$$

(2) $I := \{(i,j) | C_{ij} \neq \emptyset\}$ とすると,

$$g - f = \sum_{i,j} (b_j - a_i) 1_{C_{ij}} \tag{11}$$

$$= \sum_{(i,j) \in I} (b_j - a_i) 1_{C_{ij}} \geq 0, \tag{12}$$

であるので, $(i,j) \in I$ ならば, $b_j - a_i \geq 0$ である. よって, $\mu(g-f) = \sum_{(i,j)\in I}(b_j - a_i)\mu(C_{ij}) \geq 0$ であるので, 線形性より $\mu(f) \leq \mu(g)$. □

## 単調収束定理

単調収束定理は測度論の中でも重要な定理で, 単純な関数で示せる性質を非負値関数, そして一般の可測関数に拡張するためや, Fatou の補題, Lebesugue の収束定理を示す際に使われる定理である. 単調収束定理を証明するためにいくつかの命題, 補題を証明する.

**命題 3.** $\forall r, n \in \mathbb{N}$ に対して, $y_n^r \in [0, \infty]$ であり, かつ次の 2 つを満たすとする.

- $y_n^r$ が $r$ を固定した時, $n$ について単調非減少で, $y^r := \lim_n y_n^r$ が存在する.
- $y_n^r$ が $n$ を固定した時, $r$ について単調非減少で, $y_n := \lim_r y_n^r$ が存在する.

このとき, $y^\infty := \lim_r y_n^r = \lim_n y_n^r =: y_\infty$ となる.

**証明.** 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $y_{n_0} > y_\infty - \frac{1}{2}\epsilon$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する. また, $y_{n_0}^{r_0} > y_{n_0} - \frac{1}{2}\epsilon$ となる $r_0 \in \mathbb{N}$ が存在する. よって, $y^\infty \geq y^{r_0} \geq y_{n_0}^{r_0} > y_{n_0} - \frac{1}{2} > y_\infty - \epsilon$ となり, $y^\infty \geq y_\infty$ であることがわかる. 同様に, $y_\infty \geq y^\infty$ なので, $y^\infty = y_\infty$ が得られた. □

**補題 4.** $F_n \in \mathcal{F}$ が単調非減少で $F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ とする. このとき, $\lim_n \mu(F_n) = \mu(F)$ となる.

**証明.** $G_1 = F_1$, $G_n = F_n \setminus F_{n-1}$ $(n \geq 2)$ とすると, 各 $G_n$ はそれぞれ disjoint である. よって, $\mu(F_n) = \mu(\bigcup_{k=1}^n G_k) = \sum_{k=1}^n \mu(G_k)$ であるので, $\lim_n \mu(F_n) = \sum_{k=1}^\infty \mu(G_k) = \mu(F)$. □

**補題 5.** $A \in \mathcal{F}$, $h_n \in SF^+$, $h_n$ は各点において単調非減少で, $1_A$ に各点収束するとすると, $\lim_n \mu(h_n) = \mu(A)$ である.

**証明.** 補題 2(2) より, $\mu(h_n) \leq \mu(1_A) = \mu(A)$ である. よって, $\liminf_n \mu(h_n) \geq \mu(A)$ を示せば十分である.

$\epsilon > 0$ とし, $A_n := \{\omega \in A | h_n(\omega) > 1 - \epsilon\}$ とする. $\omega \in A$ であるとき, $h_n$ は $1_A$ に各点収束するから, $h_{n_0}(\omega) > 1 - \epsilon$ となるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在するので, $\omega \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ となり, $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. よって, $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ なので, $A_n \nearrow A$ である. 補題 4 より, $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$ となる.

また, $A_n$ の定義から, $(1-\epsilon)1_{A_n} \leq h_n$ であるので, 補題 2 より, $\mu((1-\epsilon)1_{A_n}) = (1-\epsilon)\mu(A_n) \leq \mu(h_n)$ となり, $\liminf_n \mu(h_n) \geq (1-\epsilon)\mu(A)$ である. $\epsilon > 0$ は任意にとってよいので $\liminf_n \mu(h_n) \geq \mu(A)$ となる. □