

# 杭州电子科技大学

## 硕 士 学 位 论 文

题 目：脉冲噪声下的核自适应滤波算法研究

研 究 生 张笑菲

专 业 电子与通信工程

指导教师 赵知劲 教授

完成日期 2018 年 3 月

杭州电子科技大学硕士学位论文

脉冲噪声下的核自适应滤波算法研究

研 究 生： 张笑菲

指导教师： 赵知劲 教 授

2018 年 3 月

**Dissertation Submitted to Hangzhou Dianzi University  
for the Degree of Master**

# **Research of the Kernel Adaptive Filtering Algorithm under Impulse Noise**

**Candidate: Zhang Xiaofei**

**Supervisor: Prof. Zhao Zhijin**

**March, 2018**

# 杭州电子科技大学

## 学位论文原创性声明和使用授权说明

### 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

论文作者签名：张笑菲

日期：2018 年 3 月 25 日

### 学位论文使用授权说明

本人完全了解杭州电子科技大学关于保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属杭州电子科技大学。本人保证毕业离校后，发表论文或使用论文工作成果时署单位名称仍然为杭州电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：张笑菲

日期：2018 年 3 月 25 日

指导教师签名：赵知勤

日期：2018 年 3 月 25 日

## 摘 要

核自适应滤波能够较好地处理一些非线性问题,得到了广泛的关注及深入的研究。本文利用集员滤波理论和矢量量化等方法,研究核自适应滤波算法,以降低算法复杂度、提高抗脉冲噪声能力。

首先,简单地介绍核自适应滤波、Alpha 稳定分布理论和集员滤波等基础理论等。

然后,研究提出了 3 种核集员自适应滤波算法。将核方法运用到集员双归一化最小均方(SMBNLMS)算法中,提出核集员双归一化最小均方(KSMBNLMS)算法。核集员归一化最小均方(KSMNLMS)算法采用单个约束集控制权向量的更新,采用两个约束集控制权向量更新的 KSMBNLMS 算法能够提升估计精度。由于在 Alpha 稳定分布噪声背景中 KSMNLMS 算法和 KSMBNLMS 算法的性能退化,对此,利用集员滤波理论,提出了核集员归一化最小  $p$  范数(KSMNLMP)算法和核集员双归一化最小  $p$  范数(KSMBNLMP)算法。非线性信道均衡的仿真结果表明,在集员滤波类算法中,KSMBNLMS 比 KSMNLMS 具有更好的均衡效果,KSMNLMP 和 KSMBNLMP 算法分别比 KSMNLMS 和 KSMBNLMS 算法具有更好的均衡效果,KSMBNLMP 算法均衡效果最好。

接着,研究提出了 5 种抗脉冲噪声的核自适应滤波算法。在 Alpha 稳定分布噪声背景中,为了提高处理非线性问题时抵抗脉冲噪声性能,将核方法、集员滤波理论和和矢量量化运用到抗脉冲噪声算法(AIA)中,提出了核抗脉冲噪声算法(KAIA)、核集员抗脉冲噪声算法(KSMAIA)和量化核抗脉冲噪声算法(QKAIA)。非线性信道均衡的仿真结果表明,KAIA 的均衡效果优于核归一化最小均方(KNLMS)算法和核符号算法(KSA);KSMAIA 算法和 QKAIA 算法的稳态 MSE 值和复杂度均低于 KSMNLMS;KSMAIA 和 QKAIA 相比,QKAIA 的精度高于 KSMAIA,但是复杂度高于 KSMAIA。为了进一步提高上述算法的抗脉冲噪声性能,通过非线性映射对输入进行预处理,提出了预标准化的 KSMAIA(NKSMAIA)和 QKAIA(NQKAIA)。非线性信道均衡的仿真结果表明,输入预处理能够提升原算法的性能;NKSMAIA 和 NQKAIA 的均衡效果优于 KSMAIA 和 QKAIA,NQKAIA 算法的抗脉冲噪声能力最优。

最后,研究提出了一种核递归最小  $p$  范数 (KRLMP)算法。KRLS 算法在 Alpha 稳定分布下性能退化,为此,利用矩阵求逆引理和核方法,提出了核递归最小平均  $p$  范数(KRLMP)算法。MG 时间序列预测的仿真结果表明,相对于 KRLS 算法和核最大相关熵(KRMC)算法,在递归类算法中,KRLMP 算法具有更好的抗脉冲噪声的能力。

**关键词:** 核方法, 集员滤波理论, Alpha 稳定分布, 最小  $p$  范数准则, 矢量量化, 预处理

## ABSTRACT

Kernel adaptive filtering is better applied to deal with nonlinear problems which has attracted the extensive attention and research. This thesis mainly researches kernel adaptive filter algorithms by using set-membership filtering theory, vector quantization method, etc. to reduce complexity of algorithms and increase performance of anti-impulsive noise.

First of all, the basic theories of kernel adaptive filtering, Alpha stable distribution and set-membership filtering are briefly introduced.

Then, three kinds of kernel set-membership filtering algorithms are proposed. Combining the famed kernel trick and the SMBNLMS algorithm, the Kernel SMBNLMS(KSMBNLMS) algorithm is presented. The KSMNLMS algorithm uses single constraint set to control the update of weight vector, and the KSMBNLMS algorithm uses two constraint sets to control the update of weight vector which can improve the estimation accuracy. Due to the degeneracy of performance of KSMNLMS and KSMBNLMS under Alpha stable distribution noise, the kernel SMNLMP(KSMNLMP) and kernel SMBNLMP (KSMBNLMP) algorithm are presented by making use of set-membership filtering theory. The simulation results of nonlinear channel equalization in set-membership filtering algorithms show that KSMBNLMS has better equalization results than KSMNLMS, KSMNLMP and KSMBNLMP respectively has better equalization results than KSMNLMS and KSMBNLMS, KSMBNLMP has the best equalization results.

Thirdly, five kinds of anti-impulse adaptive filtering algorithms are proposed. In order to improving the performance of anti-impulse noise when deal with nonlinear problem under Alpha stable distribution noise, the famed kernel trick, the set-membership filtering theory and vector quantization method are used to the anti-impulse noise algorithm(AIA), so a kernel anti-impulse noise algorithm(KAIA), a kernel set-membership AIA algorithm(KSMAIA) and quantization KAIA(QKAIA) are proposed. The simulation results of the nonlinear channel equalization show that KAIA is better than the kernel normalized least mean square algorithm(KNLMS) and the kernel sign algorithm(KSA), the stable MSE and complexity of the KSMAIA and QKAIA algorithm are lower than KSMNLMS, the accurate of QKAIA is higher than KSMAIA, but the complexity of QKAIA is higher than KSMAIA. In order to improve the performance of anti-impulsive noise of above algorithms, the input signal is preprocessed through using nonlinear mapping, and then normalized KSMAIA and QKAIA are presented. The simulation results of nonlinear channel equalization show that the input preprocessing can enhance the performance of the algorithms, the equalization performance of NKSMIA and NQKAIA are better than that of KSMAIA and QKAIA, respectively, and NQKAIA algorithm is the best when is used to

dealing with the anti-impulse noise.

Finally, a kernel recursive least mean  $p$ -norm(KRLMP) algorithm is proposed. The performance of the kernel recursive least square (KRLS) algorithm under the Alpha stable distribution is degraded, so KRLMP algorithm is proposed by using kernel method and matrix inversion lemma. The simulation results of MG time series prediction show that the KRLMP algorithm has the best anti-impulse noise ability than KRLS algorithm and kernel recursive maximum correntropy (KRMC) algorithm compared with recursive algorithms.

**Keywords:** kernel method, set-membership filtering theory, Alpha stable distribution, least mean  $p$ -norm criterion, vector quantization, preprocessing.

## 缩写列表

集员双归一化最小均方算法	SMBNLMS
核集员双归一化最小均方算法	KSMBNLMS
核集员归一化最小均方算法	KSMNLMS
核集员归一化最小 $p$ 范数算法	KSMNLMP
核集员双归一化最小 $p$ 范数算法	KSMBNLMP
抗脉冲噪声算法	AIA
核抗脉冲噪声算法	KAIA
核集员抗脉冲噪声算法	KSMAIA
量化核抗脉冲噪声算法	QKAIA
核归一化最小均方算法	KNLMS
核符号算法	KSA
核递归最小平均 $p$ 范数算法	KRLMP
核最大相关熵算法	KRMC
核自适应滤波算法	KAF
核最小均方算法	KLMS
核递归最小二乘算法	KRLS
$L_1$ 范数	$L_1$
最小 $p$ 范数	Least $p$ -norm
最大相关熵准则	MCC
最小化风险敏感损失	MRSL
集员滤波理论	SMF
惊奇准则	SC
新颖准则	NC
一致性准则	CC
近似线性依赖	ALD
预测方差准则	PVC
矢量量化	VQ
再生核希尔伯特空间	RKHS
最小二乘	LS
归一化核最小均方算法	NKLMS



四元数 KLMS 算法	Quat-KLMS
块 LMS 算法	BLMS
核 BLMS 算法	KBLMS
核仿射投影算法	KAPA
集员核仿射投影算法	SMKAPA
扩展的核递归最小二乘算法	EX-KRLS
多核 LSTD 算法	MKLSTD
核最小平均混合范数算法	KLMMN
核增量元学习算法	KIMEL
核混合范数符号误差算法	KSEM N
核分段符号误差算法	KSSE
核双符号误差算法	KDSIGN
核分段混合符号误差算法	KSISEMN
核仿射投影符号算法	KAPSA
变步长 KAPSA 算法	VSS-KAPSA
核最小对数绝对误差算法	KLLAD
带有单一反馈的核最小均方算法	SF-KLMS
带有任意反馈的核自适应滤波器算法	RFs-KAF
最小化风险敏感损失	M RSL
核最小化风险敏感性损失算法	MKRSL
核最小平均绝对三次方算法	KLMAT
量化核最小均方算法	QKLMS
固定预算的量化核最小均方算法	QKLMS-FB
量化的混合核最小均方算法	QMxKLMS
新颖的简化 QKLMS-FB 算法	SQKLMS-FB
熵引导学习的新型 QKLMS 算法	E-QKLMS
量化方法的 KRMC 算法	QKRMC
基于双向梯度的 QKMC 算法	QKMC_BG
固定预算 QKMC_BG 算法	QKMC_BG_FB
量化最小化核风险敏感损失算法	QMKRSL
基于双向梯度的 QMKRSL 算法	QMKRSL_BG

# 目 录

摘 要 .....	I
ABSTRACT .....	II
缩写列表 .....	IV
目 录 .....	VI
第 1 章 绪论 .....	1
1.1 研究背景及意义 .....	1
1.2 国内外研究现状 .....	1
1.2.1 核 LMS 类和 RLS 类算法 .....	2
1.2.2 抗脉冲噪声的核自适应滤波算法 .....	2
1.2.3 基于矢量量化的核自适应滤波算法 .....	3
1.3 本文主要工作及章节安排 .....	4
1.3.1 本文主要工作 .....	4
1.3.2 本文章节安排 .....	5
第 2 章 核集员滤波算法 .....	7
2.1 引言 .....	7
2.2 基础理论 .....	7
2.2.1 核自适应滤波基础理论 .....	7
2.2.2 ALPHA 稳定分布理论 .....	9
2.2.3 集员滤波基础理论 .....	10
2.3 高斯噪声下的核集员滤波算法 .....	11
2.3.1 核集员归一化最小均方算法简介 .....	11
2.3.2 核集员双归一化最小均方算法推导 .....	12
2.4 ALPHA 稳定分布噪声下的核集员滤波算法 .....	16
2.4.1 核集员归一化最小平均 $P$ 范数算法推导 .....	16
2.4.2 核集员双归一化最小平均 $P$ 范数算法推导 .....	18
2.5 4 种算法网络拓扑图 .....	21
2.6 算法仿真与性能分析 .....	22
2.7 本章小结 .....	26
第 3 章 核抗脉冲噪声算法 .....	27
3.1 引言 .....	27

3.2 核抗脉冲噪声算法推导 .....	27
3.3 核集员抗脉冲噪声算法推导 .....	29
3.4 量化核抗脉冲噪声算法推导 .....	32
3.4.1 基于矢量量化和最速下降法的核自适应滤波算法推导 .....	32
3.4.2 量化核抗脉冲噪声算法推导 .....	35
3.5 输入预处理核自适应滤波算法 .....	35
3.6 算法仿真和性能分析 .....	37
3.7 本章小结 .....	45
第 4 章 核递归最小平均 $P$ 范数算法 .....	46
4.1 引言 .....	46
4.2 核递归最小二乘算法和核递归最大相关熵算法简介 .....	46
4.2.1 核递归最小二乘算法 .....	46
4.2.2 核递归最大相关熵算法 .....	47
4.3 核递归最小平均 $P$ 范数算法推导 .....	49
4.4 算法仿真与性能分析 .....	51
4.5 本章小结 .....	56
第 5 章 结束语 .....	57
致    谢 .....	58
参考文献 .....	59
附    录 .....	63

## 第 1 章 绪论

### 1.1 研究背景及意义

自适应滤波器作为统计信号处理中的一个重要组成部分,已经广泛应用于通信、雷达和地震等领域<sup>[1,2]</sup>。自适应滤波算法是其核心部分,通常按照输入-输出映射是否遵循叠加原理,将自适应滤波算法分为线性和非线性<sup>[1,2]</sup>。但是,线性自适应滤波算法不适用于实际中遇到的大量非线性问题;并且传统的非线性自适应滤波模型,如 Hammerstein、Wiener 和 Volterra 模型等,可能会出现建模能力有限、易出现局部极小值、复杂度随着建模能力增强而指数地增加、收敛慢等问题,从而限制其广泛应用<sup>[1,2]</sup>。

近几年,核方法越来越受到学者们关注,已成功应用于非线性自适应滤波算法,提出了核自适应滤波(Kernel Adaptive Filtering, KAF)算法,如核最小均方(Kernel Least Mean Square, KLMS)算法、核递归最小二乘算法(Kernel Recursive Least Square, KRLS)等<sup>[3,4]</sup>。但是实际应用中,基于最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)准则的核自适应滤波算法的抗脉冲性能较差,基于  $L_1$  范数(Least 1-norm,  $L_1$ )准则、最小  $p$  范数(Least  $p$ -norm)准则、最大相关熵准则(Maximum Correntropy Criterion, MCC)、最小化风险敏感损失 (Minimum Risk Sensitive Loss, MRSL) 准则等算法具有良好的抗脉冲性能<sup>[5-8]</sup>,如核递归最大相关熵(Kernel Recursive Maximum Correntropy, KRMC)算法等<sup>[7]</sup>。虽然核自适应滤波器具有通用的建模能力和凸性,但是径向基网络的网络复杂度与迭代次数成正比,计算量巨大。

集员滤波应用于很多领域中,如自动控制、故障诊断、定位与导航、机器视觉、姿态估计、通讯与信号处理、宇航、机器学习、生物工程和生态环境等<sup>[9,10]</sup>。已有学者将集员滤波(Set-Membership Filtering, SMF)理论与核自适应滤波算法相结合,提出核集员归一化最小均方(Kernel Set-Membership Normalized Least Mean Square, KSMNLMS)算法,折中考虑算法性能和计算复杂度<sup>[11]</sup>。除此之外,还有如惊奇准则(Surprise Criterion, SC)、新颖准则(Novelty Criterion, NC)、一致性准则(Coherence Criterion, CC)、近似线性依赖(Approximate Linear Dependency, ALD)、预测方差准则(Predict Variance Criterion, PVC)、矢量量化(Vector Quantization, VQ)方法等,以降低核自适应滤波算法网络复杂度的其它方式<sup>[8]</sup>。

实际系统经常会遇到脉冲噪声干扰,因此本文从降低算法复杂度、提高算法抗脉冲噪声能力出发,主要研究脉冲噪声背景下的核自适应滤波算法。

### 1.2 国内外研究现状

以 Mercer 提出的 Mercer 定理作为理论基础, Aronszajn 提出了再生核希尔伯特空间(Reproducing Kernel Hilbert Space, RKHS)理论,核方法将低维空间的数据映射到 RKHS 后能

够较好地处理非线性的问题<sup>[3,4]</sup>。目前已有基于最小均方误差(MMSE)准则、基于最小二乘(Least Square,LS)准则、基于集员滤波理论、基于抗脉冲性准则和基于 VQ 方法等的核自适应滤波算法。

### 1.2.1 核 LMS 类和 RLS 类算法

2008 年, Liu 等人将核方法运用于最小均方算法, 提出核自适应滤波算法中典型的 KLMS<sup>[3,4]</sup>。2009 年, 为了提高 KLMS 算法的收敛和跟踪性能, Modagheh 等提出归一化核最小均方算法(Normalized kernel Least Mean Square, NKLMS)<sup>[12]</sup>。变步长的自适应算法收敛速度较快并且稳态误差较小, 但在稳态阶段步长调整不足, 故高鹰和谢胜利等提出了改进的变步长算法。为了提升其非线性处理能力, 2011 年朱陈良提出变步长核最小均方算法(Variable step size KLMS,VSS-KLMS), 应用于音频噪声抵消时能够实现对噪声信号的抑制<sup>[13]</sup>。2014 年, Tobar 等人用多个核函数的组合形式取代单一核函数, 提出多核最小均方算法(Multikernel Least Mean Square, MKLMS)<sup>[14]</sup>。为了提升处理非线性问题的能力, 2015 年, Paul T K 等人基于四元数、核方法和 LMS 算法, 推导得到四元数 KLMS(Quat-KLMS)算法<sup>[15]</sup>。2017 年, 赵知劲等为了降低 KLMS 算法的稳态误差, 利用输入-输出数据块估计误差的块 LMS(Block LMS,BLMS)算法和核方法, 提出核 BLMS(Kernel BLMS,KBLMS)算法<sup>[16]</sup>。2005 年, Malipatil A V 等人为了减小 KLMS 算法的计算复杂度, 基于集员滤波理论, 提出 KSMNLMS 算法<sup>[11]</sup>。

2008 年, Liu 等人将核方法运用于仿射投影算法, 提出核仿射投影算法(Kernel Affine Projection Algorithm, KAPA), 因为采用多个时刻的滤波器输入矢量估计梯度, 因此具有更好性能<sup>[3,4]</sup>。2017 年, Flores A 等人将集员滤波理论运用到核自适应滤波中, 提出集员核仿射投影算法(Set-Membership Kernel Adaptive Projection Algorithms, SMKAPA)<sup>[17]</sup>。

2004 年, Engel 等人将核方法运用到递归最小二乘算法中, 提出核递归最小二乘算法(Kernel Recursive Least Squares, KRLS)<sup>[3,4]</sup>。2009 年, Liu 改进了 KRLS 算法, 提出了扩展的核递归最小二乘算法(Extended Kernel Recursive Least Squares, EX-KRLS)<sup>[3,4]</sup>。2016 年, Zhang C Y 等人为了提升算法的收敛速度和预测精度, 将多核方法与最小二乘时差(Least-Squares Temporal Difference, LSTD)算法相结合, 提出多核 LSTD(Multikernel LSTD,MKLSTD)算法<sup>[18]</sup>。

### 1.2.2 抗脉冲噪声的核自适应滤波算法

2012 年, 苗秋园提出核最小平均混合范数算法(Kernel Least Mean Mixed-Norm Algorithm, KLMMN), 在高斯分布线性叠加伯努利分布噪声中, 表现出良好的性能。为了提高算法的收敛速度, 将增量算法和核方法相结合, 提出核增量元学习(Kernel Incremental MEtaLearning, KIMEL)算法和核可变速长 LMS 算法<sup>[5]</sup>。

2014 年, 陈乾等为了提高在含有脉冲噪声环境中算法的性能, 将鲁棒混合范数(Sign-Error Mixed-Norm, SEMN) 算法和核方法结合提出核混合范数符号误差算法(Kernel Sign-Error Mixed-Norm, KSEMN)。为了改进符号误差算法内在的收敛慢的问题, 提出核分段

符号误差算法(Kernel Segmentation Sign-Error, KSSE)、核双符号误差算法(Kernel Double Sign-Error, KDSIGN)和核分段混合符号误差算法(Kernel Segmentation Sign-Error Mixed-Norm, KSISEMN)<sup>[19]</sup>。

2013 年, Wang 等人为了提升 KAPA 抗脉冲干扰的能力, 将仿射投影符号算法(Affine Projection Sign Algorithm, APSA)和核方法结合, 提出核仿射投影符号(Kernel APSA, KAPSA)算法; 同时在不增加计算复杂度的前提下, 为了进一步提高性能, 提出变步长 KAPSA(Variable Step Size, VSS-KAPSA)<sup>[20]</sup>。

2015 年, 石嘉豪等为了提升 RLS 类算法的抗脉冲性, 提出基于 MCC 准则的核最小二乘算法(Kernel Recursive Maximum Correntropy, KRMC), 该算法能够在数据中提取更加丰富的统计信息, 算法性能得到提升<sup>[7,21]</sup>。

2016 年, 为了提高 KLMS 算法处理 Alpha 稳定分布噪声的性能, 赵知劲等提出基于最小  $p$  范数准则的核最小平均  $p$  范数(Kernel Least Mean  $p$ -norm, KLMP)算法<sup>[22]</sup>。曾俊俊为了提升最小对数绝对误差(Least Logarithmic Absolute Difference, LLAD)算法处理非线性问题的能力, 基于核方法提出核 LLAD(KLLAD)算法<sup>[23]</sup>。赵集等基于反馈形式的核自适应滤波器并应用最速下降法, 提出了带有单一反馈的核最小均方算法(Kernel Least Mean Square with Single Feedback, SF-KLMS), 该算法具有良好的收敛速度和误差性能; 为了进一步改善收敛速度和误差性能, 提出基于变学习率的带有单一反馈的核自适应滤波器(Variable Learning Rates Kernel Adaptive Filter with Single Feedback, SF-VLRKAF); 在将单一的反馈扩展到任意时刻, 提出带有任意反馈的核自适应滤波器(Random Feedbacks KAF, RFs-KAF)<sup>[24]</sup>。

2017 年, Chen B D 等基于一种具有更好的“凸”优点的相似性度量——最小化风险敏感损失(MRSL)准则, 提出了核最小化风险敏感性损失(Minimum Kernel Risk-Sensitive Loss, MKRSL)算法; 与基于相关性准则的算法进行对比, 该算法能够实现更快的收敛速度和更高的精度, 同时具有抗脉冲性能<sup>[25]</sup>。2017 年, Lu L 等基于最小平均绝对三次方(Least Mean Absolute Third, LMAT)准则提出核 LMAT(KLMAT)算法, 能够有效处理不同分布的噪声<sup>[26]</sup>, 但是 KLMAT 需要通过选择特定值的步长来折中考虑收敛速度与稳定误差, 故基于 Lorentz 函数提出变步长 KLMAT 算法, 具有更好的稳态和收敛性能<sup>[26]</sup>。

2017 年, Ma W T 等为了提升 KLMS 和 KRLS 算法的抗脉冲噪声的性能, 基于最小  $p$ -范数准则提出核最小平均  $p$  范数(KLMP)算法和核递归最小  $p$  范数(Kernel Recursive Least Mean  $p$ -power, KRLP)算法<sup>[27]</sup>。

### 1.2.3 基于矢量量化的核自适应滤波算法

从降低 KLMS 算法的网络复杂度角度出发, SC、NC、CC、ALD、PVC 等用丢弃冗余数据达到网络稀疏, 但也降低了精度。2012 年, Chen B D 等人从遏制径向基函数结构增长的角度出发, 提出了量化核最小均方算法(Quantized Kernel Least Mean Square, QKLMS)<sup>[28]</sup>, VQ 方法是使用当前的输入和字典的距离来构造字典并用丢弃的冗余数据来更新字典中最接近中心

的系数的方法,故能够更好地构造径向基网络从而得到更高的算法的精度<sup>[28]</sup>。2013年,Zhao S等以较小精度损失为代价,提出固定预算的量化核最小均方算法(Quantised KLMS with Fixed Budget, QKLMS-FB)<sup>[29]</sup>。多核解决了内核选择的问题并提高了性能。2014年,Pokharel R等人提出量化的混合核最小均方(Quantized Mixture KLMS, QMxKLMS)算法<sup>[30]</sup>。由于QKLMS-FB的计算复杂度随着中心数线性增加,为了降低计算成本并同时保持更好的精度,引入系数向量和影响因子来测量每个中心的重要性,2016年Wang S Y等人提出一种新颖的简化QKLMS-FB(Simplified KLMS-FB, SQKLMS-FB)<sup>[31]</sup>算法。2017年,Luo X等为了进一步压缩输入提高学习性能,提出熵引导学习的新型QKLMS(Entropy-guided QKLMS, E-QKLMS)算法,通过使用天气相关数据集进行验证,E-QKLMS具有高精度及低计算成本<sup>[32]</sup>。

2015年,石嘉豪等为了降低KRMC算法的计算复杂度,提出基于量化方法的KRMC(Quantised KRMC, QKRMC)<sup>[21]</sup>。2017年,Wang S Y等为了克服传统的梯度下降法可能无法充分利用输入和输出空间的隐藏信息,提高QKMC算法性能,提出基于双向梯度的QKMC(QKMC based on Bilateral Gradient, QKMC\_BG)算法,为了限制QKMC\_BG算法的规模,提出固定预算QKMC\_BG(QKMC\_BG with fixed budget, QKMC\_BG\_FB)<sup>[33]</sup>算法。

2017年,由于基于MCC准则的QKMC算法中的内核带宽对算法的抗脉冲性能会产生很大影响,当内核带宽变小,抗脉冲性能变好,但是收敛速度变慢、精确度变差,当内核带宽变大,抗脉冲性变差的问题,Luo X等将MKRSL算法和矢量量化方法相结合,提出量化最小化核风险敏感损失(Quantized MKRLS, QMKRSL)算法,该算法具有收敛速度更快、稳态性能更好以及具有异常值抗脉冲的优点;同时为了进一步提高算法精度,提出基于双向梯度的QMKRSL(QMKRLS based on Bilateral Gradient, QMKRSL\_BG)算法<sup>[8]</sup>。

## 1.3 本文主要工作及章节安排

### 1.3.1 本文主要工作

已有研究表明,集员滤波理论和矢量量化方法可以降低自适应滤波算法的复杂度,基于最小 $p$ -范数准则的算法具有较好的抗脉冲噪声能力。因此本文将利用这些理论和方法,从降低复杂度、提高算法抗脉冲噪声能力出发,研究脉冲噪声背景下的核自适应滤波算法。取得的主要成果如下:

(1)从降低算法复杂度出发,研究提出了三种核集员滤波自适应算法。

在高斯噪声背景下,将集员双归一化最小均方(Set-Membership Bi-normalized Least Mean Square, SMBNLMS)算法和核方法相结合,提出核集员双归一化最小均方(Kernel Set-Membership Bi-Normalized Least Mean Square, KSMBNLMS)算法。在非线性信道均衡中,KSMBNLMS具有比KSMNLMS更好的均衡效果。该部分研究成果撰写的论文已被《杭州电子科技大学学报》录用。

在Alpha稳定分布脉冲噪声背景下,LMS类算法性能下降,基于最小 $p$ 范数准则,提出

核集员最小平均  $p$  范数(KSMLMP)算法和核集员双归一化最小平均  $p$  范数(KSMBNLMP)算法。在非线性信道均衡中, KSMNLMP 和 KSMBNLMP 具有比 KSMNLMS 和 KSMBNLMS 更好的均衡效果。该部分研究成果撰写的论文已发表在《通信技术》。

(2)从提高抗脉冲噪声能力出发, 研究提出了 5 种算法。

在 Alpha 稳定分布脉冲噪声背景下, 基于核方法和抗脉冲噪声算法(Anti-Impulse noise Algorithm, AIA)<sup>[36]</sup>, 提出了核抗脉冲噪声算法(Kernel Anti-Impulse noise Algorithm, KAIA), 与 KNLMS 算法相比其降低了算法复杂度, 与核符号算法(Kernel Sign Algorithm, KSA)<sup>[19]</sup>相比其提高了精度; 为了降低复杂度, 基于集员滤波理论, 提出的核集员 AIA(Kernel Set-Membership AIA, KSMAIA), 与 KSMNLMS 算法相比, KSMAIA 具有更小的稳态误差以及更低的更新率。为了控制网络结构同时减小精度损失, 基于量化方法提出了量化 KAIA(Quantized KAIA, QKAIA)。对于核自适应滤波算法的输入进行预处理, 对 KSMAIA 和 QKAIA 算法进行改进, 提出预标准化的 KSMAIA(Normalized KSMAIA, NKSMAIA)和预标准化的 QKAIA(Normalized QKAIA, NQKAIA)。非线性信道均衡仿真结果表明, NQKAIA 算法性能最优, KSMAIA 算法最差, QKAIA 算法和 NKSMAIA 算法居其中。该部分研究成果拟投外刊。

在 Alpha 稳定分布脉冲噪声背景下, RLS 类算法性能下降, 为此, 基于最小  $p$  范数准则, 提出 KRLMP 算法。在 MG 混沌时间序列预测中, KRLMP 算法比 KRLS 和 KRMC 算法具有较好的预测性能。该部分研究成果撰写的论文已发表在《信号处理》。

### 1.3.2 本文章节安排

本文章节安排如下:

第一章为绪论。首先简要的介绍本文的研究意义和背景, 然后简述核自适应滤波算法的国内外研究现状, 最后介绍本文的主要工作和章节安排。

第二章首先介绍基础理论, 分别为核自适应滤波基础理论、Alpha 稳定分布理论和集员滤波基础理论等。然后在高斯噪声背景下, 推导给出了 KSMBNLMS 算法; 在 Alpha 稳定分布噪声背景下推导给出了 KSMNLMP 和 KSMBNLMP 算法。最后给出算法仿真和性能分析。

第三章首先在 Alpha 稳定分布噪声背景下, 基于核方法和抗脉冲噪声算法(AIA)提出 KAIA 算法。为了降低 KAIA 算法的计算复杂度, 基于集员滤波理论提出 KSMAIA 算法; 为了折中精度和复杂度, 基于量化方法提出 QKAIA 算法, 并给出了 KNLMS、KSA、KAIA、KSMNLMS、KSMAIA 和 QKAIA 在 Alpha 稳定分布噪声背景下对非线性信道均衡仿真与性能分析。针对 Alpha 稳定分布噪声, 对核自适应滤波算法的输入进行预处理, 本文对 KSMAIA 和 QKAIA 算法进行改进, 提出预标准化的 KSMAIA(Normalized KSMAIA, NKSMAIA)和预标准化的 QKAIA(Normalized QKAIA, NQKAIA), 并给出了在 Alpha 稳定分布噪声背景下 KSMAIA、QKAIA、NKSMAIA 和 NQKAIA 算法对非线性信道均衡仿真与性能分析。

第四章首先介绍 KRLS 和 KRMC 算法。然后介绍 KRLMP 算法的推导过程, 由于 KRLS



和 KPMC 算法在 Alpha 稳定分布噪声背景下抗脉冲性能变差, 基于最小  $p$  范数准则, 利用矩阵求逆引理和核方法, 提出 KRLMP 算法。最后给出算法仿真和性能分析。

第五章总结全文, 提出展望。

## 第 2 章 核集员滤波算法

### 2.1 引言

本章先简单的介绍核自适应滤波基础理论、Alpha 稳定分布理论和集员滤波基础理论等。然后研究给出 KSMNLMS、KSMNLMP 和 KSMBNLMP 这三种算法的推导过程，最后给出算法仿真和性能分析。

### 2.2 基础理论

设自适应滤波器采用如图 2.1 所示的有限长单位脉冲响应(FIR)横向结构， $x(n)$  为输入信号， $y(n)$  为输出信号， $d(n)$  为期望信号，采用  $M$  个权值  $w_k (k=1 \sim M)$ ，则输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$  分别为

$$y(n) = \sum_{k=1}^M x(n-k+1)w_k = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(n)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

其中， $\mathbf{X}(n)=[x(n), \dots, x(n-M+1)]^T$  是输入信号矢量， $\mathbf{W}=[w_1, w_2, \dots, w_M]^T$  是权向量。已有许多在欧几里得空间的调整权向量  $\mathbf{W}$  的方法，如经典的 LMS、RLS 等<sup>[1,2]</sup>。本文主要研究核自适应滤波算法。

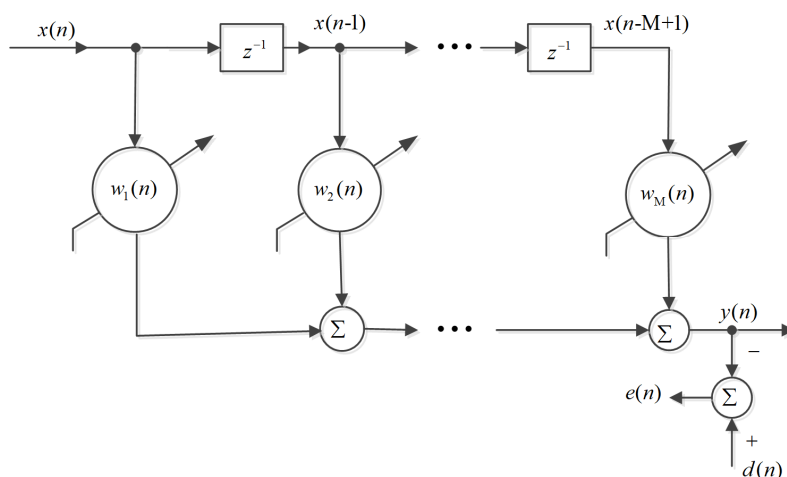


图 2.1 FIR 横向结构

#### 2.2.1 核自适应滤波基础理论

本节从核自适应滤波理论中的核方法、核函数及其参数的选取和高斯核函数中核参数的选取这三个方面进行简述。

##### 2.2.1.1 核方法

将自适应滤波算法推广到 RKHS 空间中能够有效地处理一些非线性的问题，受到了广大

学者的关注。核方法的基本过程是将低维空间中的自适应滤波器的输入信号矢量  $\mathbf{X}(n)$  通过虚拟函数  $\varphi(\bullet)$  映射到高维空间后得到  $\mathbf{u}(n)$ ；再对数据进行线性的处理，用核函数表示在高维空间中的内积，即

$$\langle \mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle = \text{ker}(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n)) \quad (2.1)$$

可以推广出核自适应滤波器算法<sup>[3,4]</sup>。

下面详细介绍核方法的数学基础和重要性质。

令核自适应滤波器的输入信号矢量  $\mathbf{X}(n)$  映射到高维的 RKHS 的矢量为  $\mathbf{u}(n) = \varphi(\mathbf{X}(n)) \in \mathbb{Q}^{M \times 1}$ ，简记为  $\mathbf{u}(n) = \varphi(n)$ ，则  $\mathbf{u}(n) = [\varphi(n), \dots, \varphi(n-M+1)]^T \in \mathbb{Q}^{M \times 1}$ ，如图 2.2 所示。如果满足  $\langle \mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle = \text{ker}(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n))$ ，则称  $\text{ker}(\bullet, \bullet)$  函数为核函数。如果  $\text{ker}(\bullet, \bullet)$  满足连续、对称和正定三个条件，则称之为 Mercer 核函数<sup>[3,4]</sup>。

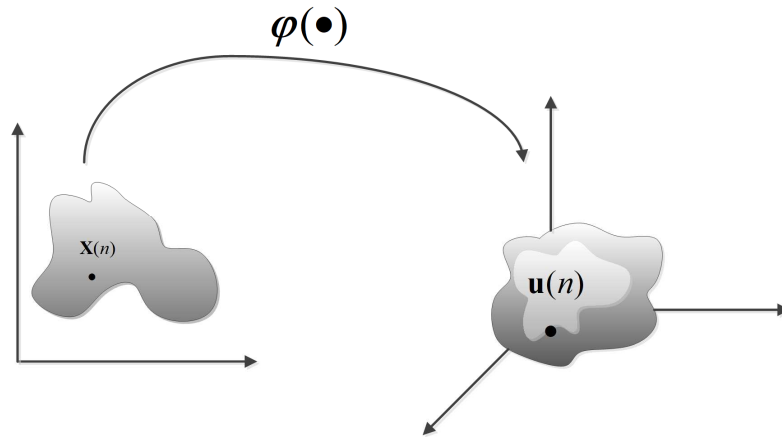


图 2.2 从输入空间到 RKHS 的非线性映射

在 RKHS 中的内积具有<sup>[3,4]</sup>：

(1)对称性：  $\langle \mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle = \langle \mathbf{u}(n), \mathbf{u}(m) \rangle$

(2)分配率和线性：  $\langle a\mathbf{u}(m) + b\mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle = a\langle \mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle + b\langle \mathbf{u}(m), \mathbf{u}(n) \rangle$

(3)平方范数：  $\|\mathbf{u}(n)\|^2 = \langle \mathbf{u}(n), \mathbf{u}(n) \rangle \geq 0$

### 2.2.1.2 核函数及其参数的选取

下面列出一些常用的核函数<sup>[3,4,35]</sup>。需要注意的是，在一些特征空间可以用核函数表示内积，但是并没有要求输入数据是向量。

(1)多项式核函数(polynomial kernel)。

$$\text{ker}(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n)) = [\langle \mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n) \rangle + c_1]^{c_2} \quad (2.2)$$

其中，  $c_1$  是非负常数，通常为 1。对于低阶  $c_2$ ，使用二项式定理容易，得到关于  $[\langle \mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n) \rangle + c_1]^{c_2}$  的特征映射  $\varphi(\bullet)$ 。由于运算速度快，所以也经常被使用。

(2)线性核函数(linear kernel)。作为  $c_2=1$  的多项式核的特殊情况，线性核函数通常表示成如下

$$\text{ker}(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n)) = \langle \mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n) \rangle = \mathbf{X}^T(m)\mathbf{X}(n) \quad (2.3)$$

(3)高斯核函数。高斯核（或径向基函数（radial basis function ,RBF）核）在内核密度估计（KDE）中很常用。通常表示成如下

$$ker(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n)) = \exp(-h \|\mathbf{X}(m) - \mathbf{X}(n)\|^2) = \Phi(m, n) \quad (2.4)$$

其中， $h$  是核参数。

(4)神经网络核函数(sigmoid kernel)。通常表示成如下

$$ker(\mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n)) = \tanh[c_3 < \mathbf{X}(m), \mathbf{X}(n) > + c_4] \quad (2.5)$$

注意此函数不是正定的，只有当  $c_3, c_4$  取适当的值时，才满足 Mercer 条件。

由于高斯核函数用泰勒公式展开后可表示成无限项多项式之和，构成的映射是无限维的，具有非常好的逼近能力以及数值计算的能力，鉴于其良好的性能，本章及后续章节的实验中选用高斯核函数。

### 2.2.1.3 高斯核函数中核参数 $h$ 的选取

可以用于确定  $h$  的方法有交叉验证方法、最近邻法、惩罚函数法以及 plug-in 插件法<sup>[3,4]</sup>。

本文简述交叉验证法<sup>[3,4]</sup>，其具有寻找最优值简单的优点，但是过程枯燥。如果能够获得一个初步估计再进行搜索过程会精简一点。

如果  $\mathbf{X}(n)$  是一维向量，则常可用 Silverman 规则计算初步估计值：

$$h_s = 1.06 \min\{h_1, h_2 / 1.34\}$$

其中， $h_1$  是  $\mathbf{X}(n)$  的标准差； $h_2$  是  $\mathbf{X}(n)$  的四分位差。将范围  $[h_s / 10, 10h_s]$  作为交叉验证法的搜索区间，选取  $h$ 。如果  $\mathbf{X}(n)$  是多维向量，过程会更加复杂。

在许多非线性信号处理中， $\mathbf{X}(n)$  是一维向量，可以用如下的区间估计最优值：

$$[1.06 \min\{h_1, h_2 / 1.34\} N^{-0.2}, 1.06 \min\{h_1, h_2 / 1.34\} N^{-0.2/M}]$$

其中， $N$  为迭代次数； $M$  为核自适应滤波器的阶数。注意： $h$  选取需要依靠经验，同时也需要实验。

### 2.2.2 Alpha 稳定分布理论

Alpha 稳定分布理论早在 1925 年就由 Levy 提出<sup>[6]</sup>。但是 Shao 和 Nikias 在 1993 年发表的论文，这才引起了信号处理领域对于 Alpha 稳定分布的重视，从而开启了研究热潮<sup>[6]</sup>。这是一种更加广义的高斯分布，与高斯分布的主要区别在于它们的拖尾，高斯分布是指数拖尾，而 Alpha 稳定分布是代数拖尾<sup>[6]</sup>。

Alpha 稳定分布可以较好地描述脉冲噪声的特性，其没有统一的概率密度函数表达式，但是具有统一的特征函数，表示如下<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \exp\{jgt - \gamma_\alpha |t|^\alpha [1 + j\beta \operatorname{sgn}(t)\Omega(t, \alpha)]\} \\ \text{其中, } \operatorname{sgn}(t) &= \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t = 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}; \quad \Omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2), \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\log|t|, \alpha = 1 \end{cases}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$g$  表示位置参数, 取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ ;  $\gamma_\alpha$  表示分散系数, 取值范围是  $[0, +\infty)$ , 其值类似于高斯分布中的方差, 用于表征相对于均值的分散程度;  $\beta$  表示对称系数, 取值范围是  $[-1, 1]$ , 当  $\beta$  为 0 时, 作为一种特殊情况, 称为对称 Alpha 稳定分布, 记作 SaS;  $\alpha$  表示特征指数, 取值范围是  $(0, 2]$ , 决定了 Alpha 稳定分布过程中的脉冲程度,  $\alpha$  值越小, 其所对应分布的拖尾越厚, 因此脉冲特性越显著; 反之, 当  $\alpha$  值越大, 拖尾变薄, 且脉冲特性减弱; 由此可见 Alpha 稳定分布的特征函数完全由  $g$ 、 $\gamma_\alpha$ 、 $\beta$  和  $\alpha$  这四个参数确定。

### 2.2.3 集员滤波基础理论

本节主要从这两个方面简述集员滤波基础理论, 分别为集员滤波理论的基本概念和集员滤波算法。

#### 2.2.3.1 集员滤波理论的基本概念

令约束集为

$$\mathbf{H}(n) = \{\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M \times 1} : |d(n) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}(n)| \leq \bar{\gamma}\},$$

其中  $\mathbf{W}$  是权向量;  $d(n)$  是第  $n$  次迭代的期望信号;  $\bar{\gamma}$  是输出误差幅度边界。二维情形下  $\mathbf{W}$  平面中的约束集示意图如 2.3。

集员自适应滤波是一种采用明确的代价函数  $J(n)$ , 将滤波器输出的误差  $e(n)$  限定在特定的范围内, 当  $e(n)$  不在特定的  $\mathbf{H}(n)$  内才进行更新, 从而可以减少算法计算量的自适应滤波器。当前基于现有的数学理论无法精确计算出  $\mathbf{H}(n)$ , 因而, 集员滤波算法通常用包含约束集的简单集合来近似描述约束集<sup>[2]</sup>。

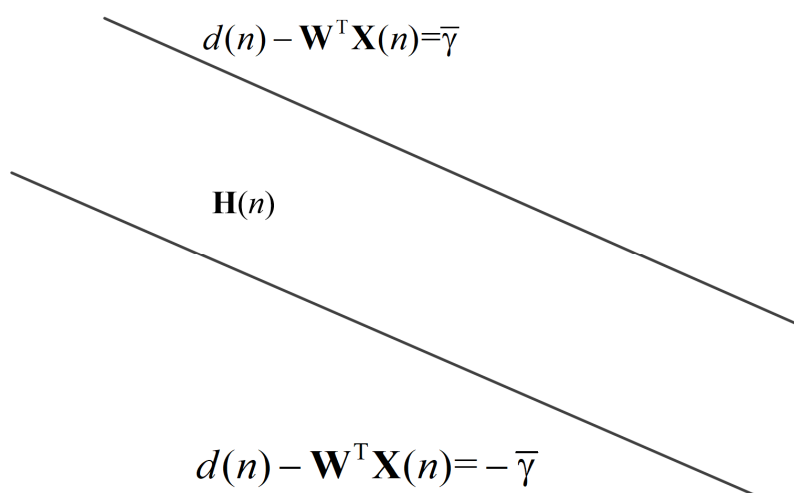


图 2.3 二维情形下  $\mathbf{W}$  平面中的约束集示意图

#### 2.2.3.2 集员滤波算法

按照所得到的近似的约束集的集合形状进行划分, 集员滤波算法主要包括: 用椭球近似描述约束集的椭球算法、用盒子近似描述约束集的盒子算法、用超平行体近似描述约束集的超平行体算法、用全对称多胞形近似描述约束集的全对称多胞形算法、用若干个盒子的并等几何体描述约束集的近似或精确多面体算法等。椭球和超平行体算法一般是递推类算法, 计

算过程相对简单,但是精度相对较低。全对称多胞体算法和近似或精确多面体算法也是递推类算法,精确度相对于前者提高,近似或精确多面体算法的精度最高,但这两种算法的计算量大。盒子算法通常是批处理类算法,精度适中,但是计算量大。所以本文这要研究超平行体算法<sup>[9]</sup>。

下面简要介绍超平行体算法中的经典的利用一个约束集进行权向量更新,集员归一化最小均方(Set-membership NLMS,SMNLMS)算法<sup>[2,36]</sup>。1998年S. Gollamudi等人提出SMNLMS算法,其基本思想是先判断 $\mathbf{W}(n)$ 是否在 $\mathbf{H}(n)$ 内。当误差的模值不在给定的界内,即 $|d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{X}(n)| > \bar{\gamma}$ ,则将前面的估计正交投影到 $\mathbf{H}(n)$ 的最近边界来完成更新,使更新后的 $\mathbf{W}(n+1)$ 在 $\mathbf{H}(n)$ 内。

根据最小化扰动原理,使用拉格朗日乘子法解约束条件的方法,SMNLMS算法用于权向量更新的代价函数为

$$J_{\text{SMNLMS}}(n) = \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \mu(n)[d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{X}(n) - g(n)] \quad (2.7)$$

其中, $\mu$ 是拉格朗日乘子。

计算并化简得到SMNLMS的滤波器的输出 $y(n)$ 、估计误差 $e(n)$ 和权向量的更新公式分别为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{X}(n) \quad (2.8)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\mu(n)}{\mathbf{X}(n)^T \mathbf{X}(n)} e(n) \mathbf{X}(n) \quad (2.10)$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|}, & |e(n)| > \bar{\gamma} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.3 高斯噪声下的核集员滤波算法

在高斯噪声下,首先简述经典的KSMNLMS算法,然后给出本章提出的KSMBNLMS算法的推导过程。

### 2.3.1 核集员归一化最小均方算法简介

为了提高SMNLMS算法处理非线性问题的能力,基于核方法,Malipatil A V等人提出KSMNLMS算法。KSMNLMS算法的代价函数为<sup>[11]</sup>

$$J_{\text{KSMNLMS}}(n) = \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \mu(n)[d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - \bar{\gamma}(n)] \quad (2.12)$$

选择高斯核函数,将式(2.4)代入,可以得到KSMNLMS算法的滤波器输出 $y(n)$ 、扩展系数 $a_{\text{KSMNLMS}}(n)$ 、误差信号 $e(n)$ 和权向量的更新的表达式为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(j)e(j)\Phi(j, n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMNLMS}}(j)\Phi(j, n) \quad (2.13)$$

$$a_{\text{KSMNLMS}}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(j)e(j)\Phi(j, n) \quad (2.14)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\mu(n)}{\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)} e(n)\mathbf{u}(n) = \sum_{j=0}^n \mu(j)e(j)\mathbf{u}(j) \quad (2.16)$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|}, & |e(n)| > \bar{\gamma} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.17)$$

KSMNLMS 算法总结如表 2.1 所示。

#### 2.1 核集员归一化最小均方(KSMNLMS)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数，输出误差幅度边界  $\bar{\gamma}$ 。

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ；计算  $e(0)$ ， $\mu(0)$ ；

当  $n \geq 1$  时，进行迭代：

分别由式(2.13)、式(2.14)和式(2.15)计算输出信号  $y(n)$ 、扩展系数  $a_{\text{KSMNLMS}}(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

由式(2.17)计算  $\mu(n)$ 。

#### 2.3.2 核集员双归一化最小均方算法推导

为了提高 KSMNLMS 算法处理非线性问题的性能，基于集员双归一化(Set-membership Bi-normalized, SMBN)的方法思想<sup>[2,37]</sup>，即该方法采用当前时和前一时刻作为自适应滤波器的输入信号，每次更新使用两个约束集，可以提升算法的收敛速度；结合核方法，提出 KSMBNLMS 算法。

令自适应滤波器的输入信号矩阵为  $\mathbf{X}_{\text{ap}}(n)=[\mathbf{X}(n), \mathbf{X}(n-1)]$ ，映射到 RKHS 空间的矢量矩阵为  $\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)=[\mathbf{u}(n), \mathbf{u}(n-1)]$ 。

在第  $n$  次迭代中，期望信号、滤波器的输出信号矢量和误差矢量分别为

$$\mathbf{D}_{\text{ap}}(n)=[d(n), d(n-1)]^T, \quad \mathbf{Y}(n)=[y_{\text{ap},1}(n), y_{\text{ap},2}(n)]^T, \quad \mathbf{e}_{\text{ap}}(n)=[e(n), \varepsilon(n-1)]^T$$

其中， $e(n)=d(n)-\mathbf{W}^T\mathbf{u}(n)$ ， $\varepsilon(n-1)=d(n-1)-\mathbf{W}^T\mathbf{u}(n-1)$ 。

对于输入信号和期望输出信号对  $(\mathbf{u}_{\text{ap}}(n), \mathbf{D}_{\text{ap}}(n))$ ，约束条件是自适应滤波器的输出误差不超过各自对应的预设门限值，即

$$\mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - [\mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)]^T = \bar{\boldsymbol{\gamma}}(n) \quad (2.18)$$

其中  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}(n) = [\bar{\gamma}_1(n), \bar{\gamma}_2(n)]^T$ ,  $|\bar{\gamma}_i(n)| \leq \bar{\gamma}, i = 1, 2$ ;  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  通常在  $\sqrt{5}\sigma_v$  附近取值<sup>[2,11,36,37]</sup>, 其中  $\sigma_v^2$  是加性噪声的方差。

根据最小化扰动原理, 在满足式(2.18)条件下, 将权向量增量的平方欧几里得范数 (即 L2 范数) 最小化:

$$\min \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 \quad (2.19)$$

利用拉格朗日乘子法解上述约束问题, 可得目标函数为

$$J_{\text{KSMBNLMS}}(n) = \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}^T(n) [\mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - [\mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)]^T - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(n)] \quad (2.20)$$

其中,  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  是拉格朗日乘子向量, 即  $\boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n) = [\lambda_1(n), \lambda_2(n)]^T$ 。

由  $\frac{\partial J_{\text{KSMBNLMS}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} = \mathbf{0}$ , 可得  $2[\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)] - \boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n) = \mathbf{0}$ , 即

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n) = \mathbf{W}(n) + \frac{\lambda_1(n)}{2}\mathbf{u}(n) + \frac{\lambda_2(n)}{2}\mathbf{u}(n-1) \quad (2.21)$$

式(2.21)两边都左乘  $\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)$ , 可得

$$\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n),$$

将式(2.18)代入得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\frac{\boldsymbol{\lambda}_{\text{ap}}(n)}{2} &= \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n) \\ &= \mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(n) - \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n) = \mathbf{e}_{\text{ap}}(n) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}(n) \\ &= \begin{bmatrix} e(n) \\ \varepsilon(n-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(n) \\ \bar{\gamma}_2(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

解式(2.22), 即由

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) & \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1(n)}{2} \\ \frac{\lambda_2(n)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(n) - \bar{\gamma}_1(n) \\ \varepsilon(n-1) - \bar{\gamma}_2(n) \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1(n)}{2}\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) + \frac{\lambda_2(n)}{2}\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n-1) = e(n) - \bar{\gamma}_1(n) \\ \frac{\lambda_1(n)}{2}\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n) + \frac{\lambda_2(n)}{2}\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n-1) = \varepsilon(n-1) - \bar{\gamma}_2(n) \end{cases}$$



并且利用二元一次方程  $\begin{cases} c_5 \bar{\lambda}_3 + c_6 \bar{\lambda}_4 = c_9 \\ c_7 \bar{\lambda}_3 + c_8 \bar{\lambda}_4 = c_{10} \end{cases}$ , 当  $c_8 c_5 - c_6 c_7 \neq 0$  时,

$$\begin{cases} c_5 \bar{\lambda}_3 + c_6 \bar{\lambda}_4 = c_9 \\ c_7 \bar{\lambda}_3 + c_8 \bar{\lambda}_4 = c_{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda}_3 = \frac{c_8 c_9 - c_6 c_{10}}{c_8 c_5 - c_6 c_7} \\ \bar{\lambda}_4 = \frac{c_{10} c_5 - c_9 c_7}{c_8 c_5 - c_6 c_7} \end{cases} \quad (2.23)$$

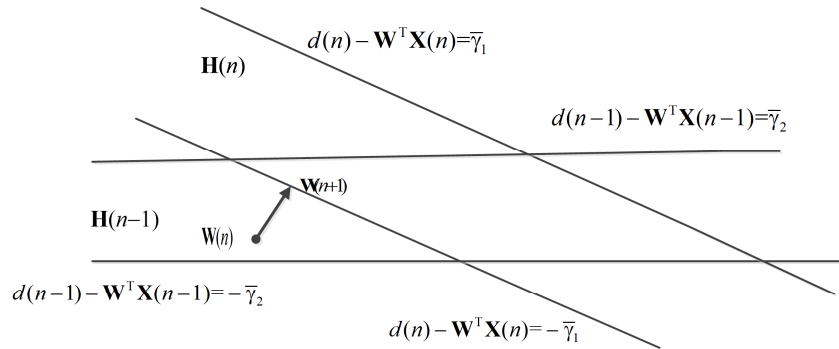
得到

$$\frac{\lambda_1(n)}{2} = \frac{[e(n) - \bar{\gamma}_1(n)] \|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\varepsilon(n-1) - \bar{\gamma}_2(n)] \mathbf{u}^T(n) \mathbf{u}(n-1)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2 \|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1) \mathbf{u}(n)]^2} \quad (2.24)$$

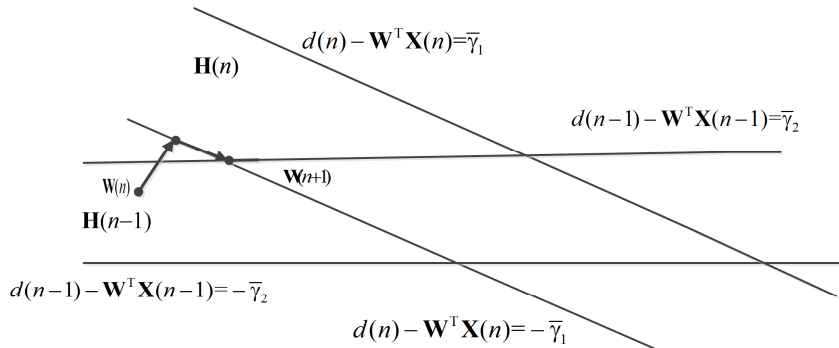
$$\frac{\lambda_2(n)}{2} = \frac{[\varepsilon(n-1) - \bar{\gamma}_2(n)] \|\mathbf{u}(n)\|^2 - [e(n) - \bar{\gamma}_1(n)] \mathbf{u}^T(n-1) \mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2 \|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1) \mathbf{u}(n)]^2} \quad (2.25)$$

将式(2.24)和式(2.25)代入式(2.21)中, 并利用集员滤波理论可得权向量更新表达式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \begin{cases} \mathbf{W}(n) + \frac{\lambda_1(n)}{2} \mathbf{u}(n) + \frac{\lambda_2(n)}{2} \mathbf{u}(n-1), & |e(n)| > \bar{\gamma} \\ \mathbf{W}(n), & \text{其它} \end{cases} \quad (2.26)$$



(a)  $\mathbf{W}(n+1) \in \mathbf{H}(n) \cap \mathbf{H}(n-1)$ , 不需要更新



(b)  $\mathbf{W}(n+1) \notin \mathbf{H}(n)$ , 需要进一步更新

图 2.4 KSMNLMS 算法系数更新

为了降低每次更新时的计算复杂度，在  $n$  时刻，首先令由  $n-1$  时刻数据得到的后验误差值有  $\bar{\gamma}_2(n)=\varepsilon(n-1)$ ，即  $\varepsilon(n-1)-\bar{\gamma}_2(n)=0$ ，得到的权向量的估计  $\mathbf{W}(n) \in \mathbf{H}(n-1)$ ，因此  $\bar{\gamma}_2(n)=\varepsilon(n-1) \leq \bar{\gamma}$ ；接着令  $\bar{\gamma}_1(n)=\bar{\gamma}$ ，即新的权值估计  $\mathbf{W}(n+1)$  位于  $\mathbf{H}(n)$  的最近边界，KSMNLMS 算法系数更新如图 2.4 所示。可推导得出本文提出的 KSMBNLMS 算法权向量的更新公式

$$\mathbf{W}(n+1)=\mathbf{W}(n)+\frac{\lambda_1'(n)}{2}\mathbf{u}(n)+\frac{\lambda_2'(n)}{2}\mathbf{u}(n-1) \quad (2.27)$$

$$\text{其中 } \frac{\lambda_1'(n)}{2} = \frac{\mu(n)e(n)\|\mathbf{u}(n-1)\|^2}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2}; \quad \frac{\lambda_2'(n)}{2} = \frac{-\mu(n)e(n)\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|}, & |e(n)| > \bar{\gamma} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.28)$$

选择权矢量的初始值为  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ，迭代利用式(2.25)可得权向量的迭代公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= \mathbf{W}(n-2) + \frac{\lambda_1'(n-2)}{2}\mathbf{u}(n-2) - \frac{\lambda_2'(n-2)}{2}\mathbf{u}(n-3) + \frac{\lambda_1'(n-1)}{2}\mathbf{u}(n-1) - \frac{\lambda_2'(n-1)}{2}\mathbf{u}(n-2) \\ &= \dots \\ &= \mathbf{W}(0) + \left[ \frac{\lambda_1'(2)}{2}\mathbf{u}(2) - \frac{\lambda_2'(2)}{2}\mathbf{u}(1) + \dots + \frac{\lambda_1'(n-1)}{2}\mathbf{u}(n-1) - \frac{\lambda_2'(n-1)}{2}\mathbf{u}(n-2) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{\lambda_1'(j)}{2}\mathbf{u}(j) - \frac{\lambda_2'(j)}{2}\mathbf{u}(j-1) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mu(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2\|\mathbf{u}(j-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)]^2} [\|\mathbf{u}(j-1)\|^2\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)\mathbf{u}(j-1)] \end{aligned}$$

因此可得第  $n$  次迭代的输出值为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) \\ &= \mathbf{u}^T(n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mu(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2\|\mathbf{u}(j-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)]^2} [\|\mathbf{u}(j-1)\|^2\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)\mathbf{u}(j-1)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

使用高斯核函数，利用(2.4)化简式（2.29）得输出信号为

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu(j)e(j) \frac{[\Phi(j,n) - \Phi(j-1,n)\Phi(j-1,j)]}{1 - [\Phi(j-1,j)]^2} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMBNLMS}}(n) \frac{[\Phi(j,n) - \Phi(j-1,n)\Phi(j-1,j)]}{1 - [\Phi(j-1,j)]^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{\text{KSMBNLMS}}(n) &= \mu(n)e(n) \\ e(n) &= d(n) - y(n) \end{aligned} \quad (2.31)$$

式(2.29)、式(2.30)和式(2.31)构成了本文提出的 KSMBNLMS 算法，其迭代过程如表 2.2 所示。

表 2.2 核集员双归一化最小均方(KSMBNLMS)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数，输出误差幅度边界  $\bar{\gamma}$ 。

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ；

计算  $e(0)$ ， $e(1)$ ， $\mu(0)$ ， $\mu(1)$ ；

当  $n \geq 2$  时，进行迭代：

分别由式(2.30)和式(2.31)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

由式(2.28)计算  $\mu(n)$ 。

## 2.4 Alpha 稳定分布噪声下的核集员滤波算法

为了降低 Alpha 稳定分布噪声背景下的 KNLMP 算法复杂度，本文提出 KSMNLMP 和 KSMBNLMP 算法。

### 2.4.1 核集员归一化最小平均 $p$ 范数算法推导

基于最小  $p$  范数准则，令 KSMNLMP 约束集为  $\mathbf{Z}(n)$ ，

$$\mathbf{Z}(n) \triangleq \left\{ \mathbf{W}(n) \in \mathbb{Q}^{M \times 1} : |d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p \right\} \quad (2.32)$$

其中， $\mathbf{Z}(n)$  是误差的幅度不超过  $\bar{\gamma}$  的滤波器的所有权矢量  $\mathbf{W}(n)$  的集合； $\bar{\gamma}$  为小于 1 的正数； $1 < p < 2$ ；误差信号为

$$e(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.33)$$

当  $\mathbf{W}(n) \notin \mathbf{Z}(n)$  时，需要将  $\mathbf{W}(n)$  更新为  $\mathbf{W}(n+1)$ ，并且要使  $\mathbf{W}(n+1) \in \mathbf{Z}(n)$ 。

利用最小  $p$  范数准则更新后的得到的  $\mathbf{W}(n+1)$  需满足的约束条件为

$$d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) = g(n), \quad |g(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p \quad (2.34)$$

基于  $\mathbf{W}(n+1)$  与  $\mathbf{W}(n)$  之间的平方欧几里得范数最小化准则，并采用拉格朗日乘子法得到 KSMNLMP 算法的代价函数为

$$J_{\text{KSMNLMP}}(n) = \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \mu \|d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n)\|^p \quad (2.35)$$

其中， $\mu$  是拉格朗日乘子。令  $\frac{\partial J_{\text{KSMNLMP}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} = \mathbf{0}$  可以得到，

$$2[\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)] + \mu p[d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n)]^{p-1}[-\mathbf{u}(n)] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\mu p}{2}[d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n)]^{p-1}\mathbf{u}(n)$$

即

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\mu p}{2}\mathbf{u}(n)|\varepsilon(n)|^{p-2}\varepsilon(n) \quad (2.36)$$

其中,  $\varepsilon(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n)$ 。

式(2.36)两边同左乘  $\mathbf{u}^T(n)$ , 可得

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{W}(n) + \frac{\mu p}{2}\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)|\varepsilon(n)|^{p-2}\varepsilon(n) \quad (2.37)$$

将式(2.34)代入上式,则有

$$\frac{\mu p}{2}|\varepsilon(n)|^{p-2}\varepsilon(n) = \frac{d(n) - g(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \quad (2.38)$$

将式(2.33)和式(2.38)代入式(2.36)得

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{e(n) - g(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2}\mathbf{u}(n) \quad (2.39)$$

当  $\mathbf{W}(n) \in \mathbf{Z}(n)$  时,  $\mathbf{W}(n)$  不需要更新, 则有  $\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n)$ ,  $|e(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ , 因此由式(2.39)可得  $g(n) = e(n)$ , 所以  $|g(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ , 满足式(2.34)。当  $\mathbf{W}(n) \notin \mathbf{Z}(n)$  时,  $|e(n)|^p > \bar{\gamma}^p$ , 需将  $\mathbf{W}(n)$  更新为  $\mathbf{W}(n+1)$ , 令  $g(n) = \bar{\gamma} \frac{e(n)}{|e(n)|}$ , 可得  $|g(n)|^p = \bar{\gamma}^p$ , 使得更新后得到的  $\mathbf{W}(n+1)$  位于  $\mathbf{Z}(n)$  的最近边界。综合上述, 由式(2.39)可得权向量的更新公式如下:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mathcal{G}(n) \frac{e(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2}\mathbf{u}(n) \quad (2.40)$$

其中,

$$\mathcal{G}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|}, & |e(n)|^p > \bar{\gamma}^p \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2.41)$$

为了得到更好的滤波性能, 在不改变权值调节方向的条件下引入更新因子  $\varpi(n) = |e(n)|^{p-2}$ , 修改后的权向量更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mathcal{G}(n) \frac{e(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2}\mathbf{u}(n)\varpi(n) \quad (2.42)$$

迭代利用式(2.42), 并选择初值  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= \mathbf{W}(n-2) + \mathcal{G}(n-2) \frac{e(n-2)}{\|\mathbf{u}(n-2)\|^2}\mathbf{u}(n-2)\varpi(n-2) + \mathcal{G}(n-1) \frac{e(n-1)}{\|\mathbf{u}(n-1)\|^2}\mathbf{u}(n-1)\varpi(n-1) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}(j) \frac{\varpi(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2}\mathbf{u}(j) \end{aligned}$$

则输出信号  $y(n)$  可表示为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{W}^T(n) \mathbf{u}(n) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{G}(j) \frac{\varpi(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2} \mathbf{u}^T(j) \mathbf{u}(n) \end{aligned} \quad (2.43)$$

令 KSMNLMP 的扩展系数  $a_{\text{KSMNLMP}}(n)$  为

$$a_{\text{KSMNLMP}}(n) = \mathcal{G}(n) \varpi(n) e(n) \quad (2.44)$$

并选择高斯核函数，将式(2.4)和式(2.44)代入式(2.43)，得到核集员归一化最小平均  $p$  范数 (KSMNLMP) 算法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMNLMP}}(j) \Phi(j, n) \\ e(n) = d(n) - y(n) \end{cases} \quad (2.45)$$

当  $p=2$  时，KSMNLMP 算法退化为 KSMNLMS 算法，KSMNLMP 算法的迭代过程如表 2.3 所示。

表 2.3 核集员归一化最小  $p$  范数(KSMNLMP)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数，参数  $p$ ，输出误差幅度边界  $\bar{\gamma}$ 。

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ；

计算  $e(0)$ ， $\mu(0)$ ；

当  $n \geq 1$  时，进行迭代：

由式(2.45)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

分别由式(2.41)和(2.44)计算  $\mathcal{G}(n)$  和  $a_{\text{KSMNLMP}}(n)$ 。

## 2.4.2 核集员双归一化最小平均 $p$ 范数算法推导

为了进一步提升在 Alpha 稳定分布噪声背景下 KSMBNLMS 算法的抗脉冲性能，本文提出了核集员双归一化最小平均  $p$  范数(KSMBNLMP)算法。

令  $\mathbf{u}_{\text{ap}}(n) = [\mathbf{u}(n), \mathbf{u}(n-1)]$ ， $\mathbf{D}_{\text{ap}}(n) = [d(n), d(n-1)]^T$ ， $\chi(n-1) = d(n-1) - \mathbf{W}^T(n) \mathbf{u}(n-1)$ ，则有

$$\mathbf{e}_{\text{ap}}(n) = \mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - [\mathbf{W}^T(n) \mathbf{u}_{\text{ap}}(n)]^T \quad (2.46)$$

利用 LMP 算法更新后的  $\mathbf{W}(n+1)$  需满足的约束条件为

$$\begin{aligned} d(n) - \mathbf{W}^T(n+1) \mathbf{u}(n) &= g_1(n), & |g_1(n)|^p &\leq \bar{\gamma}_1(n) \\ d(n-1) - \mathbf{W}^T(n+1) \mathbf{u}(n-1) &= g_2(n), & |g_2(n)|^p &\leq \bar{\gamma}_2(n) \end{aligned} \quad (2.47)$$

其中， $|\bar{\gamma}_i(n)| \leq \bar{\gamma}^p$ ， $i=1, 2$ 。

$$\begin{aligned} \text{令 } \bar{\mathbf{y}}(n) &= [\bar{y}_1(n), \bar{y}_2(n)]^T, \mathbf{g}_{\text{ap}}(n) = [g_1(n), g_2(n)]^T, \quad \varepsilon_{\text{ap}1}(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g_1(n), \\ \varepsilon_{\text{ap}2}(n) &= d(n-1) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n-1) - g_2(n), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ap}}(n) = [|\varepsilon_{\text{ap}1}(n)|^p, |\varepsilon_{\text{ap}2}(n)|^p]^T, \\ \text{则有} \quad \mathbf{g}_{\text{ap}}(n) &= \mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - [\mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)]^T \end{aligned} \quad (2.48)$$

选择 KSMBNLMP 算法的代价函数为

$$J_{\text{KSMBNLMP}}(n) = \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \boldsymbol{\mu}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ap}}(n) \quad (2.49)$$

其中,  $\boldsymbol{\mu}(n) = [\mu_1(n), \mu_2(n)]^T$  是拉格朗日乘子向量。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\text{KSMBNLMP}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} &= 2[\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)] - \mu_1(n)p|\varepsilon_{\text{ap}1}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}1}(n)\mathbf{u}(n) \\ &\quad - \mu_2(n)p|\varepsilon_{\text{ap}2}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}2}(n)\mathbf{u}(n-1) \end{aligned}$$

由  $\frac{\partial J_{\text{KSMBNLMP}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} = \mathbf{0}$  可得

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu_1(n)\frac{p}{2}|\varepsilon_{\text{ap}1}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}1}(n)\mathbf{u}(n) + \mu_2(n)\frac{p}{2}|\varepsilon_{\text{ap}2}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}2}(n)\mathbf{u}(n-1)$$

$$\text{即} \quad \mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\frac{\boldsymbol{\lambda}(n)}{2} \quad (2.50)$$

令  $\boldsymbol{\lambda}(n) = [p|\varepsilon_{\text{ap}1}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}1}(n)\mu_1(n), p|\varepsilon_{\text{ap}2}(n)|^{p-2}\varepsilon_{\text{ap}2}(n)\mu_2(n)]^T = [\lambda_1(n), \lambda_2(n)]^T$ , 式(2.50)两边都左乘  $\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)$ , 可得

$$\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{W}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\boldsymbol{\lambda}(n) \quad (2.51)$$

将式(2.46)和(2.48)代入式(2.51)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{ap}}^T(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n)\frac{\boldsymbol{\lambda}(n)}{2} &= \mathbf{D}_{\text{ap}}(n) - \mathbf{g}_{\text{ap}}(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}_{\text{ap}}(n) = \mathbf{e}_{\text{ap}}(n) - \mathbf{g}_{\text{ap}}(n) \\ &= \begin{bmatrix} e(n) - g_1(n) \\ \chi(n-1) - g_2(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

解式(2.52), 利用式(2.47), 由

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) & \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1(n)}{2} \\ \frac{\lambda_2(n)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(n) - g_1(n) \\ \chi(n-1) - g_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\text{得到} \quad \frac{\lambda_1(n)}{2} = \frac{[e(n) - g_1(n)]\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\chi(n-1) - g_2(n)]\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n-1)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2} \quad (2.53)$$

$$\frac{\lambda_2(n)}{2} = \frac{[\chi(n-1) - g_2(n)]\|\mathbf{u}(n)\|^2 - [e(n) - g_1(n)]\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2} \quad (2.54)$$

将式(2.53)和式(2.54)代入式(2.50)中, 可得权向量的更新公式,  $\lambda_1(n)$  和  $\lambda_2(n)$  的取值是否为零决定了权向量是否调整。

当  $\mathbf{W}(n) \in \mathbf{Z}(n)$  时,  $\mathbf{W}(n)$  不更新,  $\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n)$ , 则  $|e(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ , 应有  $\lambda_1(n) = \lambda_2(n) = 0$ , 因此由式(2.53)和式(2.54)可得  $g_1(n) = e(n)$ ,  $g_2(n) = \chi(n-1)$ , 所以  $|g_1(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ ,  $|g_2(n)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ , 满足式(2.47)。当  $\mathbf{W}(n) \notin \mathbf{Z}(n)$  时,  $\mathbf{W}(n)$  需更新, 在  $n$  时刻, 因为  $\mathbf{W}(n) \in \mathbf{Z}(n-1)$ , 所以有  $|\chi(n-1)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ , 因此令  $g_2(n) = \chi(n-1)$ , 则有  $|g_2(n)|^p = |\chi(n-1)|^p \leq \bar{\gamma}^p$ 。接着令  $g_1(n) = \bar{\gamma} \frac{e(n)}{|e(n)|}$ , 可得  $|g_1(n)|^p = \bar{\gamma}^p$ , 满足式(2.47), 故新的权值估计  $\mathbf{W}(n+1)$  位于  $\mathbf{Z}(n)$  的最近边界。为了得到更好的滤波性能, 引入更新因子  $\varpi(n) = |e(n)|^{p-2}$ , 可得本文提出的 KSMBNLMP 算法权向量的更新公式如下:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \lambda_3(n)\mathbf{u}(n) + \lambda_4(n)\mathbf{u}(n-1) \quad (2.55)$$

其中

$$\lambda_3(n) = \frac{\varpi(n)\mathcal{G}(n)e(n)\|\mathbf{u}(n-1)\|^2}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2}$$

$$\lambda_4(n) = \frac{-\varpi(n)\mathcal{G}(n)e(n)\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2\|\mathbf{u}(n-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n)]^2}$$

$$\text{其中, } \mathcal{G}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|}, & |e(n)|^p > \bar{\gamma}^p \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

迭代利用式(2.55), 并选择初值  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$ ,

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= \mathbf{W}(n-2) + \lambda_3(n-2)\mathbf{u}(n-2) - \lambda_4(n-2)\mathbf{u}(n-3) + \lambda_3(n-1)\mathbf{u}(n-1) - \lambda_4(n-1)\mathbf{u}(n-2) \\ &= \dots \\ &= \mathbf{W}(0) + [\lambda_3(2)\mathbf{u}(2) - \lambda_4(2)\mathbf{u}(1) + \dots + \lambda_3(n-1)\mathbf{u}(n-1) - \lambda_4(n-1)\mathbf{u}(n-2)] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [\lambda_3(n)\mathbf{u}(j) - \lambda_4(n)\mathbf{u}(j-1)] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varpi(j)\mathcal{G}(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2\|\mathbf{u}(j-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)]^2} [\|\mathbf{u}(j-1)\|^2\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)\mathbf{u}(j-1)] \end{aligned}$$

因此可得第  $n$  次迭代的输出值为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) \\ &= \mathbf{u}^T(n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varpi(j)\mathcal{G}(j)e(j)}{\|\mathbf{u}(j)\|^2\|\mathbf{u}(j-1)\|^2 - [\mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)]^2} [\|\mathbf{u}(j-1)\|^2\mathbf{u}(j) - \mathbf{u}^T(j-1)\mathbf{u}(j)\mathbf{u}(j-1)] \end{aligned} \quad (2.56)$$

令 KSMNLMP 的扩展系数  $a_{\text{KSMBNLMP}}(n)$  为

$$a_{\text{KSMBNLMP}}(n) = \varpi(n)g(n)e(n) \quad (2.57)$$

采用高斯核函数，将式(2.4)和式(2.57)代入式(2.56)得到 KSMBNLMP 算法的迭代公式如下

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMBNLMP}}(j) \frac{[\Phi(j,n) - \Phi(j-1,n)\Phi(j-1,j)]}{1 - [\Phi(j-1,j)]^2} \\ e(n) = d(n) - y(n) \end{cases} \quad (2.58)$$

表 2.4 核集员双归一化最小  $p$  范数 (KSMBNLMP) 算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数，参数  $p$ ，输出误差幅度边界  $\bar{\gamma}$ 。

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ；

计算  $e(0)$ ， $e(1)$ ， $g(0)$ ， $g(1)$ ；

当  $n \geq 2$  时，进行迭代：

由式(2.58)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

分别由式(2.41)和式(2.57)计算  $g(n)$  和  $a_{\text{KSMBNLMP}}(n)$ 。

当  $p=2$  时，KSMBNLMP 算法退化成 KSMBNLMS 算法，KSMBNLMP 算法的迭代过程如表 2.4 所示。

## 2.5 4 种算法网络拓扑图

4 种算法在第  $n$  迭代的网络拓扑如图 2.4 所示，其中， $a_{\text{TZ}}(j)$  是 4 种算法的扩展系数； $\Phi_{\text{TZ}}(j)$  是第  $j$  个分量。4 种算法在第  $n$  次迭代的第  $j$  个分量计算中所涉及的  $a_{\text{TZ}}(j)$  和  $\Phi_{\text{TZ}}(j)$  如表 2.5 所示。

由表 2.5 可知，KSMNLMS 和 KSMBNLMS 在网络结构上的区别是  $\Phi_{\text{TZ}}(\bullet)$ ，KSMBNLMS 在第  $n$  次迭代的第  $j$  个分量计算中调用核函数比 KSMNLMS 多 2 次；KSMNLMP 和 KSMBNLMP 也同样。在扩展系数上，LMS 类算法与 LMP 类算法区别是 LMP 类多了  $\varpi(n)=|e(n)|^{p-2}$ 。故 4 种算法的网络复杂度在一个数量级。

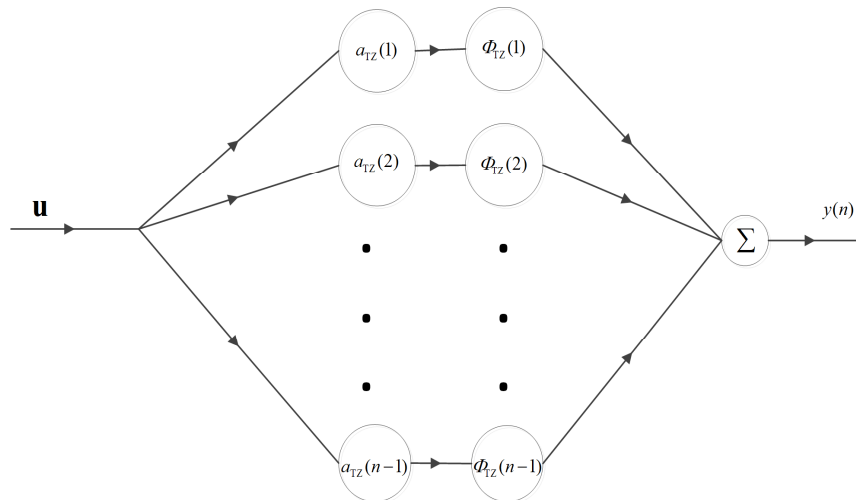


图 2.5 4 种算法在第  $n$  次迭代的网络拓扑



表 2.5 4 种算法在第  $n$  次迭代的第  $j$  个分量所涉及的量

算法	$a_{\text{TZ}}(j)$	$\Phi_{\text{TZ}}(j)$	在第 $n$ 次迭代的第 $j$ 个分量中调用核函数次数
KSMNLMS	$\mu(j)e(j)$	$\Phi(j, n)$	1
KSMBNLMS	$\mu(j)e(j)$	$\frac{[\Phi(j, n) - \Phi(j-1, n)\Phi(j-1, j)]}{1 - [\Phi(j-1, j)]^2}$	3
KSMNLMP	$\mathcal{G}(j)\varpi(j)e(j)$	$\Phi(j, n)$	1
KSMBNLMP	$\mathcal{G}(j)\varpi(j)e(j)$	$\frac{[\Phi(j, n) - \Phi(j-1, n)\Phi(j-1, j)]}{1 - [\Phi(j-1, j)]^2}$	3

## 2.6 算法仿真与性能分析

本节分析比较 KSMNLMS、KSMNLMP、KSMBNLMS 和 KSMBNLMP 4 种算法在非线性和信道均衡中的性能。非线性信道由线性信道  $H_1(z)$  和无记忆非线性信道  $H_2(z)$  组成，非线性信道均衡器框图如图 2.6 所示，以等概率随机产生的  $\pm 1$  作为输入信号  $s(n)$ ；经过系统函数为  $H_1(z) = 1 + 0.6z^{-1}$  的线性信道，其输出为  $s'(n)$ ；然后再经过无记忆非线性信道  $H_2(z)$ ，其输出为  $q(n) = 0.99s'(n) + 0.17[s'(n)]^2 - 0.91[s'(n)]^3$ 。 $v(n)$  为 Alpha 稳定分布噪声，其对称参数  $\beta=0$ 、位置参数  $g=0$ ，分散系数为  $\gamma_\alpha$ 。定义广义信噪比为  $\text{GSNR} = 10 \log_{10} 2\sigma_q^2 / \gamma_\alpha$ ，其中  $\sigma_q^2$  是  $q(n)$  的方差。其输入信号为  $x(n) = q(n) + v(n)$ ；期望信号为  $d(n) = s(n - D)$ ，其中  $D$  为时延，以下实验中取  $D=1$ ；4 种集员滤波算法的  $\bar{\gamma} = \sqrt{2\gamma_\alpha}$ 。每种算法均采用 1000 个样本用作训练数据，1000 个样本作为测试数据。算法稳态 MSE 取迭代后 500 点的 MSE 的均值。集员类算法更新率取总迭代次数中权重更新次数相对于总迭代次数的比值。

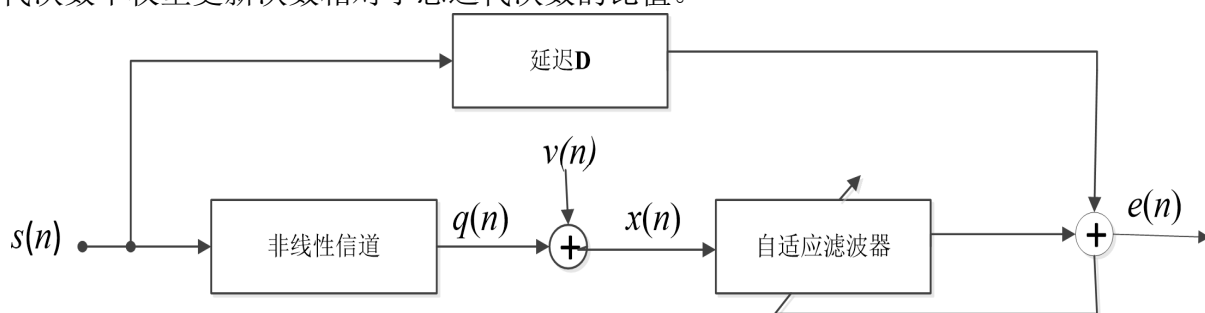


图 2.6 非线性信道均衡器框图

实验 2.1 滤波器阶数  $M$  对算法性能影响。 $\alpha=1.5$ ,  $p=1.4$ ,  $\text{GSNR}=13\text{dB}$ ,  $h=0.2$ 。当  $M$  分别等于 4~7 时，得到 4 种算法稳态 MSE 和更新率曲线如图 2.7 和图 2.8 所示。

由图 2.7 和图 2.8 可得，在当前的测试背景下，随着  $M$  的增大，KSMNLMS 和 KSMNLMP 算法稳态 MSE 值先减小再增加；而 KSMBNLMS 和 KSMBNLMP 算法稳态 MSE 值都在增加，从  $M=4$  到 5 时小幅增加，从  $M=5$  到 7 时大幅增加；4 种算法的更新率都在增加且差距不大，KSMBNLMP 算法的更新率最小。根据图 2.7 和图 2.8，综合考虑 4 种算法的 MSE 和更新率，下文实验中取  $M=5$ 。

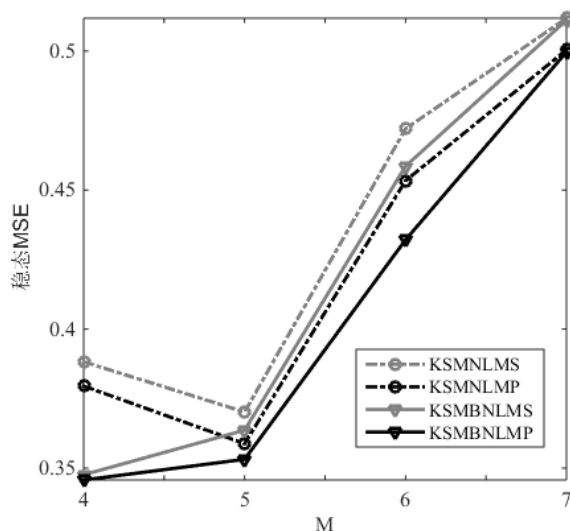


图 2.7 M 对算法性能影响

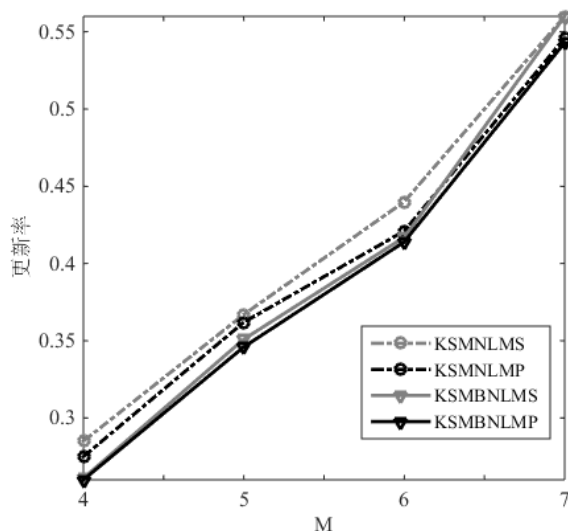
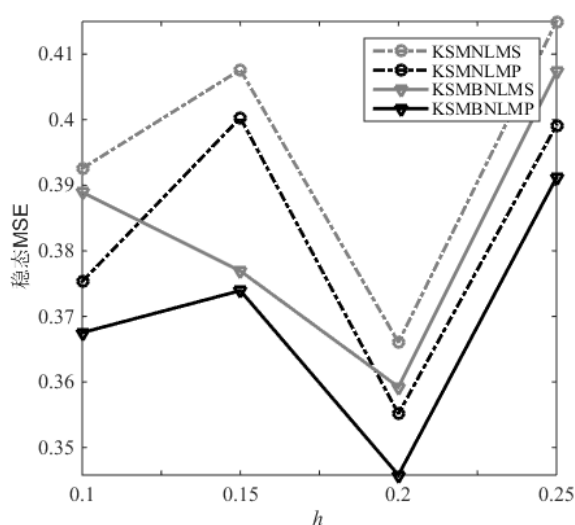
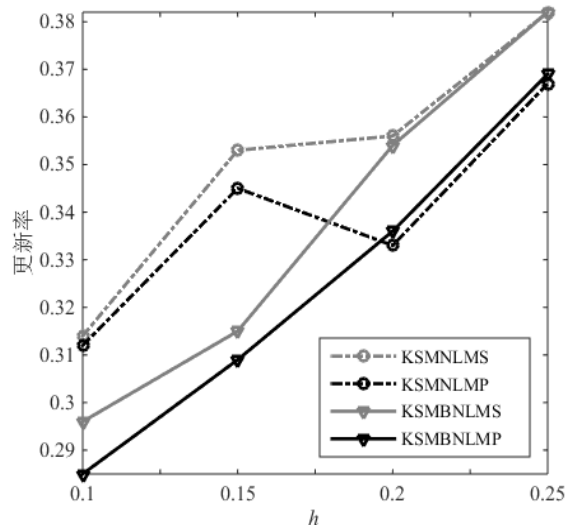


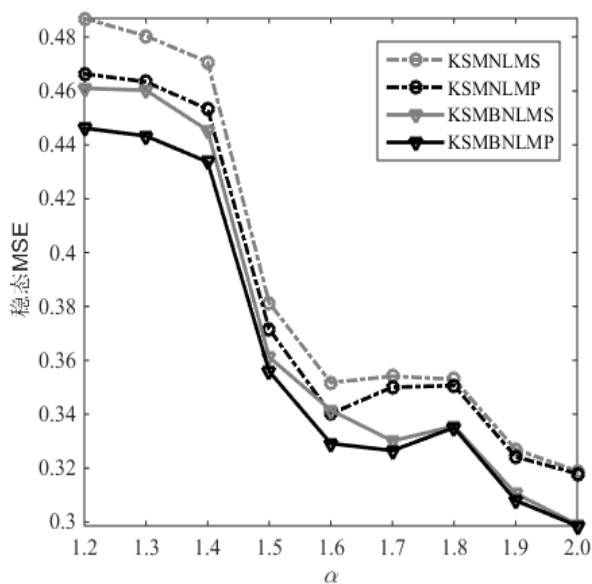
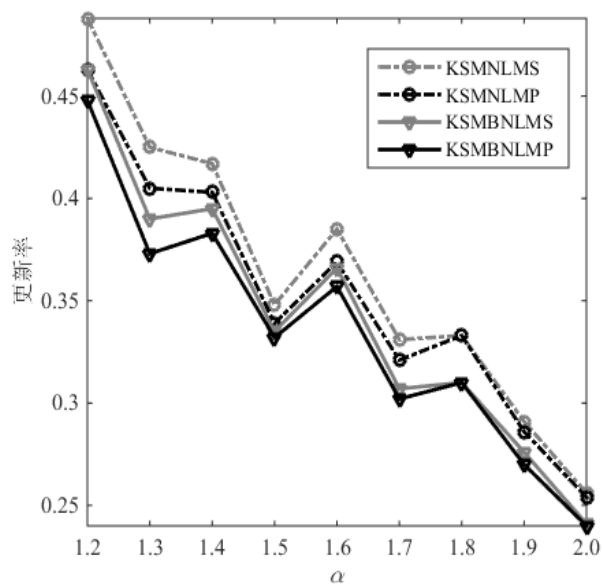
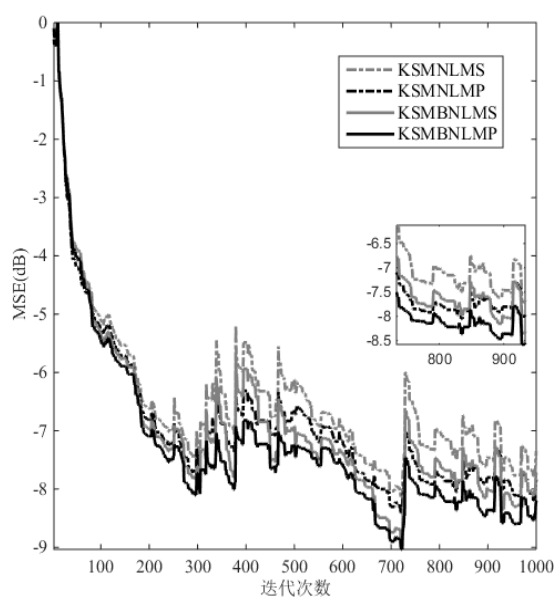
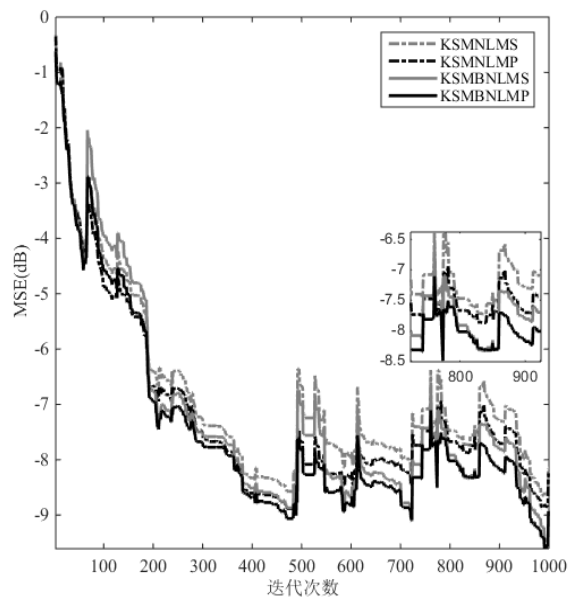
图 2.8 M 对算法更新率影响

实验 2.2 高斯核参数  $h$  对算法性能影响。其它参数同实验 2.1。当  $h$  分别等于 0.1~0.25 时，得到 4 种算法稳态 MSE 和更新率如图 2.9 和图 2.10 所示。

图 2.9  $h$  对算法性能影响图 2.10  $h$  对算法更新率影响

由图 2.9 和图 2.10 可得，在当前的测试背景下，KSMNLMS、KSMNLMP 和 KSMBNLMP 算法稳态 MSE 值先增加后减小再增大，KSMBNLMS 算法稳态 MSE 值先减小再增加， $h$  过大或者过小会影响算法的 MSE 值，当  $h=0.2$  时 4 种算法稳态后 MSE 值最小，KSMBNLMP 算法稳态 MSE 值最小；4 种算法的更新率大小总体趋势上随着  $h$  增加在增加， $h$  会影响 4 种算法的更新率。综合考虑 4 种算法的 MSE 和更新率，下文实验中取  $h=0.2$ 。

实验 2.3 算法抗脉冲噪声性能分析。其它参数同实验 2.1。当  $\alpha$  分别等于 1.2~2.0,  $p=\alpha-0.1$  时，得到 4 种算法稳态 MSE 和更新率曲线如图 2.11 和图 2.12 所示。当  $\alpha=1.2$  和 1.4 时，4 种算法的 MSE 曲线分别如图 2.13 和图 2.14 所示。

图 2.11  $\alpha$  对算法性能影响图 2.12  $\alpha$  对算法更新率影响图 2.13  $\alpha=1.2$ , 4 种算法的 MSE图 2.14  $\alpha=1.4$ , 4 种算法的 MSE

由图 2.11 和图 2.12 可得, 随着  $\alpha$  逐渐增加, 即对应的脉冲分布拖尾变薄, 脉冲特性减弱, 4 种算法稳态 MSE 值总体的趋势在减小, 且 4 种集员类算法的更新率总体趋势在逐渐减小, 由图 2.11 可得, 在某几个  $\alpha$  对应的 MSE 会突然变大, 这个与采用 Alpha 稳定分布的脉冲信号和测试方法有关。在当前的测试背景下, 使用两个约束集的集员类算法的 MSE 值和更新率小于使用一个约束集的集员类算法; 集员最小平均  $p$  范数类算法的 MSE 值和更新率小于集员最小均方类算法。由图 2.13 和图 2.14 的局部放大图可以看出, LMP 类算法对于脉冲噪声的抗扰动性能优于 LMS 类的算法, KSMBNLMP 算法均衡效果最好。

实验 2.4 不同噪声强度下算法性能分析。其它参数同实验 2.1。当 GSNR 分别等于 11~18dB 时，得到 4 种算法稳态 MSE 和更新率曲线如图 2.15 和图 2.16 所示。当 GSNR=12 和 14dB 时，4 种算法的 MSE 曲线分别如图 2.17 和图 2.18 所示。

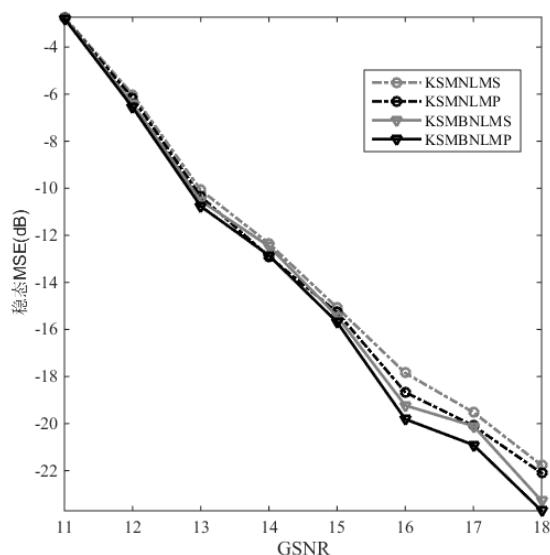


图 2.15 GSNR 对算法性能影响

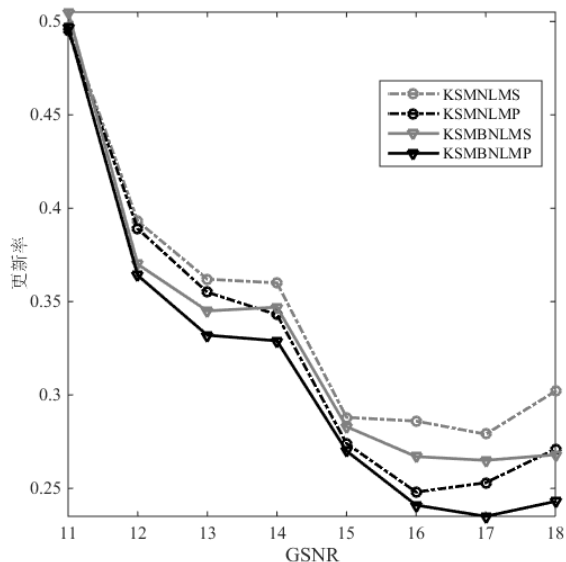


图 2.16 GSNR 对算法的更新率影响

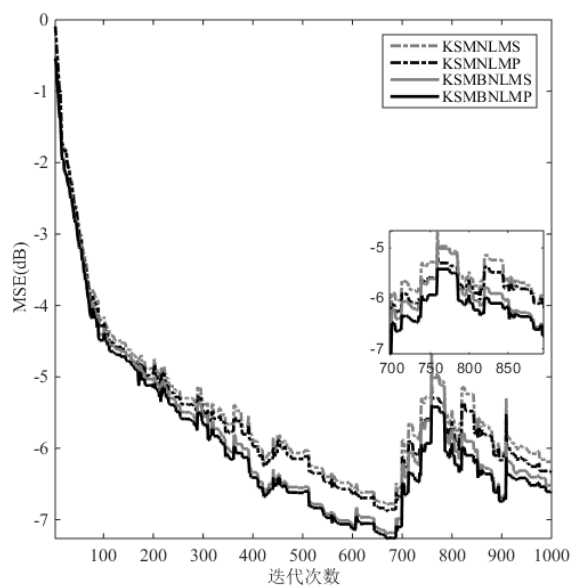


图 2.17 GSNR=12dB, 4 种算法的 MSE

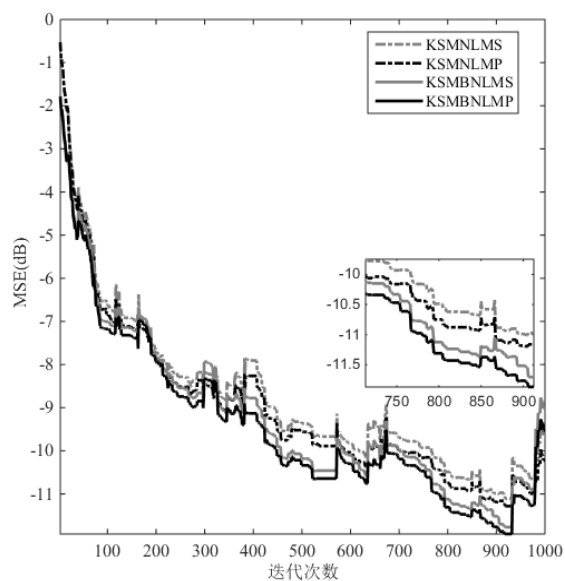


图 2.18 GSNR=14dB, 4 种算法的 MSE

由图 2.15 和图 2.16 可得，随着 GSNR 逐渐增加，4 种算法稳态 MSE 值的总体的趋势在逐渐减小，并且算法的更新率逐渐减小，即 4 种算法的均衡效果变好；4 种算法稳态 MSE 值和更新率差距都呈增大趋势，KSMBNLMP 算法稳态 MSE 和更新率最小。由图 2.17 和 2.18 可得，在保持初始收敛速度一致的前提下，KSMBNLMP 算法的 MSE 值是 4 种算法中最小的。

## 2.7 本章小结

针对高斯噪声下, KSMNLMS 算法性能提升的问题, 本章提出了一种核集员双归一化最小均方(KSMBNLMS)算法。针对 Alpha 稳定分布噪声下 KSMNLMS 和 KSMBNLMS 算法性能下降问题, 本章提出了 KSMNLMP 算法和 KSMBNLMP 算法。推导给出了 3 种算法的权向量更新公式。非线性信道均衡仿真结果表明, KSMBNLMS 比 KSMNLMS 具有更好的均衡效果, KSMNLMP 和 KSMBNLMP 算法分别比 KSMNLMS 和 KSMBNLMS 算法具有更好的均衡效果, KSMBNLMP 算法均衡效果最好。

## 第3章 核抗脉冲噪声算法

### 3.1 引言

自适应滤波算法的复杂度，是实际应用中必须考虑的一个指标，算法复杂度主要来自于系数更新和计算滤波器输出时的乘法运算。实际中大多都是非线性的问题，作为能够很好完成非线性自适应滤波的核自适应滤波器，已引起学者们的广泛关注，但是核自适应滤波算法的网络规模随着迭代次数不断增长，故在实际应用中又必须考虑其所需数据存储空间。

为了降低由乘法运算带来的复杂度，传统做法是对核自适应滤波算法中的误差信号进行量化，其中量化函数是一个取离散值、有界、非下降的函数[1,2]。典型的核自适应滤波的符号误差算法(Sign Error Algorithm, SEA)有核符号算法(KSA)<sup>[19]</sup>、核仿射投影符号算法(Kernel Affine Projection Sign Algorithms, KAPSA)<sup>[20]</sup>、变步长 KAPSA(Variable Step Size KAPSA, VSS-KAPSA)<sup>[20]</sup>等。SEA 类算法能够减少算法计算复杂度，并且其能将误差通过映射控制在一定范围，故抗脉冲噪声性能好<sup>[38]</sup>。但是上述的符号函数对是否含噪的信号的处理一致，这会出现对于小幅度的误差信号的处理比较粗糙的现象。为了解决符号函数更新粗略收敛速度慢的问题，Zeng Junjun 等提出了基于反正切函数的核最小均方算法(Arctan KLMS)。但是 Arctan KLMS 算法仍旧有较高地复杂度，在硬件上不能有效地实现，基于 Soria E 等提出了一种对于脉冲噪声具有较好处理性能的抗脉冲噪声算法(AIA)<sup>[34]</sup>，权向量中包含的非线性函数，在硬件中可以更有效地实现，和核方法，本文提出核抗脉冲噪声算法(KAIA)。

为了进一步降低计算复杂度，利用集员滤波理论和矢量方法，分别提出 KSMAIA 和量化 KAIA(QKAIA)。

为了探索提升 KSMAIA 和 QKAIA 算法的性能，结合输入预处理，提出预标准化的 KSMAIA(NKSMAIA)和预标准化 QKAIA(NQKAIA)。

### 3.2 核抗脉冲噪声算法推导

令核抗脉冲噪声算法(KAIA)的代价函数为<sup>[34,39]</sup>

$$J_{KAIA}(n) = \frac{\log[\cosh(\beta_{KAIA} e(n))]}{\beta_{KAIA}} \quad (3.1)$$

其中， $\beta_{KAIA} \in (0, \infty)$  用于控制代价函数的初始凹度和对大的误差信号  $e(n)$  的敏感度；

$$e(n) = d(n) - \mathbf{W}^T \mathbf{u}(n)。$$

计算

$$\frac{\partial J_{KAIA}(n)}{\partial \mathbf{W}} = \frac{1}{\beta_{KAIA}} \frac{1}{\cosh(\beta_{KAIA} e(n))} \sinh(\beta_{KAIA} e(n)) \beta_{KAIA} [-\mathbf{u}(n)] \quad (3.2)$$

利用最速下降法原理，得到权向量的更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu \tanh[\beta_{\text{KAIA}} e(n)] \mathbf{u}(n) \quad (3.3)$$

其中  $\mu$  是步长因子。式(3.3)的  $\tanh$  函数如图 3.1 所示是奇函数，极限值界于  $\pm 1$ ， $e(n)$  对权向量的影响受  $\beta_{\text{KAIA}}$  且被严格限制，具有抗脉冲噪声特性；可以高效的在硬件中实现<sup>[34,40]</sup>。

由于非线性函数在硬件上实现困难，通常可以用分段的线性函数表示，但是在不同的线性函数的交集处是难以准确表示。用式(3.4)表示  $\tanh$  函数<sup>[41]</sup>，以便于数字硬件实现。

$$\tanh(x) = \begin{cases} -1 & , x \text{ 小} \\ a_{\text{para}} x & , x \text{ 中等} \\ +1 & , x \text{ 大} \end{cases} \quad (3.4)$$

其中， $a_{\text{para}}$  是表示 S 型平滑度的常数因子。用如图 3.2 所示的隶属函数来近似描述  $\tanh$  函数。

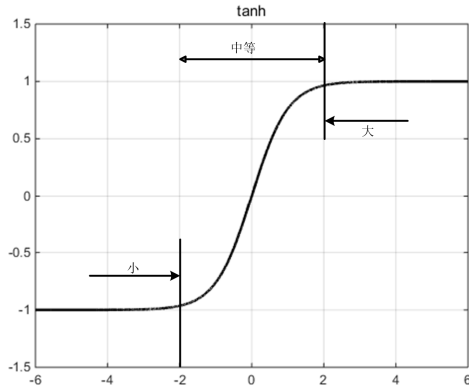


图 3.1  $\tanh$  函数图

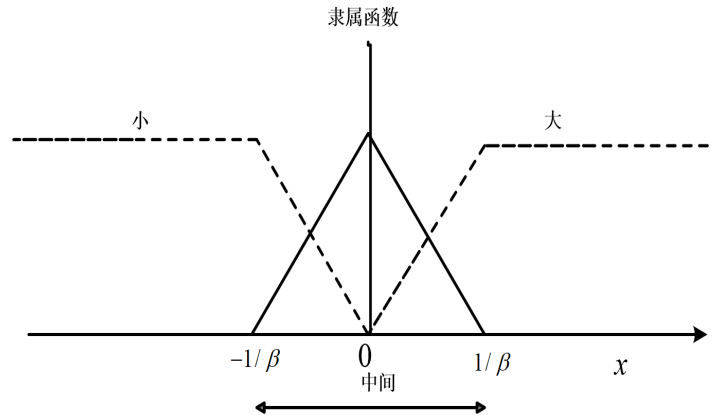


图 3.2 隶属函数

根据隶属函数，在特殊点  $x_0$  处，式 (3.4) 可以改写成<sup>[34,39]</sup>

$$\tanh(x_0) = (-1)ff_1(x_0) + a_{\text{para}}ff_2(x_0) + (+1)ff_3(x_0) \quad (3.5)$$

根据隶属函数<sup>[41]</sup>，可以将式(3.5)表示为

$$\tanh(\beta x) = \begin{cases} \text{sign}(x) & , |x| > 1/\beta_{\text{KAIA}} \\ -x|x|\beta_{\text{KAIA}}^2 + 2\beta_{\text{KAIA}}x & , |x| \leq 1/\beta_{\text{KAIA}} \end{cases} \quad (3.6)$$

其中， $\beta = \frac{3}{E_x + 3D_x}$ ， $E_x$  是  $x$  的均值， $D_x$  是  $x$  的标准差。

将式 (3.6) 代入式 (3.3) 得到自适应滤波器权向量的更新公式调整为

$$\mathbf{W}(n+1) = \begin{cases} \mathbf{W}(n) + \text{sign}(e(n))\mathbf{u}(n) & , |e(n)| > 1/\beta_{\text{KAIA}} \\ \mathbf{W}(n) + [2\beta_{\text{KAIA}} - \beta_{\text{KAIA}}^2 |e(n)|]e(n)\mathbf{u}(n) & , |e(n)| < 1/\beta_{\text{KAIA}} \end{cases} \quad (3.7)$$

其中,  $\beta_{KAIA} = \frac{3}{E_{e(n)} + 3D_{e(n)}}$ ,  $E_{e(n)}$  是  $e(n)$  的均值,  $D_{e(n)}$  是  $e(n)$  的标准差。令扩展系数  $a_{KAIA}(n)$  为

$$a_{KAIA}(n) = \begin{cases} \text{sign}(e(n)) & , |e(n)| > 1/\beta_{KAIA} \\ [2\beta_{KAIA} - \beta_{KAIA}^2 |e(n)|]e(n) & , |e(n)| < 1/\beta_{KAIA} \end{cases} \quad (3.8)$$

迭代利用式(3.8), 并令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ; 选择高斯核函数, 利用式(2.4), 可得滤波器输出  $y(n)$  和权向量迭代公式和误差信号  $e(n)$  为

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{KAIA}(j) \ker(\mathbf{X}(j), \mathbf{X}(n)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{KAIA}(j) \Phi(j, n) \\ \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + a_{KAIA}(n)\mathbf{u}(n) \\ &= \sum_{j=0}^n a_{KAIA}(j)\mathbf{u}(j) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.10)$$

因此可得本文提出的核抗脉冲噪声(KAIA)算法的迭代过程如表 3.1 所示。

表 3.1 核抗脉冲噪声(KAIA)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数, 步长因子  $\iota$ ;

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ;

计算  $e(0)$ ;

当  $n \geq 1$  时, 进行迭代:

由式(3.9)、式(3.10)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

分别由式(3.8)计算  $a_{KAIA}(n)$ 。

### 3.3 核集员抗脉冲噪声算法推导

为了降低 KAIA 算法复杂度, 本文将集员滤波理论与 KAIA 相结合提出核集员抗脉冲算法(KSMAIA)。自适应集员滤波器约束集为  $\mathbf{H}(n)$ ,

$$\mathbf{H}(n) = \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{Q}^{M \times 1} : |d(n) - \mathbf{W}^T \mathbf{u}(n)| \leq \bar{\gamma} \right\} \quad (3.11)$$

其中,  $d(n)$  是  $n$  时刻的期望信号,  $\mathbf{H}(n)$  是误差的幅度不超过  $\bar{\gamma}$  的滤波器的所有权向量  $\mathbf{W}$  的集合; 误差信号为

$$e(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (3.12)$$



当  $\mathbf{W}(n) \notin \mathbf{H}(n)$  时, 需要将  $\mathbf{W}(n)$  更新为  $\mathbf{W}(n+1)$ , 并且要使  $\mathbf{W}(n+1) \in \mathbf{H}(n)$ 。

更新后的  $\mathbf{W}(n+1)$  需满足的约束条件为

$$d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) = g(n), \quad |g(n)| \leq \bar{\gamma} \quad (3.13)$$

基于  $\mathbf{W}(n+1)$  与  $\mathbf{W}(n)$  之间的平方欧几里得范数最小化准则, 并采用拉格朗日乘子法得到 KSMAIA 算法的代价函数为

$$J_{\text{KSMAIA}}(n) = \frac{1}{2} \|\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)\|^2 + \mu f(d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n)) \quad (3.14)$$

其中,  $\mu$  是拉格朗日乘子,  $f(\bullet)$  是映射函数。

$$\begin{aligned} \text{令 } \varepsilon(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n+1)\mathbf{u}(n) - g(n), \text{ 因} \quad & \frac{\partial J_{\text{KSMAIA}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} = \mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n) + \mu \frac{\partial f(\bullet)}{\partial \varepsilon(n)} \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)}, \\ & = \mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n) - \mu \frac{\partial f(\bullet)}{\partial \varepsilon(n)} \mathbf{u}(n) \end{aligned}$$

又令  $\frac{\partial J_{\text{KSMAIA}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n+1)} = \mathbf{0}$ , 可以得到

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mu \frac{\partial f(\bullet)}{\partial \varepsilon(n)} \mathbf{u}(n) \quad (3.15)$$

式(3.15)两边同左乘  $\mathbf{u}^T(n)$ , 可得

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{W}(n) + \mu \frac{\partial f(\bullet)}{\partial \varepsilon(n)} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (3.16)$$

将式(3.13)代入式(3.16), 则有

$$\mu \frac{\partial f(\bullet)}{\partial \varepsilon(n)} = \frac{d(n) - g(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \quad (3.17)$$

将式(3.12)和式(3.17)代入式(3.15)得

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{e(n) - g(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \mathbf{u}(n) \quad (3.18)$$

当  $\mathbf{W}(n) \in \mathbf{H}(n)$  时,  $\mathbf{W}(n)$  不需要更新, 则有  $\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n)$ ,  $|e(n)| \leq \bar{\gamma}$ , 因此由式(3.18)可得  $g(n) = e(n)$ , 所以  $|g(n)| \leq \bar{\gamma}$ , 满足式(3.13)。当  $\mathbf{W}(n) \notin \mathbf{H}(n)$  时,  $|e(n)| > \bar{\gamma}$ , 需将  $\mathbf{W}(n)$  更新为  $\mathbf{W}(n+1)$ , 令  $g(n) = \bar{\gamma} \frac{e(n)}{|e(n)|}$ , 可得  $|g(n)| = \bar{\gamma}$ , 使得更新后得到的  $\mathbf{W}(n+1)$  位于  $\mathbf{H}(n)$  的最近边界。综合上述, 由式(3.18)可得权向量的更新公式如下:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + g(n) \frac{e(n)}{\|\mathbf{u}(n)\|^2} \mathbf{u}(n) \quad (3.19)$$

$$\text{其中, } g(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\bar{\gamma}}{|e(n)|} & , |e(n)| > \bar{\gamma} \\ 0 & , \text{其它} \end{cases} \quad (3.20)$$

为了使得算法保持原 KAIA 的抗脉冲噪声性能,在不改变权值调节方向的前提下,比较式(3.7)和式(3.19),用  $\mathcal{G}(n)e(n)$  代替式(3.7)中  $e(n)$ , 并使用高斯核函数利用式(2.4), 得到 KSMAIA 算法的权向量更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \begin{cases} \mathbf{W}(n) + \text{sign}(e(n)\mathcal{G}(n))\mathbf{u}(n) \\ \quad, |\mathcal{G}(n)e(n)| > 1/\beta_{\text{KSMAIA}} \\ \mathbf{W}(n) + [2\beta_{\text{KSMAIA}} - \beta_{\text{KSMAIA}}^2 |e(n)\mathcal{G}(n)|]e(n)\mathcal{G}(n)\mathbf{u}(n) \\ \quad, |\mathcal{G}(n)e(n)| < 1/\beta_{\text{KSMAIA}} \end{cases} \quad (3.21)$$

其中,  $\beta_{\text{KSMAIA}} = \frac{3}{E_{\mathcal{G}(n)e(n)} + 3D_{\mathcal{G}(n)e(n)}}$ ,  $E_{\mathcal{G}(n)e(n)}$  是  $\mathcal{G}(n)e(n)$  的均值,  $D_{\mathcal{G}(n)e(n)}$  是  $\mathcal{G}(n)e(n)$  的标准差。

令扩展系数  $a_{\text{KSMAIA}}(n)$ ,

可得

$$a_{\text{KSMAIA}}(n) = \begin{cases} \text{sign}(e(n)\mathcal{G}(n)) & , |\mathcal{G}(n)e(n)| > 1/\beta_{\text{KSMAIA}} \\ [2\beta_{\text{KSMAIA}} - \beta_{\text{KSMAIA}}^2 |e(n)\mathcal{G}(n)|]e(n)\mathcal{G}(n) & , |\mathcal{G}(n)e(n)| < 1/\beta_{\text{KSMAIA}} \end{cases}, \quad (3.22)$$

可得  $\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + a_{\text{KSMAIA}}(n)\mathbf{u}(n)$ 。

迭代利用式(3.33),并令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ , 可得滤波器权向量迭代公式为

$$\mathbf{W}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMAIA}}(j)\mathbf{u}(j) \quad (3.23)$$

选择高斯核函数, 将式(2.4)代入, 得到输出  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$  分别为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{KSMAIA}}(j)\Phi(j, n) \quad (3.24)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.25)$$

因此可得本文提出的核集员抗脉冲噪声(KSMAIA)算法的迭代过程如表 3.2 所示。

表 3.2 核集员抗脉冲噪声(KSMAIA)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数, 输出误差幅度边界  $\bar{\gamma}$ ;

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ;

计算  $e(0)$ 、 $\mathcal{G}(0)$  和  $a_{\text{KSMAIA}}(0)$ ;

当  $n \geq 1$  时, 进行迭代:

由式(3.24)、式(3.25)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ ;

分别由式(3.20)、式(3.22)计算  $\mathcal{G}(n)$  和  $a_{\text{KSMAIA}}(n)$ 。

### 3.4 量化核抗脉冲噪声算法推导

近年来,相对于 SC、ALD 等稀疏化方法,具有更好的组网结构和更高精度的矢量量化方法已经被运用到核自适应滤波中,用以控制径向基网络的线性增长,为了控制 KAIA 算法径向基网络的增长,本节基于量化方法提出了 QKAIA 算法。

#### 3.4.1 基于矢量量化和最速下降法的核自适应滤波算法推导

通过量化在权向量更新表达式中的输入信号  $\mathbf{u}(n)$ , 利用最速下降法, 令得到一族基于最速下降法的量化核自适应滤波算法(QKAFs)算法的权向量更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota ff(e(n)) \bar{\mathbf{Q}}[\mathbf{u}(n)] \quad (3.26)$$

其中,  $ff(e(n))$  是关于  $e(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n)$  的非线性函数;  $\bar{\mathbf{Q}}[\cdot]$  表示在 RKHS 空间的量化算法。由于 RKHS 空间中的维度过于高, 故在原空间中对输入信号  $\mathbf{X}(n)$  进行量化, 则 QKAFs 算法的重写权向量的更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota ff(e(n)) ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \quad (3.27)$$

量化方法就是首先量化尺寸和初始码本, 在每次迭代中比较输入信号与码本中码元的距离求出最小距离, 如果最小距离小于量化尺寸, 不选择添加新的网络节点, 码本保持不变, 输入信号被量化为该信号距离码本最近的码元; 否则, 将当前的输入信号加入码本中, 并将扩展系数维度进行扩展。

令  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$ , 量化尺寸  $\varepsilon_{\mathbb{R}} \geq 0$ ,  $\mathbf{C}(n)$  表示第  $n$  次迭代的码本, 初始码本为  $\mathbf{C}(0) = \{\mathbf{X}(0)\}$ , QKAFs 的扩展系数  $a(0) = [\iota d(0)]$ 。迭代利用式(3.27), 则可得权向量更新的迭代公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + \iota ff(e(n)) ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \\ &= \mathbf{W}(n-1) + \iota ff(e(n-1)) ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n-1)], \bullet) + \iota ff(e(n)) ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{size(\mathbf{C}(n))} a_j(n) ker(\mathbf{Q}_j(n), \bullet) \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中,

$\mathbf{Q}_j(n)$  表示在第  $n$  次迭代时对  $\mathbf{X}(n)$  进行量化操作;

$a_j(n)$  是第  $n$  次迭代后更新后的扩展系数。

自适应滤波器输出为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n) = \sum_{j=0}^{size(\mathbf{C}(n-1))} a_j(n-1) ker(\mathbf{Q}_j(n-1), \mathbf{X}(n)) \quad (3.29)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.30)$$

首先计算  $\mathbf{X}(n)$  与  $\mathbf{C}(n-1)$  中的码元的最小距离, 即

$$dis(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) = \min_{1 \leq j \leq size(\mathbf{C}(n-1))} \|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}(n-1)\|$$

然后进行判断:

如果  $\text{dis}(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) \leq \varepsilon_{\mathbb{R}}$ , 则将  $\mathbf{X}(n)$  量化为其距离  $\mathbf{C}(n-1)$  最近的码元, 即

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{C}_{j^*}(n-1)$$

其中

$$j^* = \arg \min_{1 \leq j \leq \text{size}(\mathbf{C}(n-1))} \|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_j(n-1)\|$$

扩展系数更新为

$$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \iota \text{ff}(e(n)) \quad (3.31)$$

否则, 更新码本

$$\mathbf{C}(n) = \{\mathbf{C}(n-1), \mathbf{X}(n)\},$$

扩展系数更新为

$$\mathbf{a}(n) = [\mathbf{a}(n-1), \iota \text{ff}(e(n))] \quad (3.32)$$

取不同的非线性函数  $\text{ff}(e(n))$ , 就可得到不同的量化核自适应滤波算法。已有的 QKAFs 算法的权向量的更新公式和扩展系数  $a_{j^*}(n)$  的更新公式 ( $\text{dis}(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) \leq \varepsilon_{\mathbb{R}}$ ) 如表 3.3 所示。

用于第  $n$  次迭代计算的 QKAFs 的网络拓扑如图 3.3 所示。QKAFs 算法的迭代过程如表 3.4 所示。

表 3.3 基于不同准则的 QKAFs 算法的权向量更新公式和扩展系数更新公式

准则	权向量更新公式	当 $\text{dis}(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) \leq \varepsilon_{\mathbb{R}}$ , 扩展系数更新公式
MMSE	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota e(n) \text{ker}(\mathbf{Q}(n), \bullet)$	$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \iota e(n)$
MCC	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\iota}{\sigma_1^2} \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}) e(n) \text{ker}(\mathbf{Q}(n), \bullet)$	$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \frac{\iota}{\sigma_1^2} \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}) e(n)$
RSL	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\iota}{\sigma_1^2} \exp(\lambda(1 - \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}))) \times \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}) e(n) \text{ker}(\mathbf{Q}(n), \bullet)$	$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \frac{\iota}{\sigma_1^2} \exp(\lambda(1 - \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}))) \times \exp(-\frac{e^2(n)}{2\sigma_1^2}) e(n)$
LP	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota  e(n) ^{p-1} \text{sign}(e(n)) \text{ker}(\mathbf{Q}(n), \bullet)$	$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \iota  e(n) ^{p-1} \text{sign}(e(n))$

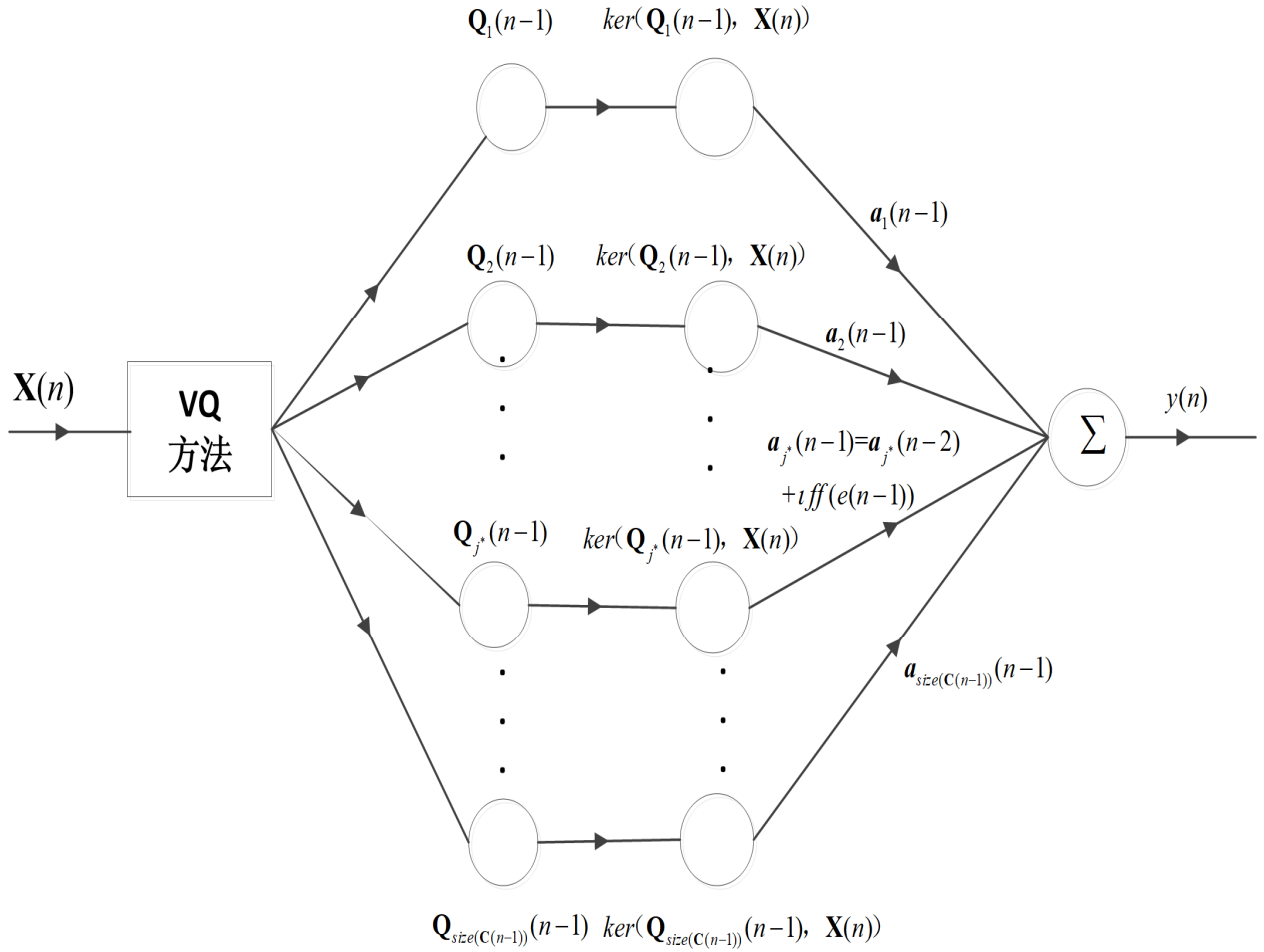
图 3.3 用于第  $n$  次迭代计算的 QKAFs 的网络拓扑

表 3.4 量化核自适应滤波(QKAFs)算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数, 步长因子  $\mu$  和量化尺寸  $\varepsilon_{\mathbb{R}}$ ;

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ;

初始码本  $\mathbf{C}(0)=\{\mathbf{X}(0)\}$ ;

计算  $e(0)$ 、扩展系数  $a(0)$ ;

当  $n \geq 1$  时, 进行迭代:

由式(3.29)和式(3.30)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

计算当前时刻的输入向量  $\mathbf{X}(n)$  与前一时刻的码本  $\mathbf{C}(n-1)$  中码元的最小距离  $dis(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1))$

执行选择语句:

如果  $dis(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) \leq \varepsilon_{\mathbb{R}}$ , 则  $\mathbf{X}(i) = \mathbf{C}_{j^*}(n-1)$ ;  $a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \iota ff(e(n))$

否则  $\mathbf{C}(n) = \{\mathbf{C}(n-1), \mathbf{X}(n)\}$ ;  $\mathbf{a}(n) = [\mathbf{a}(n-1), \iota ff(e(n))]$

结束选择语句。

### 3.4.2 量化核抗脉冲噪声算法推导

本文取  $ff(e(n)) = \tanh[\beta \cdot e(n)]$ ，由式(3.26)得到 QKAIA 算法的权向量更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)] \bar{\mathbf{Q}}[\mathbf{u}(n)] \quad (3.33)$$

将 QKAIA 算法权向量更新公式重新写为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \quad (3.34)$$

由式(3.31)和式(3.32)可得 QKAIA 算法扩展系数的更新公式

当  $\text{dis}(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}(n-1)) \leq \varepsilon_{\mathbb{R}}$

$$a_{j^*}(n) = a_{j^*}(n-1) + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)] \quad (3.35)$$

否则

$$\mathbf{a}(n) = [\mathbf{a}(n-1), \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)]] \quad (3.36)$$

由式(3.28)、式(3.29)和式(3.30)可得 QKAIA 算法的权向量迭代公式  $\mathbf{W}(n)$ 、滤波器输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \\ &= \mathbf{W}(n-1) + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n-1)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n-1)], \bullet) \\ &\quad + \iota \tanh[\beta_{\text{QKAIA}} e(n)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}(n)], \bullet) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\text{size}(\mathbf{C}(n))} \mathbf{a}_j(n) \ker(\mathbf{Q}_j(n), \bullet) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\text{size}(\mathbf{C}(n-1))} a_j(n-1) \ker(\mathbf{Q}_j(n-1), \mathbf{X}(n)) \quad (3.38)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3.39)$$

### 3.5 输入预处理核自适应滤波算法

归一化方法和标准化方法是为了提升数据处理性能，有数据归一化、数据标准化、数据量化等。

归一化的方法就是通过特定的函数将数据映射到(0,1)，将有量纲转化成没有量纲，从而将数据转化为标量；对不同特征维度的数据进行伸缩变换后从而使得各个特征维度的数据对于目标函数的影响的权向量是一致的，即令原本扁平分布的数据经过伸缩变换后变成类圆形分布的数据，原始数据的分布改变。归一化的好处是提高外迭代的收敛速度。常见的归一化方法有线性变换、对数函数转换、反余切函数转换、线性与对数函数相结合等方法<sup>[42,43]</sup>。

数据的标准化就是将数据按照预先设定好的比例缩放至一个特定的小区间中；对不同维

度的数据进行伸缩变换后从而使得不同度量之间的特征可比，同时不改变原始数据的分布。标准化的好处是使不同度量可比；对目标函数的影响体现在几何分布上，而不是数值上；原始数据的分布不变。

数据的量化方法就是目前主要的量化类自适应滤波算法如量化误差算法<sup>[2,19,44,45]</sup>、符号-数据算法(Sign-Data Algorithm, SDA)<sup>[2,46,47]</sup>和符号-符号算法(Sign-Sign Algorithm, SSA)<sup>[2,48-52]</sup>等。但是用量化的方式对输入数据进行处理可能降低收敛速度，还可能导致分散<sup>[2]</sup>。

为了探索提升 KSMAIA 和 QKAIA 算法的性能，结合输入预处理，提出了预标准化的 KSMAIA(NKSMAIA)和 QKAIA(NQKAIA)。

本文选用反正切( $\text{atan}$ )函数对输入信号  $x(n)$  进行标准化处理，即  $x'(n) = \frac{2\text{atan}(x(n))}{\pi}$ 。改进 KSMAIA 和 QKAIA 算法，得到预处理的 KSMAIA(NKSMAIA)和 QKAIA(NQKAIA)算法。

令原始输入信号矢量  $\mathbf{X}(n) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  经过  $\text{atan}$  函数处理之后的输入信号矢量为  $\mathbf{X}'(n)$ 。将  $\mathbf{X}'(n) = [x'(n), \dots, x'(n-M+1)]^T$  映射到高维的 RKHS 的矢量为  $\mathbf{u}'(n) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}'(n)) \in \mathbb{Q}^{M \times 1}$ ，简记为  $\mathbf{u}'(n) = \boldsymbol{\varphi}'(n)$ ，则  $\mathbf{u}'(n) = [\varphi'(n), \dots, \varphi'(n-M+1)]^T \in \mathbb{Q}^{M \times 1}$ 。

将  $\mathbf{u}'(n)$  代替式(3.23)中的  $\mathbf{u}(n)$  可得 NKSMAIA 算法的权向量  $\mathbf{W}(n)$  的迭代公式为

$$\mathbf{W}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{NKSMAIA}}(j) \mathbf{u}'(n) \quad (3.40)$$

其中， $a_{\text{NKSMAIA}}(j)$  表示同式(3.22)。

将  $\mathbf{u}'(n)$  和式(3.40)代入式(3.24)可得 NKSMAIA 算法的输出信号为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n) \mathbf{u}'(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{\text{NKSMAIA}}(j) \Phi'(j, n) \quad (3.41)$$

其中， $\Phi'(j, n) = \mathbf{u}'^T(j) \mathbf{u}'(n)$ ；

将  $\mathbf{u}'(n)$  代替式(3.37)得到 NQKAIA 算法的权向量迭代公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + \iota \tanh[\beta_{\text{NQKAIA}} e(n)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}'(n)], \bullet) \\ &= \mathbf{W}(n-1) + \iota \tanh[\beta_{\text{NQKAIA}} e(n-1)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}'(n-1)], \bullet) \\ &\quad + \iota \tanh[\beta_{\text{NQKAIA}} e(n)] \ker(\mathbf{Q}[\mathbf{X}'(n)], \bullet) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\text{size}(\mathbf{C}(n))} \mathbf{a}'_j(n) \ker(\mathbf{Q}'_j(n), \bullet) \end{aligned} \quad (3.42)$$

其中， $\Phi'(j, n) = \mathbf{u}'^T(j) \mathbf{u}'(n)$ ； $\mathbf{a}'_j(n)$  表示同式(3.35)和式(3.36)； $\mathbf{Q}'_j(n)$  表示在第  $n$  次迭代时对  $\mathbf{X}'(n)$  进行量化操作。

将  $\mathbf{u}'(n)$  和式(3.42)代入式(3.38)可得 NQKAIA 输出信号为

$$y(n) = \sum_{j=0}^{\text{size}(\mathbf{C}(n-1))} \mathbf{a}'_j(n-1) \ker(\mathbf{Q}'_j(n-1), \mathbf{X}'(n)) \quad (3.43)$$

表 3.5 预处理核自适应滤波算法的迭代过程

初始化( $n=0$ ):

选择高斯核函数及其参数, 数据预处理模块的函数。

令  $\mathbf{W}(0)=\mathbf{0}$ ;

计算  $\mathbf{x}'(n)$ ; 重新构造核自适应滤波器输入矢量  $\mathbf{u}'(n)$ ;

当  $n \geq 1$  时, 进行迭代:

NKSMAIA 算法由式(3.41)计算的输出信号  $y(n)$

计算误差信号  $e(n)=d(n)-y(n)$ 。

NQKAIA 算法由式(3.43)计算的输出信号  $y(n)$

计算误差信号  $e(n)=d(n)-y(n)$ 。

### 3.6 算法仿真和性能分析

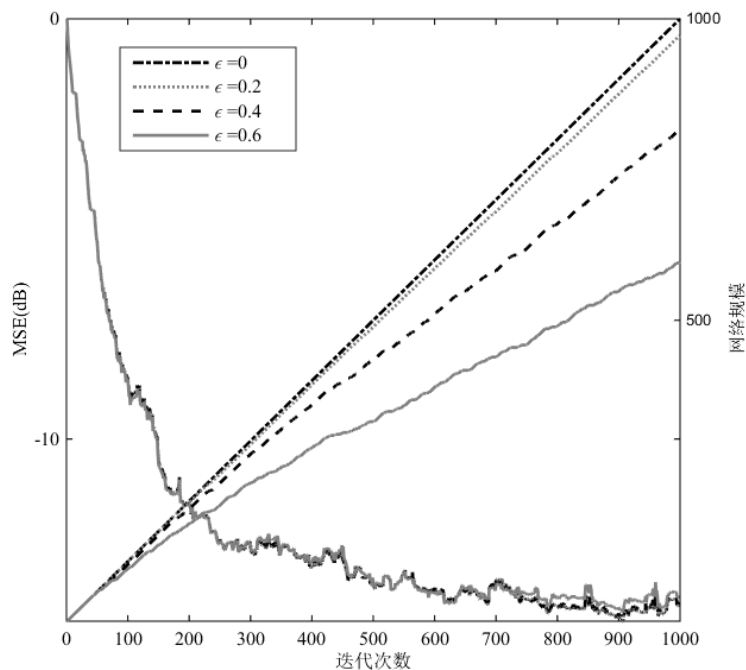
本章分析比较 KNLMS、KSA、KAIA、KSMNLMS、KSMAIA、QKAIA、NKSMAIA 和 NQKAIA 8 种算法在非线性和均衡中的性能。类似本文的 KAIA 算法推导, 对 SA 算法运用核方法可以得到 KSA 算法。非线性信道由线性信道  $H_1(z)$  和无记忆非线性信道  $H_2(z)$  组成, 非线性信道均衡器框图如图 2.6 所示, 以等概率随机产生的  $\pm 1$  作为输入信号  $s(n)$ ; 经过系统函数为  $H_1(z)=1+0.6z^{-1}$  的线性信道, 其输出为  $s'(n)$ ; 然后再经过无记忆非线性信道  $H_2(z)$ , 其输出为  $q(n)=0.99s'(n)+0.17[s'(n)]^2-0.91[s'(n)]^3$ 。 $v(n)$  为 Alpha 稳定分布噪声, 其对称参数  $\beta=0$ 、位置参数  $g=0$ , 分散系数为  $\gamma_\alpha$ 。定义广义信噪比为  $\text{GSNR}=10\log_{10} 2\sigma_q^2/\gamma_\alpha$ , 其中  $\sigma_q^2$  是  $q(n)$  的方差。其输入信号为  $x(n)=q(n)+v(n)$ ; 期望信号为  $d(n)=s(n-D)$ , 其中  $D$  为时延, 以下实验中取  $D=1$ ;  $\bar{\gamma}_{\text{KSMNLMS}}=\bar{\gamma}_{\text{KSMAIA}}=\sqrt{2\gamma_\alpha}$ ; KNLMS、KSA、KAIA、QKAIA 和 NQKAIA 的步长因子  $\mu=0.3$ 。每种算法均采用 1000 个样本用作训练数据, 1000 个样本作为测试数据。算法稳态 MSE 取迭代后 500 点的 MSE 的均值。集员类算法更新率取总迭代次数中权重更新次数相对于总迭代次数的比值。量化类算法更新率取总迭代次数中码本的码元个数相对于总迭代次数的比值。

实验 3.1 量化尺寸  $\varepsilon_{\mathbb{R}}$  大小对 QKAIA 算法性能影响。量化尺寸作为量化算法中的关键参数影响算法的网络结构的生长速度, 从而降低算法计算复杂度。 $M=4$ ,  $h=0.35$ ,  $\alpha=1.2$ ,  $\text{GSNR}=13\text{dB}$ 。当  $\varepsilon_{\mathbb{R}}=0, 0.2, 0.4, 0.6$ , 得到 QKAIA 的 MSE 曲线和网络规模如 3.4 所示。

当  $\varepsilon_{\mathbb{R}}=0$  时, QKAIA 算法退化成 KAIA 算法。

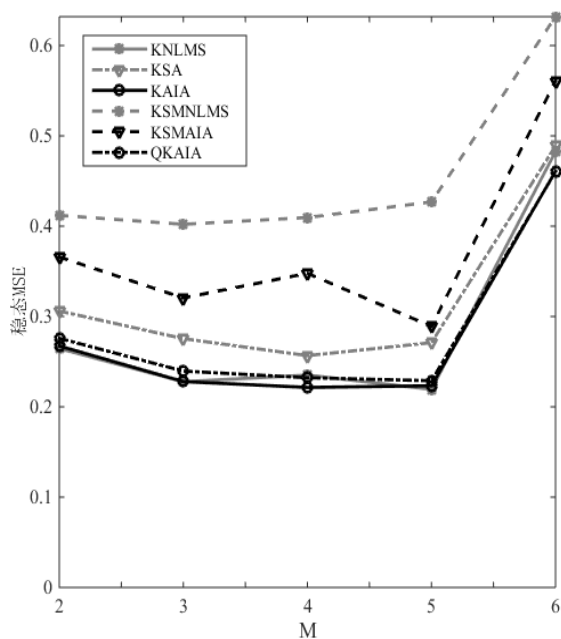
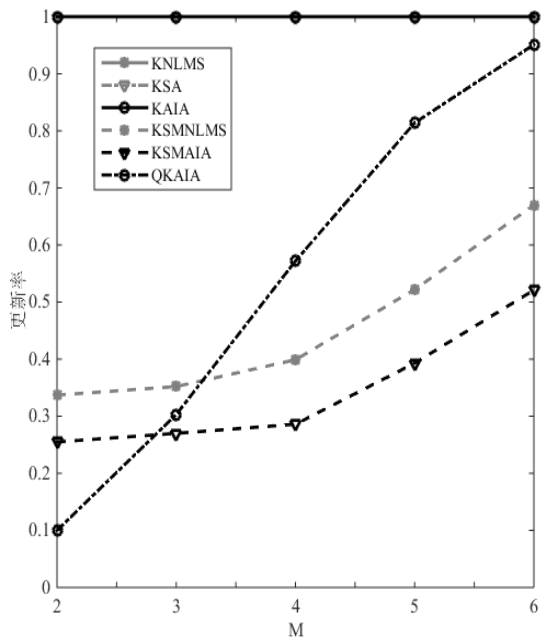
由图 3.4 可得, 当随着量化尺寸  $\varepsilon_{\mathbb{R}}$  的增加, QKAIA 的网络规模在大幅减小; QKAIA 的 MSE 值与 KAIA 的 MSE 较为接近。故 QKAIA 算法在尽量减少牺牲算法的精度的前提下, 能够大幅控制网络规模, 从而降低计算复杂度。下文实验中取  $\varepsilon_{\mathbb{R}}=0.6$ 。



图 3.4  $\epsilon_{\mathbb{R}}$  对 QKAIA 的 MSE 和网络规模的影响

实验 3.2 滤波器阶数  $M$ ，高斯核参数  $h$ ，分散系数  $\alpha$  和广义信噪比 GSNR，对 KNLMS、KSA、KAIA、KSMNLMS、KSMAIA 和 QKAIA 6 种算法的性能影响。

(1) 滤波器阶数  $M$  对算法性能影响。 $\alpha=1.2$ ，GSNR=13dB， $h=0.35$ 。当  $M$  分别等于 2~6 时，得到 6 种曲线的稳态 MSE 和更新率如图 3.5 和图 3.6 所示。当  $M=3$  和 4 时，6 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.7 和图 3.8 所示。

图 3.5  $M$  对算法性能影响图 3.6  $M$  对算法更新率的影响

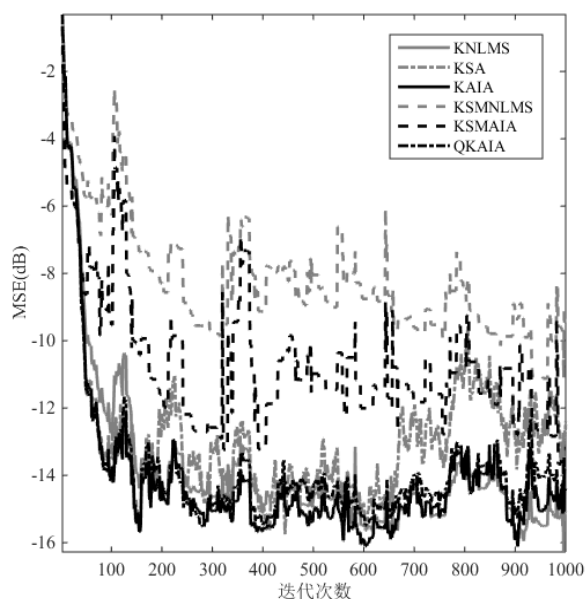


图 3.7 M=3,6 种算法的 MSE

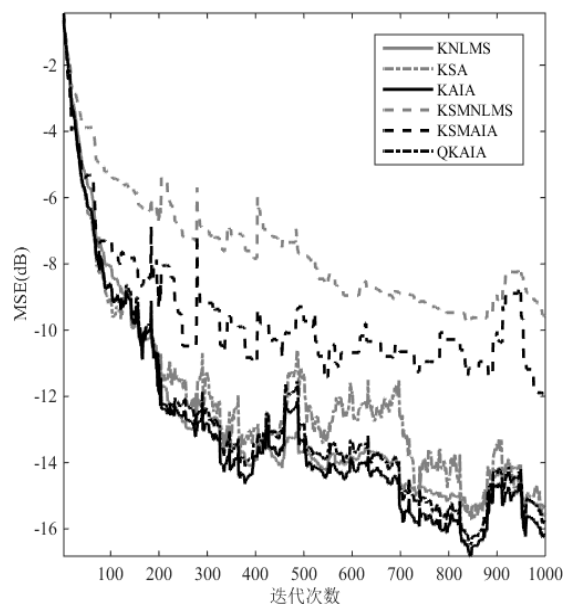
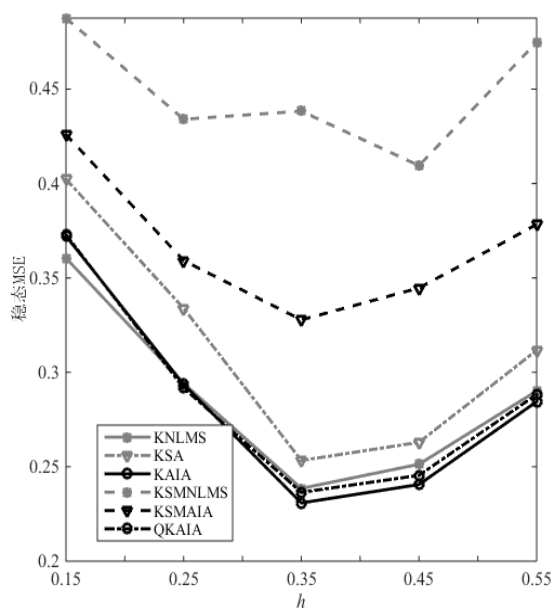
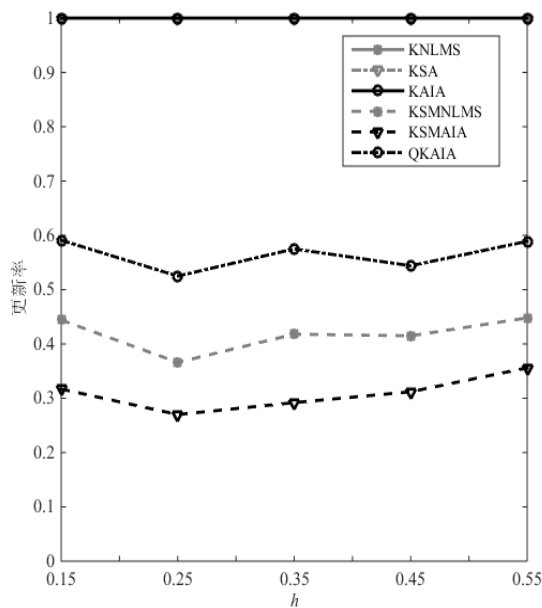
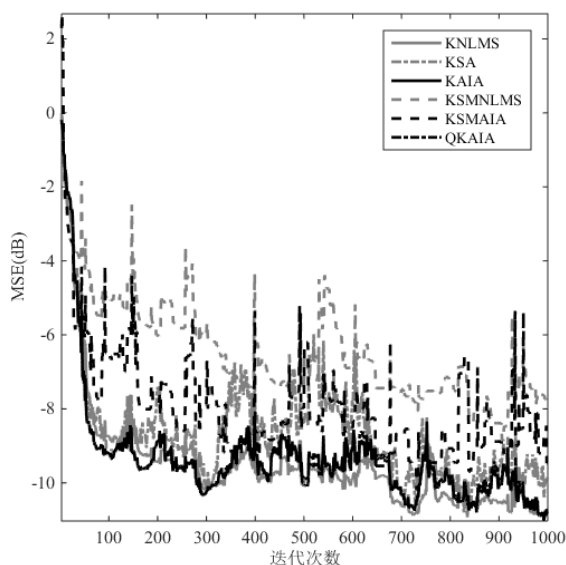
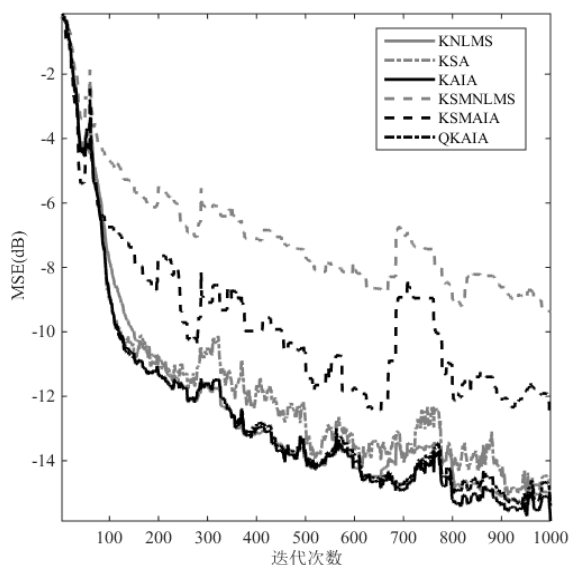


图 3.8 M=4,6 种算法的 MSE

本文通过实验仿真选取适当的  $M$ 。由图 3.5 和图 3.6 可得,  $M$  影响 6 种算法的稳态 MSE 和集员类算法的更新率。由图 3.7 和图 3.8 可得, 在当前的测试背景下,  $M=3$  时的算法的波动大于  $M=4$  时的波动, 即当  $M=4$  时 6 种算法抗脉冲性能强。下文实验中取  $M=4$ 。

(2) 高斯核参数  $h$  对算法性能影响。其它参数同实验 3.2(1)。当  $h$  分别等于 0.15~0.55 时, 得到 6 种曲线的稳态 MSE 和更新率如图 3.9 和图 3.10 所示。当  $h=0.15$  和 0.35 时, 6 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.11 和图 3.12 所示。

图 3.9  $h$  对算法性能影响图 3.10  $h$  对算法更新率影响

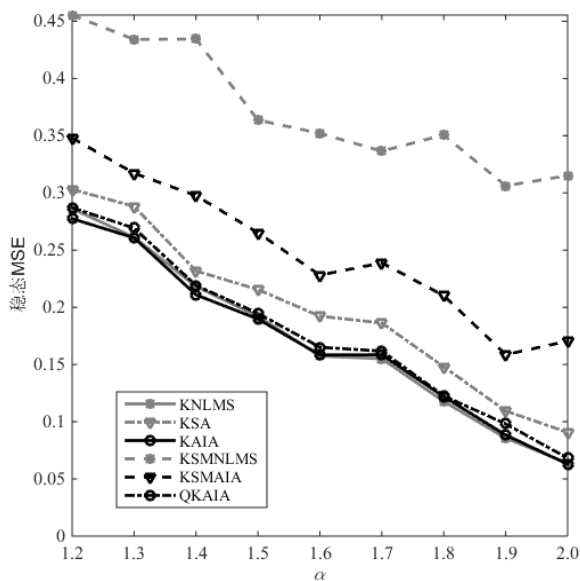
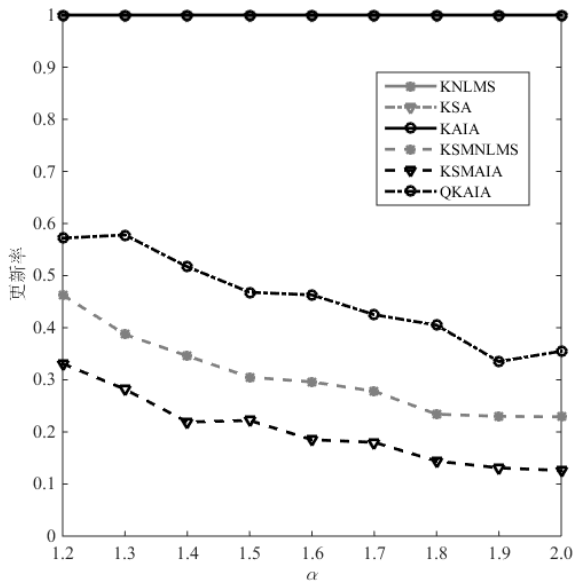
图 3.11  $h=0.15$ , 6 种算法的 MSE图 3.12  $h=0.35$ , 6 种算法的 MSE

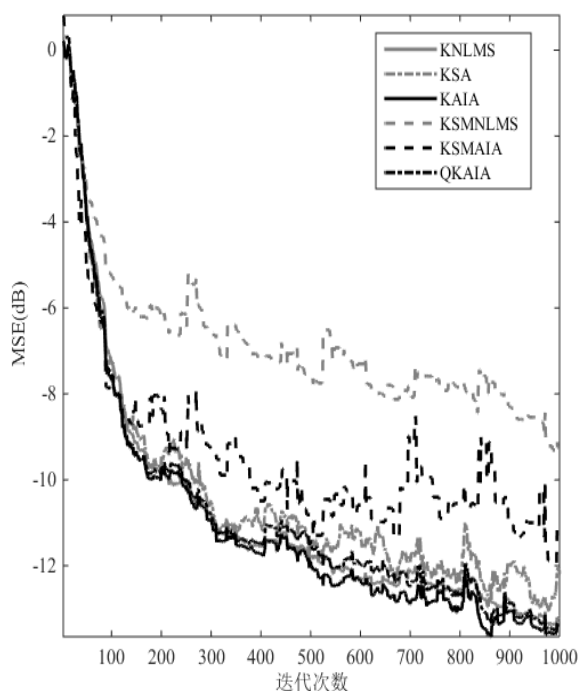
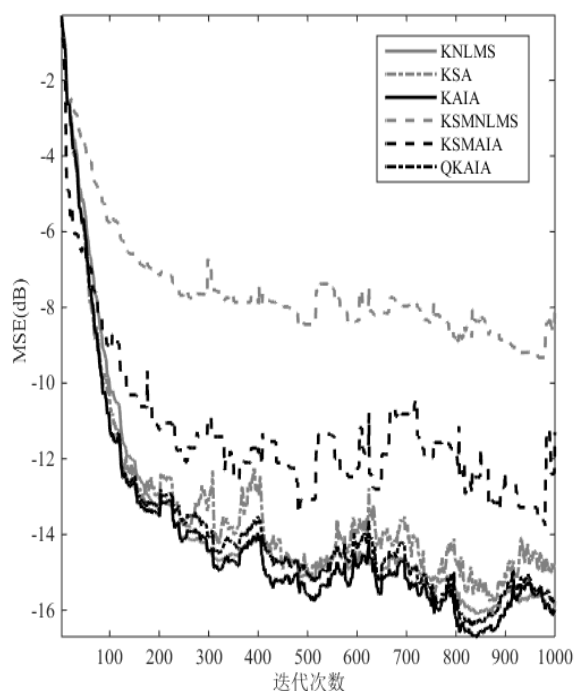
由图 3.9 可见, 在  $h=0.35$  时, 除 KSMNLMS 算法外, 其他 5 种算法的 MSE 都达到了最小值。由图 3.10 可见,  $h$  对 6 种算法更新率的影响不是很大。

比较图 3.11 和图 3.12 可得,  $h=0.35$  时, 6 种算法的稳态性能都比  $h=0.15$  时的好, 收敛速度都比  $h=0.15$  时的快。

综合考虑算法性能, 下文实验中取  $h=0.35$ 。

(3) 算法抗脉冲噪声性能分析。其它参数同实验 3.2(1)。当  $\alpha$  分别等于 1.2~2.0 时, 得到 6 种曲线的稳态 MSE 和更新率如图 3.13 和图 3.14 所示。当  $\alpha=1.2$  和 1.4 时, 6 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.15 和图 3.16 所示。

图 3.13  $\alpha$  对算法性能影响图 3.14  $\alpha$  对算法的更新率影响

图 3.15  $\alpha=1.2$ , 6 种算法的 MSE图 3.16  $\alpha=1.4$ , 6 种算法的 MSE

由图 3.13 可得, 随着  $\alpha$  逐渐增加, 即对应的分布拖尾变薄, 脉冲特性减弱, 6 种算法稳态 MSE 总体趋势在减小; KAIA、QKAIA 和 KNLMS 三种算法的稳态 MSE 比较接近, 比 KSA 算法小; KSMAIA 和 KSMNLMS 算法的稳态 MSE 比 KSA 算法大, KSMNLMS 算法的稳态 MSE 最大。

由图 3.14 可得, 随着  $\alpha$  逐渐增加, QKAIA、KSMAIA 和 KSMNLMS 算法的更新率在减小, KNLMS、KSA 和 KAIA 算法的更新率为 1; KSMAIA 算法更新率最小。

由图 3.15 和图 3.16 可得, 在  $\alpha=1.2$  和  $\alpha=1.4$  时, 保持 6 种算法的初始收敛速度基本相同, KAIA 算法的 MSE 比其他 5 种算法小, QKAIA 和 KNLMS 算法的 MSE 比较接近, 比 KAIA 算法的略大些, KSMNLMS 算法的 MSE 最大, KSMAIA 算法的 MSE 位居第二大, KSA 算法的 MSE 位居第三大。

(4)不同噪声强度下算法性能分析。其它参数同实验 3.2(1)。当 GSNR 分别等于 10~17dB 时, 得到 6 种曲线的稳态 MSE 和更新率如图 3.17 和图 3.18 所示。当 GSNR=12 和 14dB 时, 6 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.19 和图 3.20 所示。

由图 3.17 可得, (1) 随着 GSNR 逐渐增加, 即滤波器的输入信号增大, 6 种算法的稳态 MSE 总体趋势在逐渐减小, KAIA 算法的稳态 MSE 值比 QKAIA、KNLMS 和 KSA 略小, 是 6 种算法中最小的; KSMAIA 算法的稳态 MSE 小于 KSMNLMS 算法; (2) 随着 GSNR 逐渐增加, 6 种算法稳态 MSE 值的差距在减小。

由图 3.18 可得, KSMAIA 算法的更新率最小, KSMNLMS 算法其次, QKAIA 算法第三;

随着  $GSNR$  逐渐增加, KSMALMS, KSMNLMS 和 QKAIA 算法的更新率的差距也在减小; KNLMS、KSA 和 KAIA 算法的更新率为 1。

由此实验可得, 集员滤波方法和矢量量化方法都能降低算法更新率, 集员滤波方法的效果更大, 但集员滤波方法会增大算法的 MSE, 而矢量量化方法对算法的 MSE 影响不大。

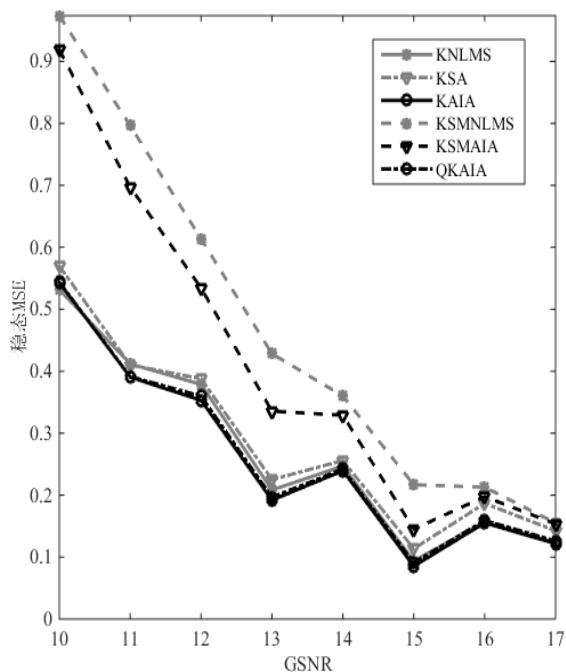


图 3.17 GSNR 对算法性能影响

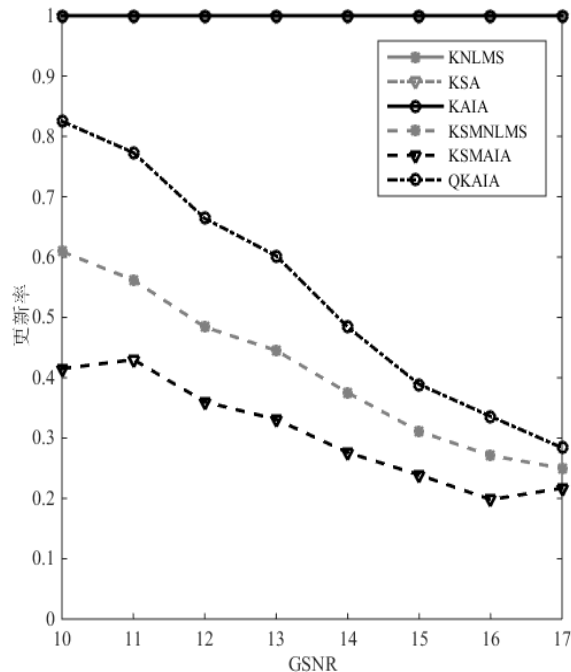


图 3.18 GSNR 对算法更新率影响

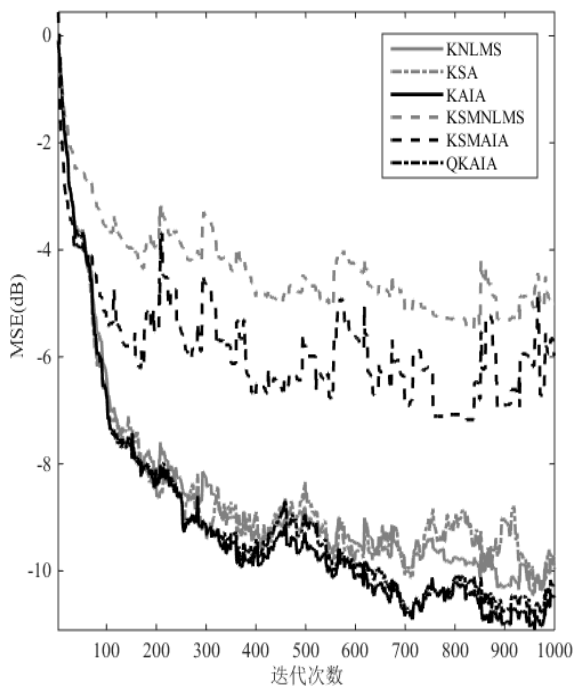


图 3.19 GSNR=12dB, 6 种算法的 MSE

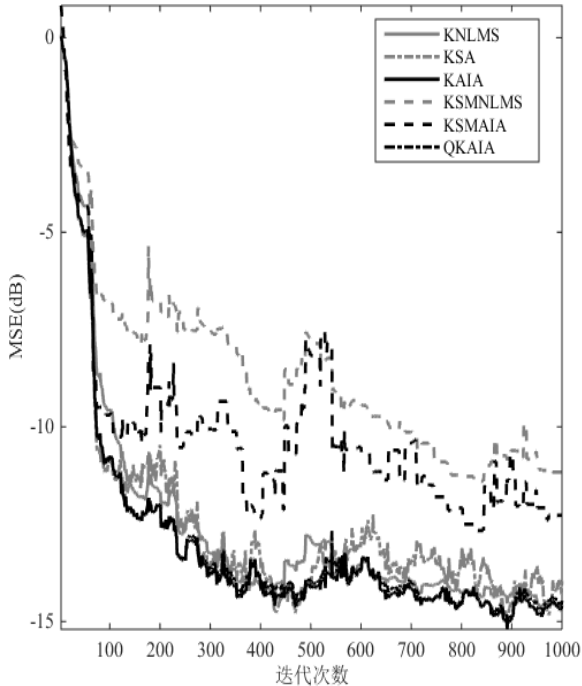


图 3.20 GSNR=14dB, 6 种算法的 MSE

实验 3.3 KSMAIA、QKAIA、NK SMAIA 和 NQKAIA 算法性能比较。自适应滤波输入预处理的核自适应均衡框架如图 3.21 所示。

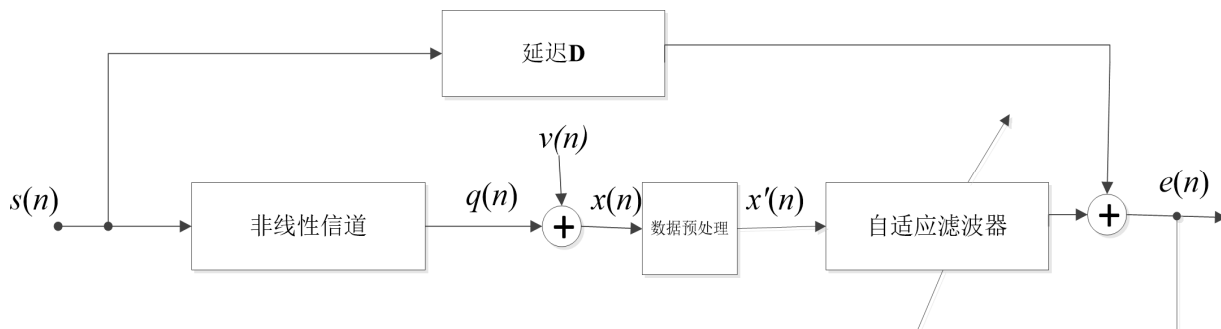


图 3.21 输入预处理的核自适应信道均衡框架

(1) 算法抗脉冲噪声性能分析。 $h=1.2$ ， $M=4$ ， $\text{GSNR}=12\text{dB}$ 。当  $\alpha$  分别等于 1.2~2.0 时，得到 4 种曲线的稳态 MSE 和更新率曲线如图 3.22 和图 3.23 所示。当  $\alpha=1.5$  和 1.9 时，4 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.24 和图 3.25 所示。

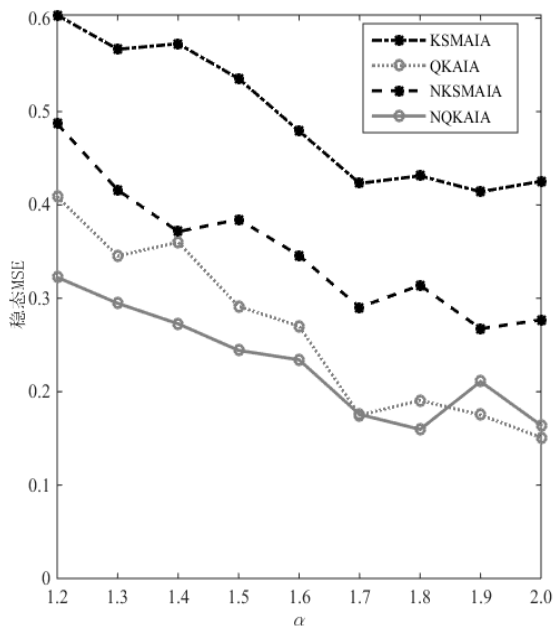


图 3.22  $\alpha$ 对算法性能的影响

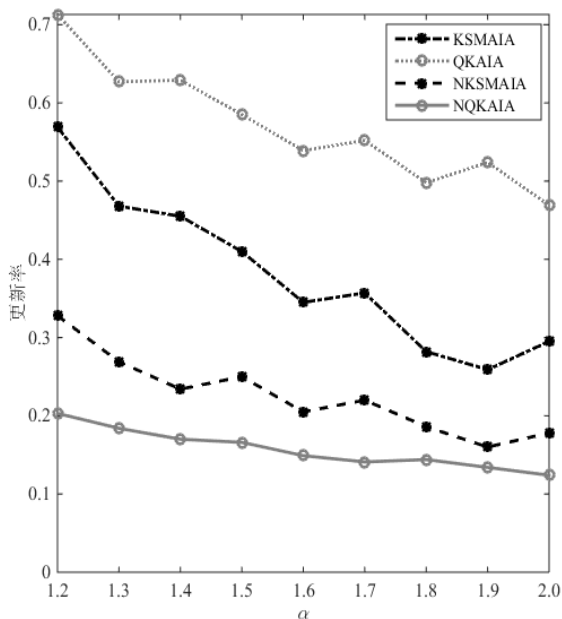


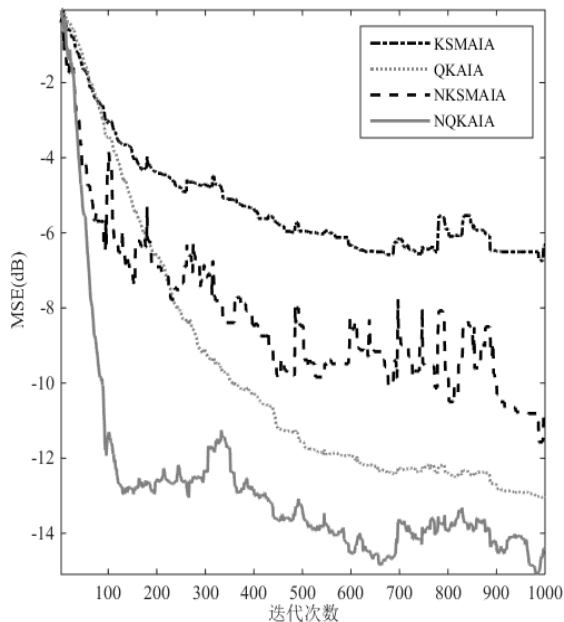
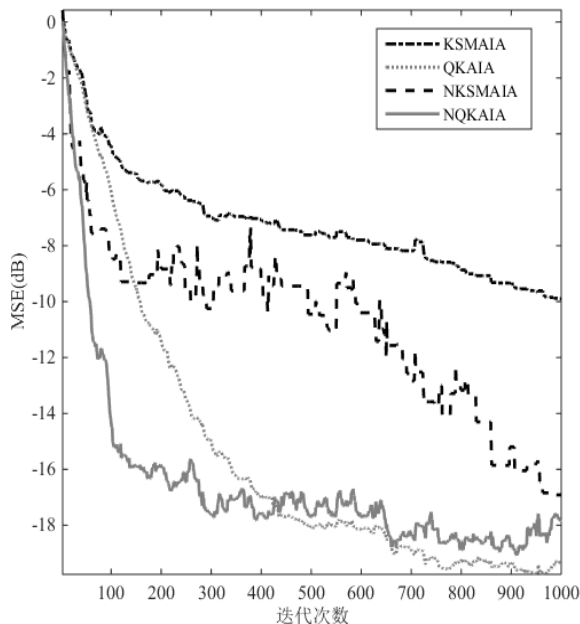
图 3.23  $\alpha$ 对算法的更新率影响

由图 3.22 可得，在当前的测试环境下，随着  $\alpha$  的增加，四种算法稳态 MSE 值大体呈现下降的趋势，NK SMAIA 算法稳态 MSE 值比 KSMAIA 算法的小；在  $\alpha=1.2\sim 1.8$  之间 NQKAIA 算法的稳态 MSE 值比 QKAIA 算法小，但是在  $\alpha=1.9$  和 2.0 时，NQKAIA 算法的稳态 MSE 比 QKAIA 算法大。

由图 3.23 可得，输入预处理类的算法(NQKAIA 和 NK SMAIA)的更新率小于未处理的算法(QKAIA 和 KSMAIA)；并且 NQKAIA 算法的更新率最低，相对于 QKAIA 大大减小。

由图 3.24 和图 3.25 可得，(1) 采用预处理后算法收敛速度都提高，NQKAIA 算法收敛速度最快，NK SMAIA 算法次之，QKAIA 算法第三，KSMAIA 算法最慢；(2) NQKAIA 算

法稳态 MSE 最小, QKAIA 算法次之, NK SMAIA 算法第三, KSMAIA 算法最大; 但 NK SMAIA 算法的 MSE 大。因此可见输入预处理提高了算法性能, 本文所提出的四种算法中 NQKAIA 算法最好。

图 3.24  $\alpha=1.5$ , 4 种算法的 MSE图 3.25  $\alpha=1.9$ , 4 种算法的 MSE

(2)不同噪声强度下算法性能分析。 $\alpha=1.2$ , 其它参数同实验 3.3(1)。当 GSNR 分别等于 10~17dB 时, 得到 4 种曲线的稳态 MSE 和更新率曲线如图 3.26 和图 3.27 所示。当 GSNR=12和17dB 时, 4 种算法的 MSE 曲线分别如图 3.28 和图 3.29 所示。

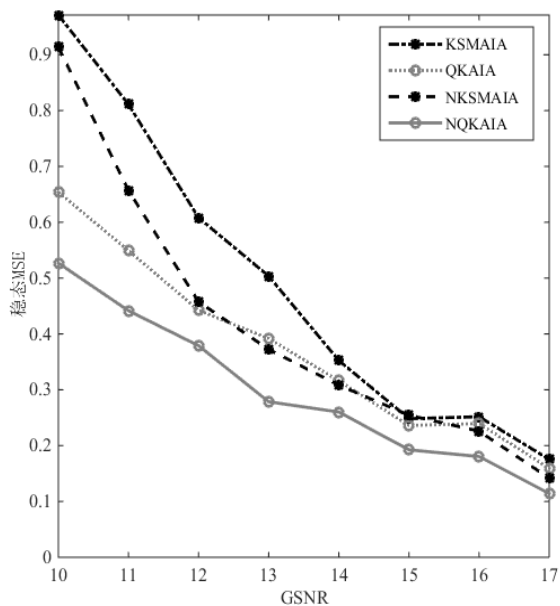


图 3.26 GSNR 对算法性能影响

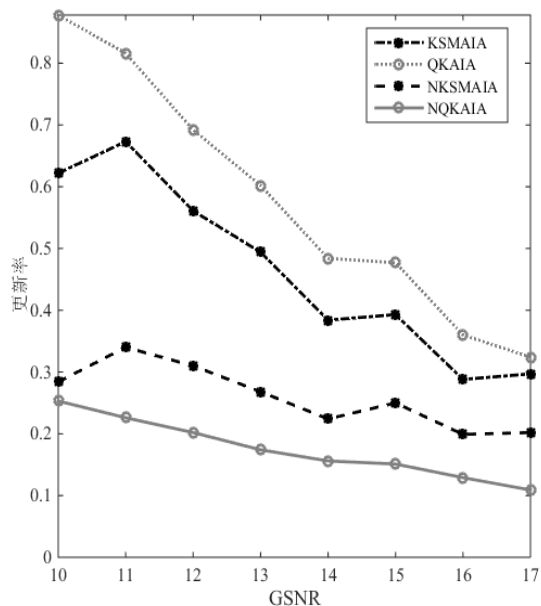


图 3.27 GSNR 对算法的更新率影响

由图 3.26 可得:(1)低 GSNR 时输入预处理对算法的稳态 MSE 降低效果大于高 GSNR 时,高 GSNR 时的 QKAIA、NKMAIA 和 KMAIA 算法的稳态 MSE 基本相同;(2)NQKAIA 算法的稳态 MSE 最小, KMAIA 算法的稳态 MSE 最大。

由图 3.27 可得:(1)低 GSNR 时输入预处理对算法的更新率的降低效果大于高 GSNR 时, QKAIA 算法经过输入预处理后的更新率大大下降;(2)NQKAIA 算法的更新率最小, NKMAIA 算法次之, KMAIA 算法第三, QKAIA 算法最大。

由图 3.28 和图 3.29 可得, 经过输入预处理的算法的收敛速度快于未经过处理过的, 并且其 MSE 值相对更小。

由此实验综合分析得到, NQKAIA 算法性能最优, KMAIA 算法最差, QKAIA 算法和 NKMAIA 算法居其中。

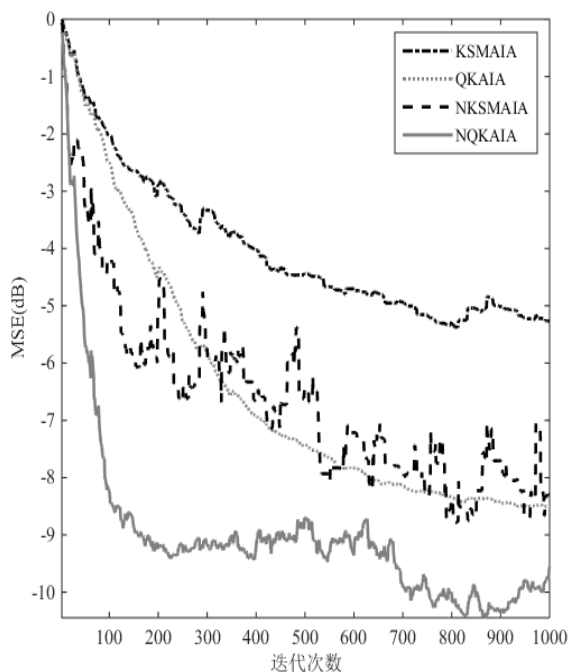


图 3.28 GSNR=12dB, 4 种算法的 MSE

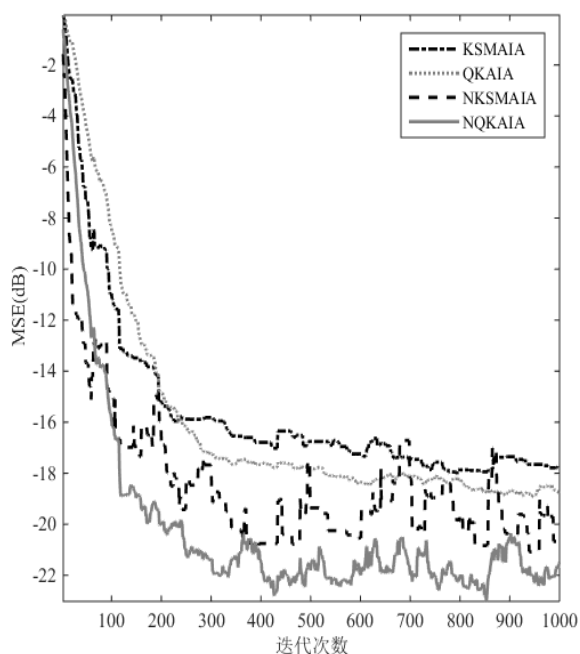


图 3.29 GSNR=17dB, 4 种算法的 MSE

### 3.7 本章小结

本章首先提出了核抗脉冲噪声算法(KAIA); 为了降低算法复杂度, 利用矢量量化方法和集员滤波理论, 提出了 QKAIA 和 KMAIA 算法。非线性信道均衡的仿真结果表明, 总体上 KAIA 精度高于 KSA 和 KNLMS; 相对于 KSMNLMS 算法, QKAIA 和 KMAIA 算法的精度提高并且复杂度降低, QKAIA 的复杂度高于 KSMNLMS, 但是精度高于 KSMNLMS。

为了进一步提高 KMAIA 和 QKAIA 性能, 对输入信号进行预处理, 提出了 NKMAIA 和 NQKAIA 算法。非线性信道均衡的仿真结果表明, NKMAIA 和 NQKAIA 的均衡效果优于 KMAIA 和 QKAIA, NQKAIA 算法最优。



## 第 4 章 核递归最小平均 $p$ 范数算法

### 4.1 引言

基于最小二乘准则的 RLS 类算法的收敛速度快于 LMS 类算法, 稳定性能更强, 稳态 MSE 值更小。但是 RLS 类的核自适应滤波算法在 Alpha 稳定分布噪声背景下性能下降, 为了提升该类算法的性能, 已有学者基于最大相关熵(MCC)准则提出 KRMC 算法<sup>[7,21,53,54]</sup>。已经证明基于最小  $p$  范数准则的算法能够有效处理脉冲干扰信号, 为此本章研究提出了基于最小  $p$  范数准则的核递归最小平均  $p$  范数(KRLMP)算法。

### 4.2 核递归最小二乘算法和核递归最大相关熵算法简介

首先简要介绍 KRLS 算法和 KRMC 算法的代价函数所基于的准则以及重要项构造的原因, 接着简述这两种算法的迭代过程。

#### 4.2.1 核递归最小二乘算法

令输入信号矢量  $\mathbf{X}(n)=[x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-M)]^T$ , 其映射到 RKHS 的矢量  $\mathbf{u}(n)=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}(n))$ , 简记为  $\mathbf{u}(n)=\boldsymbol{\varphi}(n)$ , 则  $\mathbf{u}(n)=[\varphi(n-1), \varphi(n-2), \dots, \varphi(n-M)]^T$ 。

利用最小二乘求解问题时, 在后期可能出现数据的自相关矩阵秩亏, 加入 Tikhonov 正则化可解决求解时存在这类病态问题<sup>[55]</sup>, 得到 KRLS 代价函数是

$$J_{\text{KRLS}}(n)=\sum_{j=1}^n(d(j)-\mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2+\lambda_{\text{KRLS}}\|\mathbf{W}(n)\|^2 \quad (4.1)$$

其中,  $\lambda_{\text{KRLS}}$  是正则化系数;  $d(j)$  是期望信号;  $\mathbf{W}(n)$  是权向量。

$$\text{令 } \frac{\partial J_{\text{KRLS}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n)}=0,$$

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^n[-\mathbf{u}(j)](d(j)-\mathbf{u}^T(j)\mathbf{W}(n))+2\lambda_{\text{KRLS}}\mathbf{W}(n) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n\mathbf{u}(j)\mathbf{u}^T(j)\mathbf{W}(n)+\lambda_{\text{KRLS}}\mathbf{W}(n) &= \sum_{j=1}^nd(j)\mathbf{u}(j) \end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= [\sum_{j=1}^n\mathbf{u}(j)\mathbf{u}^T(j)+\lambda_{\text{KRLS}}]^{-1}\sum_{j=1}^nd(j)\mathbf{u}(j); \\ \mathbf{W}(n) &= (\lambda_{\text{KRLS}}\mathbf{I}+\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{\Phi}^T(n))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(n)\mathbf{D}(n) \end{aligned}$$

其中,  $\boldsymbol{\Phi}(n)=[\mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(n)]$ ;  $\mathbf{I}$  是单位矩阵;  $\mathbf{D}(n)=[d(1), \dots, d(n)]^T$ 。

利用矩阵求逆引理

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCF})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{FA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{FA}^{-1} \quad (4.2)$$

令  $\bar{\lambda}\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$ ,  $\Phi(n) \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\Phi^T(n) \rightarrow \mathbf{F}$ , 可以得到权向量  $\mathbf{W}(n)$  的迭代公式为

$$\mathbf{W}(n) = \Phi(n)(\lambda_{\text{KRLS}}\mathbf{I} + \Phi^T(n)\Phi(n))^{-1}\mathbf{D}(n) = \Phi(n)\mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n)\mathbf{D}(n) \quad (4.3)$$

其中,  $\mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n) = (\lambda_{\text{KRLS}}\mathbf{I} + \Phi^T(n)\Phi(n))^{-1}$ 。

计算权向量的扩展系数  $\mathbf{a}_{\text{KRLS}}(n)$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{KRLS}}(n) &= \mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n)\mathbf{D}(n) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n-1) + \mathbf{z}_{\text{KRLS}}(n)\mathbf{z}_{\text{KRLS}}^T(n)r_{\text{KRLS}}^{-1}(n) & -\mathbf{z}_{\text{KRLS}}(n)r_{\text{KRLS}}^{-1}(n) \\ -\mathbf{z}_{\text{KRLS}}^T(n)r_{\text{KRLS}}^{-1}(n) & r_{\text{KRLS}}^{-1}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(n-1) \\ d(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\text{KRLS}}(n-1) - \mathbf{z}_{\text{KRLS}}(n)r_{\text{KRLS}}^{-1}(n)e(n) \\ r_{\text{KRLS}}^{-1}(n)e(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n) &= \Phi^T(n-1)\mathbf{u}(n); \quad y(n) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{a}_{\text{KRLS}}(n-1); \quad e(n) = d(n) - y(n); \quad \mathbf{z}_{\text{KRLS}}(n) = \mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n-1)\mathbf{h}(n); \\ r_{\text{KRLS}}(n) &= \lambda_{\text{KRLS}} + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) - \mathbf{z}_{\text{KRLS}}^T(n)\mathbf{h}(n)。 \end{aligned}$$

KRLS 算法的迭代过程如表 4.1 所示。

表 4.1 核递归最小二乘(KRLS)算法的迭代过程

初始化( $n=1$ ):

选择核函数及其参数,  $\lambda_{\text{KRLS}}$ ;

$$\mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(1) = (\lambda_{\text{KRLS}} + \ker(\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(1)))^{-1}, \quad \mathbf{a}_{\text{KRLS}}(1) = \mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(1)\mathbf{D}(1);$$

当  $n \geq 2$  时, 进行迭代:

计算  $\mathbf{h}(n)$ ;

计算输出信号和误差信号  $y(n)$ 、 $e(n)$

计算  $\mathbf{z}_{\text{KRLS}}(n)$ 、 $r_{\text{KRLS}}(n)$ 、 $\mathbf{Q}_{\text{KRLS}}(n)$ ;

由式(4.4)计算  $\mathbf{a}_{\text{KRLS}}(n)$ 。

## 4.2.2 核递归最大相关熵算法

核递归最大相关熵(KRMC)算法是一种基于最大相关熵准则(Maximum Correntropy Criterion, MCC)的核自适应滤波算法, 其代价函数为

$$J_{\text{KRMC}}(n) = \sum_{j=1}^n G_{\sigma_1}(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j)) - \frac{1}{2}\lambda_{\text{KRMC}}\|\mathbf{W}(n)\|^2 \quad (4.5)$$

其中,  $\lambda_{\text{KRMC}}$  是正则化系数;  $G_{\sigma_1}(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j)) = \exp(-\frac{(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2}{2\sigma_1^2})$ 。

令  $\frac{\partial J_{\text{KRM C}}(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} = 0$  , 可得

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^n [-\mathbf{u}(j)] \exp\left(-\frac{(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2}{2\sigma_1^2}\right) \left[-\frac{1}{\sigma_1^2}\right] (d(j) - \mathbf{u}^T(j)\mathbf{W}(n)) - 2\lambda_{\text{KRM C}} \mathbf{W}(n) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{u}(j) \exp\left(-\frac{(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2}{2\sigma_1^2}\right) \mathbf{u}^T(j) \mathbf{W}(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{W}(n) &= \sum_{j=1}^n d(j) \exp\left(-\frac{(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2}{2\sigma_1^2}\right) \mathbf{u}(j) \\ \mathbf{W}(n) &= \left[ \sum_{j=1}^n \mathbf{u}(j) \exp\left(-\frac{(d(j) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(j))^2}{2\sigma_1^2}\right) \mathbf{u}^T(j) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{I} \right]^{-1} \sum_{j=1}^n d(j) \mathbf{u}(j) \end{aligned}$$

得到权向量为

$$\mathbf{W}(n) = (\Phi(n)\mathbf{B}(n)\Phi^T(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{I})^{-1} \Phi(n)\mathbf{B}(n)\mathbf{D}(n) \quad (4.6)$$

其中,  $\mathbf{B}(n) = \text{diag}[\exp(-(d(1) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(1))^2 / 2\sigma_1^2)), \dots, \exp(-(d(n) - \mathbf{W}^T(n)\mathbf{u}(n))^2 / 2\sigma_1^2))]$ 。

利用式(4.2), 令  $\mathbf{A} = \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B} = \Phi(n)$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{B}(n)$ ,  $\mathbf{F} = \Phi^T(n)$ , 可得

$$\begin{aligned} &(\Phi(n)\mathbf{B}(n)\Phi^T(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{I})^{-1} \Phi(n)\mathbf{B}(n) = \\ &\Phi(n)(\Phi^T(n)\Phi(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{B}^{-1}(n))^{-1} \end{aligned}$$

则式(4.6)权向量重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= \Phi(n)(\Phi^T(n)\Phi(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{B}^{-1}(n))^{-1} \mathbf{D}(n) \\ &= \Phi(n) \begin{bmatrix} \Phi^T(n-1)\Phi(n-1) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \mathbf{B}^{-1}(n-1) & \Phi^T(n-1)\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{u}^T(n)\Phi(n-1) & \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \theta(n) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{D}(n) \\ &= \Phi(n) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}^{-1}(n-1) & \mathbf{h}(n) \\ \mathbf{h}^T(n) & \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) + \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \theta(n) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{D}(n) \\ &= \Phi(n) r_{\text{KRM C}}^{-1}(n) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}(n-1)r(n) + \mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n)\mathbf{z}_{\text{KRM C}}^T(n) & -\mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n) \\ -\mathbf{z}_{\text{KRM C}}^T(n) & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}(n) \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中,

$$\begin{aligned} \theta(n) &= (\exp(-(e^2(n)/2\sigma_1^2)))^{-1}; \quad \mathbf{h}(n) = \Phi^T(n-1)\mathbf{u}(n); \quad y(n) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{a}_{\text{KRM C}}(n-1); \\ \mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n) &= \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}(n-1)\mathbf{h}(n); \quad r_{\text{KRM C}}(n) = \lambda_{\text{KRM C}} \sigma_1^2 \theta(n) + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n) - \mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n)\mathbf{h}(n); \\ \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}(n) &= r_{\text{KRM C}}^{-1}(n) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}(n-1)r(n) + \mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n)\mathbf{z}_{\text{KRM C}}^T(n) & -\mathbf{z}_{\text{KRM C}}(n) \\ -\mathbf{z}_{\text{KRM C}}^T(n) & 1 \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

令

$$\mathbf{a}_{\text{KRM C}}(n) = \mathbf{Q}_{\text{KRM C}}(n)\mathbf{D}(n) \quad (4.8)$$

则式(4.7)可简写为

$$\mathbf{W}(n) = \Phi(n)\mathbf{a}_{\text{KRM C}}(n) \quad (4.9)$$

KRMC 算法的迭代过程如表 4.2 所示。

表 4.2 核最大相关熵(KRMC)算法的迭代过程

初始化( $n=1$ ):

选择核函数及其参数,  $\sigma_1$ ,  $\lambda_{\text{KRMC}}$ ;

令  $\mathbf{W}(1) = \mathbf{0}$ ,

$\mathbf{Q}_{\text{KRMC}}(1) = (\lambda_{\text{KRMC}} \sigma_1^2 + \exp(-(d(1))^2 / 2\sigma_1^2)) \text{ker}(\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(1))^{-1}$ 、 $\mathbf{a}_{\text{KRMC}}(1) = \mathbf{Q}_{\text{KRMC}}(1) \mathbf{D}(1)$ ;

当  $n \geq 2$  时, 进行迭代:

计算  $\mathbf{h}(n)$ ;

计算输出信号和误差信号  $y(n)$ 、 $e(n)$

计算  $\mathbf{z}_{\text{KRMC}}(n)$ 、 $r_{\text{KRMC}}(n)$ 、 $\mathbf{Q}_{\text{KRMC}}(n)$ ;

由式(4.8)计算  $\mathbf{a}_{\text{KRMC}}(n)$ 。

### 4.3 核递归最小平均 $p$ 范数算法推导

采用最小分散系数准则解决 Alpha 稳定分布噪声下二阶以上统计量不存在的问题, 采用 Tikhonov 正则解决最小二乘法求解时存在的病态问题, 提高抑制脉冲能力, 因此本文所提出的核递归最小平均  $p$  范数(KRLMP)算法的代价函数为

$$J_{\text{KRLMP}}(n) = \sum_{j=1}^n |e(j)|^p + \lambda_{\text{KRLMP}} \|\mathbf{W}\|^2 \quad (4.10)$$

其中

$$e(n) = d(n) - \mathbf{W}^T \mathbf{u}(n) \quad (4.11)$$

是  $n$  时刻的误差信号; 因为当  $p < 1$  时, 误差函数是凸函数, 收敛算法复杂, 且当  $\alpha < 1$ , 具有过多脉冲通常不作为信号处理问题的统计模型, 故取  $p \in [1, 2]$ <sup>[6]</sup>; 当  $p=2$  时, 退化为 KRLS 算法。 $\lambda_{\text{KRLMP}}$  是正则化系数。最佳权向量可由最小化式(4.10)

$$\frac{\partial J_{\text{KRLMP}}(n)}{\partial \mathbf{W}} = 0$$

得到。因此可得

$$\begin{aligned} p \sum_{j=1}^n [-\mathbf{u}(j)] |e(j)|^{p-2} (d(j) - \mathbf{u}^T(j) \mathbf{W}) + 2\lambda_{\text{KRLMP}} \mathbf{W} &= 0 \\ p \sum_{j=1}^n \mathbf{u}(j) |e(j)|^{p-2} \mathbf{u}^T(j) \mathbf{W} + 2\lambda_{\text{KRLMP}} \mathbf{W} &= p \sum_{j=1}^n d(j) |e(j)|^{p-2} \mathbf{u}(j) \\ \left[ \sum_{j=1}^n \mathbf{u}(j) |e(j)|^{p-2} \mathbf{u}^T(j) + 2\lambda_{\text{KRLMP}} / p \right] \mathbf{W} &= \sum_{j=1}^n d(j) |e(j)|^{p-2} \mathbf{u}(j) \end{aligned}$$

令

$$\mathbf{U}(n) = |e(n)|^{p-2}, \quad \bar{\mathbf{u}}(n) = \mathbf{U}^{\frac{1}{2}}(n) \mathbf{u}(n),$$

$$\bar{d}(n) = U_{\text{KRLMP}}^{\frac{1}{2}}(n)d(n), \quad \bar{\lambda} = (2\lambda_{\text{KRLMP}})/p$$

$$\bar{\mathbf{D}}(n) = [\bar{d}(1), \dots, \bar{d}(n)]$$

$$\boldsymbol{\psi}(n) = [\bar{\mathbf{u}}(1), \dots, \bar{\mathbf{u}}(n)] \quad (4.12)$$

则可得  $\mathbf{W}(n)$  应满足如下方程

$$[\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\psi}^T(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]\mathbf{W}(n) = \boldsymbol{\psi}(n)\bar{\mathbf{D}}(n) \quad (4.13)$$

解得最佳权矢量为

$$\mathbf{W}(n) = [\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\psi}^T(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\psi}(n)\bar{\mathbf{D}}(n) \quad (4.14)$$

根据矩阵的求逆引理式(4.2), 令  $\bar{\lambda}\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\psi}(n) \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\boldsymbol{\psi}^T(n) \rightarrow \mathbf{F}$ , 容易证明

$$[\boldsymbol{\psi}(n)\boldsymbol{\psi}^T(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1}\boldsymbol{\psi}(n) = \boldsymbol{\psi}(n)[\boldsymbol{\psi}^T(n)\boldsymbol{\psi}(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1} \quad (4.15)$$

利用式(4.15)将式(4.14)改写为

$$\mathbf{W}(n) = \boldsymbol{\psi}(n)[\boldsymbol{\psi}^T(n)\boldsymbol{\psi}(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1}\bar{\mathbf{D}}(n) \quad (4.16)$$

令

$$\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n) = [\boldsymbol{\psi}^T(n)\boldsymbol{\psi}(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1}\bar{\mathbf{D}}(n),$$

$$\mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n) = [\boldsymbol{\psi}^T(n)\boldsymbol{\psi}(n) + \bar{\lambda}\mathbf{I}]^{-1} \quad (4.17)$$

则可得

$$\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n) = \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n)\bar{\mathbf{D}}(n) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n) &= \boldsymbol{\psi}(n)\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{\text{KRLMP}-j}(n)\bar{\mathbf{u}}(j) \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中,  $a_{\text{KRLMP}-j}(n)$  是  $\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n)$  的第  $j$  个元素。由 (4.12) 可得  $\boldsymbol{\psi}(n) = [\boldsymbol{\psi}(n-1), \bar{\mathbf{u}}(n)]$ , 则由式(4.17)

$$\text{可得} \quad \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}^{-1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}^{-1}(n-1) & \mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n) \\ \mathbf{h}_{\text{KRLMP}}^T(n) & \bar{\lambda} + \bar{\mathbf{u}}^T(n) * \bar{\mathbf{u}}(n) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

其中  $\mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n) = \boldsymbol{\psi}^T(n-1)\bar{\mathbf{u}}(n)$ 。

利用分块矩阵求逆引理

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{F} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{F} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix}$$

可得

$$\mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n-1) + s_{\text{KRLMP}}(n)\mathbf{v}_{\text{KRLMP}}(n)\mathbf{v}_{\text{KRLMP}}^T(n) & -s_{\text{KRLMP}}(n)\mathbf{v}_{\text{KRLMP}}(n) \\ -s_{\text{KRLMP}}(n)\mathbf{v}_{\text{KRLMP}}^T(n) & s_{\text{KRLMP}}(n) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\text{其中,} \quad \mathbf{v}_{\text{KRLMP}}(n) = \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n-1)\mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n) \quad (4.22)$$

$$s_{\text{KRLMP}}(n) = (\bar{\lambda} + U(n) - \mathbf{v}_{\text{KRLMP}}^T(n)\mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n))^{-1} \quad (4.23)$$

因此, 令  $\bar{e}(n) = U^{\frac{1}{2}}(n)e(n)$ , 式(4.19)的权向量的扩展系数为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n) &= \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n)\bar{\mathbf{D}}(n) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n-1) + \mathbf{v}_{\text{KRLMP}}(n)s_{\text{KRLMP}}(n)\bar{e}(n) \\ s_{\text{KRLMP}}(n)\bar{e}(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

输出信号  $y(n)$  为

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n-1)\mathbf{u}(n) \quad (4.25)$$

$$s_{\text{KRLMP}}(n) = (\bar{\lambda} + U(n) - \mathbf{v}_{\text{KRLMP}}^T(n)\mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n))^{-1} \quad (4.26)$$

根据 Mercer 定理, 用核函数  $\text{ker}(\bullet, \bullet)$  表示在高维空间中的内积, 利用式(4.19)和式 (4.25) 可重写输出信号  $y(n)$  为

$$y(n) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{\text{KRLMP}-j}(n-1)U^{\frac{1}{2}}(j)\text{ker}(\mathbf{X}(j), \mathbf{X}(n)) \quad (4.27)$$

由式(4.11)可得误差信号为

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (4.28)$$

这就是本文提出的核递归最小平均  $p$  范数(KRLMP)算法, 其迭代过程如表 4.3 所示。

表 4.3 KRLMP 算法的迭代过程

初始化( $n=1$ ):

选择高斯核函数及其参数,  $p$ ,  $\wp$ ,  $\bar{\lambda}$ ;

令  $U(1) = |d(1)|^{p-2}$ ,  $\mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(1) = \wp^{-1}$ ;

计算  $\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(1) = \mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(1)d(1)U^{\frac{1}{2}}(1)$

当  $n \geq 2$  时, 进行迭代:

分别由式(4.27)和式(4.28)计算输出信号  $y(n)$  和误差信号  $e(n)$ 。

$U(n) = \min\{U(1), \dots, |e(n)|^{p-2}\}$ ;

分别由式(4.21)、(4.22)和(4.29)计算  $\mathbf{Q}_{\text{KRLMP}}(n)$ 、 $\mathbf{v}_{\text{KRLMP}}(n)$ 、 $s_{\text{KRLMP}}(n)$ ;

由式(4.24)计算  $\mathbf{a}_{\text{KRLMP}}(n)$ 。

为了获得更好的算法性能, 修正  $U(n)$  为  $U(n) = \min\{U(1), \dots, |e(n)|^{p-2}\}$ 。并修正式(4.26)为

$$s_{\text{KRLMP}}(n) = (\wp - \mathbf{v}_{\text{KRLMP}}^T(n)\mathbf{h}_{\text{KRLMP}}(n))^{-1} \quad (4.29)$$

## 4.4 算法仿真与性能分析

本章将 MG 混沌时间序列作为测试数据集, 分析比较 KRLS、KRMC 和 KRLMP 这三种算法对 MG 混沌时间序列预测的性能。

MG 混沌时间序列的生成方式的时间-延迟普通微分方程<sup>[1,2]</sup>

$$\frac{dx(t)}{dt} = -b_1 x(t) + \frac{b_2 x(t-\tau)}{1+x(t-b_3)^{10}} \quad (4.30)$$

参数设置为:  $b_1 = 0.1, b_2 = 0.2, b_3 = 30$ 。时间序列通过一个 6 秒的采样周期进行离散。采用广义信噪比 GSNR

$$\text{GSNR(dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{2\sigma_x^2}{\gamma_\alpha} \right)$$

其中  $\sigma_x^2$  是 MG 混沌时间序列的方差, 本文取  $\sigma_x^2 = 0.08$ ;  $\gamma_\alpha$  是 Alpha 稳定分布噪声中的分散系数。Alpha 稳定分布噪声的对称系数  $\beta = 0$ 、位置参数  $g = 0$ 。  $\lambda_{\text{KRLS}} = \lambda_{\text{KPMC}} = \lambda_{\text{KRLMP}} = 0.01$ ; KPMC 算法中的参数  $\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\rho = 1.01$ 。自适应滤波器的阶数为  $M=5$ 。在自适应预测中, 每种算法均采用 1000 个样本用作训练数据, 1000 个样本作为测试数据。算法稳态 MSE 取迭代后 500 点的 MSE 的均值。

实验 4.1 高斯核参数对算法性能影响。GSNR=-2dB,  $\alpha=1.8$ ,  $p=1.7$ 。当  $h$  分别等于 0.6~1.2 时, 得到 3 种曲线的稳态 MSE 曲线如图 4.1 所示。当  $h=0.6$  和 1 时, 3 种算法的 MSE 曲线分别如图 4.2 和图 4.3 所示。

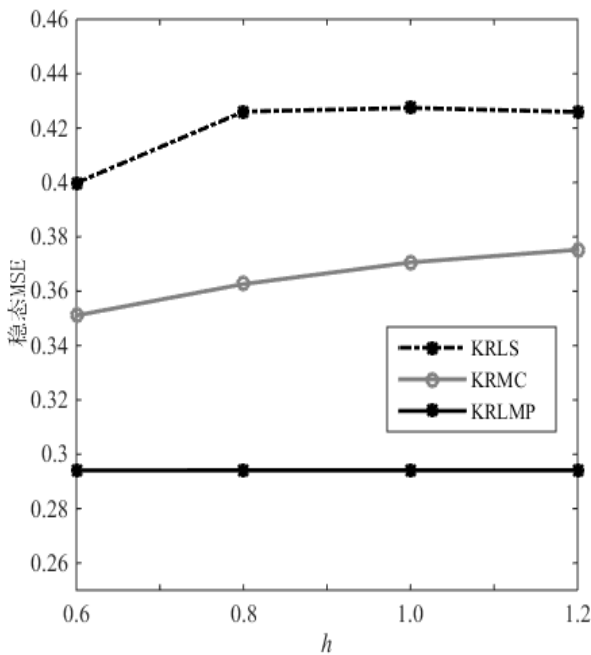


图 4.1  $h$  对算法性能影响

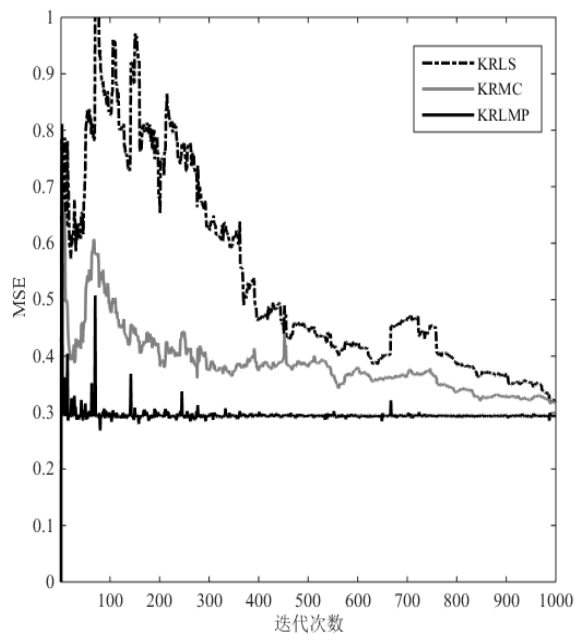
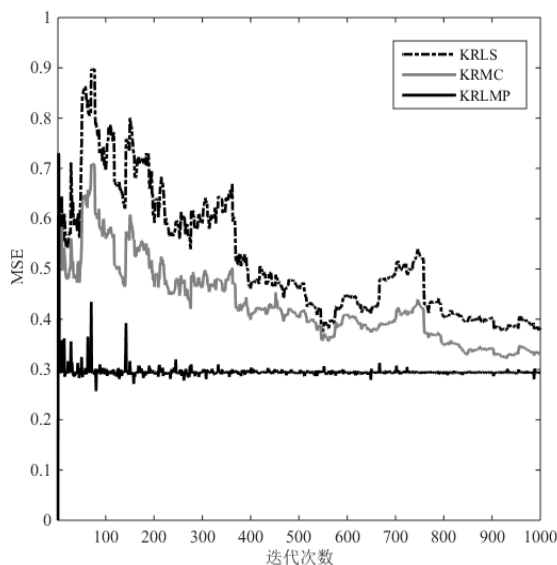
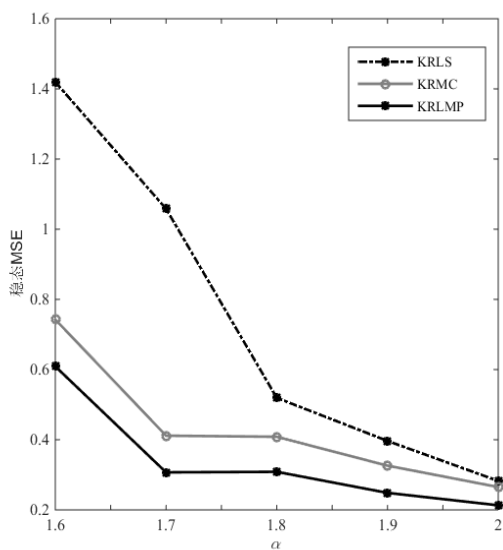
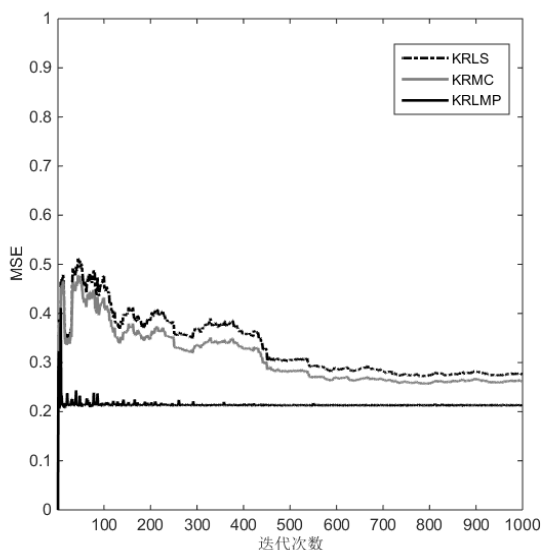


图 4.2  $h=0.6$  算法的 MSE

由图 4.1 可知, 在当前的测试背景下, 随着  $h$  的增加, KRLS、KPMC 和 KRLMP 算法的稳态 MSE 值曲线为折线, 可得  $h$  取过大或者过小都会影响算法的性能。由图 4.2 和图 4.3 可知, 虽然 3 种稳态后  $h=0.6$  和 1 的 MSE 值接近, 但是  $h=0.6$  时 3 种算法的 MSE 曲线波动更大。下文实验中取  $h=1$ 。

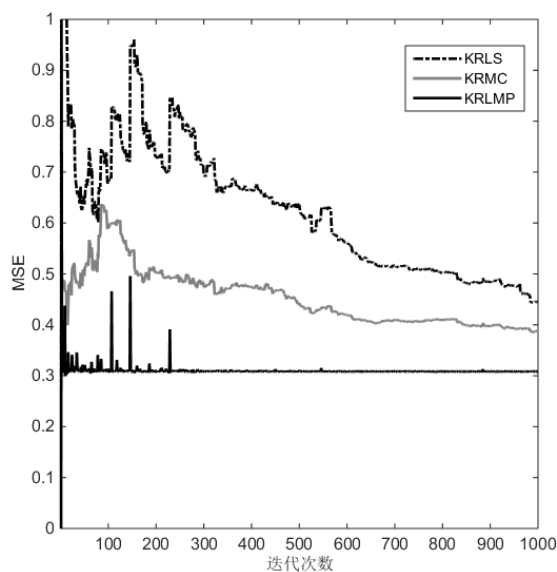
图 4.3  $h=1,3$  种算法的 MSE

实验 4.2 算法抗脉冲噪声性能分析。其它参数同实验 4.1。当  $\alpha=1.6\sim 2.0$ ,  $p=\alpha-0.1$ , 得到 3 种算法稳态 MSE 曲线如图 4.4 所示。当  $\alpha=1.8$  和  $2.0$  时, 4 种算法的 MSE 曲线分别如图 4.5 和图 4.6 所示。

图 4.4  $\alpha$  对算法性能影响图 4.5  $\alpha=2.0$ , 3 种算法的 MSE

由图 4.4~图 4.6 可知, 在当前的测试背景下, 随着的  $\alpha$  增加, 3 种算法稳态 MSE 都在减小, 并且 KRLMP 算法稳态 MSE 值最小, 其次是 KRMC 算法, KRLS 算法稳态 MSE 值最大; KRLMP 和 KRMC 算法稳态 MSE 曲线下降的幅度小于 KRLS 算法。由图 4.5 和图 4.6 可知, KRLMP 算法的 MSE 值最小, 并且收敛性更快, 抗脉冲性能更好。由于 KRLS 算法和 KRMC 算法采用与二阶统计量有关得准则, 在 Alpha 稳定分布噪声中算法性能退化, 故它们的收敛速度将比 KRLMP 算法慢。



图 4.6  $\alpha=1.8$ ，3 种算法的 MSE

实验 4.3 不同噪声强度下算法性能分析。其它参数同实验 4.1。当 GSNR 分别等于  $-2.5 \sim -0.5\text{dB}$  时,得到 3 种算法稳态 MSE 和更新率曲线如图 4.7 所示。当 GSNR  $= -1$  和  $-1.5\text{dB}$  时,3 种算法的 MSE 曲线分别如图 4.8 和图 4.9 所示。

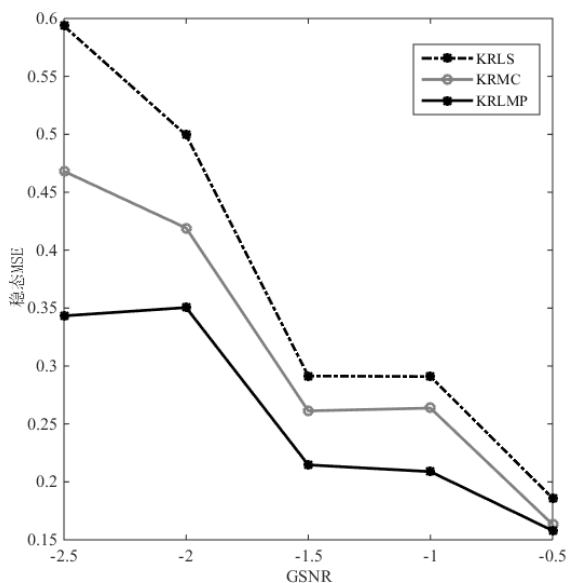
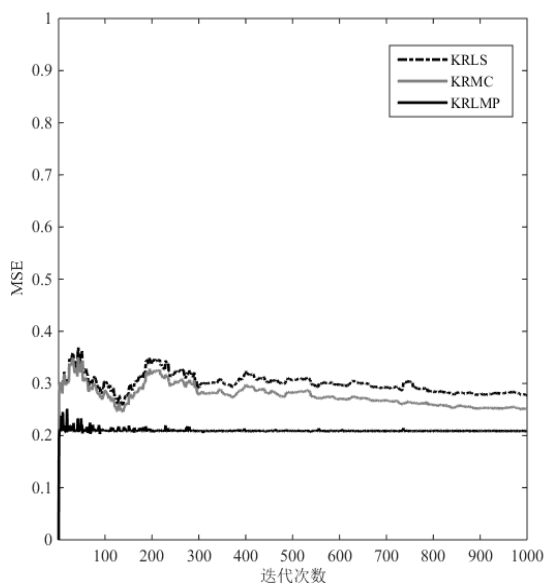


图 4.7 GSNR 对算法性能的影响

图 4.8 GSNR  $= -1\text{dB}$ ，3 种算法的 MSE

由图 4.7 可得,在当前的测试背景下,随着 GSNR 的增加,3 种算法稳态 MSE 曲线都在减小,在  $-1.5 \sim -0.5\text{dB}$  时,3 种算法减小的趋势在变缓,KRLMP 稳态 MSE 值最小,KRMC 居中,KRLS 最大。由图 4.8 和图 4.9 可得,KRLMP 算法的 MSE 值最小,收敛更快,抗脉冲性能更好,故 KRLMP 算法性能最好。

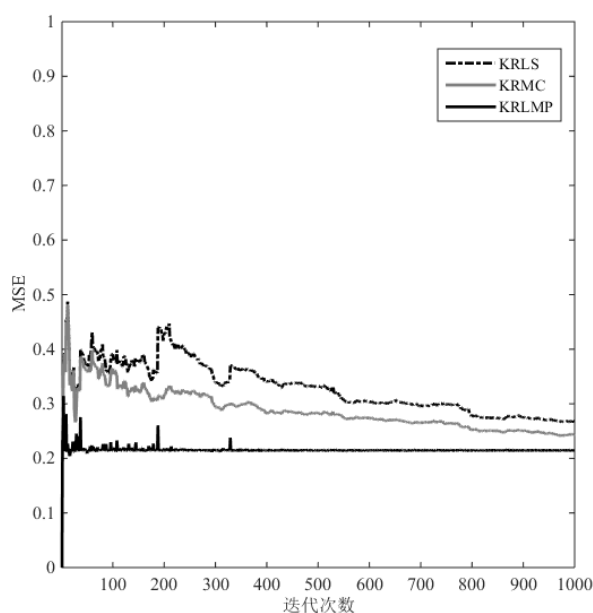


图 4.9 GSNR=-1.5dB, 3 种算法的 MSE

实验 4.4 核函数对 KRLMP 算法性能的影响。核函数分别取式(2.2)和式(2.4)即多项式核函数和高斯核函数,其中多项式核函数的参数取  $c_1=1$ ,  $c_2=4$ , 其它参数同实验 4.1, 得到 KRLMP 算法的 MSE 曲线如图 4.10 所示。

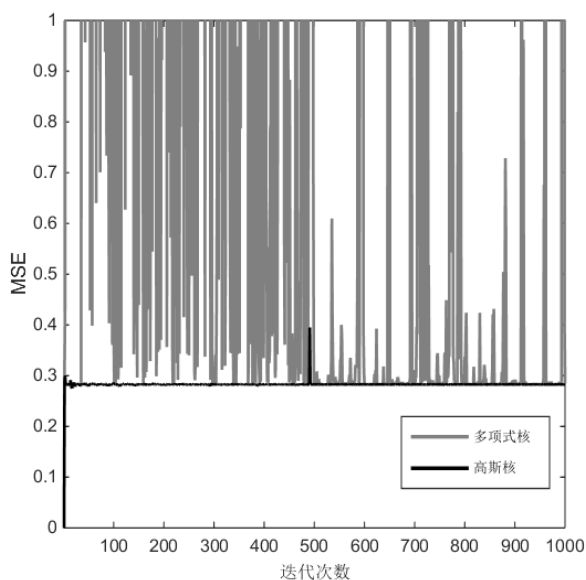


图 4.10 不同核函数对 KRLMP 算法性能影响

由图 4.10 可知, 在相同强度的脉冲噪声环境中, 采用多项式核的 KRLMP 算法的 MSE 曲线波动很大, 抗脉冲能力弱, 并且 MSE 值大; 采用高斯核函数的 KRLMP 算法的 MSE 曲线波动很小, 抗脉冲能力强, 且 MSE 值小。这是由于高斯核函数具有更强的逼近能力, 故一般选择高斯核函数。

## 4.5 本章小结

在脉冲噪声背景中, KRLS 和 KRMC 算法对非线性信号预测性能退化, 对此本章提出一种基于最小  $p$  范数准则的 KRLMP 算法。得到了权向量更新的迭代公式、扩张系数的更新公式、滤波器输出信号和误差信号。Alpha 稳定分布噪声背景下 Mackey-Glass 时间序列预测的仿真结果表明: KRLMP 算法与 KRLS 算法和 KRMC 算法相比, 抗脉冲噪声能力最强。

## 第5章 结束语

本文主要研究核自适应滤波算法,完成如下四方面的工作:

首先,基于集员滤波理论、核方法和最小  $p$  范数准则分别提出了核集员双归一化最小均方算法、核集员最小平均  $p$  范数算法和核集员双归一化最小平均  $p$  范数算法。非线性信道均衡的仿真结果表明,集员最小平均  $p$  范数类算法具有对脉冲噪声更好的均衡效果。

然后,利用抗脉冲噪声的自适应滤波算法(AIA),研究提出了核抗脉冲噪声算法(KAIA);为了控制 KAIA 的径向基网络结构,基于集员滤波理论提出 KSMAIA;基于 VQ 方法提出 QKAIA。非线性信道均衡仿真结果表明,KAIA 的均衡效果优于 KNLMS 和 KSA;KSMAIA 和 QKAIA 的均衡效果优于 KSMNLMS 算法。接着,对 KSMAIA 和 QKAIA 滤波器的输入进行预处理,进一步探索提升算法性能的方法,提出了 NKSMIA 和 NQKAIA 算法,非线性信道均衡仿真结果表明,NQKAIA 和 NKSMIA 算法的均衡效果优于 QKAIA 和 KSMAIA 算法,NQKAIA 算法最优。

最后,利用最小  $p$  范数准则提出核递归最小平均  $p$  范数算法。MG 混沌时间序列预测仿真结果表明,KRLMP 相对于 KRLS 和 KRMC 具有更好的收敛性能和抗脉冲性能。分析了核参数对算法的影响。同时比较了多项式核和高斯核函数的 KRLMP 算法性能,采用高斯核函数算法的性能优于采用多项式核函数算法的性能。

由于本人时间不足和能力有限,核自适应滤波算法还有许多值得研究的内容,如

- 1.进一步研究 QKAFs 算法与固定预算(FB)和双向梯度(BG)相结合的算法。

- 2.迁移学习(Transform Learning,TL)作为减少核自适应滤波算法复杂度的方法已经应用于 KLMS 算法中,提出了基于迁移学习的 KLMS 算法(NICE\_KLMS)<sup>[56]</sup>。基于迁移学习和 KAFs 算法等值得进一步研究。

## 致 谢

白驹过隙，研究生生涯即将进入尾声。在过去将近两年的科研道路上，从起初的迷惘，到渐入状态，遇到过挫折，也享受过收获的喜悦，最重要的是面对困难时力争解决困难的坚定决心。值此论文完成之际，谨向我攻读硕士学位期间给予我关心、指导、帮助和支持的老师、家人、朋友及同学致以由衷的感谢。

感谢启蒙我的导师赵知劲教授。在我的整个研究生学习中，恩师为我提供良好的学习和科研环境，在生活中给予我无微不至的关怀。在赵老师悉心引导下我才有今天的成绩，每一篇论文的每一部分都凝聚着恩师的付出。赵老师对于学术上严谨的态度，勤恳地工作，将深深影响我今后工作的行事作风以及对于人生的态度。这两年半短暂的相处，我将收益终生。

感谢在我学业中给我无私帮助的尚俊娜老师、王海泉老师、孙闽红老师、楼浩英老师等，以及从事相关领域的学者们和前辈们给我提供很多宝贵的意见。

感谢 402 实验室所有的同学，特别是我的同门：尹辉、毛翊君、杨安锋等；实验室的师弟师妹们：韩仕鹏、王歌、徐琳、张煜培等；师兄师姐们：强芳芳、金明明等；亲爱的朋友们和室友们，给我很多帮助和快乐，给我提供一个良好的科研环境。

感谢我亲爱的家人们。他们的支持和包容，让我在遇到困难时心灵有休憩的地方，让我有重新面对风雨的勇气和毅力。

谨以此文献给所有帮助过我的人。

## 参考文献

- [1] Haykin S. 自适应滤波器原理(第二版)[M].北京:电子工业出版社,2014:1-24.
- [2] Paulo S R. Diniz. Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation(Third Edition)[M].Springer,2013.
- [3] Liu W F, Principe J C. 核自适应滤波(第一版)[M].北京:国防工业出版社,2014.
- [4] Liu W F, Principe J C. Kernel Adaptive Filtering [M].Hoboken,New Jersey:John Wiley&Sons, 2010.
- [5] 苗秋园.核自适应滤波算法的研究[D].浙江大学,2012.
- [6] 邱天爽等.统计信号处理:非高斯信号处理及其应用(第一版)[M].大连:电子工业出版社,2004.
- [7] Wu Z Z, Shi J H, Zhang X, et al. Kernel Recursive Maximum Correntropy [J].Signal Processing, 2015, 117(2015):11-16.
- [8] Luo X, Deng J, Wang W, et al. A Quantized Kernel Learning Algorithm Using a Minimum Kernel Risk-Sensitive Loss Criterion and Bilateral Gradient Technique[J]. Entropy, 2017, 19(7):365.
- [9] 柴伟.集员估计理论、方法及其应用[D].北京:北京航空航天大学,2008.
- [10] Mao W L. Robust Set-Membership Filtering Techniques on GPS Sensor Jamming Mitigation [J].IEEE Sensors Journal, 2017, 17(6):1810-1818.
- [11] Malipatil A V, Huang Y F, Andra S, et al. Kernelized Set-Membership Approach to Nonlinear Adaptive Filtering [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing(ICASSP),2005, 4(4):149- 152.
- [12] Modaghegh H, Khosravi R H, Manesh S A, et al. A New Modeling Algorithm: Normalized Kernel Least Mean Square[C]//IEEE International Conference on Innovations in Information Technology, 2009:131-135.
- [13] 朱陈良.基于核方法的自适应滤波的算法的研究[D].硕士论文,西华大学,2011.04.
- [14] Tobar F A, Kung S Y, Mandic D P. Multikernel Least Mean Square Algorithm [J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2014, 25(2):265.
- [15] Paul T K, Ogunfunmi T. A Kernel Adaptive Algorithm for Quaternion-Valued Inputs[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2015, 26(10):2422.
- [16] 赵知劲,金明明. 基于块自适应滤波的核最小均方算法 [J]. 计算机工程,2017,43(09):162-166.
- [17] Flores A, Lamare R C D. Set-Membership Kernel Adaptive Algorithms[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2017:2676-2680.
- [18] Zhang C, Zhu Q, Niu X. Multikernel Recursive Least Squares Temporal Difference

- Learning[J]. Intelligent Computing Methodologies. Springer International Publishing, 2016.
- [19] 陈乾. 核自适应滤波算法研究[D]. 硕士论文, 华中师范大学, 2014.05.
- [20] Wang S, Feng J, Chi K T. Kernel Affine Projection Sign Algorithms for Combating Impulse Interference[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II Express Briefs, 2013, 60(11):811-815.
- [21] 石嘉豪. 基于最大互相关熵的核自适应滤波算法研究[D]. 华南理工大学, 2016.
- [22] 赵知劲, 金明明.  $\alpha$  稳定分布噪声下的核最小平均 P 范数算法[J/OL]. 计算机应用研究, 2017, (11):1-7.
- [23] 曾俊俊. 非高斯冲激干扰下基于核方法的自适应滤波算法研究[D]. 重庆邮电大学, 2016.
- [24] 赵集. 带有反馈机制的核自适应滤波算法研究[D]. 西南大学, 2016.
- [25] Chen B, Xing L, Xu B, et al. Kernel Risk Sensitive Loss: Definition, Properties and Application to Robust Adaptive Filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(11):2888-2901.
- [26] Lu L, Zhao H, Chen B. Time Series Prediction Using Kernel Adaptive Filter with Least Mean Absolute Third Loss Function[J]. Nonlinear Dynamics, 2017(3):1-15.
- [27] Ma W, Duan J, Man W, et al. Robust Kernel Adaptive Filters Based on Mean p-power Error for Noisy Chaotic Time Series Prediction[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2017, 58:101-110.
- [28] Chen B, Zhao S, Zhu P, et al. Quantized Kernel Least Mean Square Algorithm[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2012, 23(1):22-32.
- [29] Zhao S, Chen B, Zhu P, and Príncipe J C. Fixed Budget Quantized Kernel Least Mean Square Algorithm[J]. Signal Process, 2013, 93 (9): 2759–2770
- [30] Pokharel R, Seth S, Principe J C. Quantized Mixture Kernel Least Mean Square[C]//IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 2014:4168-4174.
- [31] Wang S Y, Zheng Y F, Duan S K, et al. Simplified Quantised Kernel Least Mean Square Algorithm with Fixed Budget[J]. Electronics Letters, 2016, 52(17):1453-1455.
- [32] Luo X, Deng J, Liu J, et al. A Quantized Kernel Least Mean Square Scheme with Entropy-guided Learning for Intelligent Data Analysis[J]. 中国通信(英文版), 2017, 14(7):127-136.
- [33] Wang S, Zheng Y, Duan S, et al. Quantized Kernel Maximum Correntropy and its Mean Square Convergence Analysis[J]. Digital Signal Processing, 2017, 63(C):164-176.
- [34] Soria E, Martin J D, Calpe J, et al. Robust Adaptive Algorithm with Low Computational Cost [J]. Electronics Letters, 2006, 42(1):60-80.
- [35] Vaerenbergh S V. Kernel Methods for Nonlinear Identification, Equalization and Separation of Signals[J]. Fundamenta Informaticae, 2010, 129(1-2):14-15.

- [36] Gollamudi S, Nagaraj S, Kapoor S, et al. Set-Membership Filtering and a Set-Membership Normalized LMS Algorithm with an Adaptive Step Size[J].IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(5):111-114.
- [37] Diniz P S R, Werner S. Set-Membership Bi-normalized Data Reusing LMS Algorithms [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2003, 51(1):124-134.
- [38] Wang W, Zhao J, Qu H, et al. A Correntropy Inspired Variable Step-size Sign Algorithm Against Impulsive Noises [J]. Signal Processing, 2017 , 141:168-175.
- [39] Cichocki A, Amari S I. Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications [M]. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
- [40] Bradley J B. Neural networks: A comprehensive foundation [J]. Information Processing & Management, 1995, 31(5):786.
- [41] Soriaolivas E, Martinguerrero J D, Campsvalls G, et al. A Low-Complexity Fuzzy Activation Function for Artificial Neural Networks.[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(6):1576-9.
- [42] 沈家瑞. 通信对抗中的干扰识别技术研究[D].电子科技大学,2011.
- [43] 李维屿. Markov 链及灰色系统的若干理论及应用研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2011.
- [44] 王飞.基于符号函数的自适应滤波器的稳态性能研究[D].大连海事大学,2017.
- [45] Sethares W A, Johnson C R. A Comparison of Two Quantized State Adaptive Algorithms [J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1989, 37(1):138-143.
- [46] Sethares W A, Mareels I M Y, Anderson B D O, et al. Excitation Conditions for Sign Regressor LMS[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1988, 35: 613-624.
- [47] Gowri T, Rajesh K P. Electrocardiogram Signal Enhancement Using an Efficient Sign Regressor Error Normalized Variable Step Size Adaptive Algorithm[C]//IEEE International Conference on Computing and Network Communications, 2016:343-347.
- [48] Dasgupta S, Johnson C R, Baksho A M. Characterizing Persistent Excitation for the Sign-sign Equation Error Identifier[J]. Automatica, 1993, 29(6):1473-1489.
- [49] Eweda E. Convergence Analysis of an Adaptive Filter Equipped with the Sign-Sign Algorithm [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 40(10):1807-1811.
- [50] Eweda E. Tracking Analysis of the Sign-sign Algorithm for Nonstationary Adaptive Filtering with Gaussian Data [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(5):1375-1378.
- [51] Yashi S, Ikhlaiq H, Bhim S. Real Time Implementation of Sign-sign LMS Algorithm in Single Phase SPV Grid Integrated System[C]//IEEE Power India International Conference 7<sup>th</sup>,2016:25-27.
- [52] Eweda E. Transient Performance Degradation of the LMS, RLS, Sign, Signed Regressor, and Sign-Sign Algorithms with Data Correlation [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II



Analog & Digital Signal Processing, 1999, 46(8):1055-1062.

- [53] 王晓龙. 脉冲噪声环境下基于相关熵的波束形成算法研究[D].大连海事大学,2014.
- [54] Fu G S, Boukouvalas Z, Adalı T. Density Estimation by Entropy Maximization with Kernels[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2015:1896-1900.
- [55] 李冬晔. 电阻抗成像技术正则化算法的研究[D].南京邮电大学,2016.
- [56] Kan L, Principe J C. Transfer Learning in Adaptive Filters: The Nearest Instance Centroid-Estimation Kernel Least Mean Square Algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing , 2017, 65(24):6520-6535.

## 附 录

### 作者在读期间发表的学术论文

#### 发表的学术论文：

- [1] 赵知劲,张笑菲.核递归最小平均 $p$ 范数算法[J]. 信号处理,2017,33(04):523-527.
- [2] 赵知劲,张笑菲.核集员双归一化最小平均 $p$ 范数算法[J]. 通信技术,2017,50(10):2206-2211.
- [3] 赵知劲,张笑菲.核集员双归一化最小均方算法[J].杭州电子科技大学学报(自然科学版),2018,38(02):1-5.
- [4] Zhang X F,Zhao Z J. Quantized Kernel Anti-Impulse Noise Algorithm拟投.