中間報告 2021 年 7 月 16 日

最適スライディングモード制御を用いた宇宙機の姿勢制御

TM21K020　久門田 諒

1　はじめに

剛体宇宙機は 3 次元空間で並進・回転の 6 自由度運動を行うため，運動方程式は共に非線形方程式になり，通常の線形制御理論を適用することは難しい．また，剛体宇宙機の姿勢安定化問題は性能の最適性だけでなくロバスト性を考慮した制御設計が必要になってくる．そこで，本報告書では，非線形の制御対象を変換することなく取り扱うことができるスライディングモード制御と最適制御理論を組み合わせた最適スライディングモード制御を宇宙機に適用することを検討した．

2　宇宙機のダイナミクスとキネマティクス

前回の報告では，並進・回転の 6 自由度運動を行う宇宙機の運動方程式を表現する際，クォータニオンを用いて宇宙機の姿勢を表現した．これに対して，今回は修正ロドリゲスパラメータ (MRP) を用いて宇宙機の姿勢を表現する．MRP を用いて姿勢表現する利点は主に二つある．一つ目は最大 360 度の回転を表すことができる点である．二つ目はクォータニオンがパラメータを 4 つ用いるのに対して，MRP はパラメータが最小の 3 つで表すことができる点である．

$$\boldsymbol{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\boldsymbol{\omega}^{\times}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ は，宇宙機の正定値対称の慣性行列であり，値は一定である．また，$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ は機体座標における角速度ベクトルであり，$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ と表される．さらに，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ はそれぞれ 3 軸の制御入力と外部外乱ベクトルを表す．行列 $\boldsymbol{l}^{\times}, \forall \boldsymbol{l} = [l_1, l_2, l_3]^T \in \mathbb{R}^3$ は次のようなひずみ行列で表せる．

$$\boldsymbol{l}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

式 (2) の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^3$ は MRP ベクトルを表し，行列 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma})$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}[(1 - \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}_3 + 2\boldsymbol{\sigma}^{\times} + 2\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T] \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{I}_n$ は $n \times n$ の単位行列である．ひずみ行列の特性として，次のような性質が挙げられる．

$$\begin{cases} [\boldsymbol{l}^{\times}] = -[\boldsymbol{l}^{\times}], [\boldsymbol{l}^{\times}]\boldsymbol{l} = 0, \boldsymbol{l}^T[\boldsymbol{l}^{\times}] = 0 \\ [\boldsymbol{l}^{\times}]\boldsymbol{m} = -[\boldsymbol{m}^{\times}]\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}^T[\boldsymbol{l}^{\times}]\boldsymbol{m} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

また，行列 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma})$ は次の等式を満たすような行列である．

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4}(1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})^2}{16}\boldsymbol{I}_3 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{16}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})^2}\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{\sigma}) \tag{8}$$

上記の式を利用して $lim_{t\to\infty}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}\} = 0$ となるような最適な可変構造コントローラを設計することにより，姿勢安定が実現出来る．

3　最適な滑り面の決定

可変構造制御設計では，ある条件を満たすと，異なる構造の間で無限に切り替える結果，スライディングモードが発生する．ここでは，最適滑り面 $\boldsymbol{s}$ を最適制御理論を用いて決定する．最適滑り面を決定するために式 (2) を考慮したコスト関数を最小化するような滑り面を考える．コスト関数は次のようなものを考える．

$$\Theta = \frac{1}{2}\int_{t_s}^{\infty}\left[\frac{\rho\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma}}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})^2} + \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}\right]dt \tag{9}$$

ここで，ρ は正の数，t_s は最適滑り面への到達時間である．最適滑り面を次のような式とする．

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega} + \frac{k\boldsymbol{\sigma}}{1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma}} \tag{10}$$

ここで，k は正のゲインである．式 (2) と式 (9) より，ハミルトニアン H は次のようになる．

$$H = \frac{1}{2}\frac{\rho\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma}}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma})^2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega} \tag{11}$$

上式より，ゲイン k を求めることで，最適滑り面を決定できる．

参考文献

Chuanjiang Li, Yibo Wang, Liang Xu, Zhongzhao Zhang：Spacecraft Attitude Stabilization Using Optimal Sliding Mode Control, IEEE(2010)