RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 5

Ejercicio 1 (tautologías):

Demuestra que las siguientes fórmulas bien formadas son tautologías:

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

c) $[\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \neg P$

Ejercicio 2 (formalización):

Formaliza las premisas de los siguientes argumentos como bases de conocimiento y las conclusiones como fórmulas bien formadas de la lógica proposicional. Esto es, debes modelar los argumentos de esta forma: KB |= α.

a) El asesino fue o el mayor Brown o el profesor Black. Pero no fue el profesor Black. Así que fue el mayor Brown.

b) Juana o Sandra estaban en la biblioteca. Pero si Juana no estaba, Sandra tampoco. Así que estaban ambas en la biblioteca.

c) Sólo puedes obtener una tarjeta Joven si eres menor de 29 años o estudiante; en otro caso no puedes. Si puedes obtener una tarjeta Joven, puedes obtener entradas de museo con descuento. Pero no eres menor de 29 años. Así que a menos que seas estudiante, no puedes obtener entradas de museo con descuento.

d) Los manifestantes se irán si la universidad detiene los experimentos con animales. Pero esto sólo podría ocurrir por una intervención del gobierno. Por tanto, a menos que el gobierno intervenga, no se irán.

e) Santiago es o un policía o un futbolista. Si es un policía, entonces tiene las orejas grandes. Santiago no tiene las orejas grandes, así que es un futbolista.

Ejercicio 3 (algoritmo de resolución):

Convierte los siguientes conjuntos de fórmulas bien formadas a la forma clausal, y da una traza de la ejecución del algoritmo de resolución sobre la conjunción de las cláusulas obtenidas.

a)

S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

b)

S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $S \Rightarrow \neg R$

S3. $\neg P \Rightarrow S$

S4. $P \Rightarrow \neg S$

S5. $R \vee Q$

S6. $\neg(R \wedge Q)$

S7. $\neg Q$

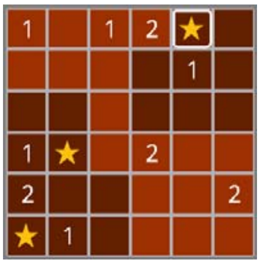
Ejercicio 4 (formalización y resolución):

Escribe el siguiente argumento en el lenguaje de la lógica proposicional. Debes modelarlo de esta forma: KB |= α. A continuación establece la validez del argumento mediante el algoritmo de resolución, o bien da un contraejemplo para demostrar que no es válido.

Si Antonio suspende el examen de Inglés, entonces Juan (el profesor de Antonio) estará decepcionado. Si Rafael suspende el examen de Matemáticas, entonces María (la profesora de Rafael) estará decepcionada. Si Juan o María están decepcionados, entonces Sandra (la directora) será informada. Sandra no ha sido notificada por parte de ninguno de los dos profesores. Consecuentemente, Antonio aprobó el examen de Inglés y Rafael aprobó el examen de Matemáticas.

Ejercicio 5 (Tentaizu):

Tentaizu ("mapa celestial" en japonés) es un puzzle de lógica y álgebra. Se muestra un ejemplo en la figura. Hay que encontrar siete estrellas. Las celdas con números se llaman celdas pista. Las estrellas están ocultas en celdas que no son pistas. Cada celda puede esconder solamente una estrella. Se considera que dos celdas son vecinas si comparten un lado o una esquina; esto es lo que se llama 8-vecindad. Una celda pista con el número *n* indica que hay *n* estrellas escondidas en sus celdas vecinas.



Explica cómo la información proporcionada por las pistas puede expresarse en el lenguaje de la lógica proposicional, y cómo se puede encontrar la solución del puzzle con ayuda de un demostrador de teoremas. Ten en cuenta que los puzzles Tentaizu tienen siempre una única solución.

Ejercicio 6 (puzzle lógico):

Hay una pastelería famosa donde acude mucha gente a comprar tartas de cumpleaños. Modela los siguientes datos en el lenguaje de la lógica proposicional. A continuación di cómo se podría encontrar la solución del puzzle con la ayuda de un demostrador de teoremas.

a) La tarta de manzana es para Jaime, pero no la ha comprado Andrea.

b) Sandra ha reservado la tarta de plátanos, pero no para la muchacha que cumplirá 15 años.

c) Mario va a regalarle una tarta a su padre Manuel.

d) La tarta Battenberg es para Violeta.

e) José no ha encargado la tarta de mantequilla con 45 velas, puesto que a Paula no le gusta la mantequilla.

f) Andrea ha comprado 5 velas menos que Mario.

g) Fernando ha comprado 32 velas, pero no para Patricia, ya que ella va a cumplir 5 años.

h) La oferta especial de la semana es la tarta de ron a mitad de precio.

POSIBLES SOLUCIONES

Ejercicio 1 (tautologías):

Construimos una tabla de verdad para cada fórmula, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples.

a)

P	Q	$P\Rightarrow Q$	$P\wedge(P\Rightarrow Q)$	$[P\wedge(P\Rightarrow Q)]\Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

b)

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P\Rightarrow Q$	$\neg Q\Rightarrow\neg P$	$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\Rightarrow\neg P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

c)

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P\Rightarrow Q$	$\neg Q\wedge(P\Rightarrow Q)$	$[\neg Q\wedge(P\Rightarrow Q)]\Rightarrow\neg P$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Ejercicio 2 (formalización):

a)

KB:

$BrownAsesino \vee BlackAsesino$

$\neg(BrownAsesino \wedge BlackAsesino)$

$\neg BlackAsesino$

α:

$BrownAsesino$

b)

KB:

$JuanaBiblioteca \vee SandraBiblioteca$

$\neg JuanaBiblioteca \Rightarrow \neg SandraBiblioteca$

α:

$JuanaBiblioteca \wedge SandraBiblioteca$

c)

KB:

$PuedeObtenerTarjeta \Leftrightarrow Menor29 \vee Estudiante$

$PuedeObtenerTarjeta \Rightarrow DescuentoEntradas$

$\neg Menor29$

α:

$\neg Estudiante \Rightarrow \neg DescuentoEntradas$

d)

KB:

$PararExperimentos \Rightarrow SeVan$

$PararExperimentos \Rightarrow IntervenciónGobierno$

α:

$\neg IntervenciónGobierno \Rightarrow \neg SeVan$

e)

KB:

$Policía \vee Futbolista$

$\neg(Policía \wedge Futbolista)$

$Policía \Rightarrow OrejasGrandes$

$\neg OrejasGrandes$

α:

$Futbolista$

Ejercicio 3 (algoritmo de resolución):

a)

C1. $\neg P \vee Q$
C2. $\neg R \vee P \vee Q$
C3. R
C4. $\neg Q$
C5. $P \vee Q$ Resuelvo C3 con C2
C6. Q Resuelvo C5 con C1
C7. $False$ Resuelvo C6 con C4

b)

C1. $\neg P \vee Q$
C2. $\neg S \vee \neg R$
C3. $P \vee S$
C4. $\neg P \vee \neg S$
C5. $R \vee Q$
C6. $\neg R \vee \neg Q$
C7. $\neg Q$
C8. $S \vee Q$ Resuelvo C3 con C1
C9. $\neg R \vee Q$ Resuelvo C8 con C2
C10. Q Resuelvo C9 con C5
C11. $False$ Resuelvo C10 con C7

Ejercicio 4 (formalización y resolución):

KB:

$AntonioSuspende \Rightarrow JuanDecepcionado$
$RafaelSuspende \Rightarrow MaríaDecepcionada$
$JuanDecepcionado \vee MaríaDecepcionada \Rightarrow SandraNotificada$
$\neg SandraNotificada$

α:

$\neg AntonioSuspende \wedge \neg RafaelSuspende$

Conversión a CNF:

C1. $\neg AntonioSuspende \vee JuanDecepcionado$
C2. $\neg RafaelSuspende \vee MaríaDecepcionada$
C3. $\neg JuanDecepcionado \vee SandraNotificada$
C4. $\neg MaríaDecepcionada \vee SandraNotificada$
C5. $\neg SandraNotificada$
C6. $AntonioSuspende \vee RafaelSuspende$

Algoritmo de resolución:

C7. $\neg MaríaDecepcionada$	Resuelvo C5 con C4
C8. $\neg JuanDecepcionado$	Resuelvo C5 con C3
C9. $\neg AntonioSuspende$	Resuelvo C8 con C1
C10. $\neg RafaelSuspende$	Resuelvo C7 con C2
C11. $RafaelSuspende$	Resuelvo C9 con C6
C12. *False*	Resuelvo C11 con C10

Si el argumento no hubiera sido válido, podríamos haberlo mostrado dando un contraejemplo, es decir, un modelo en el que la KB es verdadera y la conclusión α es falsa.

Ejercicio 5 (Tentaizu):

Sea S_{ij} una proposición que es verdadera si y sólo si hay una estrella escondida en la posición (i,j). En el ejemplo tendremos 36 símbolos de proposición, desde S_{11} hasta S_{66}. Para cada celda de pista con número n, tendremos una disyunción de $\binom{m}{n}$ conjunciones de literales, donde m es el número de 8-vecinos de la celda de pista. Estas conjunciones se corresponden con las $\binom{m}{n}$ maneras distintas en que se pueden distribuir n estrellas entre los m 8-vecinos de la celda de pista. Por ejemplo, en la figura la celda de pista en la posición (5,6) tiene 5 8-vecinos y su número es 2, así que obtenemos una disyunción de $\binom{5}{2} = 10$ conjunciones de literales:

$$(S_{46} \wedge S_{45} \wedge \neg S_{55} \wedge \neg S_{65} \wedge \neg S_{66}) \vee$$
$$\ldots$$
$$(\neg S_{46} \wedge \neg S_{45} \wedge \neg S_{55} \wedge S_{65} \wedge S_{66})$$

Una vez que convertimos las fórmulas correspondientes a todas las celdas de pista a CNF, podemos comprobar si hay una estrella en la posición (i,j) averiguando si KB |= S_{ij} por medio de un demostrador de teoremas.

Ejercicio 6 (puzzle lógico):

Usaremos 25 símbolos de proposición para manejar los nombres de los clientes correspondientes a las cinco tartas: $Andrea_i$, $Sandra_i$, $Mario_i$, $José_i$ y $Fernando_i$ con $i \in \{1,\ldots,5\}$. Por ejemplo, $Sandra_4$ indica que Sandra es el nombre de la cliente de la cuarta tarta.

Análogamente, emplearemos 25 símbolos de proposición para gestionar los tipos de las cinco tartas: $Manzana_i$, $Plátano_i$, $Battenberg_i$, $Mantequilla_i$, Ron_i. Los nombres de las personas a las que se regalan las tartas se manejarán con: $Jaime_i$, $Manuel_i$, $Violeta_i$, $Paula_i$, $Patricia_i$. Finalmente, las edades de las personas a las que se van a regalar las tartas se gestionarán con: $Cinco_i$, $Quince_i$, $TreintaYDos_i$, $Cuarenta_i$, $CuarentaYCinco_i$.

A continuación presentamos las fórmulas de la lógica proposicional que modelan el conocimiento obtenido de los datos proporcionados. Hay una condición que exige que ningún par de tartas tengan el mismo cliente, el mismo tipo, el mismo destinatario ni el mismo número de velas; esto no se afirma explícitamente, pero se puede suponer dada la manera en que nos proporcionan los datos. A fin de expresar que no hay ningún par de tartas que sean del mismo cliente, necesitamos disyunciones de 5 conjunciones de literales:

$$(Andrea_i \wedge \neg Sandra_i \wedge \neg Mario_i \wedge \neg José_i \wedge \neg Fernando_i) \vee$$
$$\ldots$$
$$(\neg Andrea_i \wedge \neg Sandra_i \wedge \neg Mario_i \wedge \neg José_i \wedge Fernando_i)$$

donde la fórmula anterior se repite para $i \in \{1,\ldots,5\}$.

Análogamente, tendremos fórmulas para afirmar que no hay ningún par de tartas del mismo tipo para $i \in \{1,\ldots,5\}$:

$$(Manzana_i \wedge \neg Plátano_i \wedge \neg Battenberg_i \wedge \neg Mantequilla_i \wedge \neg Ron_i) \vee$$
$$\ldots$$
$$(\neg Manzana_i \wedge \neg Plátano_i \wedge \neg Battenberg_i \wedge \neg Mantequilla_i \wedge Ron_i)$$

Las fórmulas para establecer que no puede haber dos tartas con el mismo destinatario son:

$$(Jaime_i \wedge \neg Manuel_i \wedge \neg Violeta_i \wedge \neg Paula_i \wedge \neg Patricia_i) \vee$$
$$\ldots$$
$$(\neg Jaime_i \wedge \neg Manuel_i \wedge \neg Violeta_i \wedge \neg Paula_i \wedge Patricia_i)$$

Y las fórmulas para decir que no puede haber dos tartas con el mismo número de velas son:

$$(Cinco_i \wedge \neg Quince_i \wedge \neg TreintaYDos_i \wedge \neg Cuarenta_i \wedge \neg CuarentaYCinco_i) \vee$$
$$\ldots$$
$$(\neg Cinco_i \wedge \neg Quince_i \wedge \neg TreintaYDos_i \wedge \neg Cuarenta_i \wedge CuarentaYCinco_i)$$

A continuación escribimos las afirmaciones que pueden inferirse de los datos del problema:

a) [$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Manzana_i \Leftrightarrow Jaime_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Manzana_i \Rightarrow Andrea_i$]

b) [$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Plátano_i \Leftrightarrow Sandra_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Plátano_i \Rightarrow \neg Quince_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Quince_i \Rightarrow Violeta_i \vee Paula_i \vee Patricia_i$]

c) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Mario_i \Leftrightarrow Manuel_i$

d) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Battenberg_i \Leftrightarrow Violeta_i$

e) [$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $José_i \Rightarrow \neg Mantequilla_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Mantequilla_i \Leftrightarrow CuarentaYCinco_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $José_i \Leftrightarrow Paula_i$]

f) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$ $\forall j \in \{1,\ldots,5\}$, $Andrea_i \wedge Mario_j \Rightarrow Cuarenta_i \wedge CuarentaYCinco_j$

g) [$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Fernando_i \Leftrightarrow TreintaYDos_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Fernando_i \Rightarrow \neg Patricia_i$] $\wedge$
[$\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Patricia_i \Leftrightarrow Cinco_i$]

h) De aquí no se saca ninguna fórmula; la frase está únicamente para informarnos de que existe una tarta de ron.

Antes de intentar encontrar la solución del puzzle, hay un detalle que debemos considerer. Hay una indeterminación en la asignación de las tartas a los clients, así que debemos añadir algunos hechos a la KB para obtener una solución única. Por ejemplo, podríamos añadir

$$Andrea_1 \wedge Sandra_2 \wedge Mario_3 \wedge José_4 \wedge Fernando_5$$

para que la primera tarta sea la que compra Andrea, la segunda tarta sea la que compra Sandra, y así sucesivamente. Después de hacer esto, para resolver el puzzle preguntamos si KB $\models \alpha$ para el resto de átomos α. Por ejemplo, para ver si la cuarta tarta es una tarta de plátanos preguntamos si KB $\models Plátano_4$.