## RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 4

Modela los siguientes problemas como problemas de satisfacción de restricciones (*constraint satisfaction problems*, CSPs) dando:

-Variables que utilizar y sus significados.

-Dominio de cada variable.

-Restricciones que deben satisfacerse y sus tipos (unaria, binaria o global).

**Ejercicio 1 (reglas de Golomb):**

Este problema tiene varias aplicaciones prácticas, por ejemplo a la ubicación de sensores en radioastronomía y a la cristalografía por rayos X.

Tenemos una regla de longitud L unidades. Podemos colocar marcas a lo largo de la regla en cualquier unidad. Por ejemplo, si L = 8, podemos colocar una marca en cualquiera de las posiciones 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Pero no podemos colocar una marca en la posición 1,5.

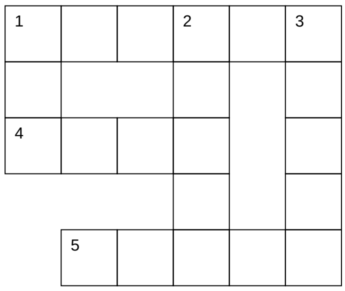
Queremos colocar M marcas ($m_1$, $m_2$, …, $m_M$) en la regla, de tal manera que todas las M(M–1)/2 diferencias $m_i$–$m_j$ sean distintas.

**Ejercicio 2 (problema criptoaritmético):**

Expresa el problema criptoaritmético SEND + MORE = MONEY como un CSP.

**Ejercicio 3 (crucigrama):**

Considera el crucigrama mostrado más abajo.




Debe resolverse con 6 palabras (1-horizontal, 1-vertical, 2-vertical, 3-vertical, 4-horizontal y 5-horizontal).

**Ejercicio 4 (diseño de un horario):**

El director de un instituto tiene que diseñar el horario de una clase. Para simplificar vamos a suponer que el mismo horario se aplica a todos los días. Hay seis horas, que deben rellenarse con estas asignaturas: Lengua, Inglés, Matemáticas, Física, Filosofía y Biología. Hay algunas restricciones:

a) Las horas de Lengua e Inglés no pueden estar adyacentes, para que los alumnos no mezclen ambos idiomas.

b) Las Matemáticas no deben enseñarse a primera ni a última hora, para que los estudiantes estén lo suficientemente atentos.

c) La Física debe ir después de las Matemáticas.

d) La Filosofía sólo se puede asignar a la segunda o a la cuarta hora.

**Ejercicio 5 (planificación de un proyecto):**

Un proyecto de ingeniería se compone de varias tareas. Cada una de ellas tiene su propia duración y sus prerrequisitos, es decir, otras tareas que deben terminarse antes de que la tarea empiece. Esta información viene dada por la siguiente tabla:

| Tarea | Duración (meses) | Prerrequisitos |
|---|---|---|
| A | 3 | - |
| B | 4 | A |
| C | 2 | A |
| D | 5 | B, C |
| E | 2 | D |
| F | 2 | D, E |

Queremos saber si hay una forma de terminar el proyecto en L meses cumpliendo con los requisitos anteriores.

**Ejercicio 6 (puzzle lógico):**

Hay una pastelería famosa donde acude mucha gente a comprar tartas de cumpleaños. Con los siguientes datos, establece un CSP para averiguar el nombre del cliente, el tipo de tarta, el nombre de la persona que recibirá la tarta, y el número de velas.

a) La tarta de manzana es para Jaime, pero no la ha comprado Andrea.

b) Sandra ha reservado la tarta de plátanos, pero no para la muchacha que cumplirá 15 años.

c) Mario va a regalarle una tarta a su padre Manuel.

d) La tarta Battenberg es para Violeta.

e) José no ha encargado la tarta de mantequilla con 45 velas, puesto que a Paula no le gusta la mantequilla.

f) Andrea ha comprado 5 velas menos que Mario.

g) Fernando ha comprado 32 velas, pero no para Patricia, ya que ella va a cumplir 5 años.

h) La oferta especial de la semana es la tarta de ron a mitad de precio.

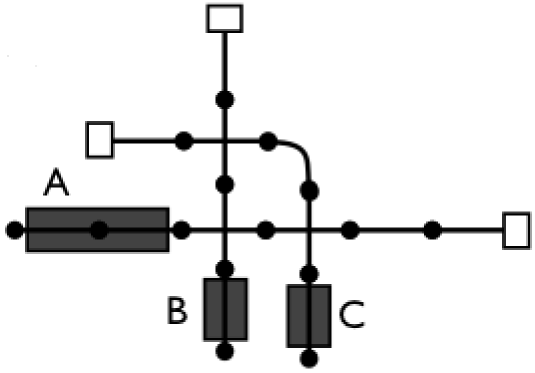
**Ejercicio 7:**

Un encargado de estación debe decidir cuando los trenes A, B y C deben partir. Una vez que los trenes han partido, se moverán un “hueco” en su vía a la hora hasta que llegue al destino.

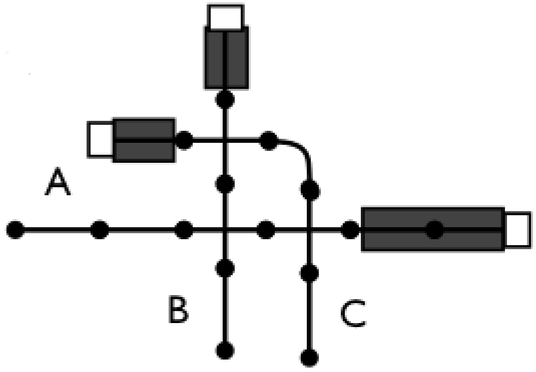
Cada tren puede salir a las 1, 2 o 3 de la tarde. Existen dos restricciones:

a) Todos los trenes deben salir en horas distintas y
b) Dos trenes no pueden ocupar a la vez los cruces de vías hasta que no pase una hora.

Nótese que el tren A ocupa dos huecos. Además la restricción de colisión es impuesta solamente a la conclusión de cada hora, ya que consideramos en este problema el tiempo como variable discreta.




Situación inicial




Situación final

Describe el problema de satisfacción de restricciones, que deberá indicar al encargado cuando cada tren debe partir.

**Ejercicio 8 (Mini-Sudoku):**

Mini-Sudoku es una versión del popular juego Sudoku. Usa un tablero con 4x4 regiones de 2x2 celdas cada una.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Mini-Sudoku válido

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | 2 |
| | | | |
| 4 | | | |
| | 4 | | |

Mini-Sudoku no válido

Cada celda contiene un dígito del 1 al 4. El objetivo es encontrar una manera de rellenar el puzzle que satisfaga las siguientes tres restricciones:

- Cada dígito solo puede aparecer una vez en cada fila.
- Cada dígito solo puede aparecer una vez en cada columna.
- Cada dígito solo puede aparecer una vez en cada región.

Modela la situación como un problema de satisfacción de restricciones, es decir, especifica las variables, sus dominios y las restricciones.

**Ejercicio 9 (el puzzle de Einstein):**

Cinco casas consecutivas tienen colores diferentes y son habitadas por hombres de diferentes nacionalidades. Cada uno tiene un animal diferente, una bebida preferida y fuma una marca determinada. Además, se sabe que:

1. *El noruego vive en la primera casa*
2. *La casa de al lado del noruego es azul*
3. *El habitante de la tercera casa bebe leche*

4. *El inglés vive en la casa roja*
5. *El habitante de la casa verde bebe café*
6. *El habitante de la casa amarilla fuma Kools*
7. *La casa blanca se encuentra justo después de la verde*
8. *El español tiene un perro*
9. *El ucraniano bebe té*
10. *El japonés fuma Cravens*
11. *El fumador de Old Golds tiene un caracol*
12. *El fumador de Gitanes bebe vino*
13. *Un vecino del fumador de Chesterfields tiene un reno*
14. *Un vecino del fumador de Kools tiene un caballo*

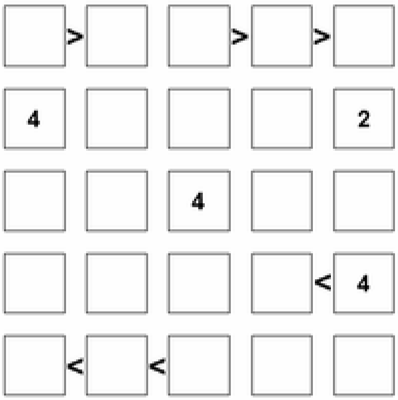
Se trata de averiguar quién tiene una cebra y quién bebe agua. Describe este problema como un problema de satisfacción de restricciones.

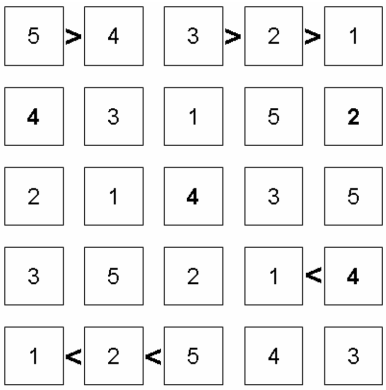
**Problema 10 (Futoshiki):**

Considérese el juego del Futoshiki (desigualdad). Se trata de un tablero de 5 × 5 en el que deben colocarse los números enteros del 1 al 5. Entre determinadas posiciones de una misma fila pueden aparecer signos de desigualdad (<, >). Las posiciones están inicialmente vacías, o pueden contener un dígito del 1 al 5 que no se puede cambiar.

La solución al problema debe ser una disposición de números tal que no aparezca ningún número repetido en ninguna fila ni en ninguna columna. Además, si entre dos posiciones consecutivas de una fila aparece un signo de desigualdad, los valores de posiciones deben respetar la desigualdad.

En la figura de la izquierda aparece una instancia del problema de Futoshiki, y en la de la derecha una posible solución al mismo.




Se pide formalizar el problema que aparece en la imagen de la izquierda como satisfacción de restricciones.

**POSIBLES SOLUCIONES:**

**Ejercicio 1 (reglas de Golomb):**

*Variables:*

$m_1$, $m_2$, …, $m_M$ , una variable para cada marca.

*Dominios:*

Cada variable tiene el dominio {0, 1, …, L–1}. Si asignamos, por ejemplo, $m_1=4$, esto quiere decir que colocamos la marca 1 en la posición 4 sobre la regla.

*Restricciones:*

C1. Todas las marcas deben hacerse en posiciones distintas:

$$AllDiff(m_1, m_2, \ldots, m_M)$$

C2. Hay una restricción para cada colección de 4 variables, $\{m_i, m_j, m_k, m_n\}$ tales que forman dos pares distintos: $(m_i,m_j)\neq(m_k,m_n)$. La restricción es como sigue:

$$|m_i–m_j|\neq|m_k–m_n|$$

Todas las restricciones de este problema son globales.

**Ejercicio 2 (problema criptoaritmético):**

*Variables:*

*S, E, N, D, M, O, R, Y* (una variable por letra), y $C_{10}$, $C_{100}$, $C_{1000}$, $C_{10000}$ (los dígitos de acarreo).

*Dominios:*

$S, E, N, D, M, O, R, Y \in \{0,\ldots,9\}$

$C_{10}, C_{100}, C_{1000}, C_{10000} \in \{0, 1\}$

*Restricciones:*

C1. $D+E=10\cdot C_{10}+Y$

C2. $C_{10}+N+R=10\cdot C_{100}+E$

C3. $C_{100}+E+O=10\cdot C_{1000}+N$

C4. $C_{1000}+S+M=10\cdot C_{10000}+O$

C5. $C_{10000}=M$

Las restricciones C1 a C4 son globales, mientras que C5 es binaria.

**Ejercicio 3 (crucigrama):**

*Variables:*

*UnoHorizontal*, *UnoVertical*, *DosVertical*, *TresVertical*, *CuatroHorizontal* and *CincoHorizontal* (one variable for each word to be written on the puzzle).

*Dominios:*

Sean $W_3$, $W_4$, $W_5$, $W_6$ los conjuntos de palabras admisibles de 3, 4, 5 y 6 letras, respectivamente. Podemos suponer que estos conjuntos son conocidos (son listas de palabras). Tendremos:

*UnoHorizontal*$\in W_6$, *UnoVertical*$\in W_3$, *DosVertical*$\in W_5$, *TresVertical*$\in W_5$, *CuatroHorizontal*$\in W_4$, *CincoHorizontal*$\in W_5$.

*Restricciones:*

Sea *charAt*(*x*,*y*) una función que devuelve el *y*-ésimo carácter de la cadena *x*. Hay una restricción por cada cuadrado en el que se cruzan dos palabras:

C1. *charAt*(*UnoHorizontal*,1)=*charAt*(*UnoVertical*,1)
C2. *charAt*(*UnoHorizontal*,4)=*charAt*(*DosVertical*,1)
C3. *charAt*(*UnoHorizontal*,6)=*charAt*(*TresVertical*,1)
C4. *charAt*(*UnoVertical*,3)=*charAt*(*CuatroHorizontal*,1)
C5. *charAt*(*DosVertical*,3)=*charAt*(*CuatroHorizontal*,4)
C6. *charAt*(*DosVertical*,5)=*charAt*(*CincoHorizontal*,3)
C7. *charAt*(*TresVertical*,5)=*charAt*(*CincoHorizontal*,5)

Todas las restricciones de este problema son binarias.

**Ejercicio 4 (diseño de un horario):**

*Variables:*

*Lengua*, *Inglés*, *Matemáticas*, *Física*, *Filosofía* y *Biología* (una variable por asignatura).

*Dominios:*

*Lengua*, *Inglés*, *Matemáticas*, *Física*, *Filosofía*, *Biología*$\in\{1, \ldots, 6\}$, donde los números representan las horas del horario.

*Restricciones:*

Dos asignaturas no se pueden enseñar al mismo tiempo a la misma clase, así que tendremos:

*AllDiff*(*Lengua*, *Inglés*, *Matemáticas*, *Física*, *Filosofía*, *Biología*)

También tendremos las restricciones correspondientes al enunciado del problema:

a) |*Lengua*–*Inglés*|>1
b) *Matemáticas*$\notin\{1,6\}$
c) *Física*>*Matemáticas*
d) *Filosofía*$\in\{2,4\}$

La restricción *AllDiff* es global; las restricciones a) y c) son binarias, y las restricciones b) y d) son unarias.

**Ejercicio 5 (planificación de un proyecto):**

*Variables:*

*A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*; cada una de ellas representa el instante de comienzo de cada tarea.

*Dominios:*

*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*$\in\{0, \ldots, \mathrm{L}-1\}$, donde los números representan unidades de tiempo (meses).

*Restricciones:*

Todas las tareas deben finalizar antes de que hayan transcurrido L meses:

C1. $(A+3 \leq L) \wedge (B+4 \leq L) \wedge (C+2 \leq L) \wedge (D+5 \leq L) \wedge (E+2 \leq L) \wedge (F+2 \leq L)$

Los prerrequisitos de cada tarea deben completarse antes de que la tarea comience. Esto produce una restricción por cada tarea, excepto para la tarea A que no tiene prerrequisitos:

C2. $A+3 \leq B$

C3. $A+3 \leq C$

C4. $(B+4 \leq D) \wedge (C+2 \leq D)$

C5. $D+5 \leq E$

C6. $(D+5 \leq F) \wedge (E+2 \leq F)$

Las restricciones C1, C4 y C6 son globales, mientras que C2, C3 y C5 son binarias.

**Ejercicio 6 (puzzle lógico):**

*Variables:*

Usaremos las variables $S_1$, …, $S_5$ para los nombres de los clientes correspondientes a las cinco tartas. El tipo de la *i*-ésima tarta se representará mediante la variable $T_i$. Los nombres de las personas a las que se les va a regalar las tartas se corresponderán con las variables $N_i$. Por último, los números de años que las personas van a cumplir serán $Y_i$.

*Dominios:*

$S_i \in$ {Andrea, Sandra, Mario, José, Fernando}

$T_i \in$ {Manzana, Plátanos, Battenberg, Mantequilla, Ron}

$N_i \in$ {Jaime, Manuel, Violeta, Paula, Patricia}

$Y_i \in \{5, 15, 32, 40, 45\}$

*Restricciones:*

Las siguientes restricciones *AllDiff* no se especifican explícitamente en el ejercicio, pero deben darse por supuestas considerando la manera en que nos dan los datos:

$AllDiff(S_1,\ldots, S_5) \wedge AllDiff(T_1,\ldots, T_5) \wedge AllDiff(N_1,\ldots, N_5) \wedge AllDiff(Y_1,\ldots, Y_5)$

A continuación escribimos las restricciones que pueden inferirse de los datos del enunciado:

a) [ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Manzana $\Leftrightarrow$ $N_i$=Jaime ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Manzana $\Rightarrow$ $S_i \neq$Andrea ]

b) [ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Plátanos $\Leftrightarrow$ $S_i$=Sandra ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Plátanos $\Rightarrow$ $Y_i \neq 15$ ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $Y_i=15$ $\Rightarrow$ $N_i \in$ {Violeta, Paula, Patricia} ]

c) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $S_i$=Mario $\Leftrightarrow$ $N_i$=Manuel

d) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Battenberg $\Leftrightarrow$ $N_i$=Violeta

e) [ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $S_i$=José $\Rightarrow$ $T_i \neq$Mantequilla ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $T_i$=Mantequilla $\Leftrightarrow$ $Y_i$=45 ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $S_i$=José $\Leftrightarrow$ $N_i$=Paula ]

f) $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$ $\forall j \in \{1,\ldots,5\}$, ($S_i$=Andrea) $\wedge$ ($S_j$=Mario) $\Rightarrow$ $Y_i+5= Y_j$

g) [ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $S_i$=Fernando $\Leftrightarrow$ $Y_i$=32 ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $S_i$=Fernando $\Rightarrow$ $N_i \neq$Patricia ] $\wedge$
[ $\forall i \in \{1,\ldots,5\}$, $N_i$=Patricia $\Leftrightarrow$ $Y_i$=5 ]

h) De este apartado no se saca ninguna restricción; la frase sólo está para informarnos de que hay una tarta de ron.

Todas las restricciones de este problema son globales.

**Ejercicio 7:**

*Variables y dominios:*

Tendremos una variable por tren, que almacenará su hora de salida: $A, B, C \in \{1, 2, 3\}$.

*Restricciones:*

1. Cada tren debe salir a una hora distinta:

$$AllDiff(A,B,C) \Leftrightarrow (A \neq B) \wedge (B \neq C) \wedge (A \neq C)$$

2. Restricción de las intersecciones:

$$(A+1 \neq B) \wedge (A+1 \neq C) \wedge (A+2 \neq C) \wedge (B \neq C+1)$$

**Ejercicio 8 (Mini-Sudoku):**

Formalmente, podemos ver el Mini-Sudoku como un problema de satisfacción de restricciones.

*Variables:*

Sea $S_{ij}$ el valor de la celda $(i,j)$, donde $i$ y $j$ varían dentro de {1, 2, 3, 4}. Nótese que estos son índices sobre el tablero, que no tienen que ver con los dígitos que usamos para rellenar las celdas.

*Dominios:*

Cada variable tiene como dominio de valores {1, 2, 3, 4}.

*Restricciones:*

Podemos expresar todas las condiciones como restricciones binarias:

C1. Filas: $S_{ij} \neq S_{ik}$ $\forall i,j,k$ con $j \neq k$
C2. Columnas: $S_{ij} \neq S_{hj}$ $\forall h,i,j$ con $i \neq h$
C3. Regiones: $S_{ij} \neq S_{kl}$ $\forall i,j,k,l$ siendo $(i,j)$ y $(k,l)$ celdas distintas de la misma región.

**Ejercicio 9 (el puzzle de Einstein):**

*Variables:* azul, roja, verde, amarilla, blanca, noruego, ingles, ucraniano, japonés, español, perro, caracol, reno, caballo, cebra, leche, café, té, vino, agua; kools, cravens, golds, gitanes, chesterfields.

*Dominios:* Todas las variables se instancian en el dominio {1, 2, 3, 4, 5}, indicando la casa correspondiente.

*Restricciones:*
*R*1: noruego = 1 ;
*R*2: azul = noruego + 1 $\vee$ azul + 1 = noruego;
*R*3: leche = 3;
*R*4: ingles = roja ;
*R*5: verde = café;
*R*6: amarilla = kools;
*R*7: blanca = verde + 1;
*R*8: español = perro;
*R*9: ucraniano = té;
*R*10: japonés = craven;
*R*11: golds = caracol;
*R*12: gitanes = vino;
*R*13: chesterfields = reno + 1 $\vee$ chesterfields + 1 = reno;
*R*14: kools = caballo +1 $\vee$ kools + 1 = caballo;

Y, adicionalmente:
*AllDiff* (azul, roja, verde, amarilla, blanca);
*AllDiff* (noruego, ingles, ucraniano, japonés, español);
*AllDiff* (perro, caracol, reno, caballo, cebra);
*AllDiff* (leche, café, té, vino, agua);
*AllDiff* (kools, cravens, golds, gitanes, chesterfields);

**Ejercicio 10 (Futoshiki):**

Variables:

Xij - valor de la posición del tablero correspondiente a la fila i, columna j.

Dominios:

$\forall$i,j Xij $\in${1,2,3,4,5}

Restricciones:

$\forall$i Alldiff{ Xij }

$j$

$\forall j$ Alldiff{ Xij }
$i$

$X_{2,1} = 4$
$X_{2,5} = 2$
$X_{3,3} = 4$
$X_{4,5} = 4$

$X_{1,1} > X_{1,2}$
$X_{1,3} > X_{1,4}$
$X_{1,4} > X_{1,5}$
$X_{4,4} < X_{4,5}$
$X_{5,1} < X_{5,2}$
$X_{5,2} < X_{5,3}$