РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

6.1 Элементы линейной алгебры: матрицы, определители, системы линейных уравнений

- **Условия задач**

1. Составить две матрицы A и B третьего порядка, продолжить заданное матричное равенство и проверить его справедливость (варианты заданий см. в приложении 1).
2. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам первой строки и по элементам *любого* столбца. Убедиться в правильности вычислений, сопоставив результаты (см. решение примеров 1.9, 1.11. Варианты заданий – приложение 2).
3. Решить по правилу Крамера неоднородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными (см. решение примера 1.13. Варианты заданий – приложение 3).
4. Решить систему линейных уравнений (из пункта 3) методом обратной матрицы. Сравнить полученные результаты с результатами пункта 3 (см. решение примера 1.15).

5. Составить и решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, где A и B невырожденные матрицы второго порядка. Полученное решение проверить подстановкой (см. решение примера 1.16).
6. Решить систему линейных уравнений (из пункта 3) методом Гаусса (см. решение примера 1.17).
7. Найти общее решение каждой из двух систем линейных уравнений (см. решение примера 1.22. Варианты заданий – приложение 4).
8. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ (для *нечетных* вариантов), $X \cdot A = B$ (для *четных* вариантов) или доказать, что решения не существует. (Матрицы A, B и варианты заданий приведены в приложении 5). Разбор решения задачи приводится ниже.

- **Комментарий к решению задач**

Задача 8. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$.

Решение. Метод обратной матрицы при решении матричных уравнений вида $A \cdot X = B$ невозможно использовать, если матрица A – вырожденная (т.е. A^{-1} не существует). Однако это не означает, что решить такое уравнение вообще невозможно. Воспользуемся методом Гаусса, имеющим более широкую область применения.

Пусть, например, уравнение имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, обратная матрица A^{-1} не существует.

Для решения уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

сначала перемножим матрицы, стоящие в левой части.

$$\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} + x_{31} & x_{12} + x_{22} + x_{32} \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} & 2x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} \\ 3x_{11} + 4x_{21} + 4x_{31} & 3x_{12} + 4x_{22} + 4x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Равенство двух матриц эквивалентно системе шести линейных уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} & & = 0, \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} & & = 8, \\ 3x_{11} + 4x_{21} + 4x_{31} & & = 8, \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 10, \\ & 2x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} & = 0, \\ & 3x_{12} + 4x_{22} + 4x_{32} & = 2, \end{cases}$$

которую решим методом Гаусса. Проведем элементарные преобразования расширенной матрицы системы:

$\overline{A} = (A \mid B) =$

$$=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0\\ 2&3&3&0&0&0&8\\ 3&4&4&0&0&0&8\\ 0&0&0&1&1&1&10\\ 0&0&0&2&3&3&0\\ 0&0&0&3&4&4&2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&-2\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right).$$

Система решений не имеет, так как в последней строке расширенной матрицы все элементы в части A равны 0, а элемент $b_6 = 1 \neq 0$.

Замечание. Используемая при решении расширенная матрица системы имеет особый вид, позволяющий «разбить» ее на две вспомогательные матрицы и выполнить преобразования этих матриц по отдельности, а именно:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1&1&1&0&0&0&0\\ 2&3&3&0&0&0&8\\ 3&4&4&0&0&0&8\\ \hline 0&0&0&1&1&1&10\\ 0&0&0&2&3&3&0\\ 0&0&0&3&4&4&2 \end{array}\right)\Rightarrow \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 2&3&3&8\\ 3&4&4&8 \end{array}\right)\sim\ldots\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&1&1&8\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&10\\ 2&3&3&0\\ 3&4&4&2 \end{array}\right)\sim\ldots\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&1&1&-2\\ 0&0&0&1 \end{array}\right) \end{array}$$

Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=0,\\ \qquad\; x_{21}+x_{31}=8,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=1,\\ \qquad\; x_{22}+x_{32}=-2,\\ \qquad\qquad\quad 0=1. \end{cases}$$

Система несовместна.

Ответ: Данное матричное уравнение решений не имеет.

6.2 Векторная алгебра

- **Условия задач**

1. Пользуясь определением, показать, что векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$.
2. Проверить коллинеарны ли векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
3. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой.
4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
5. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.
6. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Условия вариантов приведены в приложении 6.

- **Комментарий к решению задач**

Задача 1. Показать, что векторы $\overline{m} = (-1, 2, 4)$, $\overline{n} = (1, 0, 1)$, $\overline{p} = (0,1,2)$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\overline{a} = (-1, 2, 8)$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$.

Решение. Векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1 \overline{m} + \lambda_2 \overline{n} + \lambda_3 \overline{p} = \overline{o} \qquad (6.1)$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставляя в формулу (6.1) координаты векторов $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ получим:

$$\lambda_1 \cdot (-1, 2, 4) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

или $(-\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$. Последнее равенство равносильно однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Поэтому, векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ линейно независимы и образуют базис трехмерного линейного пространства.

Найдем координаты вектора $\overline{a} = (-1, 2, 8)$ в базисе $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{m} + \lambda_2 \overline{n} + \lambda_3 \overline{p} ,$$

или $(-1, 2, 8) = \lambda_1 (-1, 2, 4) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (0, 1, 2)$,

$$(-1, 2, 8) = (-\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3, 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3),$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = -1, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 2, \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 8. \end{cases}$$

Последнюю систему решим по правилу Крамера: $\Delta = 1 \neq 0$,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=5,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 2\end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 8\end{vmatrix}=-8,$$

и тогда $\lambda_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=5$, $\lambda_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=4$, $\lambda_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=-8$.

В результате $\overline{a}=5\overline{m}+4\overline{n}-8\overline{p}$. Вектор $\overline{a}$ в разложении по базису $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ имеет координаты $\overline{a}=(5,4,-8)$.

Задача 2. Проверить коллинеарны ли векторы $\overline{a}=3\overline{m}-\overline{n}$ и $\overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}$, если $\overline{m}=(1;0{,}5;3)$, $\overline{n}=(2;1;6)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$\overline{a}=3(1;0{,}5;3)-(2;1;6)=(3;1{,}5;9)-(2;1;6)=(1;0{,}5;3)$,

$\overline{b}=(1;0{,}5;3)+2(2;1;6)=(5;2{,}5;15)$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то должно выполняться равенство $\overline{a}=\lambda\overline{b}$, и поэтому координаты векторов должны быть пропорциональны. Проверим пропорциональность координат:

$\dfrac{1}{5}=\dfrac{1/2}{5/2}=\dfrac{3}{15}=\lambda$. Все координаты пропорциональны, поэтому векторы коллинеарны. Заметим, что $\lambda=0{,}2>0$, следовательно, векторы сонаправлены, и длина вектора $\overline{a}$ в пять раз меньше длины вектора $\overline{b}$.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой, если $A(1,-2,1)$, $B(4,2,1)$, $C(4,-2,1)$.

Решение. Основание биссектрисы AK – точка K делит сторону BC на отрезки BK и CK, длины которых пропорциональны длинам прилегающих к ним сторон треугольника – AB и AC,

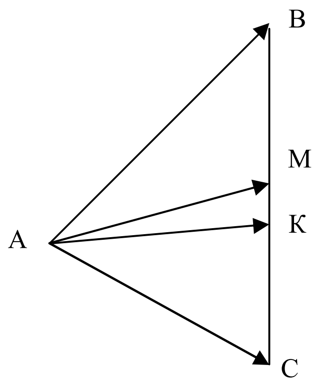

Рис. 6.1

т.е. $\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{AB}{AC}=\lambda$. Найдем длины сторон и отношение λ.

$$\overline{AB}=(3,4,0); \qquad \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5,$$

$$\overline{AC}=(3,0,0); \qquad \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{3^2+0^2+0^2}=3.$$

Отношение $\lambda = 5/3$. Координаты точки K, которая делит отрезок BC в отношении $5:3$ или $\frac{BK}{KC} = \frac{5}{3}$, можно вычислить по формулам:

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}, \\ y_K = \dfrac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}, \\ z_K = \dfrac{z_B + \lambda z_C}{1+\lambda}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_K = \dfrac{4 + \frac{5}{3}\cdot 4}{1+\frac{5}{3}} = 4, \\ y_K = \dfrac{2 - \frac{5}{3}\cdot 2}{1+\frac{5}{3}} = -\dfrac{1}{2}, \\ z_K = \dfrac{1+\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} = 1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Следовательно, точка K имеет координаты $K(4;-0{,}5;1)$. Теперь найдем вектор $\overline{AK}$ и длину биссектрисы:

$$\overline{AK} = (3;1{,}5;0), \qquad \left|\overline{AK}\right| = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2 + 0^2} = 1{,}5\sqrt{5}.$$

Основание медианы AM – точка M делит сторону BC на две равные части, поэтому $\lambda = \frac{BM}{MC} = 1$. Координаты точки M находим из соотношений (6.2) как координаты середины отрезка:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}, \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}, \\ z_M = \dfrac{z_B + z_C}{2}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x_M = \dfrac{4+4}{2} = 4, \\ y_M = \dfrac{2-2}{2} = 0, \\ z_M = \dfrac{1+1}{2} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, точка M имеет координаты $M(4,0,1)$, вектор $\overline{AM}=(3,2,0)$, длина медианы равна $\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{3^2+2^2+0^2}=\sqrt{13}$.

Угол между медианой AM и биссектрисой AK найдем как угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{AK}$.

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{AM},\overline{AK}\right)}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AK}\right|}=\frac{3\cdot 3+1{,}5\cdot 2+0\cdot 0}{1{,}5\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{65}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{8}{\sqrt{65}}\approx 7^\circ.$$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q}$, $\overline{b}=2\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $\angle(\overline{p},\overline{q})=5\pi/6$.

Решение. Площадь параллелограмма найдем как модуль векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $S=\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$. Вычислим векторное произведение:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\left[(\overline{p}+3\overline{q}),(2\overline{p}-\overline{q})\right]=2[\overline{p},\overline{p}]+6[\overline{q},\overline{p}]-[\overline{p},\overline{q}]-3[\overline{q},\overline{q}]=$$
$$=\overline{o}+6[\overline{q},\overline{p}]-[\overline{p},\overline{q}]-\overline{o}=6[\overline{q},\overline{p}]+[\overline{q},\overline{p}]=7[\overline{q},\overline{p}].$$

В преобразованиях использовались следующие свойства векторного произведения:

- векторное произведение $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{o}$ для любого вектора $\overline{a}$, поскольку вектор $\overline{a}$ коллинеарен самому себе;

- $[\overline{p},\overline{q}]=-[\overline{q},\overline{p}]$, так как перестановка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение знака произведения.

Далее получим:

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \left|7[\overline{q},\overline{p}]\right| = 7\left|[\overline{q},\overline{p}]\right| = 7|\overline{q}|\cdot|\overline{p}|\cdot\sin\left(\widehat{\overline{p},\overline{q}}\right) =$$

$$= 7\cdot 1\cdot 2\cdot\sin(5\pi/6) = 14\cdot 0{,}5 = 7\,.$$

Итак, площадь параллелограмма $S = 7\ (e\partial^2)$.

Задача 5. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, если $\overline{a}=(1,3,2)$, $\overline{b}=(2,3,4)$, $\overline{c}=(3,2,9)$.

Решение. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 9\end{vmatrix}=-9\neq 0\,.$$

Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ не компланарны.

Задача 6. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC, если $A(1,-3,8)$, $B(2,2,-1)$, $C(4,-5,3)$, $D(1,-1,2)$.

Решение. Вычислим объем пирамиды с помощью смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}=(1,5,-9),\quad \overline{AC}=(3,-2,-5),\quad \overline{AD}=(0,2,-6).$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|.$$

Смешанное произведение

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}1 & 5 & -9\\ 3 & -2 & -5\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix}=58,$$

и тогда объем пирамиды равен $V=\frac{58}{6}=9\frac{2}{3}$.

Теперь найдем высоту пирамиды. Известно, что объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}HS_{ABC}\text{, отсюда } H=\frac{3V}{S_{ABC}}.$$

Площадь треугольника ABC вычислим, используя модуль векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 5 & -9\\ 3 & -2 & -5\end{vmatrix}=-43\bar{i}-22\bar{j}-17\bar{k}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB},\overline{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-43)^2+(-22)^2+(-17)^2}\approx 25{,}6.$$

В результате высота пирамиды равна $H=\dfrac{3\cdot\frac{58}{6}}{25{,}6}\approx 1{,}13$.

Аналитическая геометрия.
Линейные геометрические объекты на плоскости и в пространстве

- **Условия задач**

1. Составить уравнения прямых, расположенных в плоскости Oxy, проходящих через точку P параллельно и перпендикулярно заданной прямой.
2. Выяснить взаимное расположение прямых, расположенных в плоскости Oxy. Если они пересекаются, найти точку пересечения и угол между прямыми.
3. Найти расстояние от точки M до плоскости γ, проходящей через точки A, B, C.
4. Составить уравнение плоскости π:

a) содержащей точку A и перпендикулярной плоскостям α и β (для *нечетных* вариантов);

b) содержащей точки A, B и перпендикулярной плоскости α (для *четных* вариантов).

5. Найти угол между плоскостями α и β.
6. Составить канонические уравнения прямой l – линии пересечения плоскостей α и β.

7. Найти точку пересечения прямой l и плоскости γ, а также угол между прямой l и плоскостью γ. Данные по прямой l и плоскости γ взять из предыдущих пунктов 3 и 6.

8. Найти точку M_1, симметричную точке M относительно:

a) плоскости α (для *нечетных* вариантов);

b) прямой l (для *четных* вариантов).

Условия вариантов приведены в приложении 7.

- **Комментарий к решению задач**

Задача 1. Составить уравнения прямых, расположенных в плоскости Oxy, проходящих через точку $P(3,-4)$ параллельно и перпендикулярно заданной прямой $l: 2x-3y+8=0$.

Решение. В уравнениях прямой на плоскости Oxy:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = m \cdot t + x_0, \\ y = n \cdot t + y_0, \end{cases} \quad t \in R,$$

коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали $\overline{N}=(A,B)$ прямой, а коэффициенты m и n совпадают с координатами направляющего вектора $\overline{s}=(m,n)$ прямой. На рис. 6.2 прямая l_1 параллельна заданной прямой $l: 2x-3y+8=0$, и поэтому ее вектор нормали $\overline{N}_1$ совпадает с вектором нормали $\overline{N}=(2,-3)$ прямой l:

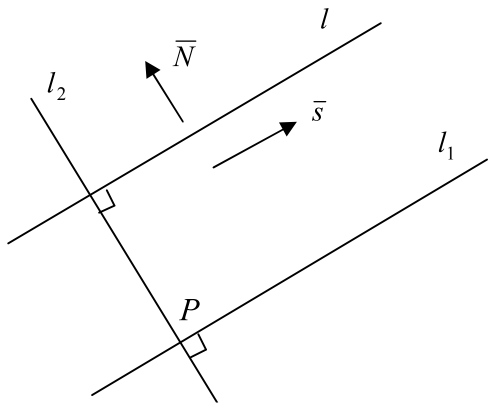

Рис. 6.2

$\overline{N}_1 = \overline{N} = (2, -3)$. Следовательно, уравнение прямой l_1 имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \text{или} \quad 2(x-3) - 3(y+4) = 0,$$

откуда получим $y = \frac{2}{3}x - 6$.

Прямая l_2 перпендикулярна прямой l, и поэтому ее направляющий вектор $\overline{s}_2$ совпадает с вектором нормали прямой l: $\overline{s}_2 = \overline{N} = (2, -3)$. Составим параметрическое уравнение прямой l_2:

$$l_2 : \begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = -3t - 4, \end{cases} \quad t \in R.$$

Замечание. Если прямая l задана параметрическими уравнениями, то известен ее направляющий вектор $\overline{s} = (m, n)$, который одновременно является вектором нормали для прямой l_2 и направляющим для прямой l_1.

Задача 2. Выяснить взаимное расположение прямых $l_1 : \begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = -t + 1, \end{cases}$

и $l_2 : x - 3y + 4 = 0$, расположенных в плоскости Oxy. Если они пересекаются, найти точку пересечения и угол между прямыми.

Решение. Направляющий вектор прямой l_1 имеет вид: $\bar{s}_1 = (2, -1)$, для прямой l_2 известен вектор нормали $\overline{N}_2 = (1, -3)$. Предполагаемое расположение прямых представлено на рис. 6.3.

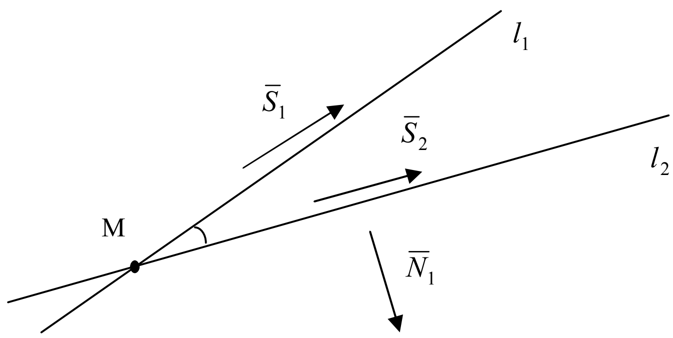

Рис. 6.3

Поскольку скалярное произведение $(\bar{s}_1, \overline{N}_2) = 2 + 3 = 5 \neq 0$, векторы $\bar{s}_1$ и $\overline{N}_2$ не ортогональны, поэтому прямые l_1 и l_2 не параллельны и пересекаются в какой-то точке M. Найдем координаты точки M. Для этого подставим x и y в параметрической форме записи в уравнение прямой l_2:

$$2t + 3 - 3(-t + 1) + 4 = 0, \; 5t + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad t = -4/5.$$

Следовательно, точке M соответствует значение параметра $t=-4/5$. Подставляя это значение параметра в уравнение прямой l_1, получим координаты точки пересечения:

$$x_M = 2(-4/5)+3 = 7/5, \quad y_M = 4/5+1 = 9/5.$$

В итоге $M\,(7/5, 9/5)$.

В качестве направляющего вектора прямой l_2 можно взять любой вектор, ортогональный вектору $\overline{N}_2$.

Если вектор $\overline{s}_2$ имеет координаты $\overline{s}_2=(m_2, n_2)$, то равенство нулю скалярного произведения $(\overline{s}_2, \overline{N}_2)=0$ приводит к записи $m_2-3n_2=0$. Полагая здесь, например, $n_2=1$, получим $m_2=3$, следовательно, один из направляющих векторов прямой l_2 имеет координаты $\overline{s}_2=(3,1)$.

Найдем косинус угла между прямыми l_1 и l_2:

$$\cos\varphi = \frac{|(\overline{s}_1, \overline{s}_2)|}{|\overline{s}_1|\cdot|\overline{s}_2|} = \frac{|2\cdot 3+1\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Прямые пересекаются под углом $\pi/4$.

Ответ: $M\,(7/5, 9/5)$, $\varphi=\pi/4$.

Задача 3. Найти расстояние от точки $M(1,-1,2)$ до плоскости γ, проходящей через точки $A(1,-3,8)$, $B(2,2,-1)$, $C(4,-5,3)$,.

Решение. Составим уравнение плоскости, содержащей точки A, B и C. Для этого найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (1, 5, -9), \quad \overline{AC} = (3, -2, -5).$$

Вектор $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ ортогонален плоскости γ, поэтому его можно выбрать в качестве вектора нормали $\overline{N}$ к плоскости γ:

$$\overline{N} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = -43\bar{i} - 22\bar{j} - 17\bar{k}.$$

Составим уравнение плоскости γ, содержащей точки A, B и C:

$$\gamma : \; -43(x-1) - 22(y+3) - 17(z-8) = 0$$

или $-43x - 22y - 17z + 113 = 0$.

Расстояние от точки $M(1, -1, 2)$ до плоскости γ равно:

$$\rho = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-43 + 22 - 17 \cdot 2 + 113|}{\sqrt{(-43)^2 + 22^2 + (-17)^2}} = 1{,}13.$$

Задача 4а. Составить уравнение плоскости π, содержащей точку $A(1, -1, 3)$ и перпендикулярной плоскостям $\alpha : x - 3y + z - 1 = 0$ и $\beta : 2x + y - z + 3 = 0$ (для *нечетных* вариантов).

Решение. По условию плоскость π перпендикулярна плоскостям α и β (рис. 6.4), поэтому вектор векторного произведения векторов нормали $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ к плоскостям α и β будет ортогонален плоскости π (рис 6.4).

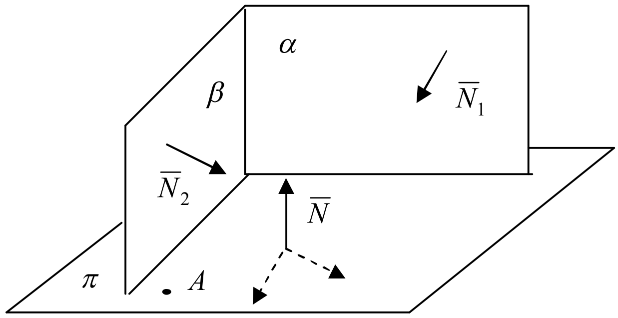

Рис. 6.4

$$\overline{N} = \left[\overline{N}_1, \overline{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}\,.$$

Составим уравнение плоскости $\pi:\quad 2(x-1)+3(y+1)+7(z-3)=0$ или $2x+3y+7z-20=0$.

Задача 4б. Составить уравнение плоскости π, содержащей точки $A(1,-1,3)$ и $B(-2,1,5)$ и перпендикулярной плоскости $\alpha: x-3y+z-1=0$ (для *четных* вариантов).

Решение.

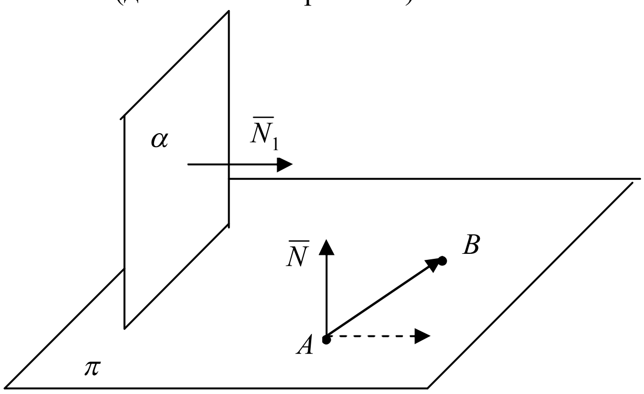

Рис. 6.5

Вектор нормали к плоскости π находят как векторное произведение $[\overline{N}_1, \overline{AB}]$, где $\overline{N}_1$ – вектор нормали к плоскости α (рис. 6.5). В итоге

$$\overline{N} = \left[\overline{N}_1, \overline{AB}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9\bar{i} - 5\bar{j} - 7\bar{k},$$

и уравнение плоскости π имеет вид:

$$\pi:\ -9(x-1) - 5(y+1) - 7(z-3) = 0$$

или $\pi: -9x - 5y - 7z + 7 = 0$.

Задача 5. Найти угол между плоскостями $\alpha: x - 3y + z - 1 = 0$ и $\beta: 2x + y - z + 3 = 0$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{|(\overline{N}_1, \overline{N}_2)|}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} = \frac{|-2|}{\sqrt{66}} = \frac{2}{\sqrt{66}}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{66}} \approx 76^0$$

Задача 6. Написать канонические уравнения прямой l — линии пересечения плоскостей $\alpha: x - 3y + z - 5 = 0$ и $\beta: 2x + 3y - 4z - 1 = 0$.

Решение. Поскольку векторы нормали каждой из плоскостей $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ ортогональны любой прямой, расположенной в соответствующей плоскости, оба вектора нормали будут ортогональны прямой l (рис.6.6).

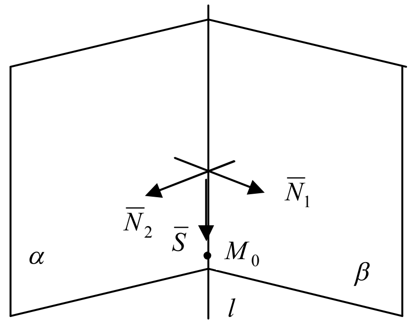

Рис. 6.6

Поэтому в качестве направляющего вектора прямой можно выбрать вектор

$$\overline{S}=\left[\overline{N}_1,\overline{N}_2\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=9\bar{i}+6\bar{j}+9\bar{k}=(9,6,9)$$

или вектор $\bar{s}_0=\dfrac{\overline{S}}{3}=(3,2,3)$, коллинеарный вектору $\overline{S}$.

Для составления уравнения прямой необходимо также найти координаты любой точки $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, принадлежащей прямой l. Эти координаты находят как одно из решений системы[1]:

$$\begin{cases}x-3y+z-5=0,\\ 2x+3y-4z-1=0.\end{cases} \tag{6.3}$$

Полагая, например, в (6.3) $z=0$, получим:

$$\begin{cases}x_0-3y_0=5,\\ 2x_0+3y_0=1.\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x_0=2,\quad y_0=-1,$$

[1] Система имеет бесконечно много решений, ей удовлетворяют координаты каждой точки прямой.

и точка M_0 имеет координаты $M_0\,(2,-1,0)$.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\bar{s}_0$, имеют вид: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Задача 7. Найти точку пересечения прямой l и плоскости γ, а также угол между прямой l и плоскостью γ. Данные по прямой l и плоскости γ взять из предыдущих пунктов 3 и 6.

Решение. В задаче 3 этого раздела получено уравнение плоскости γ: $43x+22y+17z-113=0$, а в задаче 6 получены канонические уравнения прямой l: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. Перейдем к параметрическим уравнениям прямой

$$\begin{cases} x=3t+2, \\ y=2t-1, \qquad t\in R. \\ z=3t, \end{cases} \tag{6.4}$$

Точке M_0 (рис.6.7) пересечения прямой и плоскости соответствует некоторое значение параметра t_0.

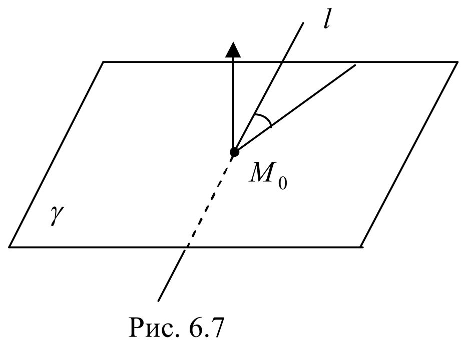

Рис. 6.7

Для получения t_0 подставим выражения (6.4) в уравнение плоскости:

$$43(3t_0+2)+22(2t_0-1)+17(3t_0)-113=0,$$

$$224t_0 - 49 = 0, \qquad t_0 = \frac{7}{32}.$$

Подставляя t_0 в (6.4), получим координаты точки пересечения $M_0\left(\frac{85}{32}, -\frac{9}{16}, \frac{21}{32}\right)$.

Угол φ между прямой и плоскостью (или угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость) найдем как угол $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, где θ — угол между направляющим вектором прямой и вектором нормали к плоскости. Направляющий вектор прямой $\bar{s}$ и вектор нормали к плоскости $\overline{N}$ имеют вид: $\bar{s} = (3,2,3)$ и $\overline{N} = (43, 22, 17)$. Следовательно,

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{|(\bar{s}, \overline{N})|}{|\bar{s}| \cdot |\overline{N}|} \approx \frac{14}{15},$$

откуда $\varphi = \arcsin\frac{14}{15} \approx 69^\circ$.

Задача 8а. Найти точку M_1, симметричную точке $M(1, 0, -2)$ относительно плоскости $\alpha: 2x - y + z - 3 = 0$.

Решение. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости α (рис.6.8). В качестве направляющего вектора $\overline{S}$ прямой можно выбрать вектор нормали $\overline{N}(2, -1, 1)$ к плоскости. Полагая, что $\overline{S} = \overline{N} = (2, -1, 1)$, перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t, \\ z = t - 2, \end{cases} \qquad t \in R. \tag{6.5}$$

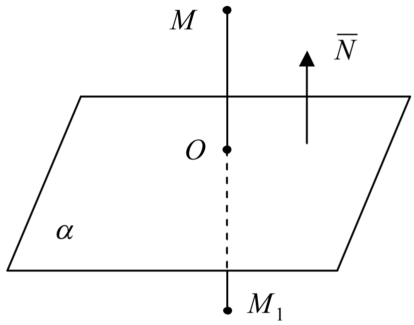

Рис. 6.8

Найдем координаты точки $O(x_0, y_0, z_0)$ пересечения прямой и плоскости, подставив выражение (6.5) в уравнение плоскости:

$$2(2t_0+1)-(-t_0)+(t_0-2)-3=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=\tfrac{1}{2}.$$

Точка O имеет координаты $O\left(2,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2}\right)$. Поскольку точка O является серединой отрезка MM_1, то

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_M+x_{M_1}}{2}, \\ y_0=\dfrac{y_M+y_{M_1}}{2}, \\ z_0=\dfrac{z_M+z_{M_1}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1}=2x_0-x_M, \\ y_{M_1}=2y_0-y_M, \\ z_{M_1}=2z_0-z_M, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1}=2\cdot 2-1=3, \\ y_{M_1}=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)-0=-1, \\ z_{M_1}=2\cdot(-\tfrac{3}{2})+2=-1. \end{cases}$$

Ответ: точка M_1 имеет координаты $M_1(3,-1,-1)$.

Задача 8б. Найти точку M_1, симметричную точке $M(1, 0, -2)$ относительно прямой $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

Решение. Сначала составим уравнение плоскости α, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l (рис. 6.9).

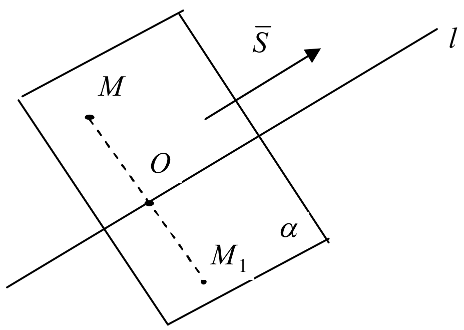

Рис. 6.9

Вектор нормали $\overline{N}$ к плоскости α совпадает с направляющим вектором $\overline{S}$ прямой l — $\overline{N} = \overline{S} = (1, 2, -3)$. Тогда уравнение плоскости имеет вид: $1(x-1) + 2(y-0) - 3(z+2) = 0$ или $x + 2y - 3z = 7$.

Найдем координаты точки $O(x_0 y_0, z_0)$ пересечения прямой l и плоскости α так, как мы это делали в задаче 7.

Запишем параметрические уравнения прямой l :

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t, \\ z = -3t - 1, \end{cases} \qquad t \in R .$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем соответствующее значение параметра t_0 :

$$t_0 + 2 + 2(2t_0) - 3(-3t_0 - 1) = 7 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{7} .$$

Итак, точка O имеет координаты $O\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{10}{7}\right)$.

Поскольку точка O является серединой отрезка MM_1 ,

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_M + x_{M_1}}{2}, \\ y_0 = \dfrac{y_M + y_{M_1}}{2}, \\ z_0 = \dfrac{z_M + z_{M_1}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2x_0 - x_M , \\ y_{M_1} = 2y_0 - y_M , \\ z_{M_1} = 2z_0 - z_M , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \frac{30}{7} - 1 = \frac{23}{7}, \\ y_{M_1} = \frac{4}{7} - 0 = \frac{4}{7}, \\ z_{M_1} = -\frac{20}{7} + 2 = -\frac{6}{7}. \end{cases}$$

Ответ: точка M_1 имеет координаты $M_1\left(\frac{23}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$.

6.4. Приложение векторной алгебры и аналитической геометрии. Расчет пирамиды

- **Условия задач**

1. Выбрать в декартовой прямоугольной системе координат четыре произвольные точки A, B, C, D так, чтобы они не лежали ни в одной из координатных плоскостей.

1.1. Проверить, не принадлежат ли эти точки одной плоскости (если все они расположены в одной плоскости, то следует изменить координаты одной из точек).

1.2. Проверить, не является ли треугольник ΔABC равнобедренным (в случае утвердительного ответа измените координаты одной из точек).

2. Рассмотреть пирамиду $DABC$ с вершинами в точках A, B, C, D и, выбрав в качестве основания пирамиды ΔABC, определить или составить:

2.1. Возможные уравнения плоскости, содержащей точки A, B, C.

2.2. Возможные уравнения прямой l_1, проходящей через точки A и B.

2.3. Площадь ΔABC.

2.4. В ΔABC найти высоту CE, опущенную из вершины C на сторону AB, координаты основания высоты (точки E) и составить уравнение прямой l_{CE}, содержащей эту высоту.

2.5. В ΔABC найти длину медианы CM и составить уравнение прямой l_{CM}, содержащей медиану CM.

2.6. В ΔABC найти биссектрису CK угла $\angle ACB$ и составить уравнение прямой l_{CK}, содержащей биссектрису. Задачу решить двумя способами.

3. Расчеты в пирамиде $DABC$.

3.1. Составить уравнение прямой l_{DH}, содержащей высоту пирамиды DH и найти ее длину. Задачу решить двумя способами.

3.2. Найти объем пирамиды $DABC$ (двумя способами).

3.3. Найти угол между гранями ABC и ADB.

3.4. Найти угол между ребром DA и основанием пирамиды.

4. Составить уравнения скрещивающихся прямых l_{CD} и l_{AB}.

4.1. Найти угол между прямыми l_{CD} и l_{AB}.

4.2. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (двумя способами).

● Комментарий к решению задач

Задача 1. Выберем четыре точки, так, чтобы они не лежали ни в одной из координатных плоскостей $A(1,-1,-2)$, $B(-1,-2,3)$, $C(3,2,3)$, $D(1,-3,4)$.

1.1. Проверим, не лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости. Для этого следует рассмотреть три вектора $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и если векторы компланарны, то точки будут принадлежать одной плоскости. Так как $\overline{AB} = (-2,-1,5)$, $\overline{AC} = (2,3,5)$, $\overline{AD} = (0,-2,6)$ и

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 5\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}=-64\neq 0,$$

то точки A,B,C,D в одной плоскости не лежат.

1.2. Проверим, не является ли ΔABC равнобедренным. Для этого найдем длины сторон треугольника:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+5^2}=\sqrt{30},\quad \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38},$$

$$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}.$$

Среди сторон нет равных, и поэтому ΔABC не является равнобедренным.

2. Рассмотрим ΔABC.

2.1. Составим различные уравнения плоскости π_1, содержащей точки A,B,C.

Общее уравнение плоскости, найдем как уравнение плоскости, проходящей через три точки (условие компланарности векторов $\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}$):

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z+2\\ -2 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

или $(x-1)(-20)-(y+1)(-20)+(z+2)(-4)=0$, или

$-5x+5y-z+8=0$.

Параметрическое уравнение плоскости π_1. Начальной точкой плоскости выберем точку A, а в качестве направляющих векторов плоскости возьмем векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$. Параметрическое уравнение плоскости π_1 имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + 2\tau, \\ y = -1 - t + 3\tau, \\ z = -2 + 5t + 5\tau, \end{cases} \qquad \tau \in R, t \in R.$$

Нормированное уравнение плоскости π_1 получим умножением общего уравнения плоскости на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{51}}.$$

Оно имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{51}}(5x - 5y + z - 8) = 0$$

Уравнение плоскости в отрезках получим из общего уравнения:

$$\frac{x}{8/5} + \frac{y}{-8/5} + \frac{z}{1/5} = 1.$$

2.2. Выпишем различные виды уравнения прямой l_1, проходящей через точки A и B. Примем за начальную точку прямой точку A, а вектор $\overline{q}_1 = \overline{AB} = (-2,-1,5)$ возьмем в качестве направляющего вектора возьмем.

Параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \quad t \in R, \\ z = -2 + 5t, \end{cases}$$

Каноническое уравнение:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{5}.$$

Уравнение прямой, определяемой как линии пересечения двух непараллельных плоскостей. Прямая l_1 лежит на пересечении плоскости π_1 и π_2, содержащей точки A, D, B. Уравнение π_2 получим из условия компланарности векторов $\overline{AM}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$

$$\left(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

или $\pi_2 : x + 3y + z + 4 = 0$, следовательно, координаты точек прямой l_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 5x - 5y + z - 8 = 0, & \pi_1(ABC), \\ x + 3y + z + 4 = 0, & \pi_2(ABD). \end{cases}$$

Можно сделать проверку. Непосредственная подстановка координат точки $A(1,-1,-2)$ в уравнения системы дает два тождества

$$\begin{cases} 1 + 3(-1) + (-2) + 4 = 0, \\ 5 \cdot 1 - 5(-1) + (-2) - 8 = 0, \end{cases}$$

и, значит, точка A принадлежит прямой l_1.

Направляющий вектор прямой l_1, можно найти как векторное произведение векторов нормали $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ плоскостей π_1 и π_2 соответственно

$$\overline{q}_2 = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\bar{i} - 4\bar{j} + 20\bar{k} .$$

Поскольку $\overline{q}_2 = (-8,-4,20) = 4(-2,-1,5)$, то векторы $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ коллинеарны и оба могут служить направляющими векторами нашей прямой.

2.3. Найдем площадь ΔABC. Поскольку

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = (-20,20,-4),$$

то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{816} = 2\sqrt{51}\,.$$

Сначала составим уравнение высоты ΔABC, опущенной на сторону AB, и найдем ее длину.

2.4. Пусть CE искомая высота и $E(x_1, y_1, z_1)$. Точка E принадлежит прямой l_1, поэтому существует такое $t = t_1$, что (параметрические уравнения)

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t_1, \\ y_1 = -1 - t_1, \\ z_1 = -2 + 5t_1. \end{cases}$$

С другой стороны, т.к. $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, имеем $(\overline{CE}, \overline{AB}) = 0$ или

$$-2(x_1-3)+(-1)(y_1-2)+5(z_1-3)=0,$$

Следовательно,

$-2(1-2t_1-3)+(-1)(-1-t_1-2)+5(-2+5t_1-3)=0$, откуда $t_1=\dfrac{3}{5}$ и,

$x_1=-\dfrac{1}{5},\quad y_1=-\dfrac{8}{5},\quad z_1=1.$

Таким образом, $E\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{8}{5},1\right),\quad \overline{CE}=\left(-\dfrac{16}{5},-\dfrac{18}{5},-\dfrac{10}{5}\right)$

и $$h=\left|\overline{CE}\right|=\sqrt{\frac{16^2+18^2+10^2}{25}}=2\frac{\sqrt{34}}{5}.$$

2-ой способ. Поскольку известно, что $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}h\left|\overline{AB}\right|$, а

$S_{\Delta ABC}=2\sqrt{51}$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{30}$, то.

$$h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overline{AB}\right|}=4\sqrt{\frac{51}{30}}=2\sqrt{\frac{34}{5}},$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

Уравнение высоты составим, выбрав в качестве направляющего вектора $\overline{q}_3=-\dfrac{5}{2}\overline{CE}=(8,9,5)$ и в качестве начальной точки — точку $C(3,2,3)$. Параметрическое уравнение высоты имеет следующий вид $\begin{cases} x=8t+3, \\ y=9t+2, \\ z=5t+3, \end{cases}\quad t\in R.$

2.5. Рассмотрим медиану CM в ΔABC (рис.6.10).

Очевидно, что $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, где $\overline{CA} = (-2,-3,-5)$,
$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = (-1,-1/2,5/2)$, поэтому $\overline{CM} = (-3,-7/2,-5/2)$.

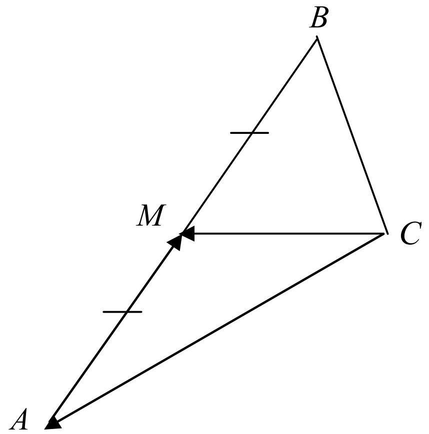

Рис. 6.10

Параметрическое уравнение медианы (направляющий вектор $\overline{q}_4 = -2\overline{CM} = (6,7,5)$, начальная точка $C(3,2,3)$)

$$\begin{cases} x = 6t + 3, \\ y = 7t + 2, \\ z = 5t + 3, \end{cases} \quad t \in R.$$

Длина медианы $m = \left|\overline{CM}\right| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110}$.

2.6. Рассмотрим биссектрису CK угла $A\widehat{C}B$, найдем ее длину и составим уравнение биссектрисы.

1-ый способ. Воспользуемся параметрическим уравнением прямой l_1, которому удовлетворяют координаты точки $K(x_2, y_2, z_2)$ при некотором значении t_2 параметра $\begin{cases} x_2 = -2t_2 + 1, \\ y_2 = -t_2 - 1, \\ z_2 = 5t_2 - 2. \end{cases}$

Поскольку CK − биссектриса, то углы $\alpha = \beta$ и $\cos\alpha = \cos\beta$. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{CA}, \overline{CK})}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CK}|} = \frac{(\overline{CB}, \overline{CK})}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CK}|} = \cos\beta .$$

Сокращая здесь на $|\overline{CK}|$, получим $\dfrac{(\overline{CA}, \overline{CK})}{|\overline{CA}|} = \dfrac{(\overline{CB}, \overline{CK})}{|\overline{CB}|}$ или, учитывая, что $\overline{CK} = (-2-2t_2, -3-t_2, -5+5t_2)$, $\overline{CB} = (-4,-4,0)$, $\overline{CA} = (-2,-3,-5)$, придем к равенству

$$\frac{2(2+2t_2)+3(3+t_2)-5(-5+5t_2)}{\sqrt{38}} = \frac{4(2+2t_2)+4(3+t_2)}{\sqrt{32}},$$

откуда $t_2 = \dfrac{76-10\sqrt{19}}{36+6\sqrt{19}} \approx 0{,}52$ [2].

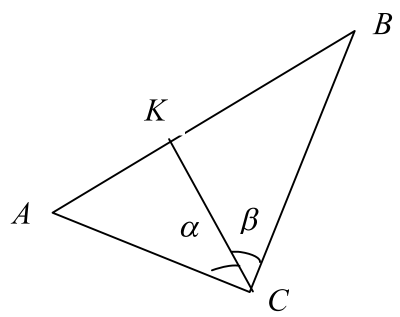

Рис. 6.11

Таким образом, $|\overline{CK}| = (-3{,}04; -3{,}52; -2{,}4)$ и длина биссектрисы

$$b = |\overline{CK}| = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}52)^2 + (2{,}4)^2} \approx 5{,}23 .$$

[2] Расчеты проводим с точностью до второго знака после запятой.

Уравнение биссектрисы (направляющий вектор $\overline{q}_5 = \overline{CK}$, начальная точка $C(3,2,3)$) имеет вид $\begin{cases} x = 3 - t \cdot 3{,}04, \\ y = 2 - t \cdot 3{,}52, \\ z = 3 - t \cdot 2{,}4, \end{cases} \quad t \in R$.

2-ой способ. Из элементарной геометрии известно, что точка K (основание биссектрисы) делит основание AB в отношении λ/μ, где

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{19}}{4} \approx 1{,}09.$$

При этом координаты точки $K(x_2, y_2, z_2)$ вычисляются через координаты концов отрезка AB по известным формулам деления отрезка в заданном отношении (формулы 3.2). Подставляя в эти формулы соответствующие значения координат, получим

$$x_2 \approx \frac{1 + 1{,}09(-1)}{1 + 1{,}09} = -0{,}04; \quad y_2 \approx \frac{-1 + 1{,}09(-2)}{1 + 1{,}09} = -1{,}52;$$

$$z_2 \approx \frac{-2 + 1{,}09 \cdot 3}{1 + 1{,}09} = 0{,}61.$$

откуда $\overline{CK} = (-3{,}04; -3{,}52; -2{,}39)$. Длина биссектрисы

$b = \left|\overline{CK}\right| = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}52)^2 + (2{,}39)^2} \approx 5{,}23$, что совпадает с предыдущими вычислениями.

3. Рассмотрим теперь пирамиду $DABC$:

3.1. Составим уравнение высоты, опущенной из вершины D на основание, и найдем ее длину.

1-ый способ. Высоту пирамиды найдем, подставив координаты точки $D(1,-3,4)$ в нормированное уравнение плоскости π_1

$$H = d = \frac{1}{\sqrt{51}}\left|5 \cdot 1 - 5(-3) + 4 - 8\right| = \frac{16}{\sqrt{51}}.$$

2-ой способ. Найдем сначала координаты точки $Q(x_3, y_3, z_3)$ – проекции вершины D на плоскость основания π_1.. Очевидно, числа x_3, y_3, z_3 удовлетворяют общему уравнению плоскости π_1

$$-5x_3 + 5y_3 - z_3 + 8 = 0,$$

но одного этого уравнения недостаточно для определения трех неизвестных чисел. В то же время легко заметить, что вектор $\overline{DQ} = (x_3 - 1, y_3 + 3, z_3 - 4)$ коллинеарен вектору нормали $\overline{N} = (-5{,}5{,}-1)$ плоскости π_1, т.е. $\overline{DQ} = \mu\overline{N}$, где $\mu \neq 0$ некоторая постоянная. Последнее равенство равносильно трем соотношениям

$$x_3 = 1 - 5\mu, \quad y_3 = -3 + 5\mu, \quad z_3 = 4 - \mu.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, получим

$$-5(1 - 5\mu) + 5(-3 + 5\mu) - (4 - \mu) + 8 = 0,$$

откуда $\mu = \dfrac{16}{51}$, и в результате

$$\overline{DQ} = \mu\overline{N} = \frac{16}{51}(-5{,}5{,}-1).$$

Высота пирамиды $H = \dfrac{16}{51}\sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2} = \dfrac{16}{\sqrt{51}}$, что подтверждает предыдущие вычисления.

3.2. Найдем теперь объем пирамиды $DABC$.

1-ый способ.

$$V_{пир} = \frac{1}{3}HS_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\frac{16}{\sqrt{51}}\sqrt{204} = \frac{32}{3}.$$

2-ой способ. Вычислим теперь объем пирамиды через смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6}|-64| = \frac{32}{3}.$$

3.3. Угол между гранями пирамиды ABC и ADB это угол между плоскостями π_1 и π_2:

$$\cos\psi = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{|-5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}} = \frac{9}{\sqrt{561}} \approx 0{,}38, \qquad \psi \approx 68^\circ.$$

3.4. Угол φ между ребром пирамиды DA и ее основанием найдем, используя скалярное произведение векторов $\overline{DA} = (0{,}2{,}-6)$ и $\overline{n_1} = (-5{,}5{,}-1)$:

$$\cos\theta = \frac{|(\overline{DA}, \overline{n_1})|}{|\overline{DA}||\overline{n_1}|} = \frac{|0 \cdot (-5) + 2 \cdot 5 + (-6) \cdot (-1)|}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{51}} = \frac{4}{\sqrt{510}} \approx 0{,}18, \quad \theta \approx 80^\circ \text{ и}$$

$\varphi \approx 90^0 - 80^0 = 10^0$.

4. Составим уравнение прямой l_{CD} (проходит через точки C и D, направляющий вектор $\overline{q}_6 = \overline{CD} = (-2{,}-5{,}1)$, начальная точка $C(3{,}2{,}3)$): $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-3}{1}$. Напомним каноническое уравнение прямой l_{AB} (проходит через точки A и B, направляющий вектор $\overline{q}_1 = (-2{,}-1{,}5)$):

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{5}.$$

4.1. Угол φ между угол между прямыми l_{CD} и l_{AB}.

$$\cos\varphi = \frac{|(\bar{q}_1, \bar{q}_6)|}{|\bar{q}_1||\bar{q}_6|} = \frac{|(-2)(-2)+(-1)(-5)+5\cdot 1|}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{30}} = \frac{7}{15}, \text{ откуда } \varphi \approx 62^\circ .$$

4.2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

1-ый способ. Вычислим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{q}_1 = \overline{AB}$, $\bar{q}_6 = \overline{CD}$ и $\overline{AC}$. Поскольку

$$\left(\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 64,$$

то объем параллелепипеда $V_o = |\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AC}\right)| = 64$. Площадь основания параллелепипеда $S_{осн} = \left|\left[\overline{AB}, \overline{CD}\right]\right|$. Вычислим векторное произведение $\left[\overline{AB}, \overline{CD}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 24\bar{i} - 8\bar{j} + 8\bar{k}$,

и, следовательно, $S_{осн} = \left|\left[\overline{AB}, \overline{CD}\right]\right|$.

В результате расстояние между скрещивающимися прямыми равно

$$d = H = \frac{V_0}{S_{осн}} = \frac{64}{8\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

2-ой способ. Через прямую l_1 проведем плоскость π_0, которая будет параллельна прямой l_6. Эта плоскость содержит точку $A(1,-1,2)$ и имеет направляющие векторы $\overline{q}_1 = \overline{AB} = (-2,-1,5)$, $\overline{q}_6 = \overline{CD} = (-2,-5,1)$. Запишем общее уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 24(x-1) - 8(y+1) + 8(z-2) = 24x - 8y + 8z - 16 = 0$$

После умножения на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{8\sqrt{3^2+1+1}} = \frac{1}{8\sqrt{11}}$$

получим нормированное уравнение π_0

$$\frac{1}{\sqrt{11}}(3x - y + z - 2) = 0\,.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми найдем как расстояние от точки $C(3,2,3)$ прямой l_6 до плоскости π_0:

$$d = \frac{1}{\sqrt{11}}\left|3 \cdot 3 - 2 + 3 - 2\right| = \frac{8}{\sqrt{11}}\,,$$

что подтверждает полученный выше результат.

6.5. Линейные пространства. Собственные векторы и собственные значения

- **Условия задач**

1. Найти координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_i^{\,\prime}\}$, если известны его координаты в базисе $\{\overline{e}_i\}$ и задана связь между базисами (варианты заданий приведены в приложении 8).
2. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\{\overline{e}_i^{\,\prime}\}$, если линейный оператор задан матрицей A в базисе $\{\overline{e}_i\}$ (варианты заданий приведены в приложении 9).
3. Привести матрицу линейного оператора к диагональному виду и указать базис пространства (не обязательно ортонормированный), в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид (варианты заданий приведены в приложении 10).
4.

- Комментарий к решению задач.

Задача 1. Процедура решения задачи основана на материале раздела 4.2 главы 4 (стр. 168-171). Необходимо записать матрицу перехода от базиса к базису и применить формулу (4.15).

Задача 2. Решение задачи разобрано в примере 4.16 (стр. 203).

Задача 3. Процедура решения приведена в примере 4.18 (стр. 215).

Приложение 1.

№	Условие
1	$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=\ldots$
2	$(A-B)(A+B)-A^2+B^2=\ldots$
3	$(A+B)^2-(A^2+B^2)=\ldots$
4	$(A-B)^2-(A^2+B^2)=\ldots$
5	$A^2-2AB+B^2-(A-B)^2=\ldots$
6	$(A-2B)(A+2B)-A^2+4B^2=\ldots$
7	$9A^2+B^2-(3A+B)^2=\ldots$
8	$(2A-B)^2-4A^2-B^2=\ldots$
9	$(3A+2B)^2-9A^2-4B^2=\ldots$
10	$A^2+4B^2-(A-2B)^2=\ldots$
11	$(A+B)^2-2AB-B^2=\ldots$
12	$(A-3B)^2-(A^2-6AB+9B^2)=\ldots$
13	$(A-B)^2+2AB=\ldots$
14	$A^2-B^2+(B-A)(B+A)=\ldots$
15	$B^2-4A^2-(B-2A)(B+2A)=\ldots$
16	$(A+B)^2-2AB=\ldots$
17	$4A^2-8AB+4B^2-4(A-B)^2=\ldots$
18	$BA+AB+(A-B)^2=\ldots$
19	$A^2+4AB+4B^2-(A+2B)^2=\ldots$
20	$(2A+B)^2-(B^2+4AB+4A^2)=\ldots$
21	$(2A-B)^2-(4A^2-4AB+B^2)=\ldots$
22	$A^2-B^2-(A+B)(A-B)=\ldots$
23	$A^2+B^2-(A+B)^2=\ldots$

24	$A^2+B^2-(A-B)^2=\ldots$
25	$AB+BA-(A+B)^2=\ldots$
26	$(3A-B)^2-(9A^2+B^2)=\ldots$
27	$(B+3A)^2-3(AB+BA)=\ldots$
28	$\frac{(A+B)^2}{2}-AB=\ldots$
29	$(A-B)^2-(B^2-BA)=\ldots$
30	$(A+B)^2-(AB+A^2)=\ldots$

Приложение 2.

01 $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ -5 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	**02** $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$
03 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$	**04** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$
05 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	**06** $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

07 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	**08** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & -5 \end{vmatrix}$
09 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	**10** $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix}$
11 $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	**12** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$
13 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	**14** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
15 $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$	**16** $\begin{vmatrix} 4 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

17 $$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$	**18** $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$
19 $$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$	**20** $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -4 & -3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$
21 $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$	**22** $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$
23 $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -4 & -2 & -6 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$	**24** $$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
25 $$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & -5 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$	**26** $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & -6 & -5 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

27 $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -6 & -4 \\ 4 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$	**28** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & -4 & -5 \end{vmatrix}$
29 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -5 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$	**30** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ -6 & -3 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

Приложение 3.

01 $\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18, \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$	**02** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$
03 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -16, \\ 2x_1 - x_2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$	**04** $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$
05 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 + x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 24. \end{cases}$	**06** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$

07 $\begin{cases} -2x_1+2x_2-x_3=13, \\ x_1+4x_2+4x_3=7, \\ 2x_1+x_2-3x_3=-11. \end{cases}$	**08** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3=4, \\ 5x_1+x_2-2x_3=15, \\ 2x_1+6x_2-x_3=12. \end{cases}$
09 $\begin{cases} -x_1+3x_3=-8, \\ -x_1-2x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=8. \end{cases}$	**10** $\begin{cases} 4x_1-4x_2-5x_3=-9, \\ 4x_1+5x_2+5x_3=-30, \\ 3x_1-x_2+3x_3=-25. \end{cases}$
11 $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3=11, \\ 5x_1+3x_2=10, \\ 6x_1-2x_2+6x_3=-6. \end{cases}$	**12** $\begin{cases} 5x_1-2x_2+5x_3=23, \\ -x_1+4x_2+x_3=5, \\ x_1+3x_2-x_3=2. \end{cases}$
13 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=3, \\ -2x_2-x_3=1, \\ 2x_1-2x_2-x_3=-1. \end{cases}$	**14** $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1-2x_2+4x_3=9, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=20. \end{cases}$
15 $\begin{cases} -2x_1-5x_2+5x_3=13, \\ -x_1+5x_2-2x_3=-7, \\ 4x_1+x_2+4x_3=16. \end{cases}$	**16** $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9, \\ 4x_1+x_2+5x_3=9. \end{cases}$
17 $\begin{cases} 5x_1-4x_2+5x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2+x_3=3, \\ 4x_2+3x_3=-10. \end{cases}$	**18** $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3=-5, \\ -x_1+4x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1+2x_2-2x_3=-13. \end{cases}$
19 $\begin{cases} -2x_1+5x_2-2x_3=-12, \\ -2x_1+3x_2+4x_3=22, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=18. \end{cases}$	**20** $\begin{cases} -4x_1-x_2+x_3=-5, \\ 2x_1-x_2+4x_3=13, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=9. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x_1 - x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$	**22** $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 15, \\ 3x_1 - 3x_2 = 15. \end{cases}$
23 $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 39, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$	**24** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -14, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$
25 $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 45, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$	**26** $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -8. \end{cases}$
27 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_3 = 9, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25. \end{cases}$	**28** $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 13, \\ -x_1 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$
29 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$	**30** $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$

Приложение 4.

01

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

02 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 - x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$	
03 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$	
04 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ 6x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$	
05 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$	
06 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$	
07 $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$	
08 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$	

09 $\begin{cases}3x_1+4x_2+3x_3+5x_4+x_5=0,\\3x_1+4x_2+2x_3+3x_4+5x_5=0,\\4x_1-3x_2+2x_3+x_4+5x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3+3x_4=1,\\x_1+x_2+x_3-2x_4=2,\\-3x_1+4x_3+5x_4=1.\end{cases}$
10 $\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5=0,\\-x_1-2x_3+x_4+2x_5=0,\\5x_1+4x_2-2x_3+6x_4-3x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}5x_1+4x_2+5x_3+3x_4=5,\\-x_1+2x_2-x_3+x_4=-2,\\4x_1+x_2+x_3=4.\end{cases}$
11 $\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0,\\3x_1+2x_2+4x_3+3x_4+3x_5=0,\\6x_1-x_2-2x_3+6x_4+x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}4x_1+2x_2+5x_3+5x_4=5,\\5x_1+2x_3-x_4=0,\\x_1+3x_2+x_3+2x_4=-3.\end{cases}$
12 $\begin{cases}5x_1+3x_2+5x_3+x_4+3x_5=0,\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0,\\3x_1-x_2+4x_3+6x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3+x_4=1,\\2x_1-2x_2+4x_3-x_4=-2,\\x_1+2x_2+x_3=2.\end{cases}$
13 $\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3+4x_4+x_5=0,\\-x_1+5x_2+x_3-2x_5=0,\\-2x_1+2x_2+6x_3-3x_4+4x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}4x_1+3x_2+x_3+4x_4=2,\\x_1-2x_2+5x_4=1,\\2x_1+x_2+5x_4=3.\end{cases}$
14 $\begin{cases}5x_1+x_2+4x_3+x_4+4x_5=0,\\4x_1+2x_2+5x_4+4x_5=0,\\3x_1+4x_2+x_3+3x_4+2x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}4x_1+2x_2+4x_3+3x_4=4,\\-x_1-x_2+3x_3+5x_4=1,\\4x_2+3x_3+3x_4=5.\end{cases}$
15 $\begin{cases}4x_1+4x_2+4x_3+2x_4+5x_5=0,\\2x_1+4x_2-2x_3-x_4+4x_5=0,\\4x_1+3x_2+4x_3+x_4+5x_5=0;\end{cases}$	$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+4x_4=3,\\2x_1-x_2+5x_3-x_4=5,\\2x_1+2x_2+4x_3=2.\end{cases}$

16	$\begin{cases} 4x_1+4x_2+x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4+2x_5=0, \\ -x_1+2x_2+6x_3+4x_4+4x_5=0; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=1, \\ 4x_1+4x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2+6x_3-x_4=1. \end{cases}$
17	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3+5x_4+x_5=0, \\ -x_1-2x_2+2x_3+2x_5=0, \\ 6x_1+4x_2-3x_3=0; \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3+2x_4=4, \\ 3x_2-x_3+4x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+6x_3+4x_4=6. \end{cases}$
18	$\begin{cases} 2x_1+5x_2+5x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4-x_5=0, \\ -2x_1+5x_2-x_3-3x_4+6x_5=0; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=3, \\ -x_1+3x_2+x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3+2x_4=5. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+5x_4+4x_5=0, \\ 2x_2+5x_3+2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3-3x_4+5x_5=0; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+5x_2+1x_3+2x_4=2, \\ -x_1+x_2+2x_3=0, \\ -x_3+2x_4=1. \end{cases}$
20	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+5x_4+5x_5=0, \\ 5x_1+3x_2-x_3+5x_4-2x_5=0, \\ 4x_1+6x_2-x_4+4x_5=0; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=4, \\ 4x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 3x_2+x_3-x_4=1. \end{cases}$
21	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3+3x_4+2x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ -x_1+4x_2+2x_3-x_4+5x_5=0; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3+5x_4=3, \\ 5x_1+x_3+5x_4=4, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$

22 $\begin{cases} 4x_1+5x_2+5x_3+x_4+x_5=0, \\ x_2+3x_3+5x_4-2x_5=0, \\ 5x_1+5x_2-2x_3+5x_4+5x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+5x_2+5x_3+3x_4=1, \\ 4x_2+4x_3+5x_4=2, \\ -3x_1+4x_2+2x_3+5x_4=0. \end{cases}$
23 $\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3+x_4+3x_5=0, \\ -x_1+5x_2+3x_3+5x_5=0, \\ 6x_1-3x_2-x_3-2x_4+x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+4x_2+4x_3+x_4=1, \\ 4x_1+x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=2. \end{cases}$
24 $\begin{cases} 2x_1+2x_2+5x_3+4x_4+2x_5=0, \\ -x_1+3x_2-2x_5=0, \\ -3x_1+x_2+6x_3=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+3x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4=-3. \end{cases}$
25 $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_5=0, \\ x_2+6x_3+4x_4-x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3+4x_4=1, \\ 4x_1-2x_2-x_3-x_4=-2, \\ 3x_1+6x_2-2x_3=-3. \end{cases}$
26 $\begin{cases} 5x_1+5x_2+x_3+4x_4+4x_5=0, \\ -x_1+5x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 6x_1-2x_2+x_3+4x_4+3x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3+x_4=1, \\ -2x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 3x_2+4x_3-x_4=2. \end{cases}$
27 $\begin{cases} 4x_1+3x_2+3x_3+3x_4+2x_5=0, \\ 2x_1-x_2+2x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+5x_3+x_4-3x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3+5x_4=4, \\ -x_1+x_2-x_4=0, \\ 6x_1+5x_2-2x_3+6x_4=-3. \end{cases}$
28 $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3+5x_4+3x_5=0, \\ x_1-x_2+x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+6x_2+4x_3+x_4-x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3+3x_4=3, \\ -x_1+3x_2-x_3-x_4=3, \\ -x_1+x_3=6. \end{cases}$

29 $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3+5x_4+5x_5=0, \\ -2x_1+x_4=0, \\ 4x_1+3x_2+6x_3+5x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=2, \\ -2x_1-2x_3+5x_4=1, \\ x_1+6x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$	
30 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4+3x_5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+4x_4=4, \\ 4x_2-x_3-2x_4=1, \\ 3x_1-x_4=-3. \end{cases}$	

Приложение 5.

	A	B
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

12	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 6 & 9 & -5 \\ 5 & 8 & -4 \\ 8 & 14 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 13 & 7 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

26	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix}$

Приложение 6.

01

1) $\overline{a} = (-2,3,5)$, $\overline{m} = (0,1,2)$,
$\overline{n} = (2,3,-1)$, $\overline{p} = (2,0,3)$.
2) $\overline{m} = (1,2,-3)$, $\overline{n} = (0,1,2)$,
$\overline{a} = 2\overline{m} + 3\overline{n}, \overline{b} = \overline{n} - \overline{m}.$
3) $A(1,4,-1)$, $B(4,4,3)$, $C(8,4,-1)$.

02

1) $\overline{a} = (-3,2,4)$, $\overline{m} = (1,0,3)$,
$\overline{n} = (2,-1,0)$, $\overline{p} = (3,-1,5)$.
2) $\overline{m} = (3,2,5)$, $\overline{n} = (-1,3,4)$,
$\overline{a} = 5\overline{m} + \overline{n}, \overline{b} = \overline{n} - 2\overline{m}.$
3) $A(2,-1,3)$, $B(5,-1,7)$, $C(9,-1,3)$.

4) $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q}$,

$|\overline{p}| = 1, |\overline{q}| = 2,\ \angle(\overline{p},\overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

5) $\overline{a} = (2,3,1), \overline{b} = (-1,0,1),$
$\overline{c} = (2,2,2).$

6) $A(1,3,6), B = (2,2,1),$
$C(-1,0,1)\,, D = (-4,6,3)\,.$

4) $\overline{a} = 3\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q}$,

$|\overline{p}| = 4, |\overline{q}| = 1,\ \angle(\overline{p},\overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

5) $\overline{a} = (3,2,1), \overline{b} = (2,3,4),$
$\overline{c} = (3,1,-1).$

6) $A(-1,2,6,), B = (2,-3,0),$
$C(-10,5,8)\,, D = (-5,2,-4)\,.$

03

1) $\overline{a} = (3,2,-1), \overline{m} = (2,3,0),$
$\overline{n} = (0,5,6), \overline{p} = (-1,2,3)\,.$

2) $\overline{m} = (1,1,3), \overline{n} = (2,-1,4),$
$\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}, \overline{b} = 2\overline{n} - 4\overline{m}.$

3)
$A(-1,2,5), B(-1,11,5), C(-1,5,9)$

4) $\overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$,

$|\overline{p}| = \dfrac{1}{5}, |\overline{q}| = 1,\ \angle(\overline{p},\overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

5) $\overline{a} = (1,5,2), \overline{b} = (-1,1,-1),$
$\overline{c} = (1,1,1).$

6) $A(7,2,4), B = (7,-1,-2),$
$C(3,3,1)\,, D = (-4,2,1)\,.$

04

1) $\overline{a} = (5,1,-1), \overline{m} = (3,2,1),$
$\overline{n} = (0,5,2), \overline{p} = (-2,3,5)\,.$

2) $\overline{m} = (1,2,5), \overline{n} = (3,2,1),$
$\overline{a} = \overline{m} + 3\overline{n}, \overline{b} = 6\overline{n} + 2\overline{m}.$

3) $A(3,-1,2), B(6,-1,6), C(10,-1,2)$

4) $\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 5\overline{q}$,

$|\overline{p}| = 4, |\overline{q}| = \dfrac{1}{2},\ \angle(\overline{p},\overline{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

5) $\overline{a} = (1,-1,-3), \overline{b} = (3,2,1),$
$\overline{c} = (2,3,4).$

6) $A(2,1,6), B = (-1,5,-2),$
$C(-7,-3,2)\,, D = (-6,-3,6)\,.$

05

1) $\overline{a} = (2,-1,10), \overline{m} = (-1,2,1),$
$\overline{n} = (0,5,7), \overline{p} = (3,2,-1)\,.$

2) $\overline{m} = (5,1,-1), \overline{n} = (1,2,3),$
$\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}, \overline{b} = 4\overline{m} + 2\overline{n}.$

3) $A(0,2,1), B(3,2,5), C(7,2,1)\,.$

06

1) $\overline{a} = (5,0,-2), \overline{m} = (3,6,1),$
$\overline{n} = (1,-1,3), \overline{p} = (2,1,0),\,.$

2) $\overline{m} = (-3,2,5), \overline{n} = (1,2,-1),$
$\overline{a} = 2\overline{m} - 5\overline{n}, \overline{b} = 5\overline{n} - 2\overline{m}.$

3) $A(1,-2,-3), B(4,-2,1), C(8,-2,-3)\,.$

4) $\overline{a}=\overline{p}-2\overline{q},\ \overline{b}=2\overline{p}+\overline{q}$,

$|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{3\pi}{4}$.

5) $\overline{a}=(3,3,1), \overline{b}=(1,-2,1)$,

$\overline{c}=(1,1,1)$.

6) $A(-1,-5,2), B=(-6,0,-3)$,

$C(3,6,-3)$, $D=(-10,6,7)$.

4) $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$,

$|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}$.

5) $\overline{a}=(3,1,-1), \overline{b}=(-2,-1,0)$,

$\overline{c}=(5,2,-1)$.

6) $A(0,-1,-1), B=(-2,3,5)$,

$C(1,-5,-9)$, $D=(-1,-6,3)$.

07

1) $\overline{a}=(3,3,-1), \overline{m}=(1,2,3)$,

$\overline{n}=(-1,4,5), \overline{p}=(2,-6,1)$.

2) $\overline{m}=(1,3,-2), \overline{n}=(4,4,3)$,

$\overline{a}=3\overline{m}+2\overline{n}, \overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$.

3) $A(0,5,2), B(3,5,6), C(7,5,2)$.

4) $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$,

$|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{2}$.

5) $\overline{a}=(4,3,1), \overline{b}=(1,-2,1)$,

$\overline{c}=(2,2,2)$.

6) $A(5,2,0), B=(2,5,0)$,

$C(1,2,4)$, $D=(-1,1,1)$.

08

1) $\overline{a}=(3,2,3), \overline{m}=(-1,3,5)$,

$\overline{n}=(0,1,2), \overline{p}=(2,4,-7)$.

2) $\overline{m}=(8,-1,1), \overline{n}=(2,1,0)$,

$\overline{a}=5\overline{m}+2\overline{n}, \overline{b}=2\overline{n}+3\overline{m}$.

3) $A(2,-3,4), B(2,6,4), C(2,0,8)$.

4) $\overline{a}=4\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-\overline{q}$,

$|\overline{p}|=7, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}$.

5) $\overline{a}=(4,3,1), \overline{b}=(6,7,4)$,

$\overline{c}=(2,0,-1)$.

6) $A(2,-1,-2), B=(1,2,1)$,

$C(5,0,-6)$, $D=(-10,9,-7)$.

09

1) $\overline{a}=(3,2,-5), \overline{m}=(1,2,3)$,

$\overline{n}=(0,1,-8), \overline{p}=(-3,2,1)$.

2) $\overline{m}=(2,1,0), \overline{n}=(3,2,-1)$,

$\overline{a}=2\overline{m}-\overline{n}, \overline{b}=2\overline{n}-4\overline{m}$.

3) $A(1,2,3), B(1,5,7), C(1,1\,1,3)$.

10

1) $\overline{a}=(1,2,-3), \overline{m}=(2,5,-1)$,

$\overline{n}=(3,-1,4), \overline{p}=(0,5,6)$.

2) $\overline{m}=(0,1,4), \overline{n}=(-1,2,3)$,

$\overline{a}=3\overline{m}+\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}-2\overline{m}$.

3) $A(0,-2,5), B(3,-2,9), C(7,-2,5)$

4) $\overline{a} = \overline{p} - 4\overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} + \overline{q}$,

$|\overline{p}| = 1, |\overline{q}| = 2$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5) $\overline{a} = (3,2,1), \overline{b} = (1,-3,-7)$,

$\overline{c} = (1,2,3)$.

6) $A(-2,0,-4), B = (-1,7,1)$,

$C(4,-8,4), D = (1,-4,6)$.

4) $\overline{a} = \overline{p} + 4\overline{q}$, $\overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q}$,

$|\overline{p}| = 7, |\overline{q}| = 2$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{3}$.

5) $\overline{a} = (3,7,2), \overline{b} = (-2,0,-1)$,

$\overline{c} = (2,2,1)$.

6) $A(14,4,5), B = (-5,-3,2)$,

$C(-2,-6,-3), D = (-2,2,-1)$.

11

1) $\overline{a} = (6,-1,7), \overline{m} = (-1,2,1)$,

$\overline{n} = (3,5,6), \overline{p} = (-2,3,-5)$.

2) $\overline{m} = (3,2,5), \overline{n} = (0,1,3)$,

$\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}, \overline{b} = 4\overline{n} + 2\overline{m}$.

3) $A(-1,0,2), B(-1,3,6), C(-1,9,2)$

4) $\overline{a} = 3\overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$,

$|\overline{p}| = 10, |\overline{q}| = 1$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}$.

5) $\overline{a} = (1,-2,6), \overline{b} = (1,0,1)$,

$\overline{c} = (2,-6,17)$.

6) $A(1,2,0), B = (3,0,-3)$,

$C(5,2,6), D = (8,4,-9)$.

12

1) $\overline{a} = (1,0,3), \overline{m} = (-4,3,2)$,

$\overline{n} = (1,2,-6), \overline{p} = (5,1,0)$.

2) $\overline{m} = (1,2,-1), \overline{n} = (0,1,5)$,

$\overline{a} = \overline{m} - 3\overline{n}, \overline{b} = 6\overline{n} - 2\overline{m}$.

3) $A(7,1,-2), B(10,1,2), C(14,1,-2)$.

4) $\overline{a} = 4\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$,

$|\overline{p}| = 5, |\overline{q}| = 1$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

5) $\overline{a} = (6,3,4), \overline{b} = (-1,-2,-1)$,

$\overline{c} = (2,1,2)$.

6) $A(2,-1,2), B = (1,2,-1)$,

$C(3,2,1), D = (-4,2,5)$.

13

1) $\overline{a} = (-2,3,8), \overline{m} = (1,3,5)$,

$\overline{n} = (4,-3,2), \overline{p} = (-2,1,7)$.

2) $\overline{m} = (1,3,2), \overline{n} = (-3,2,0)$,

$\overline{a} = 4\overline{m} - \overline{n}, \overline{b} = 4\overline{n} - \overline{m}$.

3) $A(0,-2,1), B(0,1,5), C(0,7,1)$.

4) $\overline{a} = 2\overline{p} + \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q}$,

14

1) $\overline{a} = (3,-1,4), \overline{m} = (0,1,6)$,

$\overline{n} = (2,3,-1), \overline{p} = (1,5,8)$.

2) $\overline{m} = (-1,2,0), \overline{n} = (7,1,4)$,

$\overline{a} = 2\overline{m} + 8\overline{n}, \overline{b} = 4\overline{n} + \overline{m}$.

3) $A(6,0,1), B(9,0,5), C(13,0,1)$.

4) $\overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$,

$|\overline{p}|=6, |\overline{q}|=7,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

5) $\overline{a}=(7,3,4), \overline{b}=(-1,-2,-1),$
$\overline{c}=(4,2,4).$

6) $A(1,1,2), B=(-1,1,3),$
$C(2,-2,4), D=(-1,0,-2)$.

$|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=4,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

5) $\overline{a}=(2,3,2), \overline{b}=(4,7,5),$
$\overline{c}=(2,0,-1).$

6) $A(2,3,1), B=(4,1,-2),$
$C(6,3,7), D=(7,5,-3)$.

15

1) $\overline{a}=(-1,4,3), \overline{m}=(3,2,5),$
$\overline{n}=(1,-3,2), \overline{p}=(6,7,-1)$.

2) $\overline{m}=(-3,5,1), \overline{n}=(0,1,5),$
$\overline{a}=2\overline{m}+6\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}+\overline{m}.$

3) $A(1,2,-1), B(1,5,3), C(1,11,-1)$.

4) $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q},$
$|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

5) $\overline{a}=(5,3,4), \overline{b}=(-1,0,-1),$
$\overline{c}=(4,2,4).$

6) $A(1,1,-1), B=(2,3,1),$
$C(3,2,1), D=(5,9,-8)$.

16

1) $\overline{a}=(0,2,3), \overline{m}=(6,1,3),$
$\overline{n}=(-5,2,1), \overline{p}=(3,-2,0)$.

2) $\overline{m}=(0,1,4), \overline{n}=(1,2,8),$
$\overline{a}=\overline{m}-\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}+2\overline{m}.$

3) $A(0,-6,5), B(3,-6,9), C(7,-6,5)$.

4) $\overline{a}=2\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=3\overline{p}+\overline{q},$
$|\overline{p}|=4, |\overline{q}|=1,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

5) $\overline{a}=(3,10,5), \overline{b}=(-2,-2,-3),$
$\overline{c}=(2,4,3).$

6) $A(1,5,-7), B=(-3,6,3),$
$C(-2,7,3(\ ), D=(-4,8,-12)$.

17

1) $\overline{a}=(2,7,5), \overline{m}=(-1,0,1),$
$\overline{n}=(3,1,5), \overline{p}=(0,4,7)$.

2) $\overline{m}=(2,3,8), \overline{n}=(-1,4,1),$
$\overline{a}=2\overline{m}+3\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}-4\overline{m}.$

3) $A(2,1,3), B(5,1,7), C(9,1,3)$.

4) $\overline{a}=5\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-3\overline{q},$

18

1) $\overline{a}=(-3,4,6), \overline{m}=(2,1,0),$
$\overline{n}=(-1,2,5), \overline{p}=(3,-1,4)$.

2) $\overline{m}=(0,1,5), \overline{n}=(-1,4,3),$
$\overline{a}=\overline{m}-3\overline{n}, \overline{b}=6\overline{n}-2\overline{m}.$

3) $A(3,-1,2), B(6,-1,6), C(10,-1,2)$

4) $\overline{a}=7\overline{p}-2\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q},$

$|\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

5) $\overline{a}=(-2,-4,-3), \overline{b}=(4,3,1),$
$\overline{c}=(6,7,4).$

6) $A(-3,4,-7),\ B=(1,5,-4),$
$C(-5,-2,0)\,,D=(2,5,4)\,.$

$|\overline{p}|=\dfrac{1}{2}, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

5) $\overline{a}=(3,1,-1), \overline{b}=(1,0,-1),$
$\overline{c}=(8,3,-2).$

6) $A(-1,2,-3),\ B=(4,-1,0),$
$C(2,1,-2)\,,D=(3,4,5)\,.$

19

1) $\overline{a}=(2,-5,7), \overline{m}=(0,5,1),$
$\overline{n}=(-1,3,2),\ \overline{p}=(3,2,-4)\,.$

2) $\overline{m}=(1,3,-5), \overline{n}=(2,3,4),$
$\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}-5\overline{m}.$

3)
$A(7,-1,0),\ B(10,-1,4),\ C(14,-1,0)$

4) $\overline{a}=6\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+\overline{q},$
$|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=4,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

5) $\overline{a}=(4,1,2), \overline{b}=(-3,-3,-3),$
$\overline{c}=(2,1,2).$

6) $A(4,-1,3),\ B=(-2,1,0),$
$C(0,-5,1)\,,D=(3,2,-6)\,.$

20

1) $\overline{a}=(3,2,-7), \overline{m}=(1,3,5),$
$\overline{n}=(2,-3,4),\ \overline{p}=(0,1,6)\,.$

2) $\overline{m}=(1,2,-3), \overline{n}=(4,3,2),$
$\overline{a}=6\overline{m}+\overline{n}, \overline{b}=2\overline{m}+4\overline{n}.$

3) $A(-5,0,2),\ B(-2,0,6),\ C(2,0,2)$

4) $\overline{a}=10\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=3\overline{p}-\overline{q},$
$|\overline{p}|=4, |\overline{q}|=1,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{6}.$

5) $\overline{a}=(4,1,2), \overline{b}=(9,2,5),$
$\overline{c}=(1,1,-1).$

6) $A(1,-1,1),\ B=(-2,0,3),$
$C(2,1,-1)\,,D=(2,-2,-4)\,.$

21

1) $\overline{a}=(-3,4,8), \overline{m}=(2,3,-1),$
$\overline{n}=(1,0,2),\ \overline{p}=(4,-5,6)\,.$

2) $\overline{m}=(-1,4,5), \overline{n}=(0,1,2),$
$\overline{a}=3\overline{m}+5\overline{n}, \overline{b}=6\overline{m}-\overline{n}.$

3) $A(5,1,1),\ B(5,4,5),\ C(5,10,1)\,.$

4) $\overline{a}=6\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+2\overline{q},$

22

1) $\overline{a}=(-1,2,-3), \overline{m}=(0,1,2),$
$\overline{n}=(-5,-3,2),\ \overline{p}=(4,2,-1)\,.$

2) $\overline{m}=(0,-1,5), \overline{n}=(2,4,6),$
$\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}, \overline{b}=4\overline{n}-2\overline{m}.$

3) $A(0,-3,7),\ B(3,-3,11),\ C(7,-3,7)$

4) $\overline{a}=3\overline{p}+4\overline{q},\ \overline{b}=\overline{q}-\overline{p},$

$|\overline{p}|=8, |\overline{q}|=\dfrac{1}{2},\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}.$

5) $\overline{a}=(5,3,4), \overline{b}=(4,3,3),$
$\overline{c}=(9,5,8).$

6) $A(1,2,0),\ B=(1,-1,2),$
$C(0,1,-1)\ ,D=(-3,0,1)\ .$

$|\overline{p}|=\dfrac{5}{2}, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{2}.$

5) $\overline{a}=(3,4,2), \overline{b}=(1,1,0),$
$\overline{c}=(8,11,8).$

6) $A(1,0,2),\ B=(1,2,-1),$
$C(2,-2,1)\ ,D=(2,1,0)\ .$

23

1) $\overline{a}=(6,-1,3), \overline{m}=(2,0,-1),$
$\overline{n}=(-1,2,5),\ \overline{p}=(1,3,4)\ .$

2) $\overline{m}=(1,3,2), \overline{n}=(5,-1,3),$
$\overline{a}=\overline{m}+3\overline{n}, \overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}.$

3) $A(1,-3,1),\ B(4,-3,5),\ C(8,-3,1)$

4) $\overline{a}=7\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-3\overline{q},$
$|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=1,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{3\pi}{4}.$

5) $\overline{a}=(4,-1,-6), \overline{b}=(1,-3,-7),$
$\overline{c}=(2,-1,-4).$

6) $A(1,2,-3),\ B=(1,0,1),$
$C(-2,-1,6)\ ,D=(0,-5,-4)\ .$

24

1) $\overline{a}=(3,1,8), \overline{m}=(0,1,2),$
$\overline{n}=(6,-1,3),\ \overline{p}=(5,3,-2)\ .$

2) $\overline{m}=(0,1,4), \overline{n}=(1,3,5),$
$\overline{a}=\overline{m}-4\overline{n}, \overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}.$

3) $A(9,-1,1),\ B(12,-1,5),\ C(16,-1,1)$

4) $\overline{a}=\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=3\overline{p}-\overline{q},$
$|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=5,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{2\pi}{3}.$

5) $\overline{a}=(3,1,0), \overline{b}=(-5,-4,-5),$
$\overline{c}=(4,2,4).$

6) $A(3,10,-1),\ B=(-2,3,-5),$
$C(-6,0,-3)\ ,D=(1,-1,2)\ .$

25

1) $\overline{a}=(2,-1,10), \overline{m}=(3,2,0),$
$\overline{n}=(1,4,8),\ \overline{p}=(-4,5,6)\ .$

2) $\overline{m}=(-1,1,3), \overline{n}=(2,1,4),$
$\overline{a}=\overline{m}-2\overline{n}, \overline{b}=2\overline{n}-\overline{m}.$

3) $A(1,0,4),\ B(1,3,8),\ C(1,9,4)\ .$

4) $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-3\overline{q},$
$|\overline{p}|=7, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}.$

26

1) $\overline{a}=(1,-2,3), \overline{m}=(3,4,5),$
$\overline{n}=(1,6,-3),\ \overline{p}=(0,1,2)\ .$

2) $\overline{m}=(1,2,-3), \overline{n}=(0,1,4),$
$\overline{a}=\overline{m}+6\overline{n}, \overline{b}=6\overline{m}+\overline{n}.$

3) $A(2,1,-1),\ B(2,4,3),\ C(2,10,-1)$

4) $\overline{a}=5\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+\overline{q},$
$|\overline{p}|=5, |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{5\pi}{6}.$

5) $\overline{a}=(3,0,3), \overline{b}=(8,1,6)$,
$\overline{c}=(1,1,-1)$.

6) $A(-1,2,4)$, $B=(-1,-2,-4)$,
$C(3,0,3)$, $D=(7,-3,1)$.

5) $\overline{a}=(1,-1,4), \overline{b}=(1,0,3)$,
$\overline{c}=(1,-3,8)$.

6) $A(0,-3,1)$, $B=(-4,1,2)$,
$C(2,-1,5)$, $D=(3,1,-4)$.

27

1) $\overline{a}=(-5,2,0), \overline{m}=(1,1,3)$,
$\overline{n}=(2,3,-1), \overline{p}=(6,0,5)$.

2) $\overline{m}=(1,3,-2), \overline{n}=(1,4,5)$,
$\overline{a}=2\overline{m}-3\overline{n}, \overline{b}=6\overline{n}-4\overline{m}$.

3)
$A(-2,1,0)$, $B(-2,4,4)$, $C(-2,10,0)$

4) $\overline{a}=3\overline{p}-4\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}+3\overline{q}$,
$|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=3,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{4}$.

5) $\overline{a}=(6,3,4), \overline{b}=(-1,-2,-1)$,
$\overline{c}=(2,1,2)$.

6) $A(1,3,0)$, $B=(4,-1,2)$,
$C(3,0,1)$, $D=(-4,3,5)$.

28

1) $\overline{a}=(-6,2,1), \overline{m}=(2,2,-1)$,
$\overline{n}=(3,-4,0), \overline{p}=(1,5,7)$.

2) $\overline{m}=(5,-1,3), \overline{n}=(4,4,2)$,
$\overline{a}=3\overline{n}+2\overline{m}, \overline{b}=2\overline{m}-\overline{n}$.

3) $A(1,9,0)$, $B(1,12,4)$, $C(1,18,0)$.

4) $\overline{a}=6\overline{p}-\overline{q},\ \overline{b}=5\overline{q}+\overline{p}$,
$|\overline{p}|=\dfrac{1}{2}, |\overline{q}|=4,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{5\pi}{6}$.

5) $\overline{a}=(4,1,1), \overline{b}=(-9,-4,-9)$,
$\overline{c}=(6,2,6)$.

6) $A(-2,-1,-1)$, $B=(0,3,2)$,
$C(3,1,-4)$, $D=(-4,7,3)$.

29

1) $\overline{a}=(2,4,-1), \overline{m}=(0,1,3)$,
$\overline{n}=(1,1,4), \overline{p}=(-3,2,5)$.

2) $\overline{m}=(0,1,-4), \overline{n}=(8,2,1)$,
$\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}, \overline{b}=3\overline{n}+6\overline{m}$.

3). $A(1,-3,0)$, $B(1,0,4)$, $C(1,6,0)$

4) $\overline{a}=2\overline{p}+3\overline{q},\ \overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$,
$|\overline{p}|=2, |\overline{q}|=1,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}$.

5) $\overline{a}=(-3,3,3), \overline{b}=(-4,7,6)$,
$\overline{c}=(3,0,-1)$.

30

1) $\overline{a}=(-3,0,5), \overline{m}=(3,2,-1)$,
$\overline{n}=(0,1,3), \overline{p}=(7,5,2)$.

2) $\overline{m}=(-1,2,3), \overline{n}=(2,3,5)$,
$\overline{a}=4\overline{m}+\overline{n}, \overline{b}=2\overline{n}+3\overline{m}$.

3) $A(7,0,-1)$, $B(7,3,3)$, $C(7,9,-1)$

4) $\overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q},\ \overline{b}=5\overline{p}+\overline{q}$,
$|\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2,\ \angle(\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{6}$.

5) $\overline{a}=(-7,10,-5), \overline{b}=(0,-2,-1)$,
$\overline{c}=(-2,4,1)$.

6) $A(-3,-5,6)$, $B=(2,1,-4)$,
$C(0,-3,-1)$, $D=(-5,2,-8)$.

6) $A(2,-4,-3)$, $B=(5,-6,0)$,
$C(-1,3,-3)$, $D=(-10,-8,7)$.

Приложение 7.

Вариант 1.

1. $P(0;1)$, $3x-2y+5=0$.

2. $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t+1, \end{cases}$ $2x-y+5=0$.

3 – 8.

$A(-3;4;-7)$, $B(-1;5;-4)$,

$C(-5;-2;0)$,

$M(-12;7;-1)$.

$\alpha:\quad 2x+y+z-2=0,$

$\beta:\quad 2x-y-3z+6=0.$

Вариант 2.

1. $P(1;2)$, $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-2t. \end{cases}$

2. $x-2y+4=0$, $\begin{cases} x=4t+1, \\ y=2t-3. \end{cases}$

3 – 8.

$A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$,

$C(2;1;-2)$ $M(1;-6;-5)$.

$\alpha:\quad x-3y+2z+2=0,$

$\beta:\quad x+3y+z+14=0.$

Вариант 3.

1. $P(-1;4)$, $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{5}.$

2. $3x-4y+5=0$, $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t+3. \end{cases}$

Вариант 4.

1. $P(4;1)$, $5x-3y+4=0.$

2. $3x-4y+7=0$, $\begin{cases} x=4t+11, \\ y=3t-5. \end{cases}$

3 – 8.

$A(-3;-1;1)$, $B(-9;1;-2)$, $C(3;-5;4)$, $M(-7;0;-1)$.

$\alpha: \quad x-2y+z-4=0,$

$\beta: \quad 2x+2y-z-8=0.$

3 – 8.

$A(1;-1;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(2;1;-1)$, $M(-2;4;2)$.

$\alpha: \quad x+y+z-2=0,$

$\beta: \quad x-y-2z+2=0.$

Вариант 5.

1. $P(5;0)$, $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-t+7. \end{cases}$

2. $x+3y-5=0$, $2x-y+4=0.$

3 – 8.

$A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$,

$C(0;1;-1)$, $M(2;-1;4)$.

$\alpha: \quad 2x+3y+z+6=0,$

$\beta: \quad x-3y-2z+3=0.$

Вариант 6.

1. $P(-1;6)$, $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}.$

2. $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+5. \end{cases}$, $3x-2y=0.$

3 – 8.

$A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$,

$C(2;-2;1)$, $M(-5;-9;1)$.

$\alpha: \quad 3x+y-z-6=0,$

$\beta: \quad 3x-y+2z=0.$

Вариант 7.

1. $P(-7;1)$, $2x+y-3=0.$

2. $x+5y-35=0,$

Вариант 8

1. $P(-3;8)$, $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=t. \end{cases}$

2. $2x=3y$, $\begin{cases} x=-t, \\ y=3t+11. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -2t + 7, \\ y = 3t + 3. \end{cases}$$

3 — 8.

$A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$,
$C(-2;-1;6)$, $M(3;-2;-9)$.

$\alpha:\quad x + 5y + 2z + 11 = 0,$
$\beta:\quad x - y - z - 1 = 0.$

3 – 8.

$A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$,
$C(-6;0;-3)$, $M(-6;7;-10)$.

$\alpha:\quad 3x + 4y - 2z + 1 = 0,$
$\beta:\quad 2x - 4y + 3z + 4 = 0.$

Вариант 9.

1. $P(9;1)$, $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y+7}{2}.$

2. $12x + 20y - 11{,}2 = 0,$

$$\begin{cases} y = 9t + \frac{1}{2}, \\ x = -15t + 0{,}1. \end{cases}$$

3 – 8.

$A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$,
$C(3;0;-1)$, $M(-2;3;5)$.

$\alpha:\quad 5x + y + 3z + 4 = 0,$
$\beta:\quad x - y + 2z + 2 = 0.$

Вариант 10.

1. $P(3;4)$, $5x - 2y + 4 = 0.$

2. $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = -2t + 5, \end{cases}$ $2x - y + 15 = 0.$

3 – 8.

$A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$,

$C(2;-1;5)$, $M(-3;4;-5)$.

$\alpha:\quad x - y - z - 2 = 0,$
$\beta:\quad x - 2y + z + 4 = 0.$

Вариант 11.

1. $P(2;11)$, $\begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = 2t + 8. \end{cases}$

2. $3x + 5y - 4 = 0$, $\begin{cases} x = 10t - 1, \\ y = 6t + 5. \end{cases}$

3 – 8.

$A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$,

$C(3;0;1)$, $M(4;3;0)$.

α: $4x + y - 3z + 2 = 0$,
β: $2x - y + z - 8 = 0$.

Вариант 12.

1. $P(-3;5)$, $\dfrac{x-12}{2} = \dfrac{y-1}{3}$.

2. $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = t, \end{cases}$ $3x + y + 4 = 0$.

3 – 8.

$A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$

$C(3;1;-4)$, $M(-21;20;-16)$.

α: $3x + 3y - 2z - 1 = 0$,
β: $2x - 3y + z + 6 = 0$.

Вариант 13.

1. $P(1;13)$, $2x - 3y + 9 = 0$.

2. $x - 3y + 2 = 0$, $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = -3t + 7. \end{cases}$

3 – 8.

$A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$,

$C(0;-3;-1)$, $M(3;6;68)$.

α: $6x - 7y - 4z - 2 = 0$,
β: $x + 7y - z - 5 = 0$.

Вариант 14.

1. $P(5;14)$, $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t - 7. \end{cases}$

2. $3x + 5y - 5 = 0$, $\begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -2t - 1. \end{cases}$

3 – 8.

$A(2;-4;-3)$, $B(5;-6;0)$,

$C(-1;3;-3)$, $M(2;-10;8)$.

α: $8x - y - 3z - 1 = 0$,
β: $x + y + z + 10 = 0$.

Вариант 15.

1. $P(-1;2)$, $\dfrac{x+3}{15}=\dfrac{y-1}{4}$.

2. $\begin{cases} x=5t+1, \\ y=2t-4, \end{cases}$ $5x+2y-26=0$.

3 – 8.

$A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$,

$C(1;1;4)$, $M(-3;2;7)$.

$\alpha:\quad 6x-5y-4z+8=0,$

$\beta:\quad 6x+5y+3z+4=0.$

Вариант 16.

1. $P(-4;2)$, $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{-3}$.

2. $\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{x+1}{3}$, $\begin{cases} x=6t+0{,}25, \\ y=-4t+\frac{1}{6}. \end{cases}$

3 – 8.

$A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$,

$C(-1;0;1)$, $M(5;-4;5)$.

$\alpha:\quad x+5y-z-5=0,$

$\beta:\quad 2x-5y+2z+5=0.$

Вариант 17.

1. $P(-5;1)$, $\begin{cases} x=17t+10, \\ y=-2t+3. \end{cases}$

2. $3x-y+7=0$, $\begin{cases} x=2t-8, \\ y=5t-14. \end{cases}$

3 – 8.

$A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$,

$C(-10;5;8)$, $M(-12;1;8)$.

$\alpha:\quad 2x-3y+z+6=0,$

$\beta:\quad -x-3y-2z+3=0.$

Вариант 18.

1. $P(18;0)$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{7}$.

2. $x-4y+24=0$, $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-4t+2. \end{cases}$

3 – 8.

$A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$,

$C(-5;-2;-1)$, $M(10;1;8)$.

$\alpha:\quad 5x+y+2z+4=0,$

$\beta:\quad x-y-3z+2=0.$

Вариант 19.

1. $P(-1;4)$, $3x+11y-1=0$.

2. $5x-7y-39=0$, $\begin{cases} x=5t-5, \\ y=-7t. \end{cases}$

3 – 8.

$A(2;1;4)$, $B(3;5;-2)$,

$C(-7;-3;2)$, $M(-3;1;8)$.

$\alpha:\quad 4x+y+z+2=0,$
$\beta:\quad 2x-y-3z-8=0.$

Вариант 20.

1. $P(7;-5)$, $\begin{cases} x=3t+5, \\ y=2t-1. \end{cases}$

2. $2x+4y+7=0$, $\dfrac{x-1}{2}=y+1$.

3 – 8.

$A(-1;-5;2)$, $B(-6;0;-3)$,

$C(3;6;-3)$, $M(10;-8;-7)$.

$\alpha:\quad 2x+y-3z-2=0,$
$\beta:\quad 2x-y+z+6=0.$

Вариант 21.

1. $P(21;-4)$, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-7}{8}$.

2. $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=-2t+1, \end{cases}$ $x+y+5=0$.

3 – 8.

$A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$,

$C(1;-5;-9)$, $M(-4;-13;6)$.

$\alpha:\quad x+y-2z-2=0,$
$\beta:\quad x-y+z+2=0.$

Вариант 22.

1. $P(-4;8)$, $5x+22y+11=0$.

2. $\begin{cases} x=2t-5, \\ y=3t+1, \end{cases}$ $3x-2y+17=0$.

3 – 8.

$A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$,

$C(1;2;4)$, $M(-3;-6;-8)$.

$\alpha:\quad x+5y-z+11=0,$
$\beta:\quad x-y+2z-1=0.$

Вариант 23.

1. $P(-5;4)$, $\begin{cases} x = 23t + 1, \\ y = -t + 7. \end{cases}$

2. $3x - 11y + 8 = 0$, $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = t + 3. \end{cases}$

3 – 8.

$A(14;4;5)$, $B(-5;-3;2)$,

$C(-2;-6;-3)$, $M(-1;-8;7)$.

$\alpha: \quad x + 5y + 2z - 5 = 0,$

$\beta: \quad 2x - 5y - z + 5 = 0.$

Вариант 24.

1. $P(3;-24)$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-3}.$

2. $5x - 3y - 27 = 0$,

$\begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = -3t + 4. \end{cases}$

3 – 8.

$A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$,

$C(4;-8;-4)$, $M(-6;5;5)$.

$\alpha: \quad 6x - 7y - z - 2 = 0,$

$\beta: \quad x + 7y - 4z - 5 = 0.$

Вариант 25.

1. $P(-4;11)$, $5x - y + 25 = 0$.

2. $3x - 2y + 7 = 0$, $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 2t - 1{,}5. \end{cases}$

3 – 8.

$A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$,

$C(5;0;-6)$, $M(14;-3;7)$.

Вариант 26.

1. $P(-3;26)$, $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -4t + 5. \end{cases}$

2. $5x - 3y + 8 = 0$, $\begin{cases} x = 7t - 15, \\ y = 2t - 3. \end{cases}$

3 – 8.

$A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$,

$M(-13;-8;-16)$.

$\alpha: \quad x - y + z - 2 = 0,$

$\beta: \quad x - 2y - z + 4 = 0.$

$\alpha: \quad x - 3y + z + 2 = 0,$

$\beta: \quad x + 3y + 2z + 14 = 0.$

Вариант 27.

1. $P(-1;4)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{27}$.

2. $2x + 3y + 4 = 0$, $\begin{cases} x = t - 3{,}5, \\ y = -t + 0{,}5. \end{cases}$

3 – 8.

$A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$,

$C(3;2;1)$, $M(-5;3;7)$.

$\alpha: \quad 2x + 3y - 2z + 6 = 0,$

$\beta: \quad x - 3y + z + 3 = 0.$

Вариант 28.

1. $P(-1;1)$, $28x - y + 4 = 0$.

2. $3x - y + 1 = 0$, $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = -t + 1. \end{cases}$

3 – 8.

$A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$,

$C(2;-2;4)$, $M(2;3;8)$.

$\alpha: \quad 3x + 4y + 3z + 1 = 0,$

$\beta: \quad 2x - 4y - 2z + 4 = 0.$

Вариант 29.

1. $P(29;0)$, $\begin{cases} x = 29t - 1, \\ y = 3t + 5. \end{cases}$

2. $x - 5y + 4 = 0$, $\begin{cases} x = 3t - 8, \\ y = -t + 4. \end{cases}$

3 – 8.

$A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$,

$C(6;3;7)$, $M(-5;-4;8)$.

Вариант 30.

1. $P(-11;30)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$.

2. $5x - 2y + 10 = 0$, $\begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = 5t - 7{,}5. \end{cases}$

3 – 8.

$A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$,

$C(3;2;1)$, $M(-3;-7;6)$.

$\alpha: \quad 2x-3y-2z+6=0,$ $\qquad$ $\alpha: \quad 6x-5y+3z+8=0,$

$\beta: \quad 3x+3y+z-1=0.$ $\qquad$ $\beta: \quad 6x+5y-4z+4=0.$

Приложение 8.

01 $\bar{x}=(-1,2,-3)$, $\bar{e}_1{}'=-\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=-\bar{e}_1+3\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=5\bar{e}_1+4\bar{e}_2+2\bar{e}_3$.	**02** $\bar{x}=(6,2,5)$, $\bar{e}_1{}'=-3\bar{e}_1-\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_1-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-\bar{e}_1-2\bar{e}_2-3\bar{e}_3$.
03 $\bar{x}=(-7,2,-3)$, $\bar{e}_1{}'=-\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=2\bar{e}_1+3\bar{e}_2-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=\bar{e}_1+3\bar{e}_2+2\bar{e}_3$.	**04** $\bar{x}=(4,-5,-2)$, $\bar{e}_1{}'=-\bar{e}_1-4\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=4\bar{e}_1+3\bar{e}_2-\bar{e}_3$.
05 $\bar{x}=(-9,2,1)$, $\bar{e}_1{}'=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_1-\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=3\bar{e}_1-\bar{e}_2+3\bar{e}_3$.	**06** $\bar{x}=(6,4,-1)$, $\bar{e}_1{}'=2\bar{e}_1+4\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_2-\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+6\bar{e}_3$.
07 $\bar{x}=(-1,5,3)$, $\bar{e}_1{}'=3\bar{e}_1+\bar{e}_2+5\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=2\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=2\bar{e}_1+3\bar{e}_2-\bar{e}_3$.	**08** $\bar{x}=(-5,2,-8)$, $\bar{e}_1{}'=5\bar{e}_1+3\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=-2\bar{e}_1+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-2\bar{e}_1-\bar{e}_2+\bar{e}_3$.

09 $\bar{x}=(4,-2,-3)$, $\bar{e}_1{}'=2\bar{e}_1+5\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=4\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-\bar{e}_1+6\bar{e}_2-\bar{e}_3$.	**10** $\bar{x}=(-1,-5,1)$, $\bar{e}_1{}'=3\bar{e}_1+\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=2\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{e}_3{}'=5\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3$.
11 $\bar{x}=(4,-3,-3)$, $\bar{e}_1{}'=3\bar{e}_1+4\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_1-\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=\bar{e}_1+5\bar{e}_2$.	**12** $\bar{x}=(-8,-2,6)$, $\bar{e}_1{}'=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=2\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-\bar{e}_1+3\bar{e}_2+\bar{e}_3$.
13 $\bar{x}=(5,2,-9)$, $\bar{e}_1{}'=4\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=-\bar{e}_1-2\bar{e}_2+\bar{e}_3$.	**14** $\bar{x}=(-4,-2,3)$, $\bar{e}_1{}'=\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=-2\bar{e}_1+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=\bar{e}_1-2\bar{e}_2-3\bar{e}_3$.
15 $\bar{x}=(-1,-2,-7)$, $\bar{e}_1{}'=\bar{e}_1+4\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=5\bar{e}_1+6\bar{e}_2+\bar{e}_3$.	**16** $\bar{x}=(-2,2,3)$, $\bar{e}_1{}'=4\bar{e}_1+2\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2{}'=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3{}'=3\bar{e}_1+5\bar{e}_2+5\bar{e}_3$.

17 $\overline{x}=(-1,3,\,-6)$, $\overline{e}_1{}'=5\overline{e}_1+3\,\overline{e}_2+\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=4\overline{e}_1-2\,\overline{e}_2+3\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=4\overline{e}_1+\overline{e}_2-2\,\overline{e}_3$.	**18** $\overline{x}=(-6,8,\,-3)$, $\overline{e}_1{}'=\overline{e}_1+5\,\overline{e}_2+2\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=-\overline{e}_1+2\,\overline{e}_2+3\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=5\,\overline{e}_2-\overline{e}_3$.
19 $\overline{x}=(-5,2,\,-9)$, $\overline{e}_1{}'=5\overline{e}_1+2\,\overline{e}_2+4\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=\overline{e}_1+4\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=5\overline{e}_1-2\,\overline{e}_2+\overline{e}_3$.	**20** $\overline{x}=(3,2,\,-7)$, $\overline{e}_1{}'=2\,\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=\overline{e}_1+5\,\overline{e}_2+2\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=-\overline{e}_1+2\,\overline{e}_2$.
21 $\overline{x}=(1,-2,\,3)$, $\overline{e}_1{}'=\overline{e}_1+4\,\overline{e}_2+3\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=4\,\overline{e}_1+2\,\overline{e}_2+3\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=6\overline{e}_1-3\,\overline{e}_2+2\,\overline{e}_3$.	**22** $\overline{x}=(-6,-2,\,-3)$, $\overline{e}_1{}'=\overline{e}_1+5\,\overline{e}_2+5\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=\overline{e}_2+\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=-2\overline{e}_1-3\,\overline{e}_2+\overline{e}_3$.
23 $\overline{x}=(-5,8,\,3)$, $\overline{e}_1{}'=2\,\overline{e}_1+\overline{e}_2+3\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=3\,\overline{e}_1+2\,\overline{e}_2-2\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=4\overline{e}_1+3\,\overline{e}_2+5\,\overline{e}_3$.	**24** $\overline{x}=(1,-5,\,-3)$, $\overline{e}_1{}'=\overline{e}_1+\overline{e}_2+5\overline{e}_3$, $\overline{e}_2{}'=-2\,\overline{e}_2+5\,\overline{e}_3$, $\overline{e}_3{}'=\overline{e}_1-2\overline{e}_2-2\,\overline{e}_3$.

25 $\bar{x}=(6,5,-3)$, $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = 3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = 5\bar{e}_2+\bar{e}_3$.	**26** $\bar{x}=(-9,2,2)$, $\bar{e}_1' = 4\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = 3\bar{e}_1-2\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = \bar{e}_2-\bar{e}_3$.
27 $\bar{x}=(1,-4,-1)$, $\bar{e}_1' = 5\bar{e}_1+5\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1+5\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = -\bar{e}_1-\bar{e}_2+3\bar{e}_3$.	**28** $\bar{x}=(-7,-2,2)$, $\bar{e}_1' = 3\bar{e}_1+\bar{e}_2+5\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = 3\bar{e}_1+\bar{e}_2-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = 5\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3$.
29 $\bar{x}=(1,-3,-3)$, $\bar{e}_1' = 3\bar{e}_1+5\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1+5\bar{e}_2-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = 6\bar{e}_1-\bar{e}_2-2\bar{e}_3$.	**30** $\bar{x}=(6,-5,8)$, $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1+5\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = 2\bar{e}_1+4\bar{e}_2+5\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = -\bar{e}_1-2\bar{e}_2+6\bar{e}_3$.
31 $\bar{x}=(8,-7,3)$, $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1+4\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1+4\bar{e}_2+4\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = 5\bar{e}_1+5\bar{e}_2+3\bar{e}_3$.	**32** $\bar{x}=(1,-2,-3)$, $\bar{e}_1' = 3\bar{e}_1+4\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1+3\bar{e}_2-2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = 6\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3$.

Приложение 9.

01 $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -3\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$.	**02** $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = \overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = 5\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$.
03 $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -4\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$.	**04** $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -2\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -4\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = -\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.
05 $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$.	**06** $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = 5\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = 3\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$.
07 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -2\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.	**08** $A=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = 5\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$.
09 $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$.	**10** $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1{}' = -3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$, $\overline{e}_2{}' = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$.

11 $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 5\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.	**12** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = -4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$.
13 $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 4\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.	**14** $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$.
15 $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = -3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.	**16** $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 9\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$.
17 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$.	**18** $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = 4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = -\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$.
19 $A=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$.	**20** $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ $\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_2{}' = 5\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

21 $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$.	**22** $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & -1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 5\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.
23 $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 4\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.	**24** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 4\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = -\overline{e}_1 - \overline{e}_2$.
25 $A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = -5\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 4\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$.	**26** $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 + 5\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$.
27 $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = -\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = -2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$.	**28** $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = -3\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = -2\overline{e}_1 - \overline{e}_2$.
29 $A=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = \overline{e}_1 - 5\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2$.	**30** $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = -2\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2$.
31 $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = -\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2$.	**32** $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\overline{e}_1' = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$, $\overline{e}_2' = 5\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.

Приложение 10.

01	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$	**02**	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & 4 \\ -6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$
03	$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 7 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$	**04**	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
05	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -5 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$	**06**	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 9 & -10 \end{pmatrix}$
07	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$	**08**	$\begin{pmatrix} -10 & 5 & 1 \\ -9 & 1 & 4 \\ -9 & 8 & -3 \end{pmatrix}$
09	$\begin{pmatrix} 10 & 3 & -9 \\ 9 & 1 & -6 \\ 9 & 6 & -11 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ -9 & 5 & 4 \\ -9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \\ -6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ 9 & -3 & -4 \\ 9 & -8 & 1 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$

17	$\begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 6 & -7 & -1 \\ 6 & -17 & 9 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -9 \\ 9 & -1 & -6 \\ 9 & 6 & -13 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ -12 & 3 & 5 \\ -12 & 3 & -5 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3 & -11 & 9 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -19 & 17 \end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix} -14 & 3 & 7 \\ -15 & 3 & 8 \\ -15 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -8 \\ 12 & 1 & -7 \\ 12 & 1 & -7 \end{pmatrix}$	**24**	$\begin{pmatrix} 16 & -3 & -7 \\ 15 & -1 & -8 \\ 15 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 4 \\ 12 & -8 & -4 \\ 12 & -20 & 8 \end{pmatrix}$	**26**	$\begin{pmatrix} -22 & 1 & 13 \\ -21 & 1 & 12 \\ -21 & 0 & 13 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 12 & -7 & -3 \\ 15 & -6 & -7 \\ 15 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	**28**	$\begin{pmatrix} -9 & -1 & 11 \\ -15 & 7 & 9 \\ -15 & -3 & 19 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} -16 & 7 & 3 \\ -15 & 2 & 7 \\ -15 & 11 & -2 \end{pmatrix}$	**30**	$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 12 & -5 & -5 \\ 12 & -13 & 3 \end{pmatrix}$