ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

О п р е д е л е н и е 1. *Определителем* квадратной *матрицы А второго порядка* (короче – *определителем второго порядка*) называется число, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{или } |A|)$$

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{1}$$

О п р е д е л е н и е 2. *Определителем* квадратной *матрицы А третьего порядка* (короче – *определителем третьего порядка*) называется число, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{или } |A|)$$

и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е 1. Определитель третьего порядка может быть вычислен не только по формуле (2), называемой *разложением определителя по элементам первой строки*.

1) Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом *разложения определителя по элементам л ю б о й строки (столбца) матрицы А.*

При этом элементы выбранной строки (столбца) берут со знаками, указанными в следующей схеме:

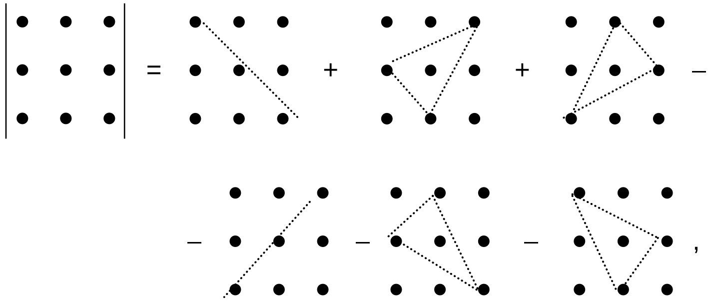
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

то есть знак «+» ставят у тех элементов a_{ij}, для которых сумма индексов $i+j$ есть число четное, «–» – сумма индексов $i+j$ есть число нечетное.

Например, выбрав для разложения *вторую строку* определителя, получим формулу *разложения определителя третьего порядка по элементам второй строки*:

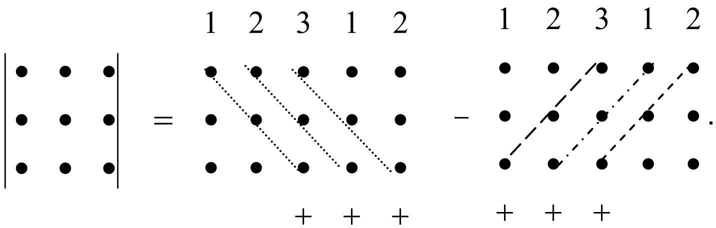
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2) Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться <u>*правилом треугольников*</u>:



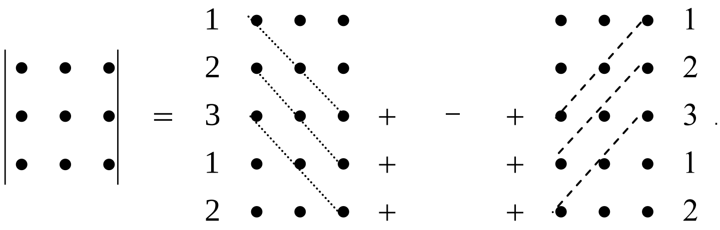
где выделенные элементы нужно перемножить.

3) Определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы A приписыванием к ней справа дополнительно первых двух столбцов матрицы A:



4) Определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы A

приписыванием к ней снизу дополнительно первых двух строк матрицы A:



2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Определение 3. Каждой квадратной матрице A порядка n (где $n \geq 1$) ставится в соответствие число, называемое *определителем матрицы* A, обозначаемое $|A|$, вычисляемое по правилу:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

и так далее:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Формула (3) носит название *разложения определителя по элементам первой строки*. Определитель может быть вычислен разложением по элементам его л ю б о й строки или столбца.

З а м е ч а н и е 2. Для определителя используют те же термины (элементы, строки, столбцы, главная и побочная диагонали), что и для соответствующей квадратной матрицы, чей определитель вычисляется.

Свойства определителя:

1) *Определитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими (по номеру) столбцами*;

2) *Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку или нулевой столбец*;

3) *Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца*;
4) *Определитель треугольной матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

равен произведению элементов главной диагонали;

5) *Определитель изменит знак на противоположный*, *если в нем поменять местами любые две строки или столбца* (*то есть применено элементарное преобразование первого типа*);

6) *Определитель не изменится*, *если в нем заменить строку суммой этой строки и некоторой другой*, *вспомогательной*, *предварительно умноженной на какое-либо число* (*то есть применено элементарное преобразование второго типа*);

7) Е*сли строку* (*столбец*) *определителя умножить на некоторое число* (*то есть применено элементарное преобразование третьего типа*), *то определитель умножится на это число*.

3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Существуют различные способы вычисления определителя, например по формуле (3), путем понижения порядка вычисляемого определителя. При этом разлагать определитель можно по любой строке или столбцу. Широко применяется способ, основанный на свойствах 5)–7), то есть на возможности преобразования определителя к треугольному виду с помощью элементарных преобразований строк (или столбцов) и применению далее свойства 4).

4. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

П р и м е р 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пользуясь определением, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-7) = 8 + 7 = 15.$$

О т в е т: 15.

П р и м е р 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

Способ I *(разложение по элементам первой строки):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) - 2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 6 \cdot (4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$

$$= (15 - 2) - 2 \cdot (20 + 2) + 6 \cdot (-8 - 6) = 13 - 44 - 84 = -115.$$

Способ II *(присоединение двух дополнительных строк):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot(-1) - 6\cdot 3\cdot 2 -$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \end{array} \qquad -(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot 4 = 15 - 48 - 4 -$$

$$-36 - 2 - 40 = -115.$$

О т в е т: -115.

П р и м е р 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

Способ I (*правило треугольников*):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot(-3) + (-2)\cdot 4\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot(-3) = -21 - 40 - 105 - 12 = -178.$$

Способ II (*приведение к верхнетреугольному виду*):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} (-5) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 13 & -18 \end{vmatrix} (-13/7) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -\dfrac{178}{7} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{178}{7} \right) = -178 .$$

О т в е т: -178.

<u>П р и м е р 4</u>. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 5 \\ 3 & 21 & 7 & 0 \end{vmatrix} .$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом разложения определителя по его второй строке, а затем по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 5 \\ 3 & 21 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot 11 = -110.$$

О т в е т: -110.

<u>П р и м е р 5.</u> Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом приведения определителя к верхнетреугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix}(-1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 = 0.$$

О т в е т: 0.