М А Т Р И Ц Ы

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

О п р е д е л е н и е 1. *Матрицей размерности* $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами* (их обозначают: a_{ij}, где i – номер строки матрицы, j – номер столбца матрицы, в которых расположен данный элемент). Матрицу обозначают:

$$A \quad \text{или} \quad \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Две матрицы называются *равными*, если они совпадают поэлементно.

О п р е д е л е н и е 3. Матрица размерности $m \times n$ называется *нулевой* (обозначают: O), если все ее элементы равны нулю.

О п р е д е л е н и е 4. Матрица размерности $1 \times n$ называется *матрицей-строкой*: $\left(a_{11}, \ldots, a_{1n}\right)$. Матрица размерности $m \times 1$ называется *матрицей-столбцом*: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

О п р е д е л е н и е 5. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Ее элементы $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную* диагональ; числа $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ – *побочную* диагональ.

З а м е ч а н и е 1. В частности, *квадратной матрицей второго порядка* называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

содержащая две строки и два столбца. Числа a_{ij} $(i, j = 1,2)$ называются *элементами* матрицы, где i – номер строки, а j – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* матрицы A; числа a_{21}, a_{12} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

Квадратной матрицей третьего порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

содержащая три строки и три столбца. Числа a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ называются *элементами* матрицы, где i – номер строки, j – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* матрицы; числа a_{31}, a_{22}, a_{13} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

О п р е д е л е н и е 6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все элементы, стоящие *вне* главной диагонали, равны нулю.

О п р е д е л е н и е 7. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю.

О п р е д е л е н и е 8. Квадратная матрица называется *единичной* (обозначают: E), если она диагональная и все элементы главной диагонали равны единице.

О п р е д е л е н и е 9. Матрица, полученная из квадратной матрицы A заменой всех строк соответствующими (по номеру) столбцами, называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^T.

2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

О п р е д е л е н и е 10. *Суммой (разностью) матриц* A и B размерности $m \times n$ называется такая матрица $A \pm B$ размерности $m \times n$, у которой все элементы равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

О п р е д е л е н и е 11. *Произведением матрицы* A размерности $m \times n$ *на число* α называется такая матрица $\alpha \cdot A$ размерности $m \times n$, у которой все элементы равны произведению соответствующего элемента матрицы A на число α.

1) Сложение, вычитание, умножение матрицы на число

Операции сложения, вычитания двух матриц одинаковой размерности, умножения матрицы на число вводятся (по определению) с помощью п о э л е м е н т н о г о выполнения соответствующего действия:

если $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, то

$$A \pm B = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad \alpha \cdot A = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Свойства операций:

$$A + B = B + A,$$
$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A,$$
$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$$
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$$

где $\alpha, \beta = const$; $A, B, C -$ матрицы одинаковой размерности.

2) Умножение матриц

Определение 12. <u>*Произведением матрицы*</u> $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}}}$ размерности $m \times k$ на матрицу $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,n}}}$ размерности $k \times n$ называется такая матрица C размерности $m \times n$, у которой элемент с номером ij вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}. \qquad (1)$$

Замечание 2. Число (1) равно скалярному произведению вектора, составленного из элементов i-й строки матрицы A, на вектор, составленный из элементов j-го столбца матрицы B.

Свойства операции:

$$A_{(n \times m)} \cdot O_{(m \times k)} = O_{(n \times k)},$$
$$O_{(k \times n)} \cdot A_{(n \times m)} = O_{(k \times m)},$$
$$A \cdot E = E \cdot A = A \qquad \text{(для квадратных матриц)},$$
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Предполагается, что указанные здесь действия определены.

3) Возведение в степень

Эта операция определена только для *квадратных* матриц и вводится по правилу:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \dots \quad , \quad A^k = A^{k-1} \cdot A.$$

В частности, справедливы равенства:

$$O^k = O \quad \forall k \in N, \qquad\qquad E^k = E \quad \forall k \in N.$$

Для *диагональной* матрицы справедлива формула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in N.$$

<u>3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ</u>

О п р е д е л е н и е 13. *<u>Элементарными преобразованиями</u>* строк матрицы называются преобразования следующих типов:

1) *перестановка местами двух строк матрицы*,
   условное обозначение: $\longleftarrow$, где стрелки указывают на строки, переставляемые местами;
2) *замена строки суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число* α*,*
   условное обозначение: (α), где стрелка указывает на изменяемую строку;
   множитель (α) ставят рядом со вспомогательной строкой;
3) *умножение строки на ненулевое число* α, условное обозначение: (α), ставится рядом с изменяемой строкой.

З а м е ч а н и е 3. Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов матрицы.

Определение 14. *Опорным элементом строки* матрицы называется первый слева ненулевой элемент этой строки. Если строка нулевая, то опорного элемента у нее нет.

Определение 15. Матрица называется *ступенчатой* (или *имеющей ступенчатый вид*), если выполнены следующие условия:

- если какая-то строка матрицы нулевая, то все последующие строки – нулевые;
- опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

Определение 16. Говорят, что матрица имеет *вид Гаусса*, если

- матрица является ступенчатой,
- все опорные элементы равны единице;
- над опорными элементами стоят только нули.

Теорема 1. Любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице A_1 с помощью элементарных преобразований строк первого и второго типов. Любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице A_2 вида Гаусса с помощью элементарных преобразований строк первого – третьего типов.

Определение 17. Матрицы A_1 и A_2, построенные по матрице A с помощью элементарных преобразований, называются, соответственно, *ступенчатым видом матрицы* A и *видом Гаусса матрицы* A.

Определение 18. Строки и столбцы матрицы A_1, в которых расположены ее опорные элементы, называются *базисными строками* и *базисными столбцами* исходной матрицы.

Замечание 4. Ступенчатый вид у матрицы и ее вид Гаусса не единственен. Наборы базисных строк и базисных столбцов матрицы также не являются инвариантами этой матрицы.

4. РАНГ МАТРИЦЫ

О п р е д е л е н и е 19. _Рангом матрицы_ A называется число ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы. Обозначение: $r(A)$.

З а м е ч а н и е 5. Ранг матрицы не меняется при применении к матрице A элементарных преобразований, то есть не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.

З а м е ч а н и е 6. Справедливы неравенства:

$$0 \le r(A) \le \min(m, n).$$

О п р е д е л е н и е 20. _Рангом системы_ m-мерных векторов $\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_k}$ называется ранг матрицы размерности $m \times k$, столбцами которой являются эти векторы.

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

П р и м е р 1. Определить размерность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

и указать ее элементы a_{13}, a_{24}, a_{32}.

Р е ш е н и е. Матрица A имеет три строки и четыре столбца, то есть $m = 3, n = 4$.

Следовательно, у рассматриваемой матрицы размерность 3×4. Для нее $a_{13} = 3$; $a_{24} = -2$; $a_{32} = 7$.

О т в е т: размерность 3×4; $a_{13} = 3$; $a_{24} = -2$; $a_{32} = 7$.

П р и м е р 2. Назвать матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

О т в е т: а) матрица-столбец размерности 3×1;

б) матрица-строка размерности 1×3;

в) нулевая матрица размерности 2×3;

г) матрица размерности 3×2;

д) единичная матрица порядка 2;

е) диагональная матрица порядка 2;

ж) верхнетреугольная матрица порядка 3.

П р и м е р 3. Вычислить матрицу $2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Зная матрицы A и B, находим:

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 14 & 6 \end{pmatrix}; \qquad 3B = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -3 \\ 0 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 0-12 & 2-9 & 4-(-3) \\ -2-0 & 14-15 & 6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -7 & 7 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: $\begin{pmatrix} -12 & -7 & 7 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;   г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Первая из перемножаемых матриц имеет размерность 2×3, а вторая матрица – размерность 2×1.

Так как число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй, то данные две матрицы перемножить нельзя.

б) Пользуясь формулой (1), находим матрицу размерности 2×1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 7 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

в) Пользуясь формулой (1), находим матрицу размерности 1×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 7 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & -7 \end{pmatrix}.$$

г) Пользуясь формулой (1), находим матрицу размерности 2×2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\begin{array}{c:c} 0\cdot 1+1\cdot(-3)+2\cdot 2 & 0\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot(-1) \\ \hdashline (-1)\cdot 1+7\cdot(-3)+3\cdot 2 & (-1)\cdot 1+7\cdot 0+3\cdot(-1) \end{array}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: а) не существует; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -20 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -16 & -4 \end{pmatrix}$.

П р и м е р 5. Найти и сравнить матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Перемножим данные в примере матрицы *A, B* в порядке $A\cdot B$ и $B\cdot A$:

а)
$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 31 & 18 \end{pmatrix} \\ B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 17 & 16 \end{pmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \quad A\cdot B\neq B\cdot A;$$

б)
$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ B\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \quad A\cdot B=B\cdot A.$$

О т в е т: а) $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 31 & 18 \end{pmatrix}=A\cdot B\neq B\cdot A=\begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 17 & 16 \end{pmatrix}$;

б) $A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

П р и м е р 6. Найти A^2, если

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) Так как

$$A^2 = A \cdot A$$

и все данные в примере матрицы являются квадратными, то вычисляем:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 9 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix};$$

б) Учитывая, что рассматриваемая матрица является диагональной, получаем:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1^1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

О т в е т: а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 9 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

П р и м е р 7. Указать два ступенчатых вида матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Назвать базисные строки и столбцы матрицы *A*.

Р е ш е н и е.

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} (-1)(-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} (-1)(6) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем: *у матрицы A*
базисные строки – $1^{\underline{я}}, 2^{\underline{я}}$;
базисные столбцы – $1^{\underline{й}}, 3^{\underline{й}}$.

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} (-1)(-2) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} (1)(8) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что у матрицы A базисные строки – $2^{\underline{я}}$ и $3^{\underline{я}}$;
базисные столбцы – $1^{\underline{й}}$ и $3^{\underline{й}}$.

О т в е т: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, базисные строки – 1, 2; базисные столбцы – 1, 3;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, базисные строки – 2, 3; базисные столбцы – 1, 3.

П р и м е р 8. Привести к виду Гаусса матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Выполним элементарные преобразования строк матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left(-\frac{1}{4}\right) \end{matrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} (-2)(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (1)(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-2)(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

П р и м е р 9. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}(-2) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

О т в е т: $r(A) = 2.$