СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О п р е д е л е н и е 1. *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_i \quad (i, j = 1, 2)$ – некоторые постоянные действительные числа.

О п р е д е л е н и е 2. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* (1); вектор $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов системы* (1), вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – столбцом неизвестных.

Т е о р е м а 1 (*правило Крамера*). Если определитель матрицы системы (1) не равен нулю, то система (1) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta = |A|$, $\Delta_j \ (j = 1, 2)$ – определители, полученные из Δ заменой его j-го столбца столбцом свободных членов.

Т е о р е м а 2. Если у системы (1) $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 отличен от нуля, то система (1) не имеет решения. Если у системы (1) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (1) имеет бесконечное множество решений.

З а м е ч а н и е 1. С геометрической точки зрения требование «решить систему (1)» равносильно нахождению точки пересечения прямых (l_1) и (l_2), заданных на плоскости *Oxy* уравнениями:

$$(l_1):\ a_{11}x + a_{12}y = b_1, \quad (l_2):\ a_{21}x + a_{22}y = b_2.$$

Поэтому теоремы 1, 2 отвечают на вопрос, когда прямые (l_1) и (l_2) имеют одну общую точку (пересекаются в одной точке), имеют бесконечное множество общих точек (совпадают, налагаются), не имеют общих точек (параллельны, но не совпадают).

2. СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О п р е д е л е н и е 3. *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из трех уравнений с тремя неизвестными *x*, *y* и *z*, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{2}$$

где a_{ij}, b_i $(i, j = 1,2,3)$ – постоянные действительные числа.

О п р е д е л е н и е 4. *Матрицей системы* (2), *столбцом свободных членов системы* (2) и *столбцом неизвестных системы* (2) называются, соответственно, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ вектор } \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ и вектор } \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а 3 (*правило Крамера*). Если определитель матрицы системы (2) не равен нулю, то система (2) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta = |A|$, $\Delta_j \ (j = 1,2,3)$ – определители, полученные из Δ заменой его *j*-го столбца столбцом свободных членов.

Т е о р е м а 4. Если у системы (2)

$$\Delta = 0,$$

но хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 отличен от нуля, то система (2) не имеет решения. Если выполнены условия

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

то система (2) или имеет бесконечное множество решений, или не имеет решений.

З а м е ч а н и е 2. С геометрической точки зрения требование «решить систему (2)» равносильно поиску точки пересечения трех плоскостей, каждая из которых дана в пространстве *Oxyz* соответствующим уравнением системы (2). Напомним, что любые *две* из этих плоскостей либо пересекаются (по прямой), либо параллельны (совпадают во всех точках или не имеют общих точек).

Поэтому теоремы 3, 4 отвечают на вопрос о том, когда *три* плоскости имеют одну общую точку (то есть пересекаются в одной точке), не имеют общих точек (то есть параллельны, но не совпадают), имеют бесконечное множество общих точек (то есть совпадают, налагаются все три плоскости или совпадают, налагаются две из плоскостей, а третья пересекает их по некоторой прямой). Более того, утверждается, что невозможны другие варианты взаимного расположения трех плоскостей.

<u>3. СИСТЕМЫ ЛЮБОГО ЧИСЛА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ</u>

О п р е д е л е н и е 5. *<u>Системой линейных алгебраических уравнений</u>*, состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1, \cdots, x_n$, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

где $a_{11}, \cdots, a_{mn}, b_1, \cdots, b_m$ – некоторые числа. Если $b_1 = 0, ...,$ $b_m = 0,$ то система называется *<u>линейной однородной</u>*. В противном случае система (3) называется *<u>линейной неоднородной системой.</u>*

З а м е ч а н и е 3. Система (3) может быть записана в векторной форме:

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}, \tag{4}$$

где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор–столбец неизвестных, $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор–столбец свободных членов, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы.

О п р е д е л е н и е 6. <u>*Расширенной матрицей*</u> системы (3) называется матрица, обозначаемая $(A|\bar{b})$ и полученная приписыванием к матрице A справа после вертикальной черты столбца $\bar{b}$.

О п р е д е л е н и е 7. <u>*Решением*</u> системы (4) называется любой $n-$ мерный вектор $\bar{x}$, подстановка которого в (4) дает тождество.

О п р е д е л е н и е 8. Система называется <u>*совместной*</u>, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется <u>*несовместной*</u>.

<u>**Т е о р е м а 5**</u> (*Кронекера – Капелли*). Система (3) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть

$$r(A)=r(A|\bar{b}).$$

При этом если $r(A)=n,$ то система имеет единственное решение; если $r(A)<n,$ то система имеет бесконечное множество решений.

<u>**Т е о р е м а 6.**</u> Решение системы (4) имеет вид:

$$\bar{x}=\bar{x}_0+c_1\bar{l}_1+\cdots+c_k\bar{l}_k, \tag{5}$$

где $\bar{x}_0$ — частное решение линейной неоднородной системы (4); число k, называемое числом свободных неизвестных системы (4), вычисляется по формуле $k=n-r(A)$; $c_1,\ldots,c_k$ — произвольные постоянные числа; $\bar{l}_1,\ldots,\bar{l}_k$ — постоянные $n-$ мерные векторы, являющиеся линейно независимыми решениями соответствующей линейной однородной системы $A\cdot\bar{x}=\bar{0}$.

<u>4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</u>

1) Правило Крамера

<u>Т е о р е м а 7.</u> Если матрица A – квадратная и ее определитель не равен нулю, то система (4) имеет единственное решение $\overline{x}_0$, координаты которого могут быть вычислены по формуле:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

где Δ – определитель матрицы A, Δ_j – определитель матрицы, полученной из A заменой ее j – го столбца столбцом $\overline{b}$.

2) Метод Гаусса

Для решения системы (4) с матрицей A размерности $m \times n$ и столбцом свободных членов $\overline{b}$ нужно выполнить следующие действия:

1) Составить расширенную матрицу $\left(A \middle| \overline{b}\right)$ и привести ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк;

2) Если $r(A) \neq r\left(A \middle| \overline{b}\right)$, записать ответ: система несовместна.
   Если $r(A) = r\left(A \middle| \overline{b}\right)$, сделать выводы:

- система совместна,
- базисными неизвестными объявить те, номера которых совпадут с номерами базисных столбцов ступенчатого вида матрицы A, содержащих опорные элементы этой матрицы; остальные неизвестные объявить свободными,
- число свободных неизвестных равно $k = n - r(A)$,
- перейти к выполнению следующего шага;

3) Привести ступенчатую матрицу, полученную при выполнении шага 1), к виду Гаусса;

4) Написать систему линейных уравнений, соответствующую матрице, построенной на шаге 3), обозначив свободные неизвестные $c_1, \cdots, c_k$;

5) Выразить из полученной системы базисные неизвестные через свободные неизвестные;

6) Записать ответ, воспользовавшись или векторной формой записи (5), или координатной формой:

$$x_j = f_j(c_1, \cdots c_k), \quad j = 1, \cdots n.$$

З а м е ч а н и е 4. Применение метода Гаусса не требует, чтобы матрица системы A была квадратной и предварительного вычисления ее определителя.

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

П р и м е р 1. Для системы

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 5z = 3 \\ 4x + 7z = 7 \end{cases}$$

указать матрицу системы A и столбец свободных членов $\bar{b}$. Записать систему в векторной форме.

Р е ш е н и е. Обозначим столбец неизвестных $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда матрица A рассматриваемой системы составляется из числовых коэффициентов, стоящих в системе при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 5\\ 4 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Столбец $\overline{b}$ составляется из свободных членов системы:

$$\overline{b}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 7\end{pmatrix}.$$

Поэтому систему можно переписать в векторной форме:
$A\cdot\overline{x}=\overline{b}$.

О т в е т: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 5\\ 4 & 0 & 7\end{pmatrix}$; $\overline{b}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 7\end{pmatrix}$; $A\cdot\overline{x}=\overline{b}$.

<u>П р и м е р 2.</u> Решить систему:

$$\begin{cases}2x-2y=1\\ -3x+6y=4.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$\overline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ – матрица системы;

$\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 6 = 6 \neq 0.$$

Следовательно, по теореме 1 заключаем: система имеет единственное решение.

Чтобы найти решение системы, вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{6}.$$

О т в е т: $x = \dfrac{7}{3}$; $y = \dfrac{11}{6}$.

П р и м е р 3. Решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \text{матрица системы;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \text{ столбец свободных членов.}$$

Вычислим определитель рассматриваемой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Вычислим определитель Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

Так как $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$, то определитель Δ_2 не нужно вычислять: из теоремы 2 следует, что система не имеет решений.

О т в е т: $\varnothing$.

П р и м е р 4. Решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -3x + 6y = -9. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$ – матрица системы;

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Вычислим определитель Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0.$$

Вычислим определитель Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$$

Следовательно, по теореме 2 система имеет бесконечное множество решений. Эти решения можно найти, предполагая, что одно неизвестное, например x, – *любое число*.

Тогда $y = \dfrac{x-3}{2}$, что следует из первого (или второго) уравнения исходной системы.

О т в е т: $\left(x; \dfrac{x-3}{2}\right)$, где x – любое число.

<u>П р и м е р 5</u>. Исследовать на совместность систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним шаг 1) метода Гаусса:

$$\left(A\middle|\overline{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\3&-1&0&1\\4&-1&2&1\end{array}\right)\begin{matrix}(-3)(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&-1&-6&-2\\0&-1&-6&-3\end{array}\right)(-1)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&-1&-6&-2\\0&0&0&-1\end{array}\right).$$

Следовательно:

$$r(A)=2,\ \ r\left(A\,\middle|\,\overline{b}\right)=3 \quad \text{и} \quad r(A)\neq r\left(A\,\middle|\,\overline{b}\right).$$

О т в е т: система несовместна.

П р и м е р 6. Решить систему:

$$\begin{cases}x+2y-3z=0\\2x-y+4z=5\\3x+y-z=2.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\overline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&4\\3&1&-1\end{pmatrix}$$ – матрица системы;

$$\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 6 - 9 - 4 + 4 = 10 .$$

Следовательно, из теоремы 3 заключаем: система имеет единственное решение.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 16 - 15 - 6 + 10 = 5 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 12 + 45 - 8 = 20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 30 - 5 - 8 = 15 .$$

Поэтому согласно правилу Крамера (теорема 3) получаем:

$$x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{20}{10} = 2, \qquad z = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} .$$

О т в е т: $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2} \right)$.

П р и м е р 7. Решить систему:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 5 \\ x + y \quad = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов.}$$

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 2 + 1 + 0 = 0.$$

Следовательно, из теоремы 4 заключаем: система не имеет единственного решения.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 5 - 8 + 2 - 0 = 3 \neq 0.$$

Поэтому, не вычисляя Δ_2, Δ_3, из теоремы 4 заключаем: система не имеет решений.

О т в е т: $\varnothing$.

П р и м е р 8. Решить систему:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 5 \\ x + y \quad = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ – матрица системы,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 2 + 1 + 0 = 0 .$$

Следовательно, из теоремы 4 заключаем: система не имеет единственного решения.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 7 + 5 - 14 + 2 + 0 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 5 + 7 + 0 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 5 + 0 - 4 - 5 + 0 = 0.$$

В сложившейся ситуации для ответа на вопрос, имеет система бесконечное множество решений или не имеет решений (см. теорему 4), заметим: первое уравнение системы является результатом вычитания второго уравнения системы из третьего.

Следовательно, решим систему

$$\begin{cases} 2y - z = 5 \\ x + y = 7, \end{cases}$$

составленную из второго и третьего уравнений исходной системы, например, относительно неизвестных x и z.

Воспользовавшись методом исключения, приходим к следующему результату: исходная система имеет бесконечное множество решений, описываемое формулой:

$$\begin{cases} y - \text{любое число}, \\ x = 7 - y, \\ z = 2y - 5. \end{cases}$$

О т в е т: $(7 - y; y; 2y - 5)$, где y – любое число.

П р и м е р 9. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x \quad + 4y + 6z = 0 \\ x + 2y + 3z \quad = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} -$$ матрица системы,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} -$$ столбец свободных членов.

Вычисления определителя системы и определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 приводят к следующему результату:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 12 - 12 - 12 - 12 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

В сложившейся ситуации для ответа на вопрос, имеет система бесконечное множество решений или не имеет решений (см. теорему 4), заметим: второе уравнение системы является результатом умножения первого уравнения системы на число 2.

Следовательно, перейдем к анализу системы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3, \end{cases}$$

составленной из первого и третьего уравнений исходной системы.

Очевидно, что указанная система не имеет решений. Значит, исходная система не имеет решений.

О т в е т: $\varnothing$.

П р и м е р 10. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном примере имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = |A| = -3 - 6 + 8 = -1 \neq 0.$$

Поэтому для решения системы можно воспользоваться (на выбор) правилом Крамера или методом Гаусса.

***Способ* I** (*правило Крамера*). Вычислим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-1} = 8; \quad z = \frac{1}{-1} = -1.$$

***Способ* II** (*метод Гаусса*). Выполним преобразования:

$$\left(A\middle|\bar{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)(-3)(-4) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right)(-1) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(6)(-2) \to \left[\begin{array}{c} r(A) = r\left(A\middle|\bar{b}\right) = 3, \\ n = 3, \\ \text{система совместна,} \\ \text{решение единственное} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 8, \\ z = -1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 3; \quad y = 8; \quad z = -1.$

П р и м е р 11. Исследовать на совместность и решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом Гаусса: составим матрицу A рассматриваемой системы, столбец свободных членов $\bar{b}$ и преобразуем расширенную матрицу $(A|\bar{b})$ к виду Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)(1)(2) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 1 & 2 \end{array}\right)(-2) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)(-1/7) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)(-4) \to \left[\begin{array}{l} r(A)=r(A\ \bar{b})=3, \quad n=5 \\ \Rightarrow \text{система имеет бесконечное множество решений;} \\ n-r=2 - \text{число свободных неизвестных;} \\ x_1, x_2, x_5 - \text{базисные неизвестные;} \\ x_3, x_4 - \text{свободные неизвестные} \end{array}\right] \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&7&0&1\\0&5&8&5&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&7&0&1\\0&1&8/5&1&0&1/5\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)(-3)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1/5&4&0&2/5\\0&1&8/5&1&0&1/5\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right).$$

О т в е т:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}c_1-4c_2\\ x_2=\dfrac{1}{5}-\dfrac{8}{5}c_1-c_2\\ x_3=c_1\\ x_4=c_2\\ x_5=0\\ c_1,\ c_2-\text{произв. пост.}\end{cases}\quad \text{или}\quad \bar{x}=\begin{pmatrix}2/5\\1/5\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1/5\\-8/5\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$