

Capítulo 5

Cornetas

As cornetas electromagnéticas são das antenas mais simples e mais utilizadas, em especial nas frequências das microondas. Estas antenas podem ser utilizadas em isolado, em especial em laboratório onde são utilizadas como antenas de referência, ou como alimentador dos reflectores parabólicos terrestres utilizados em comunicações via satélite. Podem também ser agrupadas em agregado e utilizadas em comunicações via satélite, instaladas no próprio satélite.

As suas formas podem ser as mais variadas mas não são mais do que tubos metálicos ocos com uma abertura gradual e são aplicados nas terminações de guias de onda metálicos ocos.

5.1 Corneta de sector E

A geometria da corneta de sector E é mostrada na figura 5.1 e, para calcular o campo radiado por esta corneta, parte-se da distribuição de campo electromagnético na superfície de um guia metálico oco. Admitindo que o modo de operação do guia é o modo fundamental TE_{10} ¹, o campo no guia é dado por

$$\bar{E}_x = 0 \quad (5.1)$$

$$\bar{E}_y = E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \quad (5.2)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (5.3)$$

$$\bar{H}_x = -\frac{E_1}{Z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \quad (5.4)$$

$$\bar{H}_y = 0 \quad (5.5)$$

$$\bar{H}_z = jE_1 \frac{\pi Z}{\beta a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x'\right) \quad (5.6)$$

¹Está a assumir-se que $a > b$.

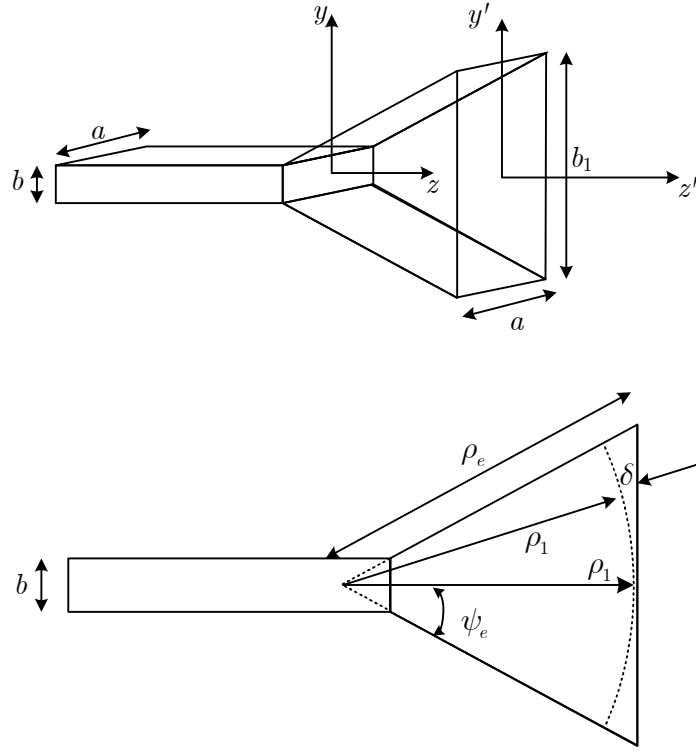


Figura 5.1: Corneta de sector E

A partir deste campo é necessário estimar o campo na boca da corneta. Assume-se, para tal, que quando sai do guia e entra na corneta, o campo vai espalhar-se radialmente. Assim sendo, como a distância da boca do guia à superfície da corneta será diferente de ponto para ponto, o campo na boca da corneta irá ter uma fase diferente em cada ponto. Para quantificar essa fase começa-se por prolongar as superfícies superior e inferior da corneta até ao interior do guia (como mostrado na figura 5.1) e considere-se, como a referência para fase, a região que resulta da intersecção destas superfícies. Da análise da figura resulta que

$$[\rho_1 + \delta_y]^2 = \rho_1^2 + (y')^2 \quad (5.7)$$

donde se pode escrever que a diferença de percurso relativamente ao centro da corneta é

$$\delta_y = -\rho_1 + \rho_1 \left[1 + \left(\frac{y'}{\rho_1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.8)$$

Utilizando a expansão binomial em δ_y e aproveitando os primeiros dois termos vem

$$\delta_y \approx -\rho_1 + \rho_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{\rho_1} \right)^2 \right] = \frac{(y')^2}{2\rho_1} \quad (5.9)$$

Finalmente, como a diferença de fase é dada por $\beta\delta_y$, as componentes tangencias do campo na

boca da corneta valem

$$\bar{E}_y = E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{-j\beta\delta_y} \quad (5.10)$$

$$\bar{H}_x = -\frac{E_1}{Z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{-j\beta\delta_y} \quad (5.11)$$

5.1.1 Campo radiado

O cálculo dos campos radiados é agora feito recorrendo ao teorema da equivalência. As correntes fictícias na boca da corneta valem

$$\bar{J}_y = -\frac{E_1}{Z} \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{-j\beta\delta_y} \quad (5.12)$$

$$\bar{M}_x = E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x'\right) e^{-j\beta\delta_y} \quad (5.13)$$

Utilizando a teoria do capítulo 4, pode mostrar-se que na zona distante de radiação o campo eléctrico radiado pela corneta é dado por

$$\bar{E}_r = 0 \quad (5.14)$$

$$\bar{E}_\theta = -j \frac{\sqrt{\pi\beta\rho_1 a E_1}}{8r} e^{-j\beta r} e^{j\frac{\beta_y^2 \rho_1}{2\beta}} \sin\phi (1 + \cos\theta) A(a) F(t_1, t_2) \quad (5.15)$$

$$\bar{E}_\phi = -j \frac{\sqrt{\pi\beta\rho_1 a E_1}}{8r} e^{-j\beta r} e^{j\frac{\beta_y^2 \rho_1}{2\beta}} \cos\phi (1 + \cos\theta) A(a) F(t_1, t_2) \quad (5.16)$$

onde

$$A(a) = \cos\left(\frac{\beta_x a}{2}\right) \left[\left(\frac{\beta_x a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right]^{-1} \quad (5.17)$$

$$F(t_1, t_2) = [C(t_2) - C(t_1)] - j[S(t_2) - S(t_1)] \quad (5.18)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_1}} \left(-\frac{\beta b_1}{2} - \beta_y \rho_1 \right) \quad (5.19)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_1}} \left(\frac{\beta b_1}{2} - \beta_y \rho_1 \right) \quad (5.20)$$

$$\beta_x = \beta \sin\theta \cos\phi \quad (5.21)$$

$$\beta_y = \beta \sin\theta \sin\phi \quad (5.22)$$

$S(t)$ e $C(t)$ são conhecidos, respectivamente, por seno e co-seno integral de *Fresnel* e cujos valores são normalmente obtidos a partir de tabelas.

Na figura 5.2 mostram-se os diagramas de radiação nos planos E ($\phi = \pi/2$) e H ($\phi = 0$) para um caso particular. O diagrama no plano E é muito mais fechado do que no plano H porque o alargamento dá-se na dimensão b e esta dimensão está associada ao plano E.

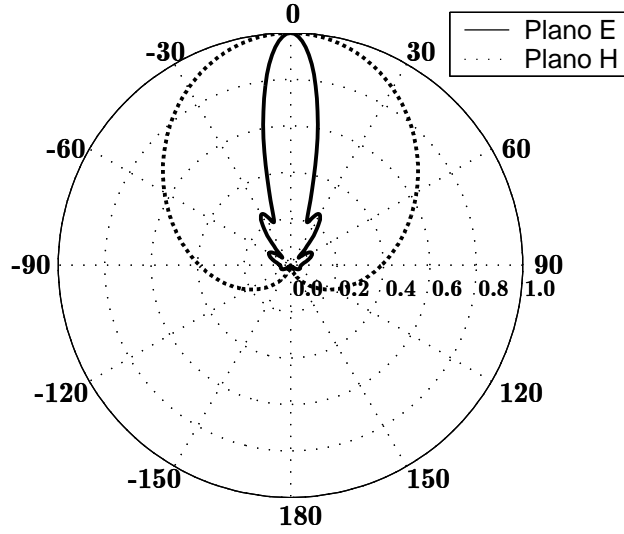


Figura 5.2: Diagrama de radiação de uma corneta de sector E: $\rho_1 = 6\lambda$, $b_1 = 2.75\lambda$, $a = 0.5\lambda$, $b = 0.25\lambda$

5.1.2 Directividade

Trabalhando com as expressões do campo eléctrico anteriores e utilizando 2.8 é possível mostrar que a directividade máxima de uma corneta de sector E vale

$$D_E = \frac{64a\rho_1}{\pi\lambda b_1} \left[C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda\rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda\rho_1}} \right) \right] \quad (5.23)$$

Um gráfico com o andamento da directividade em função da dimensão final da corneta e para vários valores de ρ_1 é mostrado na figura 5.3. Aqui pode verificar-se que existe um desenho óptimo da corneta que leva à máxima directividade. Pode ser demonstrado que a máxima directividade ocorre quando

$$b_1 \approx \sqrt{2\lambda\rho_1} \quad (5.24)$$

5.2 Corneta de sector H

A geometria da corneta de sector H é mostrada na figura 5.4 sendo o processo de determinação do campo radiado é o mesmo do da corneta de sector E. Mais uma vez, partindo do campo na boca do guia chega-se a que as componentes tangencias no campo na boca da corneta são dadas por

$$\bar{E}_y = E_2 \cos \left(\frac{\pi}{a_1} x' \right) e^{-j\beta\delta_x} \quad (5.25)$$

$$\bar{H}_x = -\frac{E_2}{Z} \cos \left(\frac{\pi}{a_1} x' \right) e^{-j\beta\delta_x} \quad (5.26)$$

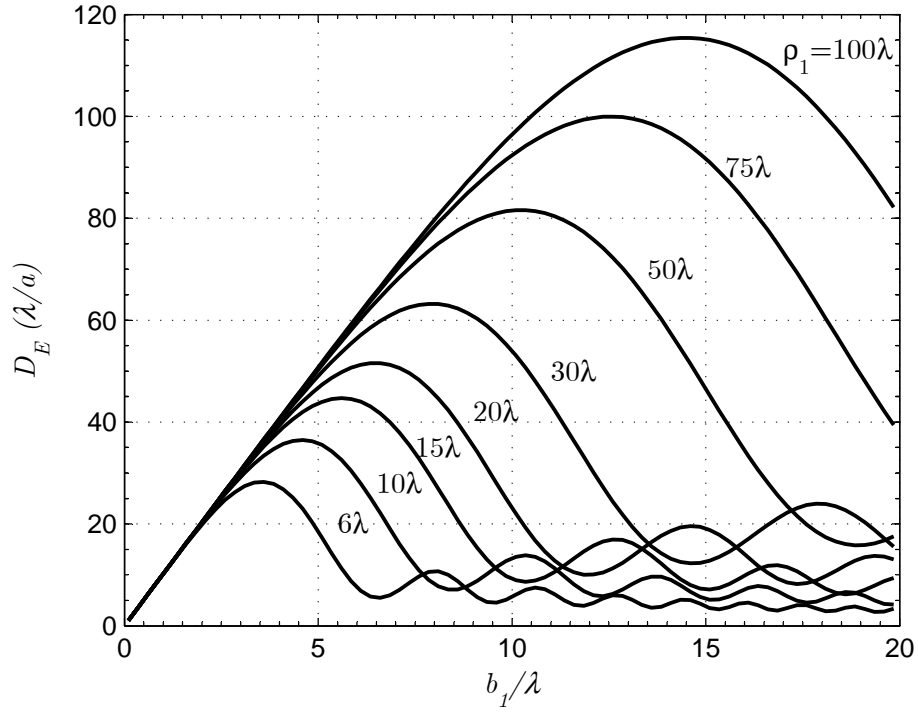


Figura 5.3: Directividade de uma corneta de sector E

onde

$$\delta_x \approx \frac{(x')^2}{2\rho_2} \quad (5.27)$$

5.2.1 Campo radiado

As correntes fictícias na boca da corneta valem

$$\bar{J}_y = -\frac{E_2}{Z} \cos\left(\frac{\pi}{a_1}x'\right) e^{-j\beta\delta_x} \quad (5.28)$$

$$\bar{M}_x = E_2 \cos\left(\frac{\pi}{a_1}x'\right) e^{-j\beta\delta_x} \quad (5.29)$$

donde resulta um campo eléctrico na zona distante de radiação dado por

$$\bar{E}_r = 0 \quad (5.30)$$

$$\bar{E}_\theta = j \frac{bE_2 e^{-j\beta r}}{8r} \sqrt{\frac{\beta\rho_2}{\pi}} \sin\phi(1 + \cos\theta) \frac{\sin Y}{Y} \left[e^{jf_1} F(t'_1, t'_2) + e^{jf_2} F(t''_1, t''_2) \right] \quad (5.31)$$

$$\bar{E}_\phi = j \frac{bE_2 e^{-j\beta r}}{8r} \sqrt{\frac{\beta\rho_2}{\pi}} \cos\phi(1 + \cos\theta) \frac{\sin Y}{Y} \left[e^{jf_1} F(t'_1, t'_2) + e^{jf_2} F(t''_1, t''_2) \right] \quad (5.32)$$

onde

$$Y = \frac{\beta b}{2} \sin\theta \sin\phi \quad (5.33)$$

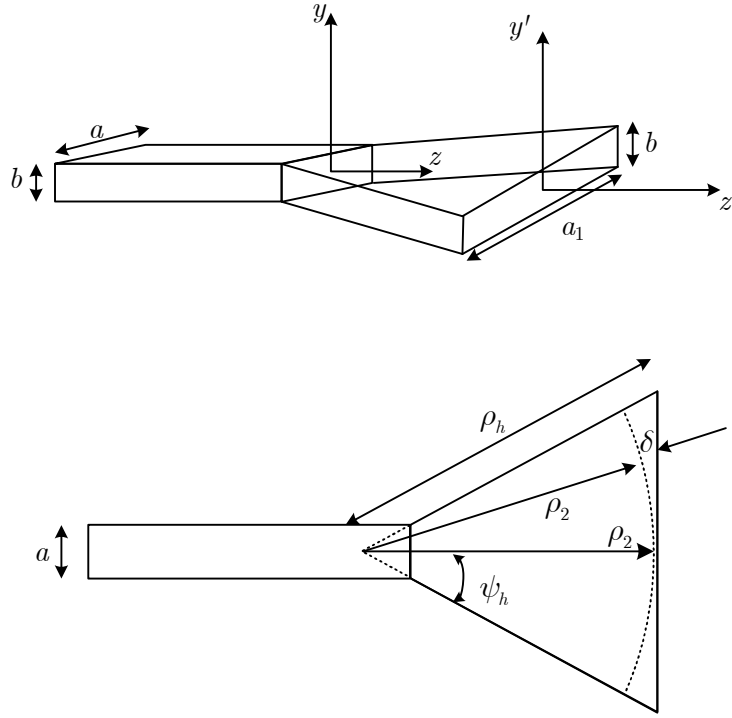


Figura 5.4: Corneta de sector H

$$t'_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_2}} \left(-\frac{\beta a_1}{2} - \beta'_x \rho_2 \right) \quad (5.34)$$

$$t'_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_2}} \left(\frac{\beta a_1}{2} - \beta'_x \rho_2 \right) \quad (5.35)$$

$$t''_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_2}} \left(-\frac{\beta a_1}{2} - \beta''_x \rho_2 \right) \quad (5.36)$$

$$t''_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi\beta\rho_2}} \left(\frac{\beta a_1}{2} - \beta''_x \rho_2 \right) \quad (5.37)$$

$$f_1 = \frac{\beta'^2_x \rho_2}{2\beta} \quad (5.38)$$

$$f_2 = \frac{\beta''^2_x \rho_2}{2\beta} \quad (5.39)$$

$$\beta'_x = \beta \sin \theta \cos \phi + \frac{\pi}{a_1} \quad (5.40)$$

$$\beta''_x = \beta \sin \theta \cos \phi - \frac{\pi}{a_1} \quad (5.41)$$

Na figura 5.5 mostram-se os diagramas de radiação nos planos E ($\phi = \pi/2$) e H ($\phi = 0$) para um caso particular. Agora é o diagrama no plano H que é muito mais estreito do que o do plano E porque o alargamento se dá na dimensão a e esta dimensão está associada ao plano H.

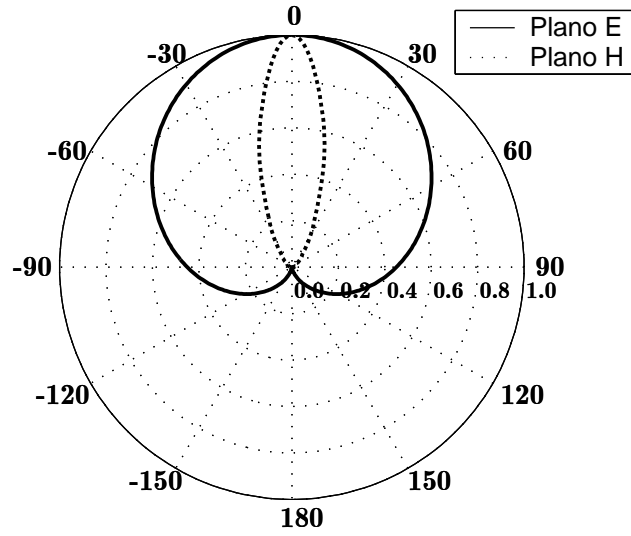


Figura 5.5: Diagrama de radiação de uma corneta de sector H: $\rho_2 = 6\lambda$, $a_1 = 5.5\lambda$, $a = 0.5\lambda$, $b = 0.25\lambda$

5.2.2 Directividade

Trabalhando com as expressões do campo eléctrico anteriores e utilizando 2.8 é possível mostrar que a directividade máxima de uma corneta de sector H vale

$$D_H = \frac{4\pi b \rho_2}{\lambda a_1} \left\{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \right\} \quad (5.42)$$

onde

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad (5.43)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} - \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad (5.44)$$

Um gráfico com o andamento da directividade em função da dimensão final da corneta e para vários valores de ρ_2 é mostrado na figura 5.6. Também aqui se pode verificar que existe um valor de desenho óptimo da corneta que leva à máxima directividade, podendo ser demonstrado que esta ocorre quando

$$a_1 \approx \sqrt{3\lambda \rho_2} \quad (5.45)$$

5.3 Corneta piramidal

A corneta piramidal, mostrada na figura 5.7, corresponde à geometria mais utilizada. Basicamente, as características de radiação desta corneta são uma combinação da corneta de sector E com a corneta de sector H.

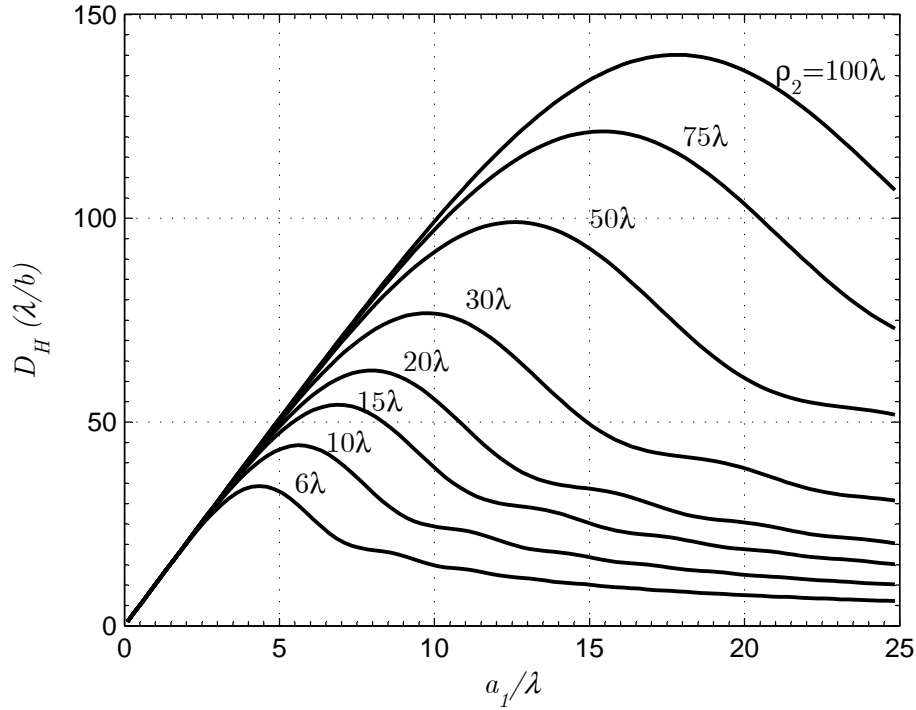


Figura 5.6: Directividade de uma corneta de sector H

Por analogia com as cornetas de sector E e sector H, infere-se de imediato que as componentes tangencias do campo na boca da corneta piramidal são dadas por

$$\bar{E}_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) e^{-j\beta(\delta_x + \delta_y)} \quad (5.46)$$

$$\bar{H}_x = \frac{E_1}{Z} \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right) e^{-j\beta(\delta_x + \delta_y)} \quad (5.47)$$

5.3.1 Campo radiado

A partir das componentes tangenciais anteriormente obtidas podem-se definir correntes fictícias na boca da corneta dadas por

$$\bar{J}_y = -\frac{E_0}{Z} \cos\left(\frac{\pi x'}{a_1}\right) e^{-j\beta(\delta_x + \delta_y)} \quad (5.48)$$

$$\bar{M}_x = E_0 \cos\left(\frac{\pi x'}{a_1}\right) e^{-j\beta(\delta_x + \delta_y)} \quad (5.49)$$

donde resulta um campo eléctrico na zona distante de radiação dado por

$$\bar{E}_r = 0 \quad (5.50)$$

$$\bar{E}_\theta = j \frac{\beta E_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} [\sin \phi (1 + \cos \theta) I_1 I_2] \quad (5.51)$$

$$\bar{E}_\phi = j \frac{\beta E_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} [\cos \phi (\cos \theta + 1) I_1 I_2] \quad (5.52)$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_2}{\beta}} \left(e^{j\beta_x^2 \rho_2 / 2\beta} \{ [C(t'_2) - C(t'_1)] - j [S(t'_2) - S(t'_1)] \} \right. \\ \left. + e^{j\beta_x'^2 \rho_2 / 2\beta} \{ [C(t''_2) - C(t''_1)] - j [S(t''_2) - S(t''_1)] \} \right) \quad (5.53)$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{\beta}} e^{j\beta_y^2 \rho_1 / 2\beta} \{ [C(t_2) - C(t_1)] - j [S(t_2) - S(t_1)] \} \quad (5.54)$$

Como agora existe um alargamento gradual simultâneo das dimensões a e b , o diagrama de radiação vai ser estreio quer no plano E quer no plano H.

5.3.2 Directividade

Trabalhando com as expressões do campo eléctrico anteriores e utilizando 2.8 é possível mostrar que a directividade máxima de uma corneta piramidal vale

$$D_P = \frac{8\pi\rho_1\rho_2}{a_1b_1} \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \} \times \left\{ C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda\rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda\rho_1}} \right) \right\} \quad (5.55)$$

o que é equivalente a

$$D_P = \frac{\pi\lambda^2}{32ab} D_E D_H \quad (5.56)$$

Da análise geométrica das estrutura apresentadas na figura 5.7, é possível demonstrar que

$$p_E = (b_1 - b) \left[\left(\frac{\rho_e}{b_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad (5.57)$$

$$p_H = (a_1 - a) \left[\left(\frac{\rho_h}{a_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad (5.58)$$

Note-se que para que a corneta possa ser fisicamente construída é necessário ter $p_E = p_H$.

5.4 Projecto de cornetas piramidais

As equações anteriores permitem caracterizar o funcionamento de uma corneta desde que as suas dimensões sejam conhecidas. No entanto, do ponto de vista prático, o que se pretende é dimensionar uma corneta de modo a se obter um determinado ganho e, obviamente, fazê-lo de forma otimizada. Dada a complexidade das expressões envolvidas, a inversão das mesmas, isto é, a explicitação das dimensões da corneta em função da directividade desejada, é impossível. Torna-se assim necessário utilizar um método alternativo.

Considere-se então que se pretende dimensionar uma corneta piramidal optimizada, com um ganho máximo G_0 e a ser ligada a um guia rectangular de dimensões $a \times b$. Tal como em qualquer outra antena, a relação entre o ganho e a área efectiva é dada pela expressão 2.64. Defina-se então rendimento de abertura η_{ab} como sendo a relação entre a área efectiva da antena e a sua área física², isto é

$$A_e = \eta_{ab} A_{fis} \quad (5.59)$$

Da experiência prática, sabe-se que o rendimento total de uma corneta piramidal (incluindo as perdas e o rendimento de abertura) ronda os 50%, pelo que se pode escrever que a relação entre o ganho de uma corneta e a área da sua abertura vale

$$G = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{\lambda^2} (a_1 b_1) \quad (5.60)$$

Utilizando para a_1 e b_1 os resultados óptimos obtidos para as cornetas de sector E e H pode então escrever-se que o ganho óptimo de uma corneta piramidal vale

$$G_0 = \frac{2\pi}{\lambda^2} \sqrt{3\lambda\rho_2} \sqrt{2\lambda\rho_1} \quad (5.61)$$

Como para cornetas suficientemente longas é razoável fazer $\rho_2 = \rho_h$ e $\rho_1 = \rho_e$, pode-se ainda escrever

$$G_0 \approx \frac{2\pi}{\lambda^2} \sqrt{3\lambda\rho_h} \sqrt{2\lambda\rho_e} \quad (5.62)$$

Tendo em conta que para que uma corneta seja fisicamente realizável é necessário ter $p_E = p_H$, então a expressão anterior pode ser posta na forma

$$\left(\sqrt{2\chi} - \frac{b}{\lambda} \right)^2 (2\chi - 1) = \left(\frac{G_0}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} - \frac{a}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{G_0^2}{6\pi^3} \frac{1}{\chi} - 1 \right) \quad (5.63)$$

com

$$\frac{\rho_e}{\lambda} = \chi \quad (5.64)$$

e

$$\frac{\rho_h}{\lambda} = \frac{G_0^2}{8\pi^3} \frac{1}{\chi} \quad (5.65)$$

O dimensionamento de uma corneta optimizada faz-se então do seguinte modo:

²O conceito de rendimento de abertura não é exclusivo das cornetas, podendo ser extendido a qualquer tipo de antena de abertura.

1. Determinar o valor de χ que satisfaz a equação 5.63. Caso não se disponha de uma forma de obter o valor de χ de imediato, comece-se com um valor inicial dado por

$$\chi_1 = \frac{G_0}{2\pi\sqrt{2\pi}} \quad (5.66)$$

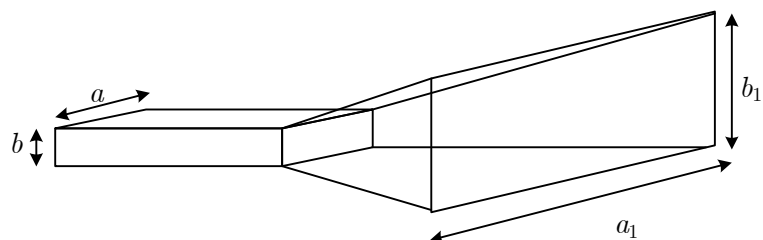
Caso seja necessário, refine-se, de forma iterativa, o valor de χ obtido até se alcançar o ganho desejado.

2. Determinar os valores de a_1 e b_1 através de

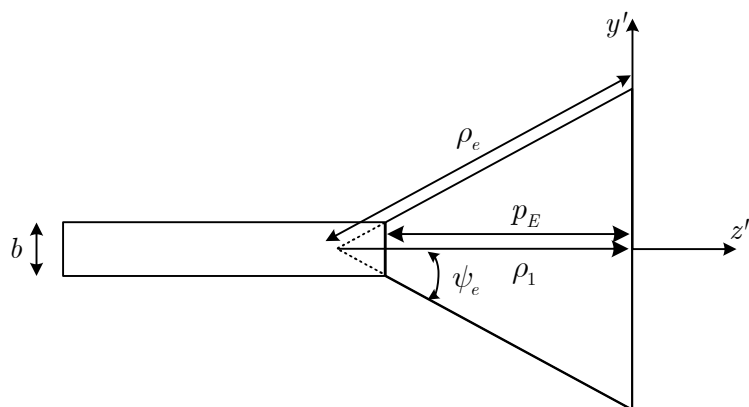
$$a_1 = \sqrt{3\lambda\rho_2} \approx \sqrt{3\lambda\rho_h} = \frac{G_0}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi\chi}} \lambda \quad (5.67)$$

$$b_1 = \sqrt{2\lambda\rho_1} \approx \sqrt{2\lambda\rho_e} = \sqrt{2\chi}\lambda \quad (5.68)$$

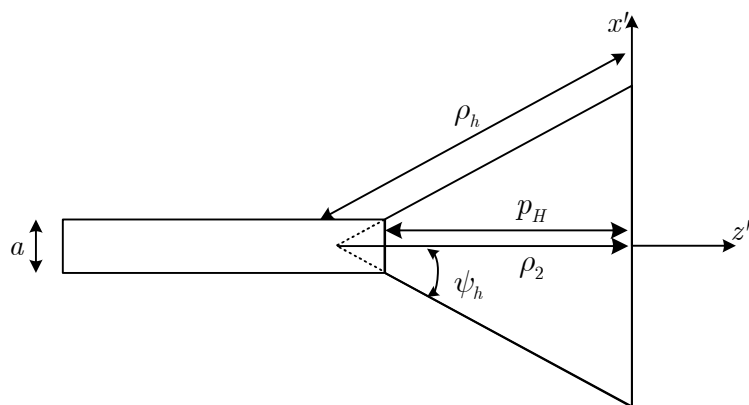
3. Determinar os valores de p_E e p_H utilizando 5.57 and 5.58.



(a) Geometria



(b) Plano E



(c) Plano H

Figura 5.7: Corneta piramidal