

## Capítulo 4

# Radiação por aberturas

### 4.1 Introdução

O cálculo do campo radiado por uma antena recorrendo ao potencial vector apresentado no Capítulo 1 pode ser efectuado desde que se conheça a distribuição de corrente na antena. Suponha-se no entanto a situação da figura 4.1. Tratando-se aqui de um guia de onda terminado em aberto, parte do campo que viaja dentro do guia em direcção à abertura há-de ser enviado para o espaço livre envolvente. Não se tratando de uma radiação directa por uma corrente, como proceder então para calcular o campo radiado? Generalizando a pergunta, como proceder para calcular o campo radiado por uma qualquer abertura?

Como o potencial vector apresentado no Capítulo 1 não pode ser utilizado directamente para calcular a radiação por aberturas é então necessário encontrar um método alternativo. O método que vais ser descrito é de vital importância no domínio electromagnético pois encontra aplicação numa vasta área, indo desde o estudo de problemas de difracção ou espalhamento até problemas de radiação. Adiantando já um pouco do que a seguir se vai expor, o método consiste em definir correntes fictícias, que existem na superfície na qual conhecemos o campo existente e que são obtidas a partir deste. A partir destas correntes fictícias o campo radiado pode então ser calculado utilizando o processo de cálculo do Capítulo 1. Neste capítulo, o método vai ser aplicado apenas ao estudo de cornetas. Mais tarde ele irá ser recuperado para efectuar o estudo do reflector parabólico e de antenas impressas do tipo *microstrip*.

Antes de se começar a descrever o método é necessário introduzir alguns conceitos novos, o que vai ser feito na secção seguinte.



Figura 4.1: Radiação por um guia de onda terminado em aberto

## 4.2 Cargas e correntes magnéticas

Em regime harmónico sinusoidal, as equações de *Maxwell* são dadas pelas equações 1.14 a 1.17. Nestas equações não aparece nenhum termo com cargas ou correntes magnéticas porque, como nunca foram encontradas, assume-se que não existem. Mas como ficariam as equações de *Maxwell* se estas existissem? Argumentos baseados em princípios fundamentais da física (como simetria e leis de conservação) levam à conclusão que a introdução de correntes e cargas magnéticas faria com que as equações de *Maxwell* tomassem a seguinte forma

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{M}} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = j\omega\bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{J}} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\rho}_m \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\rho}_e \quad (4.4)$$

onde  $\bar{\rho}_m$  e  $\bar{\mathbf{M}}$  são, respectivamente, as densidades de carga e corrente magnéticas. A solução das novas equações de *Maxwell* pode ser obtida recorrendo ao princípio da sobreposição: o campo total é dado pela contribuição da corrente eléctrica somada à contribuição da corrente magnética. Assim, dada a simetria das equações de *Maxwell* facilmente se infere que, se a contribuição da corrente eléctrica é obtida a partir do potencial vector

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \bar{\mathbf{J}} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (4.5)$$

utilizando as seguintes expressões

$$\bar{\mathbf{H}}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \quad (4.6)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_A = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \bar{\mathbf{H}}_A \quad (4.7)$$

então a contribuição da corrente magnética é obtida a partir do potencial vector

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{V'} \bar{\mathbf{M}} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (4.8)$$

utilizando agora as seguintes expressões

$$\bar{\mathbf{E}}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \bar{\mathbf{F}} \quad (4.9)$$

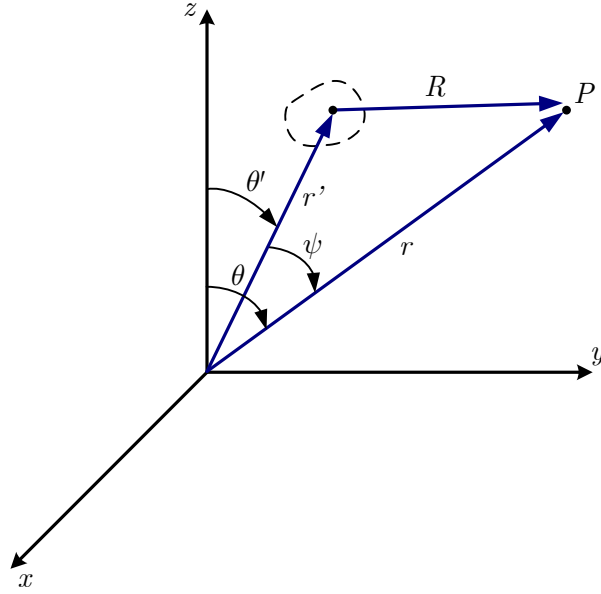


Figura 4.2: Sistema de coordenadas

$$\bar{\mathbf{H}}_F = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{E}}_F \quad (4.10)$$

Pelo teorema da sobreposição, o campo total será então dado por

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_A + \bar{\mathbf{E}}_F \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_A + \bar{\mathbf{H}}_F \quad (4.12)$$

### Aproximação para a zona distante de radiação

O cálculo exacto dos potenciais pode ser uma tarefa ingrata devido ao grau de dificuldade das integrações que é necessário efectuar. No entanto, se apenas estivermos interessados nos campos na zona distante de radiação, é possível diminuir um pouco esta dificuldade porque, nesta região do espaço, como mostrado na figura 4.2, é razoável efectuar a seguinte aproximação para  $R$

$$R \simeq r - r' \cos \psi \quad \text{para a fase} \quad (4.13)$$

$$R \simeq r \quad \text{para a amplitude} \quad (4.14)$$

o que reduz o cálculo de  $\bar{\mathbf{E}}$  e  $\bar{\mathbf{A}}$  a

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{N}}_e \quad (4.15)$$

com

$$\bar{\mathbf{N}}_e = \int_{V'} \bar{\mathbf{J}} e^{j\beta r' \cos \psi} dV' \quad (4.16)$$

e

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{N}}_m \quad (4.17)$$

com

$$\bar{\mathbf{N}}_m = \int_{V'} \bar{\mathbf{M}} e^{j\beta r' \cos \psi} dV' \quad (4.18)$$

Em geral, o potencial vector  $\bar{\mathbf{A}}$  é dado por

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{A}_r(r, \theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_r + \bar{A}_\theta(r, \theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \bar{A}_\phi(r, \theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (4.19)$$

No entanto, para a zona distante de radiação, pode fazer-se

$$\bar{\mathbf{A}} \approx \left\{ \bar{A}_r(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_r + \bar{A}_\theta(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \bar{A}_\phi(\theta, \phi) \hat{\mathbf{a}}_\phi \right\} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \quad (4.20)$$

Utilizando esta expressão em

$$\bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{A}} - j \frac{1}{\omega \varepsilon \mu} \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}) \quad (4.21)$$

e como na zona distante de radiação apenas interessam os termos em  $1/r$ , resulta

$$(\bar{\mathbf{E}}_A)_\theta \approx -j\omega \bar{A}_\theta \quad (4.22)$$

$$(\bar{\mathbf{E}}_A)_\phi \approx -j\omega \bar{A}_\phi \quad (4.23)$$

$$(\bar{\mathbf{H}}_A)_\theta \approx \frac{j\omega}{Z} \bar{A}_\phi \quad (4.24)$$

$$(\bar{\mathbf{H}}_A)_\phi \approx -\frac{j\omega}{Z} \bar{A}_\theta \quad (4.25)$$

Repetindo o raciocínio para o potencial vector  $\bar{\mathbf{F}}$  vem também

$$(\bar{\mathbf{E}}_F)_\theta \approx -j\omega Z \bar{\mathbf{F}}_\phi \quad (4.26)$$

$$(\bar{\mathbf{E}}_F)_\phi \approx j\omega Z \bar{\mathbf{F}}_\theta \quad (4.27)$$

$$(\bar{\mathbf{H}}_F)_\theta \approx -j\omega \bar{\mathbf{F}}_\theta \quad (4.28)$$

$$(\bar{\mathbf{H}}_F)_\phi \approx -j\omega \bar{\mathbf{F}}_\phi \quad (4.29)$$

Da combinação destes dois resultados resulta que o campo electromagnético total na zona distante de radiação pode ser obtido através de

$$\bar{\mathbf{E}}_r \approx 0 \quad (4.30)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_\theta \approx -\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\bar{\mathbf{N}}_{m\phi} + Z \bar{\mathbf{N}}_{e\theta}) \quad (4.31)$$

$$\bar{E}_\phi \approx \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (\bar{N}_{m\theta} - Z\bar{N}_{e\phi}) \quad (4.32)$$

$$\bar{H}_r \approx 0 \quad (4.33)$$

$$\bar{H}_\theta \approx \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left( \bar{N}_{e\phi} + \frac{\bar{N}_{m\theta}}{Z} \right) \quad (4.34)$$

$$\bar{H}_\phi \approx -\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left( \bar{N}_{e\theta} - \frac{\bar{N}_{m\phi}}{Z} \right) \quad (4.35)$$

### Condições Fronteira

Com as equações de *Maxwell* na nova forma, as condições de fronteira convencionais (apresentadas no Apêndice A) são alteradas. Aplicando então as novas equações de *Maxwell* à região de separação entre dois meios resultam as seguintes condições

$$\hat{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = -\bar{M} \quad (4.36)$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = \bar{\rho}_e \quad (4.37)$$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{J} \quad (4.38)$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = \bar{\rho}_m \quad (4.39)$$

onde ressalta que a introdução da corrente magnética permite que exista uma descontinuidade na componente tangencial do campo eléctrico.

### Teoria da Imagens

Definidas as correntes e cargas magnéticas podemos ainda introduzir um outro elemento fictício: o condutor magnético perfeito. Este é o meio dual do condutor eléctrico perfeito e cujas propriedades são definidas por comparação com este último. Assim, lembrando que um condutor eléctrico perfeito é um meio em cujo interior não existe campo electromagnético, existindo este apenas na superfície do condutor e sendo nula a componente tangencial do campo eléctrico, podemos então definir um condutor magnético perfeito como sendo um meio em cujo interior também não existe campo electromagnético, existindo apenas na sua superfície e sendo agora a componente tangencial do campo magnético nula.

O estudo do comportamento de correntes eléctricas verticais e horizontais sobre planos condutores perfeitos pode ser feito recorrendo à teoria das imagens. Na figura 4.3 é mostrada a polarização das fontes reais e das imagens para todas as configurações possíveis.

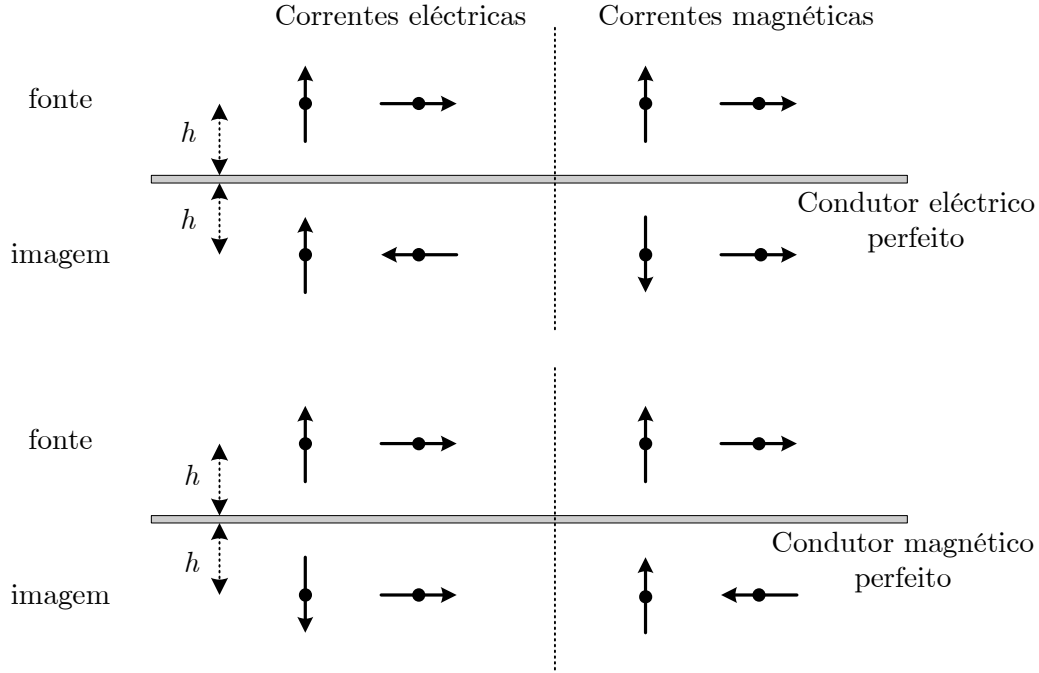


Figura 4.3: Teoria das imagens

### 4.3 Princípio da equivalência

O princípio da equivalência não é mais do que uma formulação mais rigorosa do princípio de *Huygens*, que diz que cada ponto numa frente de onda pode ser considerado como fonte de uma onda secundária e que a onda final é dada pela envolvente da interferência de todas as ondas secundárias.

Considere-se então que existe uma determinada distribuição de corrente que dá origem a um campo electromagnético  $\{\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{H}}_1\}$  que se estende por todo o espaço. Tal como se mostra na figura 4.4, considere-se uma superfície fechada  $S$  que engloba todas as correntes e que delimita um volume  $V_i$ . No exterior de  $S$  existe um volume que denominaremos de  $V_e$ . Imagine-se agora a situação da mesma figura 4.4 mas em que as correntes iniciais são removidas, em  $V_i$  passa a existir um campo  $\{\bar{\mathbf{E}}_2, \bar{\mathbf{H}}_2\}$  e em  $V_e$  o campo continua a ser o original  $\{\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{H}}_1\}$ . Como a corrente original foi eliminada, a fonte dos campos nos dois volumes terá que vir de outro lado. Das condições de fronteira aplicadas a esta superfície temos que, para que os campos sejam descontínuos<sup>1</sup>, é necessário que na superfície exista uma distribuição de corrente dada por

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\bar{\mathbf{H}}_{1s} - \bar{\mathbf{H}}_{2s}) \quad (4.40)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times (\bar{\mathbf{E}}_{1s} - \bar{\mathbf{E}}_{2s}) \quad (4.41)$$

<sup>1</sup>Admite-se que  $V_i$  e  $V_e$  são preenchidos pelo mesmo meio.

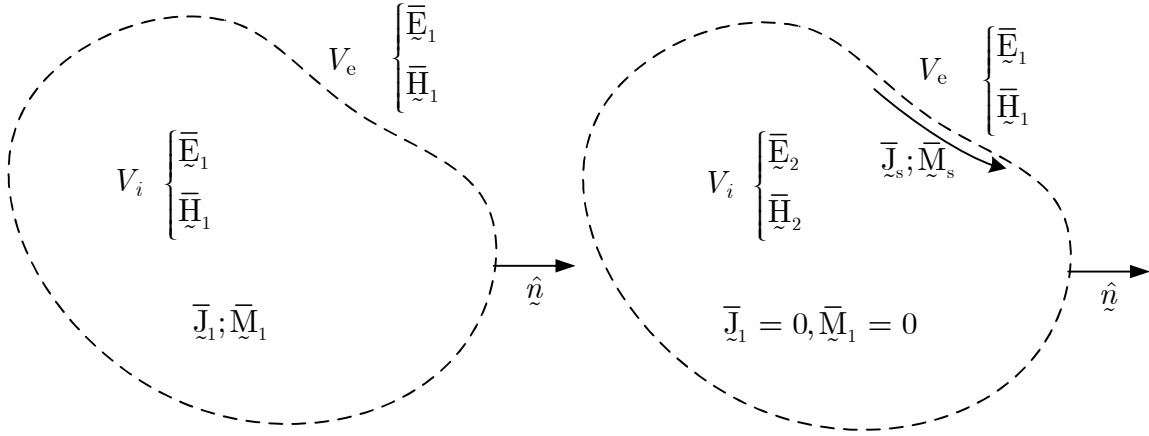


Figura 4.4: Princípio da equivalência

onde o índice  $s$  serve para indicar que as grandezas se referem à superfície  $S$ . Resulta daqui que as novas fontes de campo estão precisamente sobre a superfície  $S$ . Calculando o campo radiado por estas correntes fictícias chegaríamos a um campo  $\{\bar{E}_2, \bar{H}_2\}$  em  $V_i$  e a um campo  $\{\bar{E}_1, \bar{H}_1\}$  em  $V_e$  e o problema fica então resolvido. O facto do campo no interior de  $V_i$  ser diferente do campo original não é problema pois não é este campo que estamos interessados em calcular.

Os cálculos podem ser simplificados notando que, como o campo no interior de  $V_i$  é um campo imaginário qualquer, podemos assumir que este é nulo. Impondo então

$$\bar{E}_2 = 0 \quad (4.42)$$

$$\bar{H}_2 = 0 \quad (4.43)$$

as correntes na superfície  $S$  reduzem-se a

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times \bar{H}_{1s} \quad (4.44)$$

$$\bar{M}_s = -\hat{n} \times \bar{E}_{1s} \quad (4.45)$$

Agora estas correntes vão originar um campo nulo em  $V_i$  e um campo  $\{\bar{E}_1, \bar{H}_1\}$  em  $V_e$ . O campo real sobre a superfície  $S$  é então substituído por duas correntes fictícias equivalentes que também existem sobre a própria superfície e que, segundo as últimas relações, são iguais às componentes tangenciais do campo eléctrico e magnético. Assim não é necessário ter um conhecimento completo do campo na superfície  $S$  bastando ter um conhecimento das componentes tangenciais.

O processo descrito até aqui conduziu à existência de duas correntes fictícias sobre a superfície de separação, sendo uma eléctrica e outra magnética. O problema pode no entanto ser reduzido a uma única corrente sobre  $S$ . De facto, como o campo em  $V_i$  é nulo então o preenchimento

deste volume com um condutor eléctrico perfeito não altera as condições anteriores uma vez que também no interior deste o campo é nulo. Ora, da teoria da imagens resulta que o condutor eléctrico perfeito vai curto-circuitar a corrente  $\bar{\mathbf{J}}_s$  reduzindo o problema unicamente à corrente  $\bar{\mathbf{M}}_s$ . Tem-se então

$$\bar{\mathbf{J}}_s = 0 \quad (4.46)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_s = -2\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{E}}_{1s} \quad (4.47)$$

De igual modo, o preenchimento de  $V_i$  com um condutor magnético perfeito também não altera em nada o problema. Agora o condutor magnético perfeito vai curto-circuitar a corrente  $\bar{\mathbf{M}}_s$  reduzindo o problema unicamente à corrente  $\bar{\mathbf{J}}_s$ . Agora tem-se

$$\bar{\mathbf{J}}_s = 2\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}_{1s} \quad (4.48)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_s = 0 \quad (4.49)$$

Em resumo, os passos a seguir para a resolução de problemas radiação por aberturas são os seguintes:

1. Escolher uma superfície fechada que engloba todas as fontes de campo e sobre a qual conhecemos a distribuição do campo electromagnético, ou pelo menos a componente tangencial de  $\bar{\mathbf{E}}$  ou  $\bar{\mathbf{H}}$ .
2. Sobre esta superfície definir correntes eléctricas e magnéticas fictícias equivalentes. Para tal existem quatro possibilidades
  - (a) Assumir que no interior desta superfície existe um qualquer campo não nulo.
  - (b) Assumir que no interior desta superfície o campo é nulo.
  - (c) Assumir que o interior desta superfície é preenchido por um condutor eléctrico perfeito.
  - (d) Assumir que o interior desta superfície é preenchido por um condutor magnético perfeito.

Para resolver qualquer problema utilizando o teorema da equivalência qualquer uma destas quatro possibilidades pode ser utilizada. No entanto, dependendo do próprio problema, uma pode ser mais vantajosa relativamente às restantes.

3. Calcular os potenciais associados quer às correntes eléctricas quer as correntes magnéticas.



4. Calcular os campos associados a cada um dos potenciais na zona distante de radiação.
5. Calcular o campo total através da soma dos campos obtidos anteriormente.

