Capítulo 1

Teoria da radiação

1.1 Notação a utilizar

Neste documento lida-se com grandezas escalares e com grandezas vectoriais, ambas simultaneamente dependentes do espaço e do tempo. No que à variação temporal diz respeito, na maior parte do texto, assume-se uma variação sinusoidal (a fonte do campo produz uma única frequência). Diz-se então que se está em regime harmónico sinusoidal. Neste regime, por facilitar os cálculos, é usual trabalhar-se com os fasores das grandezas (omitindo-se a variação temporal) em vez das grandezas reais. Torna-se então necessário criar uma simbologia que permita distinguir grandezas escalares de grandezas vectoriais bem como distinguir grandezas reais dos fasores que as representam. Assim sendo, será utilizada a seguinte notação: uma barra sobre a letra que representa uma determinada grandeza indica que esta é um fasor. A ausência dessa barra indica que a letra representa uma grandeza real. De igual modo, um til sob a letra representa um vector e uma grandeza sem o til será um escalar. Uma barra e um til simultâneos indicam que a letra representa um fasor de uma grandeza vectorial. Os vectores unitários distinguem-se dos vectores "normais" através da inclusão de um acento circunflexo. Alguns exemplos são mostrados de seguida

$$
\begin{array}{rcl}
f \text{ ou } F & - & \text{Grandeza escalar real ou uma constante} \\
\underset{\sim}{\mathrm{F}} & - & \text{Grandeza vectorial real} \\
\bar{\mathrm{f}} \text{ ou } \bar{\mathrm{F}} & - & \text{Fasor de uma grandeza escalar} \\
\underset{\sim}{\bar{\mathrm{F}}} & - & \text{Fasor de uma grandeza vectorial} \\
\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_k & - & \text{Vector unitário}
\end{array}
$$

1.2 Radiação

Todos os fenómenos electromagnéticos (dos quais a radiação é apenas uma parte) obedecem às equações de *Maxwell*. Na forma diferencial, estas tomam o seguinte aspecto

$$\nabla \times \underset{\sim}{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \underset{\sim}{\mathrm{B}}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{\mathrm{H}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\mathrm{D}}}{\partial t} + \underset{\sim}{\mathrm{J}} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathrm{D}} = \rho \tag{1.4}$$

onde

$\underset{\sim}{\mathrm{E}}$	–	Campo eléctrico [V/m]
$\underset{\sim}{\mathrm{D}}$	–	Densidade de fluxo eléctrico [C/m^2]
$\underset{\sim}{\mathrm{H}}$	–	Campo magnético [A/m]
$\underset{\sim}{\mathrm{B}}$	–	Densidade de fluxo magnético [Wb/m^2]
$\underset{\sim}{\mathrm{J}}$	–	Densidade de corrente eléctrica [A/m^2]
ρ	–	Densidade de carga eléctrica [C/m^3]

Nas equações de *Maxwell*, $\underset{\sim}{\mathrm{J}}$ e ρ são as fontes do campo electromagnético e os campos são o efeito da existência destas fontes.

Considere-se um qualquer campo F simultaneamente dependente do tempo e do espaço. Se admitirmos que as variações espaciais e temporais podem ser separadas e postas na seguinte forma $F(x, y, z, t) = A(x, y, z)\cos(\omega t + \phi)$, ou seja, assumindo regime harmónico sinusoidal, podemos escrever

$$F(x, y, z, t) = \Re\left\{A(x, y, z)e^{j\phi}e^{j\omega t}\right\} \tag{1.5}$$

À grandeza $\bar{\mathrm{F}}(x, y, z) = A(x, y, z)e^{j\phi}$ chama-se fasor de $F(x, y, z, t)$. Note-se que o fasor apenas inclui a eventual dependência espacial sendo omitida a dependência temporal (por ser implícito que esta última é sinusoidal).

Notando então que

$$\frac{\partial}{\partial t}A(x, y, z)e^{j\phi}e^{j\omega t} = j\omega A(x, y, z)e^{j\phi}e^{j\omega t} \tag{1.6}$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \tag{1.7}$$

Assim sendo, as derivadas em ordem ao tempo podem então ser substituídas por $j\omega$. Fazendo esta substituição nas equações de *Maxwell*, estas ficam como se segue

$$\nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} = -j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{B}}} \tag{1.8}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} = j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{D}}} + \underset{\sim}{\bar{\mathrm{J}}} \tag{1.9}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{B}}} = 0 \tag{1.10}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{D}}} = \bar{\rho} \tag{1.11}$$

Note-se que, como $\nabla\cdot$ e $\nabla\times$ envolvem apenas derivadas em ordem às coordenadas do espaço, o termo $e^{j\omega t}$ pode ser omitido. No entanto, se pretendermos recuperar a dependência temporal dos campos, este termo tem que ser introduzido.

Na maior parte dos meios e para a maior parte das aplicações, verificam-se as seguintes relações

$$\underset{\sim}{\mathrm{B}} = \mu \underset{\sim}{\mathrm{H}} \tag{1.12}$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{D}} = \varepsilon \underset{\sim}{\mathrm{E}} \tag{1.13}$$

Fazendo uso destas relações nas equações de *Maxwell*, estas ficam então como se segue

$$\nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} = -j\omega\mu \underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} \tag{1.14}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} = j\omega\varepsilon \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} + \underset{\sim}{\bar{\mathrm{J}}} \tag{1.15}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{B}}} = 0 \tag{1.16}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{D}}} = \bar{\rho} \tag{1.17}$$

Se o meio onde os campos existem for o vazio (o que, no estudo de antenas, é condição habitual) tem-se

$$\varepsilon_0 \cong \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m} \tag{1.18}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{1.19}$$

A resolução de problemas de radiação consiste então em calcular os campos radiados partindo do princípio que a distribuição de cargas e correntes é conhecida. Sendo as equações de *Maxwell* equações diferenciais, a solução de um determinado problema de radiação passará por um processo de integração, tal como é mostrado no caminho superior indicado na figura 1.1. No entanto, dada a elevada dificuldade das integrações envolvidas, este caminho só pode ser seguido de forma

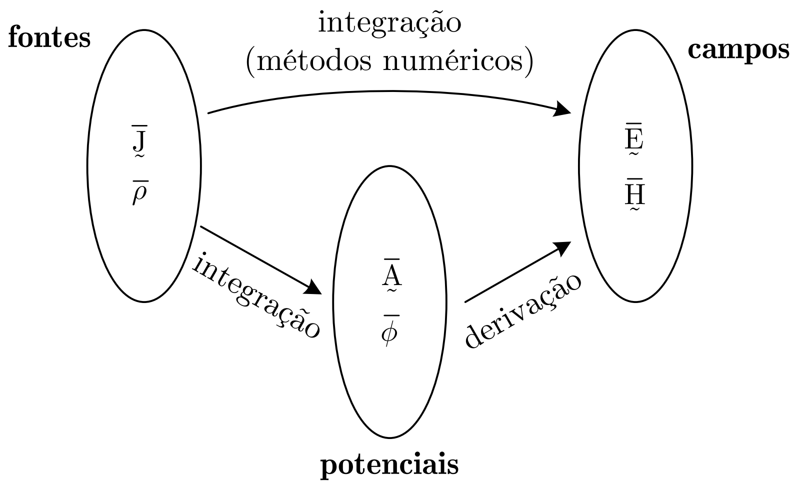

Figura 1.1: Diagrama de blocos para calcular o campo electromagnético

analítica num conjunto restrito de casos. Nos restante casos, a resolução do problema por esta via é feita recorrendo a computadores de modo a resolver as equações de *Maxwell* utilizando métodos numéricos. Uma alternativa à resolução directa das equações de *Maxwell* consiste em dividir o processo de cálculo em dois passos. Para tal é necessário introduzir funções adicionais, denominadas de potenciais. Por este caminho, mostrado na parte inferior da figura 1.1, passa-se agora por uma integração e uma derivação. No entanto, como derivar é sempre possível e como a integração envolvida é de mais baixa dificuldade, este caminho torna-se mais adequado à resolução de problemas de radiação. A forma como os potenciais são obtidos e como os campos são obtidos a partir destes será apresentada de seguida.

Comecemos então com a equação 1.16 por ser a mais simples. Como a divergência de $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{B}}}$ é nula, este pode ser obtido através do rotacional de um outro qualquer campo vectorial[1], isto é

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{B}}} = \nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \tag{1.20}$$

Como $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{B}}} = \mu \bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}}$ resulta ainda

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \tag{1.21}$$

Esta última equação permite-nos o cálculo imediato de $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}}$ a partir do potencial vector $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$, partindo do princípio que este é conhecido. Em vez de nos preocuparmos já com o cálculo de $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$ procuremos primeiro se também é possível obter $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{E}}}$ a partir do potencial vector $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$. Utilizando o resultado anterior na equação 1.14 (porque não involve termos com cargas ou correntes) vem

$$\nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{E}}} = -j\omega \nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \tag{1.22}$$

[1]Estamos simplesmente a recorrer à igualdade matemática $\nabla \cdot (\nabla \times \underset{\sim}{\mathrm{A}}) = 0$

que pode ainda se posto na forma

$$\nabla \times [\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} + j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}}] = 0 \tag{1.23}$$

Como o rotacional de $(\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} + j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}})$ é nulo, esta grandeza pode ser obtida através do gradiente de um qualquer campo escalar[2], ou seja

$$\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} + j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} = -\nabla \bar{\phi} \tag{1.24}$$

Manipulando os termos vem ainda

$$\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} = -\nabla \bar{\phi} - j\omega \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \tag{1.25}$$

Esta última equação permite-nos calcular o valor de $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}}$ a partir do potencial vector $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}}$ e do potencial escalar $\bar{\phi}$.

Dispomos então de duas equações que nos permitem efectuar o cálculo imediato dos campos $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}}$ e $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}}$ a partir do potencial vector $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}}$ e do potencial escalar $\bar{\phi}$. O próximo passo consiste em obter uma relação entre os potenciais e as fontes geradoras do campo o que facilmente se infere que pode ser feito relacionando a equação 1.15 com os resultados já obtidos. Como a equação 1.15 envolve o rotacional de $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}}$, comecemos por aplicar o rotacional a cada um dos termos de 1.21

$$\nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \tag{1.26}$$

Utilizando a igualdade matemática

$$\nabla \times \nabla \times \underset{\sim}{\mathrm{A}} = \nabla \left(\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathrm{A}} \right) - \nabla^2 \underset{\sim}{\mathrm{A}} \tag{1.27}$$

resulta

$$\mu \nabla \times \underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} = \nabla \left(\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \right) - \nabla^2 \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \tag{1.28}$$

Fazendo agora uso da equação 1.15 vem

$$\mu \underset{\sim}{\bar{\mathrm{J}}} + j\omega\mu\varepsilon \underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} = \nabla \left(\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \right) - \nabla^2 \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} \tag{1.29}$$

Substituindo 1.25 na equação anterior resulta

$$\nabla^2 \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} + \beta^2 \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} = -\mu \underset{\sim}{\bar{\mathrm{J}}} + \nabla \left(\nabla \cdot \underset{\sim}{\bar{\mathrm{A}}} + j\omega\varepsilon\mu\bar{\phi} \right) \tag{1.30}$$

[2] Agora estamos a recorrer à igualdade matemática $\nabla \times (-\nabla\phi) = 0$. O sinal negativo foi escolhido por conveniência.

com

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \tag{1.31}$$

Agora dispomos de uma equação que relaciona o potencial vector $\bar{\underset{\sim}{A}}$ com a densidade de corrente $\bar{\underset{\sim}{J}}$. Para simplificar esta expressão comecemos por relembrar que em todo o processo seguido até aqui apenas especificamos o valor de $\nabla \times \bar{\underset{\sim}{A}}$. Como a divergência e o rotacional de um campo vectorial são independentes, podemos especificar um qualquer valor para $\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{A}}$. No caso particular dos problemas de radiação, resulta da equação 1.30 que é útil efectuar a seguinte definição

$$\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{A}} = -j\omega\varepsilon\mu\bar{\phi} \tag{1.32}$$

Esta condição é conhecida como condição de *Lorentz*. Como esta condição obriga a que $\bar{\underset{\sim}{A}}$ e $\bar{\phi}$ estejam relacionadas, então apenas $\bar{\underset{\sim}{A}}$ irá ser necessário para o cálculo dos campos. Deste modo a equação 1.30 toma a seguinte forma simplificada

$$\nabla^2 \bar{\underset{\sim}{A}} + \beta^2 \bar{\underset{\sim}{A}} = -\mu \bar{\underset{\sim}{J}} \tag{1.33}$$

Como também se verifica

$$\bar{\phi} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} \nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{A}} \tag{1.34}$$

substituindo 1.34 em 1.25 vem

$$\bar{\underset{\sim}{E}} = -j\omega\bar{\underset{\sim}{A}} - j\frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \nabla \left(\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{A}}\right) \tag{1.35}$$

Em resumo, temos então que é possível calcular os campos $\bar{\underset{\sim}{E}}$ e $\bar{\underset{\sim}{H}}$ a partir da densidade de corrente $\bar{\underset{\sim}{J}}$ utilizando apenas o potencial vector $\bar{\underset{\sim}{A}}$ e as relações

$$\bar{\underset{\sim}{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\underset{\sim}{A}} \tag{1.36}$$

$$\bar{\underset{\sim}{E}} = -j\omega\bar{\underset{\sim}{A}} - j\frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \nabla \left(\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{A}}\right) \tag{1.37}$$

Resta-nos ainda encontrar a solução de 1.33 para que disponhamos de uma relação entre $\bar{\underset{\sim}{A}}$ e $\bar{\underset{\sim}{J}}$. O processo de resolução desta equação tem apenas interesse matemático, pelo que se mostra em 1.38 o resultado a que chegaríamos.

$$\bar{\underset{\sim}{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \bar{\underset{\sim}{J}} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \tag{1.38}$$

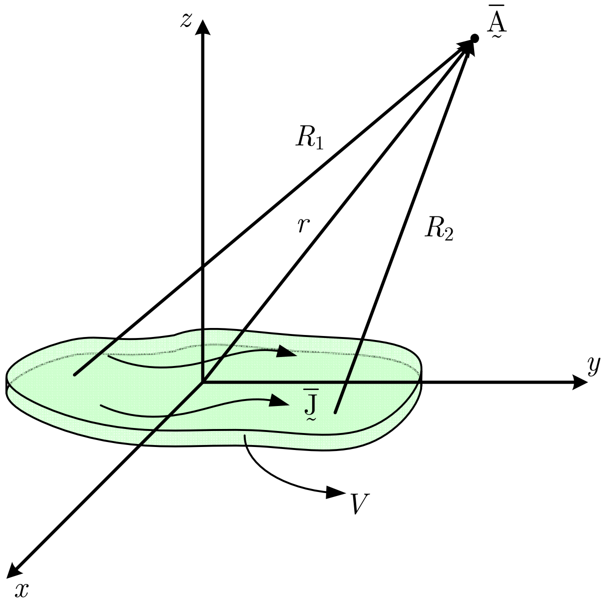

Figura 1.2: Potencial vector

Tal como explicitado na figura 1.2, V' representa o volume da antena e R representa a distância entre um qualquer ponto onde exista a corrente $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$ e um qualquer ponto do espaço onde pretendemos calcular o valor de $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$.

Note-se que o potencial vector $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$ (tal como o potencial escalar $\bar{\phi}$) não tem qualquer significado físico. O seu interesse é simplesmente matemático pois permite simplificar o estudo dos problemas de radiação. Como curiosidade, note-se também que é possível calcular os valores dos campos $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{E}}}$ e $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}}$ conhecendo apenas $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$, não sendo necessário conhecer o valor de $\bar{\rho}$. Este facto deve-se a que $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$ e $\bar{\rho}$ não são independentes. De facto, aplicando o operador de divergência a cada um dos termos de

$$\nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}} = j\omega\varepsilon\bar{\underset{\sim}{\mathrm{E}}} + \bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$$

e utilizando

$$\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{\mathrm{E}}} = \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}$$

pode-se escrever

$$\nabla \cdot \bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}} = -j\omega\bar{\rho} \tag{1.39}$$

A relação 1.39 representa a equação da continuidade de cargas eléctricas em regime harmónico sinusoidal e traduz a relação entre $\bar{\rho}$ e $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$.

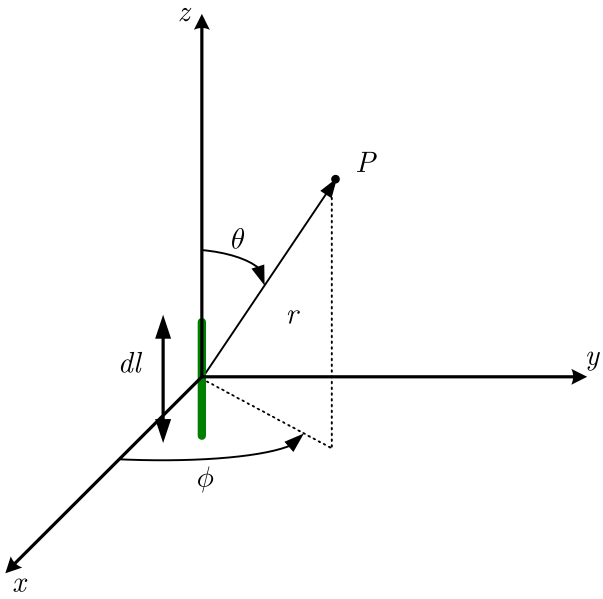

Figura 1.3: Dipolo eléctrico de *Hertz*

1.3 Dipolo Eléctrico de *Hertz*

O dipolo eléctrico de *Hertz*, mostrado na figura 1.3 com dimensões exageradas, é uma antena linear teórica infinitamente fina caracterizada por ter um tamanho dl infinitesimal e, portanto, pode ser considerada uma fonte pontual. Assume-se que a envolvente da corrente que o percorre é constante e está dirigida segundo o eixo de orientação do dipolo (neste caso, o eixo Oz). Embora este tipo de elementos não exista no mundo real é utilizado para modelar dipolos lineares curtos ($dl << \lambda$) carregados capacitivamente nos topos (a carga capacitiva serve para garantir uma corrente não nula nos topos) e serve também como elemento de base para o estudo de antenas mais elaboradas, como é o caso das antenas lineares. Além disto, do ponto de vista pedagógico, é um bom exemplo de aplicação do método de cálculo dos campos radiados apresentado anteriormente, pois ao cálculos envolvidos são relativamente simples.

1.3.1 Campos radiados

Admitamos então que a corrente ao longo do elemento é constante e de amplitude I_M, isto é, em cada ponto da antena a corrente vale

$$\underset{\sim}{I}(z', t) = I_M \cos(\omega t)\hat{\underset{\sim}{a}}_z \tag{1.40}$$

onde z' representa as coordenadas locais. Em notação fasorial tem-se

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{I}}}(z') = I_M \hat{\underset{\sim}{\mathrm{a}}}_z \tag{1.41}$$

O primeiro passo reside no cálculo do potencial vector correspondente a esta corrente. Dado o caracter pontual do dipolo de *Hertz*, podemos assumir as seguintes condições

$$x' = y' = z' = 0 \tag{1.42}$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r \tag{1.43}$$

$$dV' = dz' \tag{1.44}$$

Como assumimos que o dipolo é infinitamente fino, então a corrente total $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{I}}}$ e a densidade de corrente $\bar{\underset{\sim}{\mathrm{J}}}$ são iguais e o potencial vector reduz-se a

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}(x,y,z) = \frac{\mu I_M}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-dl/2}^{+dl/2} dz' \hat{\underset{\sim}{\mathrm{a}}}_z = \frac{\mu I_M dl}{4\pi r} e^{-j\beta r} \hat{\underset{\sim}{\mathrm{a}}}_z \tag{1.45}$$

Dada a simetria do problema é vantajoso expressar o potencial vector em coordenadas esféricas, uma vez que é expectável que a solução final seja independente da coordenada ϕ. Recorrendo então à seguinte matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_r \\ \bar{\mathrm{A}}_\theta \\ \bar{\mathrm{A}}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathrm{A}}_x \\ \bar{\mathrm{A}}_y \\ \bar{\mathrm{A}}_z \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

e como no caso em estudo temos que $\bar{\mathrm{A}}_x = \bar{\mathrm{A}}_y = 0$ obtém-se

$$\bar{\mathrm{A}}_r = \bar{\mathrm{A}}_z \cos\theta = \frac{\mu I_M dl e^{-j\beta r}}{4\pi r} \cos\theta \tag{1.47}$$

$$\bar{\mathrm{A}}_\theta = -\bar{\mathrm{A}}_z \sin\theta = -\frac{\mu I_M dl e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \tag{1.48}$$

$$\bar{\mathrm{A}}_\phi = 0 \tag{1.49}$$

Conhecido o potencial vector podemos agora calcular os campos correspondentes. Para tal recorremos a

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \tag{1.50}$$

Tendo em conta que $\nabla \times \bar{\underset{\sim}{\mathrm{A}}}$ deverá ser expresso em coordenadas esféricas, a expressão anterior reduz-se a

$$\bar{\underset{\sim}{\mathrm{H}}} = \frac{1}{\mu r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\mathrm{A}}_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}\bar{\mathrm{A}}_r \right] \hat{\underset{\sim}{\mathrm{a}}}_\phi \tag{1.51}$$

Efectuando as derivadas parciais chegaríamos a

$$\bar{\mathrm{H}}_r = 0 \tag{1.52}$$

$$\bar{\mathrm{H}}_\theta = 0 \tag{1.53}$$

$$\bar{\mathrm{H}}_\phi = j\frac{\beta I_M dl \sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{j\beta r}\right]e^{-j\beta r} \tag{1.54}$$

Para o cálculo de $\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}}$ podemos recorrer à equação 1.14 donde resulta que

$$\underset{\sim}{\bar{\mathrm{E}}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\underset{\sim}{\bar{\mathrm{H}}} \tag{1.55}$$

Efectuando os cálculos chegaríamos a que

$$\bar{\mathrm{E}}_r = \frac{ZI_M dl\cos\theta}{2\pi r^2}\left[1+\frac{1}{j\beta r}\right]e^{-j\beta r} \tag{1.56}$$

$$\bar{\mathrm{E}}_\theta = j\frac{ZI_M\beta dl\sin\theta}{4\pi r}\left[1+\frac{1}{j\beta r}-\frac{1}{(\beta r)^2}\right]e^{-j\beta r} \tag{1.57}$$

$$\bar{\mathrm{E}}_\phi = 0 \tag{1.58}$$

onde $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ é a impedância do meio que envolve o dipolo. No vazio tem-se

$$Z=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi \tag{1.59}$$

Uma análise dos resultados obtidos revela que existem parcelas que decaem com $1/r^3$, outras com $1/r^2$ e outras com $1/r$. À medida que nos afastámos da antena cada uma destas parcelas vai perdendo peso relativamente às outras, existindo uma distância a partir da qual apenas as parcelas em $1/r$ têm relevância. Quando se atinge esta última região, diz-se que se está na zona distante de radiação. Normalmente, dadas as distâncias típicas envolvidas numa ligação entre dois pontos, a antena de recepção encontra-se na zona distante de radiação pelo que esta zona se reveste de maior importância. Então, aproveitando apenas os termos em $1/r$, os campos reduzem-se a

$$\bar{\mathrm{E}}_\theta = j\frac{Z\beta I_M dl}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta \tag{1.60}$$

$$\bar{\mathrm{H}}_\phi = j\frac{\beta I_M dl}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta \tag{1.61}$$

$$\bar{\mathrm{E}}_r = 0 \tag{1.62}$$

$$\bar{\mathrm{E}}_\phi = 0 \tag{1.63}$$

$$\bar{\mathrm{H}}_r = 0 \tag{1.64}$$

$$\bar{\mathrm{H}}_\theta = 0 \tag{1.65}$$

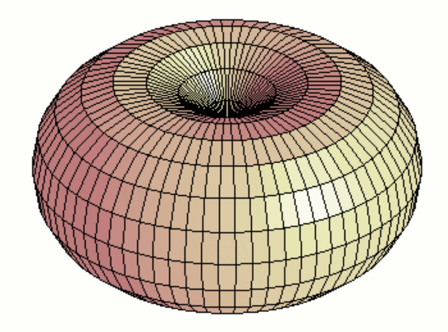

Figura 1.4: Campo eléctrico de um dipolo de *Hertz* orientado segundo Oz

Deste resultado podemos concluir que, sendo os campos da forma $\frac{e^{-j\beta r}}{r}$, então as ondas radiadas são ondas esféricas, uma vez que as regiões de fase constante formam esferas. Pode concluir-se também que os campos oscilam em fase e que existe ortogonalidade entre estes e a direcção de propagação. Conclui-se ainda que $\bar{\utilde{E}}$ e $\bar{\utilde{H}}$ estão relacionados pela impedância característica do meio, uma vez que

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z \tag{1.66}$$

Na figura 1.4 é mostrada a forma como o campo eléctrico do dipolo de *Hertz* se distribui na zona distante de radiação. A radiação é feita com maior intensidade segundo as direcções transversais à orientação do dipolo ($\theta = \pi/2$) e é nula para as direcções correspondentes ao alinhamento do dipolo (neste caso é nulo segundo o eixo Oz, ou seja, $\theta = 0$).

1.3.2 Potência radiada

Em regime harmónico sinusoidal, o valor médio da densidade de potência associada a uma onda electromagnética pode ser obtido fazendo

$$\langle \utilde{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re\{\bar{\utilde{E}} \times \bar{\utilde{H}}^*\} \tag{1.67}$$

Para o caso particular do dipolo de *Hertz* tem-se

$$\begin{aligned} \langle \utilde{S} \rangle &= \frac{1}{2}\Re\{(\bar{E}_r \hat{\utilde{a}}_r + \bar{E}_\theta \hat{\utilde{a}}_\theta) \times \bar{H}^*_\phi \hat{\utilde{a}}_\phi\} && (1.68) \\ &= \frac{1}{2}\Re\{\bar{E}_\theta \bar{H}^*_\phi \hat{\utilde{a}}_r - \bar{E}_r \bar{H}^*_\phi \hat{\utilde{a}}_\theta\} && (1.69) \end{aligned}$$

de onde se pode escrever

$$\langle \utilde{S} \rangle = S_r \hat{\utilde{a}}_r + S_\theta \hat{\utilde{a}}_\theta \tag{1.70}$$

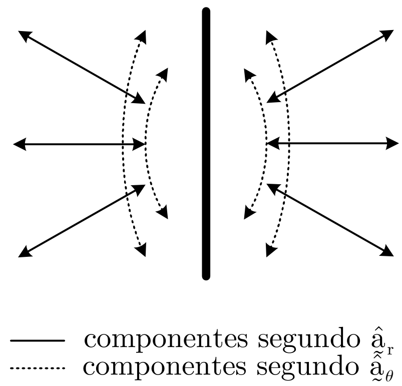

Figura 1.5: Interpretação gráfica do fluxo de potência associada a um dipolo de *Hertz*

com

$$
\begin{aligned}
S_r &= \frac{1}{2}\Re\{\bar{\mathrm{E}}_r\bar{\mathrm{H}}_\phi^*\} && (1.71)\\
S_\theta &= -\frac{1}{2}\Re\{\bar{\mathrm{E}}_r\bar{\mathrm{H}}_\phi^*\} && (1.72)
\end{aligned}
$$

Efectuando os cálculos resulta

$$
\begin{aligned}
S_r &= \frac{Z}{8}\left(\frac{I_M dl}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[1 - j\frac{1}{(\beta r)^3}\right] && (1.73)\\
S_\theta &= jZ\frac{\beta(I_M dl)^2}{16\pi^2 r^3}\sin\theta\cos\theta\left[1+\frac{1}{(\beta r)^2}\right] && (1.74)
\end{aligned}
$$

A densidade de potência que fluí segundo $\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_\theta$ é imaginária pura, pelo que se trata de uma potência reactiva armazenada. A componente radial (densidade potência que fluí segundo $\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r$) divide-se numa parte real e numa parte imaginária, esta última também associada uma parcela de potência reactiva armazenada. Note-se que as componentes imaginárias decaem muito mais rapidamente do que a componente real pelo que a potência reactiva só existe (ou, por outras palavras, só é armazenada) em torno da antena. Uma interpretação gráfica destes termos é mostrada na figura 1.5.

A potência radial associada ao dipolo de *Hertz* (isto é, a potência total que se desloca segundo $\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r$ e se afasta da antena), pode ser obtida calculando o fluxo da densidade de potência por uma superfície fechada

$$
P_{rad} = \oint_S \langle \underset{\sim}{\mathrm{S}} \rangle \cdot d\underset{\sim}{\mathrm{S}} \qquad (1.75)
$$

Considerando uma superfície esférica, então, em coordenadas esféricas tem-se

$$
d\underset{\sim}{\mathrm{S}} = dS\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r = r^2\sin\theta d\theta d\phi \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r \qquad (1.76)
$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \oint_S \langle \underset{\sim}{\mathrm{S}} \rangle \cdot d\underset{\sim}{\mathrm{S}} \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} (S_r \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r + S_\theta \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_\theta) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r) \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} S_r \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= Z\frac{\pi}{3}\left(\frac{I_M dl}{\lambda}\right)^2 \left[1 - j\frac{1}{(\beta r)^3}\right] \end{aligned}$$

Concentremo-nos agora apenas na zona distante de radiação. Aproveitando então apenas os termos do campo que variam segundo $1/r$ e repetindo os passos dados no cálculo da potência vem

$$\langle \underset{\sim}{\mathrm{S}} \rangle = \frac{1}{2}\Re\{\bar{\mathrm{E}}_\theta \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_\theta \times \bar{\mathrm{H}}^*_\phi \underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_\phi\} = \frac{1}{2}\Re\{\bar{\mathrm{E}}_\theta \bar{\mathrm{H}}^*_\phi\}\underset{\sim}{\hat{\mathrm{a}}}_r \tag{1.77}$$

o que resulta numa densidade de potência com uma amplitude dada por

$$S = \frac{1}{2}\Re\{\bar{\mathrm{E}}_\theta \bar{\mathrm{H}}^*_\phi\} = \frac{|E_\theta|^2}{2Z} = \frac{Z|H_\phi|^2}{2} = \frac{I_M^2 Z \beta^2 dl^2}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta \tag{1.78}$$

Para a potência radial associada à onda electromagnética obtém-se

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \oint_S \langle \underset{\sim}{\mathrm{S}} \rangle \cdot d\underset{\sim}{\mathrm{S}} = \oint_S S\ dS \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{I_M^2 Z\beta^2 dl^2}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= Z\frac{\pi}{3}\left(\frac{I_M dl}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

o que corresponde à parte real da potência radial obtida utilizando as expressões gerais do campo produzido por um dipolo de *Hertz*. Concluí-se também daqui que as componentes imaginárias de potência estão associadas ao campo armazenado na zona próxima, uma vez que são nulas na zona distante de radiação. Note-se ainda que que a potência total na zona distante de radiação é independente da distância e corresponde à potência que está a ser entregue à antena e a ser radiada por esta.