

Capítulo 7

Agregados

7.1 Introdução

No capítulo sobre dipolos lineares vimos que estes apresentam uma directividade relativamente baixa. Um aumento da directividade pode ser obtido através do aumento do tamanho eléctrico do dipolo mas, ao proceder-se deste modo, começam a aparecer lobos secundários sobre os quais não temos controlo e que podem ser prejudiciais para a aplicação a que o dipolo se destina. O aparecimento dos lobos secundários à medida que o tamanho eléctrico da antena aumenta acontece não só os dipolos mas em antenas em geral. Resulta daqui que uma antena isolada não é um elemento muito versátil uma vez que não é fácil modificar a sua geometria de modo a que se possam controlar as suas características de radiação.

No entanto, em muitas aplicações, é necessário uma antena com um diagrama de radiação com uma forma específica. A solução utilizada para se obter o diagrama pretendido consiste em utilizar simultaneamente várias antenas (normalmente iguais) constituindo aquilo que se denomina de agregado de antenas. O diagrama de radiação final depende não só do próprio tipo de antena utilizada mas também da disposição dos vários elementos no espaço bem como da amplitude e fase de alimentação de cada antena. Os agregados tornam-se numa solução bastante versátil pois dispomos de várias variáveis do qual o diagrama de radiação depende (amplitude, fase e posição) e as quais podemos controlar. Com os agregados é possível, por exemplo, aumentar a directividade e, simultaneamente, controlar a forma do diagrama de radiação, nomeadamente no que diz respeito à direcção do lobo principal e ao número, direcção e amplitude dos lobos secundários. Este controlo é possível através da escolha adequada do espaçamento entre elementos e/ou através de uma escolha criteriosa da fase e amplitude de alimentação de cada antena. É precisamente do estudo da influência destes parâmetros que este capítulo trata.

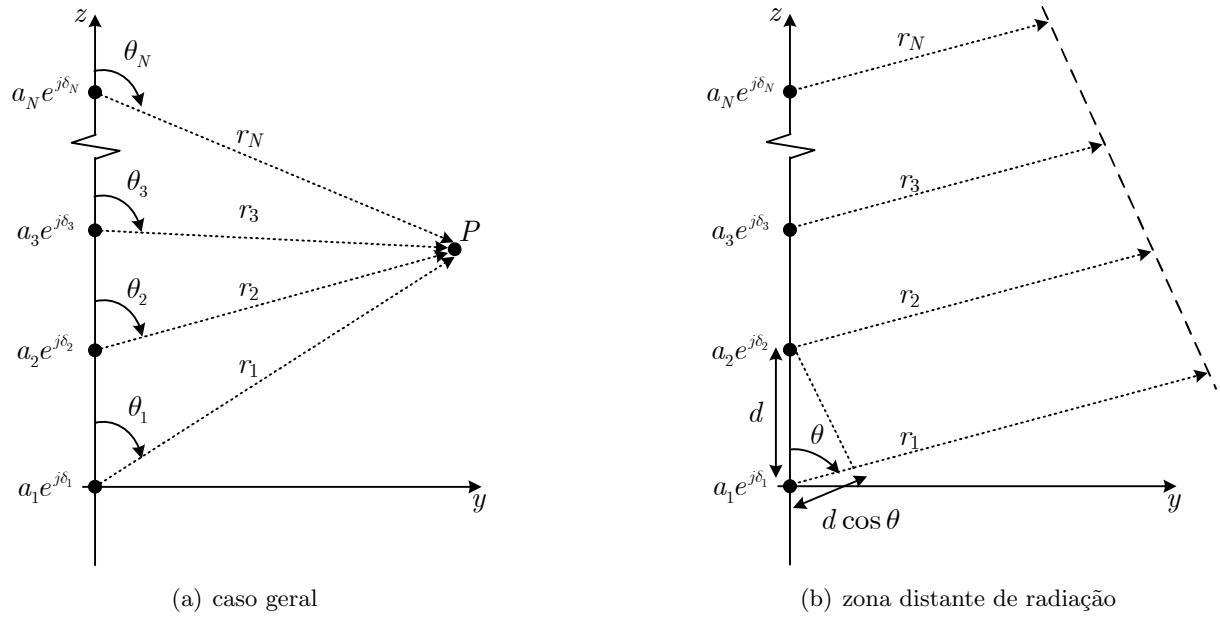


Figura 7.1: Geometria de um agregado linear

7.2 Factor de Agregado

Consideremos então um agregado linear com N antenas todas iguais tal como mostrado na figura 7.1(a). O campo total no ponto P é dado pela soma dos campos provenientes de cada antena. Matematicamente temos

$$\bar{E}_T(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N \bar{E}_n(\theta, \phi) \quad (7.1)$$

Como aproximação para zona distante de radiação vamos considerar que as distâncias a cada elemento são as mostradas na figura 7.1(b). Esta aproximação permite-nos desprezar o carácter vectorial do campo proveniente de cada antena e reduzir o problema a uma soma de campos escalares, uma vez que todas as contribuições são vectores com o mesmo sentido. Resulta então que, na zona distante de radiação, temos

$$\bar{E}_T(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N \bar{E}_n(\theta, \phi) \quad (7.2)$$

Cada antena tem um campo eléctrico na zona distante de radiação dado por $\bar{E}(\theta, \phi)$ e é alimentada com uma amplitude a_n , uma fase δ_n . No somatório dos campos que chegam ao ponto P , a esta diferença de fase forçada na alimentação de cada elemento é adicionada ainda uma diferença de fase provocada pela diferença de percurso. Esta diferença de percurso deve-se ao espaçamento entre elementos que, da análise da figura 7.1(b), resulta que vale $\beta d_n \cos \theta$. Assim,

podemos escrever

$$\bar{E}_T(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\delta_n} e^{j\beta d_n \cos \theta} \bar{E}(\theta, \phi) \quad (7.3)$$

Como os elementos que compõem o agregado são todos iguais, 7.3 pode ser escrita na seguinte forma

$$\bar{E}_T(\theta, \phi) = \bar{E}(\theta, \phi) \sum_{n=1}^N a_n e^{j\delta_n} e^{j\beta d_n \cos \theta} \quad (7.4)$$

Da expressão 7.4 verifica-se que o campo de um agregado pode ser decomposto no produto de duas parcelas, sendo uma o campo do elemento utilizado no agregado e a outra o denominado de factor de agregado. Este último é dado por

$$F_Z = \sum_{n=1}^N a_n e^{j\delta_n} e^{j\beta d_n \cos \theta} \quad (7.5)$$

e depende apenas da distribuição dos elementos no espaço e da respectiva alimentação. Se considerarmos que os elementos estão igualmente espaçados, podemos escrever

$$d_n = (n - 1)d$$

Considerando também que a diferença de fase entre elementos é constante (desfasamento progressivo) e tendo como referência para a fase o elemento na origem dos eixos podemos também escrever

$$\delta_n = (n - 1)\delta$$

Netas condições o factor de agregado para um agregado linear de espaçamento uniforme e desfasamento progressivo é dado por

$$F_Z = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)(\beta d \cos \theta + \delta)} \quad (7.6)$$

Nas seguintes secções iremos proceder ao estudo de 7.6 para diferentes distribuições e amplitudes de alimentação a_n .

7.3 Agregado linear de amplitudes uniformes

Um agregado linear de amplitudes uniformes é um agregado em que a amplitude de cada elemento é constante. Assim, impondo

$$a_1 = a_2 = (\dots) = a_n = 1$$

então a expressão 7.6 fica na seguinte forma

$$F_Z = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(\beta d \cos \theta + \delta)} \quad (7.7)$$

Fazendo a seguinte substituição

$$Z = \beta d_z \cos \theta + \delta \quad (7.8)$$

a expressão 7.6 toma a seguinte forma simplificada

$$F_Z = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)Z} \quad (7.9)$$

Multiplicando ambos os membros de 7.9 por e^{jZ} resulta

$$F_Z e^{jZ} = \sum_{n=1}^N e^{jnZ} \quad (7.10)$$

Subtraindo 7.9 a cada um dos membros de 7.10 obtém-se

$$F_Z e^{jZ} - F_Z = \sum_{n=1}^N e^{jnZ} - \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)Z} \quad (7.11)$$

ou seja

$$F_Z (e^{jZ} - 1) = e^{jNZ} - 1 \quad (7.12)$$

ou ainda que

$$F_Z = \frac{e^{jNZ} - 1}{e^{jZ} - 1} = \left(\frac{e^{j\frac{N}{2}Z} - e^{-j\frac{N}{2}Z}}{e^{j\frac{1}{2}Z} - e^{-j\frac{1}{2}Z}} \right) e^{j\frac{N-1}{2}Z} = \left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}Z\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}Z\right)} \right] e^{j\frac{N-1}{2}Z} \quad (7.13)$$

O termo $e^{j\frac{N-1}{2}Z}$ seria importante apenas se o sinal proveniente do agregado fosse combinado com o sinal de outra antena ou agregado. Aliás, se o agregado estiver centrado na origem do sistemas de coordenadas este desfasamento desapareceria uma vez que representa simplesmente a diferença de fase entre um raio que parta da origem e outro que parta do centro do agregado. Desprezando este termo resulta então

$$F_Z = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}Z\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}Z\right)} \quad (7.14)$$

Normalizando F_Z relativamente ao seu valor máximo (que vale N) obtém-se

$$F_{ZN} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}Z\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}Z\right)} \quad (7.15)$$

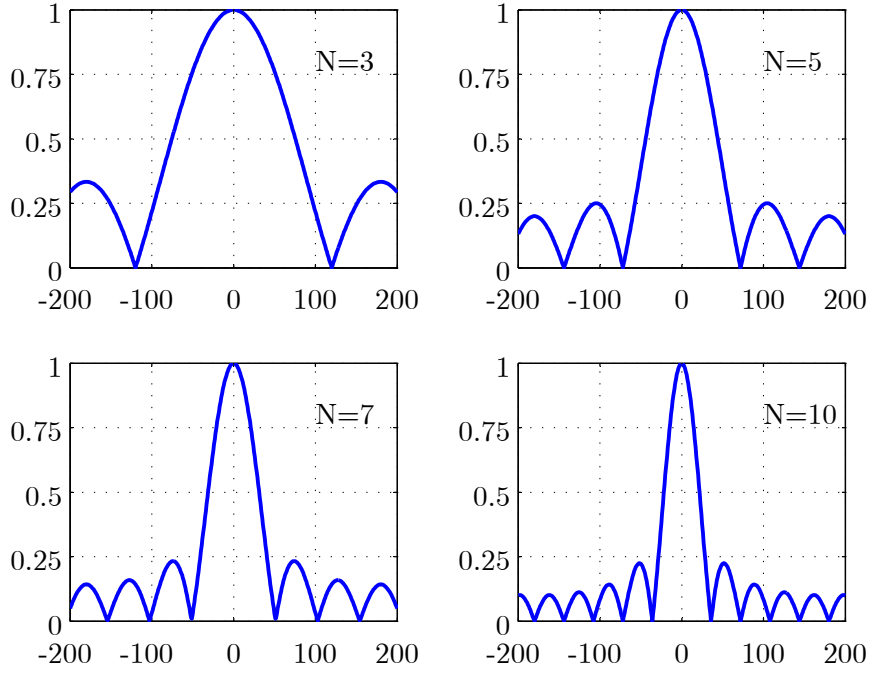


Figura 7.2: Exemplos do andamento de 7.15

O andamento de $|F_{ZN}|$ para vários valores de N é mostrado na figura 7.2. Apesar da obtenção do diagrama de radiação a partir da figura 7.2 não ser directa, uma vez que, como iremos ver, apenas uma parte deste diagrama irá dar origem ao factor de agregado, podem-se tirar várias conclusões desta figura:

1. Quanto maior for o número de elementos menor será a abertura do lobo principal.
2. Um aumento do número de elementos leva a um aumento do número de lobos secundários.
3. A amplitude máxima dos lobos secundários diminui com o aumento do número de elementos.

Nulos do factor de agregado

A expressão 7.14 tem nulos sempre que

$$\sin\left(\frac{N}{2}Z\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{2}Z = \pm n\pi \Leftrightarrow \frac{N}{2}(\beta d_z \cos\theta + \delta) = \pm n\pi \quad (7.16)$$

deduzindo-se daqui que os ângulos para os quais o factor de agregado é nulo são dados por

$$\theta_n = \cos^{-1}\left(\frac{\pm 2n\pi}{N\beta d_z} - \frac{\delta}{\beta d_z}\right) \quad n = 1, 2, \dots \text{ e } n \neq N, 2N, 3N, \dots \quad (7.17)$$

A direcção dos nulos depende do número de elementos do agregado, do espaçamento entre elementos e da diferença de fase entre elementos.

Máximos do factor de agregado

Na expressão 7.14, n não pode tomar os valores $N, 2N, \dots$, porque nestas condições o denominador também é zero, o que leva a uma indeterminação. O levantamento desta indeterminação leva à conclusão que neste caso se obtém o máximo do factor de agregado. Assim resulta que

$$\sin\left(\frac{Z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{Z}{2} = \pm m\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\beta d_z \cos \theta + \delta) = \pm m\pi \quad (7.18)$$

Os ângulos para os quais o factor de agregado é máximo são então dados por

$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{\pm 2m\pi - \delta}{\beta d_z}\right) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.19)$$

A direcção dos máximos do agregado depende do espaçamento entre elementos e da diferença de fase entre elementos, mas não depende do número de elementos embora o número de elementos do agregado vai ditar o máximo do factor de agregado.

Calculemos agora, e para vários casos particulares, quais as fases da alimentação dos vários elementos que nos garantem um máximo numa determinada direcção.

7.3.1 Agregado transversal

Um agregado transversal ¹ é um agregado cujo máximo de radiação é perpendicular à orientação do agregado. No caso do agregado linear estar ao longo do eixo Oz , o máximo encontra-se em $\theta = \pi/2$, tal como exemplificado na figura 7.3. Utilizando 7.14 e sabendo que o máximo será para $\theta = \pi/2$ temos que

$$\frac{\pi}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{\pm 2m\pi - \delta}{\beta d_z}\right) \Leftrightarrow 0 = \left(\frac{\pm 2m\pi - \delta}{\beta d_z}\right) \Leftrightarrow \delta = \pm 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

ou seja

$$\delta = 0 \quad (7.21)$$

Portanto, o número de elementos e o espaçamento entre eles vai influenciar o número, a amplitude e a direcção dos lobos secundários e do lobo principal. No entanto, desde que o desfasamento entre elementos seja nulo, a radiação máxima será sempre transversal à orientação do agregado.

¹Também conhecido pelo vocábulo inglês *Broadside*

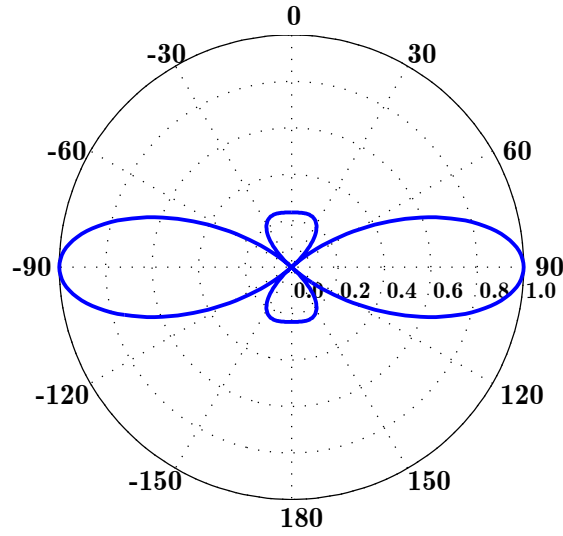


Figura 7.3: Exemplo de um agregado transversal com 6 elementos isotrópicos orientados ao longo do eixo Oz e espaçados de $\lambda/4$

7.3.2 Agregado longitudinal

Um agregado longitudinal² é um agregado cujo máximo de radiação é normal à orientação do agregado. No caso do agregado estar ao longo do eixo Oz , o máximo é para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Na figura 7.4 é mostrado um exemplo de um agregado longitudinal com uma máximo para $\theta = 0$. Utilizando mais uma vez 7.14 e para $\theta = 0$ temos que

$$0 = \cos^{-1} \left(\frac{\pm 2m\pi - \delta}{\beta d_z} \right) \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\pm 2m\pi - \delta}{\beta d_z} \right) \Leftrightarrow \delta = \pm 2m\pi - \beta d_z \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.22)$$

ou ainda

$$\delta = -\beta d_z \quad (7.23)$$

De igual modo, para $\theta = \pi$ resulta

$$\delta = \beta d_z \quad (7.24)$$

Num agregado linear, um desfasamento entre elementos igual ao espaçamento eléctrico entre estes conduz a uma radiação do tipo longitudinal. Um desfasamento negativo dá origem a um máximo para $\theta = 0$ e um desfasamento positivo origina um máximo para $\theta = \pi$.

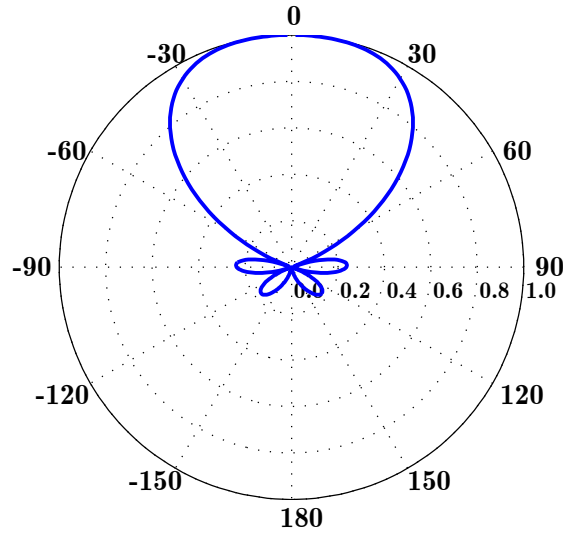


Figura 7.4: Exemplo de um agregado longitudinal com 6 elementos isotrópicos orientados ao longo do eixo Oz e espaçados de $\lambda/4$

7.3.3 Agregado arbitrário

Um agregado diz-se arbitrário³ se a direcção de máxima radiação não for nem ortogonal nem paralela à orientação do agregado. O desfasamento entre elementos para obter um máximo numa direcção θ_m será dado por

$$\delta = -\beta d_z \cos \theta_m \pm 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.25)$$

ou seja

$$\delta = -\beta d_z \cos \theta_m \quad (7.26)$$

Controlando a diferença de fase entre elementos adjacentes, pode orientar-se o máximo de radiação para qualquer direcção. Um exemplo é mostrado na figura 7.5.

7.3.4 Directividade

É possível demonstrar que a directividade de um agregado linear uniforme, transversal ou longitudinal, é dada, respectivamente, por

$$D_B = \frac{(\beta d)N^2}{N\beta d + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{N-m}{m} \sin(m\beta d)} \quad (7.27)$$

²Também conhecido pelo vocábulo inglês *Endfire*

³Também conhecido pelo vocábulo inglês *Scanning Array*

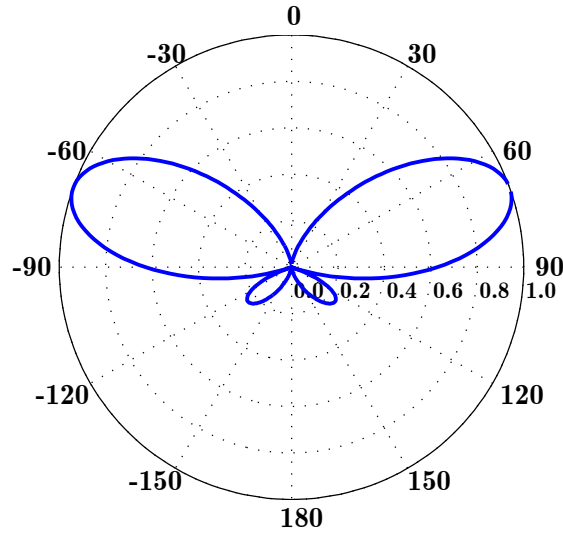


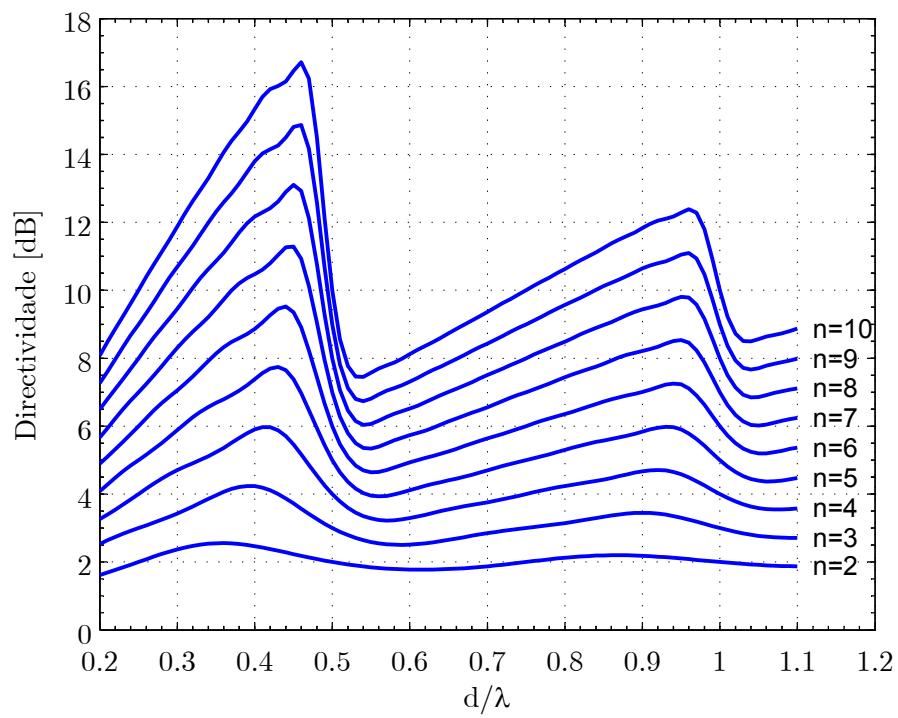
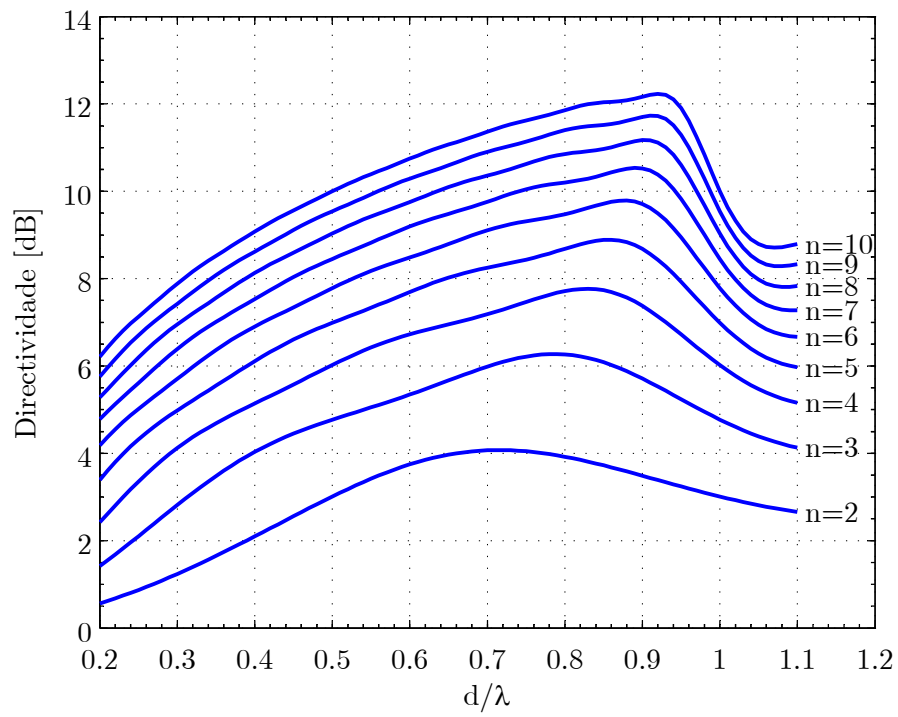
Figura 7.5: Exemplo de um agregado *Scanning Array* com 6 elementos isotrópicos orientados ao longo do eixo Oz e espaçados de $\lambda/4$

Tabela 7.1: Espaçamento ótimo e directividade máxima em agregados

| Longitudinal | | | Transversal | | |
|--------------|----------------|-------------|-------------|----------------|-------------|
| N | D_{max} [dB] | d/λ | N | D_{max} [dB] | d/λ |
| 2 | 2.55 | 0.36 | 2 | 4.07 | 0.72 |
| 3 | 4.24 | 0.39 | 3 | 6.27 | 0.79 |
| 4 | 5.97 | 0.41 | 4 | 7.77 | 0.83 |
| 5 | 7.74 | 0.43 | 5 | 8.89 | 0.86 |
| 6 | 9.52 | 0.44 | 6 | 9.79 | 0.88 |
| 7 | 11.29 | 0.45 | 7 | 10.54 | 0.89 |
| 8 | 13.10 | 0.45 | 8 | 11.17 | 0.90 |
| 9 | 14.87 | 0.46 | 9 | 11.73 | 0.91 |
| 10 | 16.71 | 0.46 | 10 | 12.23 | 0.92 |

$$D_E = \frac{(\beta d)N^2}{N\beta d + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{N-m}{m} \sin(2m\beta d)} \quad (7.28)$$

O andamento da directividade é mostrado nas figuras 7.6(b) e 7.6(a), onde se pode verificar que existe uma dependência da directividade com o espaçamento entre elementos. Na tabela 7.1 são mostrados os espaçamentos óptimos correspondentes à directividade máxima e as directividades correspondentes.



(b) Agregado longitudinal

Figura 7.6: Directividade em agregados

7.3.5 Obtenção do diagrama de radiação

A obtenção de uma representação gráfica do diagrama de radiação no formato polar a partir das figuras mostradas em 7.2 é muito simples e feito como se segue:

1. Representar a figura correspondente ao factor de agregado dado por 7.15.
2. Sobre um eixo paralelo ao eixo da figura anterior, desenhar um círculo centrado em δ e de raio βd .
3. Desenhar linhas verticais entre vários valores da figura obtida no primeiro ponto e o círculo desenhado anteriormente e marcar os vários pontos de intersecção.
4. Desenhar linhas radiais entre o centro do círculo e os pontos de intersecção obtidos anteriormente.
5. Sobrepostas às linhas radiais anteriores desenhar linhas de amplitude proporcional ao valor de 7.15
6. Unir as extremidades das linhas obtidas anteriormente de modo a se obter um desenho contínuo.

Na figura 7.7 é mostrado um exemplo de aplicação do método descrito, para um agregado com 10 fontes, espaçadas de $\lambda/4$ e com um desfasamento progressivo de $-\pi/4$.

7.4 Agregado linear de amplitudes não uniformes

Na secção anterior restringimos o estudo dos agregados ao caso particular em que a distribuição de amplitudes de alimentação é uniforme. Esta distribuição conduz a diagramas de radiação com uma largura de feixe estreita mas à custa de um nível de lobos secundários elevado. Se não for utilizada uma amplitude de alimentação uniforme, escolhendo criteriosamente a relação entre as amplitudes dos vários elementos, é possível reduzir ou até mesmo eliminar os lobos secundários. O preço a pagar será o aumento da largura de feixe. Nesta secção iremos efectuar o estudo de duas dessas distribuições de alimentação: a distribuição Binomial e a distribuição *Chebyshev*.

Da expressão 7.6, e fazendo $Z = \beta d_z \cos \theta + \delta$, vem

$$F_Z = a_1 + a_2 e^{jZ} + a_3 e^{j2Z} + (...) + a_{N-1} e^{j(N-2)Z} + a_N e^{j(N-1)Z} \quad (7.29)$$

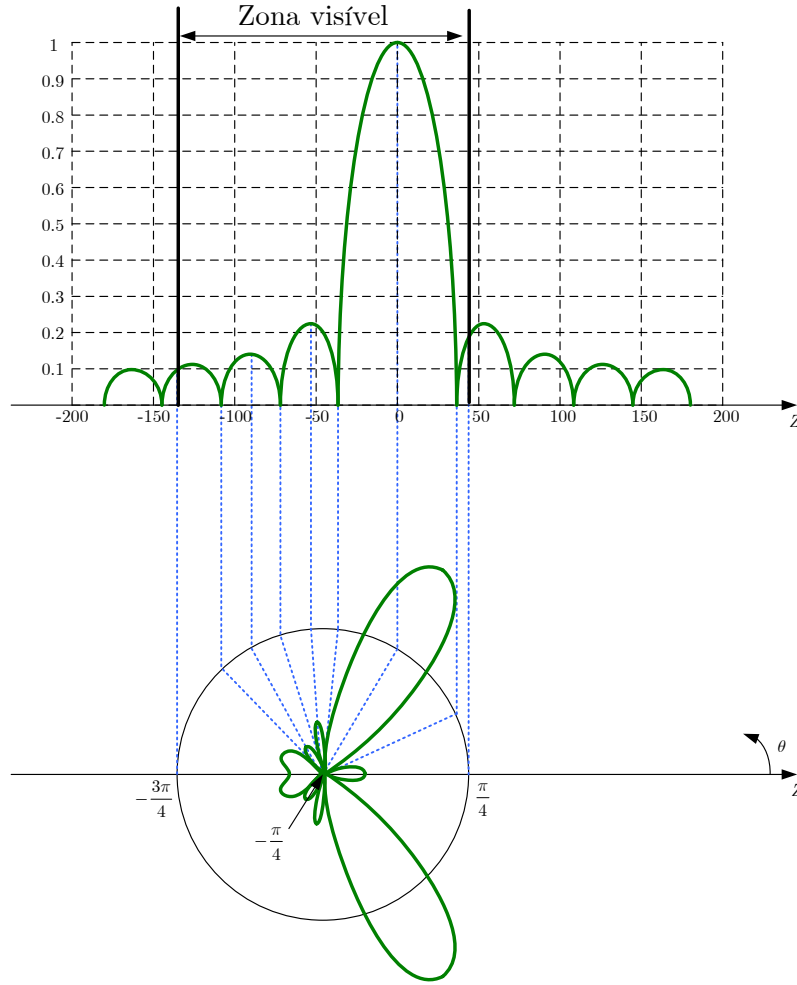


Figura 7.7: Exemplo de aplicação da obtenção do diagrama de radiação de um agregado com 10 fontes, espaçadas de $\lambda/4$ e com um desfasamento sucessivo de $-\pi/4$.

Apesar da distribuição de amplitudes poder ser uma qualquer, vamos impor que seja simétrica em relação ao eixo geométrico de simetria do agregado. Isto corresponde a fazer

$$\begin{cases} a_1 = a_N \\ a_2 = a_{N-1} \\ a_3 = a_{N-2} \\ (...) \end{cases} \Rightarrow a_n = a_{N-n+1} \quad (7.30)$$

Fazendo uso de 7.30 então F_Z toma a seguinte forma

$$F_Z = [a_1 + a_1 e^{j(N-1)Z}] + [a_2 e^{jZ} + a_2 e^{j(N-2)Z}] + (...) + [a_M e^{j\frac{N-1}{2}Z}] \quad (7.31)$$

onde o termo a_M , com $M = (N + 1)/2$, só existe se o agregado tiver um número ímpar de

termos. Ou seja

$$\begin{cases} a_M = a_{(N+1)/2} & \text{N ímpar} \\ a_M = 0 & \text{N par} \end{cases} \quad (7.32)$$

Pondo $e^{j(N-1)Z/2}$ em evidência resulta ainda

$$F_Z = e^{j\frac{N-1}{2}Z} \left\{ \left[a_1 e^{-j\frac{N-1}{2}Z} + a_1 e^{j\frac{N-1}{2}Z} \right] + \left[a_2 e^{-j\frac{N-3}{2}Z} + a_2 e^{j\frac{N-3}{2}Z} \right] + (\dots) + a_M \right\} \quad (7.33)$$

Desprezando o termo da fase (pelos mesmos motivos que desprezamos o termo da fase em agregados lineares uniformes) e sabendo que

$$e^{-jx} + e^{jx} = 2 \cos(x) \quad (7.34)$$

resulta finalmente

$$F_Z = 2a_1 \cos\left(\frac{N-1}{2}Z\right) + 2a_2 \cos\left(\frac{N-3}{2}Z\right) + (\dots) + a_M \quad (7.35)$$

Em resumo, a expressão 7.35 representa o factor de agregado de um agregado linear, equiespaçado, de desfasamento progressivo e com uma distribuição de amplitudes de alimentação não uniforme e simétrica relativamente ao eixo geométrico de simetria do agregado e onde os valores dos coeficientes a_n vão depender da distribuição utilizada.

7.4.1 Distribuição *Chebyshev*

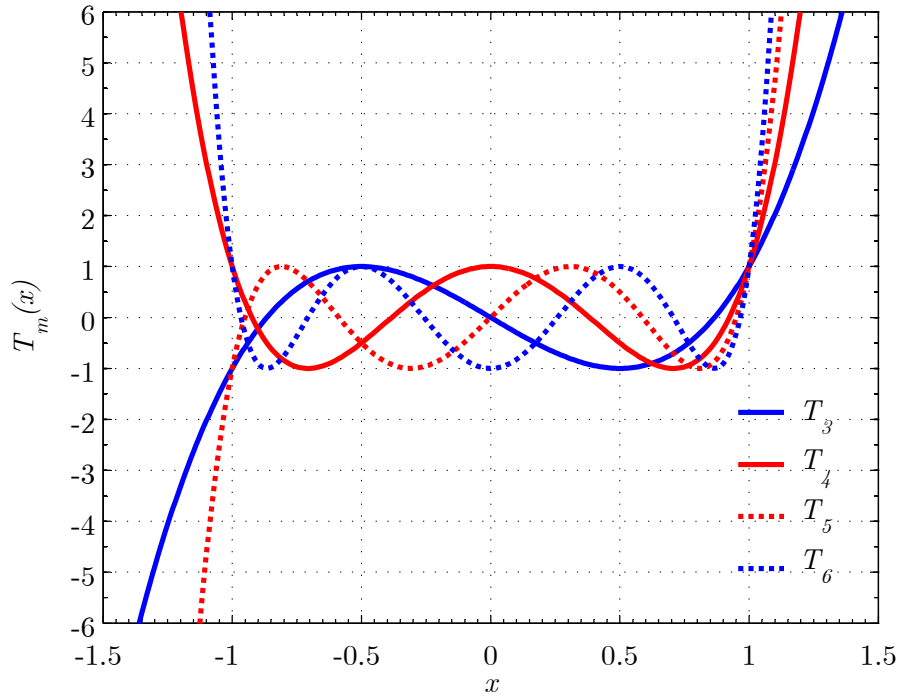
Polinómios de *Chebyshev*

Os polinómios de *Chebyshev* são dados por

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned} \quad (7.36)$$

ou, de uma forma geral, por

$$\begin{aligned} T_m(x) &= \cos(m \cos^{-1} x) & -1 \leq x \leq 1 \\ T_m(x) &= \cosh(m \cosh^{-1} x) & x < -1 \text{ e } x > 1 \end{aligned} \quad (7.37)$$

Figura 7.8: Polinômios de *Chebyshev*

em que $T_m(x)$ representa o polinômio de *Chebyshev* de grau m . Estes polinômios podem ainda ser obtidos pela seguinte formula recursiva

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) \quad (7.38)$$

Os polinômios de *Chebyshev*, cujo andamento é mostrado na figura 7.8 para os polinômios de ordem mais baixa, têm as seguintes propriedades

1. Todos os polinômios passam pelo ponto (1,1)
2. Para $-1 < x < 1$ tem-se sempre $-1 < T_m(x) < 1$
3. No intervalo $-1 < x < 1$ todos os máximos e mínimos têm o valor de 1 e -1, respectivamente.
4. Os zeros dos polinômios estão compreendidos no intervalo $-1 < x < 1$ e acontecem em $x = \cos[(\pi/2m)(2p + 1)]$, com $p = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.
5. Os extremos dos polinômios estão compreendidos no intervalo $-1 < x < 1$ e acontecem em $x = \cos[(\pi/m)p]$, com $p = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.
6. Para $x > 1$ a função é sempre crescente.

7. De todos os polinómios de grau m que passam simultaneamente por $(x_0, R > 1)$ e $(x_1, 0)$, e que ficam compreendidos entre ± 1 no intervalo $-1 < x < 1$, os polinómios de *Chebyshev* minimizam a distância $x_0 - x_1$.

Se conseguirmos que o factor de agregado tenha o andamento de um dos polinómios de *Chebyshev* e de tal forma que para $-1 < x < 1$ se dê origem aos lobos secundários e para $x > 1$ se dê origem ao lobo principal, então dispomos duma maneira de controlar as amplitudes dos lobos secundários. De facto, todos os lobos secundários terão uma amplitude máxima unitária e a amplitude do lobo principal dependerá do valor de $x = x_0 > 1$ que atingirmos. Este valor depende da relação entre amplitudes do lobo principal e dos lobos secundários pretendida. Além disto, pela última propriedade dos polinómios, estes garantem que para uma determinada relação entre lobo principal e lobo secundário a largura de feixe entre nulos é a menor possível.

Voltando à expressão 7.35, que nos dá o factor de agregado, verificamos que esta traduz a soma de termos do tipo $\cos(mu)$. Estas são funções sinusoidais com um argumento que é um número inteiro de vezes uma frequência fundamental e que podem ser obtidas a partir de um polinómio de funções sinusoidais cujo argumento seja apenas a frequência fundamental. Mostram-se de seguida alguns exemplos

$$\begin{aligned}
m = 0 \quad \cos(mu) &= 1 \\
m = 1 \quad \cos(mu) &= \cos(u) \\
m = 2 \quad \cos(mu) &= \cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1 \\
m = 3 \quad \cos(mu) &= \cos(3u) = 4 \cos^3 u - 3 \cos u \\
m = 4 \quad \cos(mu) &= \cos(4u) = 8 \cos^4 u - 8 \cos^2 u + 1 \\
m = 5 \quad \cos(mu) &= \cos(5u) = 16 \cos^5 u - 20 \cos^3 u + 5 \cos u \\
m = 6 \quad \cos(mu) &= \cos(6u) = 32 \cos^6 u - 48 \cos^4 u + 18 \cos^2 u - 1
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Concluí-se daqui que F_Z pode ser transformado num polinómio de grau $N - 1$ em $Z/2$ e o factor de agregado pode ser igualado a um polinómio de *Chebyshev* de grau $N - 1$ desde que se escolham as amplitudes adequadas. De modo a compreender o uso destes polinómios, tomemos como exemplo um agregado de 5 fontes isotrópicas. Como $M = 3$ então o factor de agregado vale

$$\begin{aligned}
F_Z &= 2a_1 \cos\left(4\frac{Z}{2}\right) + 2a_2 \cos\left(2\frac{Z}{2}\right) + a_3 \\
&= 2a_1 \left[8 \cos^4\left(\frac{Z}{2}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{Z}{2}\right) + 1\right] + 2a_2 \left[2 \cos^2\left(\frac{Z}{2}\right) - 1\right] + a_3 \\
&= 16a_1 \cos^4\left(\frac{Z}{2}\right) + (4a_2 - 16a_1) \cos^2\left(\frac{Z}{2}\right) + 2a_1 - 2a_2 + a_3
\end{aligned} \tag{7.40}$$

De modo a igualar 7.40 a um polinómio de *Chebyshev* poderíamos começar por fazer $x = \cos(Z/2)$. No entanto, como $-1 < \cos(Z/2) < 1$ e como estamos interessados em obter valores de $x > 1$ vamos fazer antes a seguinte substituição

$$x = b \cos\left(\frac{Z}{2}\right) \quad (7.41)$$

onde $b > 1$ é uma constante que iremos determinar mais tarde. Substituindo 7.41 em $T_4(x)$ vem

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &= 8\left(b \cos \frac{Z}{2}\right)^4 - 8\left(b \cos \frac{Z}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 8b^4 \cos^4\left(\frac{Z}{2}\right) - 8b^2 \cos^2\left(\frac{Z}{2}\right) + 1 \end{aligned} \quad (7.42)$$

Igualando $T_4(x)$ a F_Z resulta

$$\begin{cases} 8b^4 = 16a_1 \\ -8b^2 = 4a_2 - 16a_1 \\ 1 = 2a_1 - 2a_2 + a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = b^4/2 \\ a_2 = 2(b^4 - b^2) \\ a_3 = 3b^4 - 4b^2 + 1 \end{cases} \quad (7.43)$$

Agregado Transversal

O dimensionamento de um agregado transversal de N elementos e com distribuição de *Chebyshev* pode ser feito segundo um de dois possíveis objectivos: ou se especifica a relação entre lobo principal e lobo secundário e se determina a menor largura de feixe possível ou se especifica a largura de feixe desejada e se determina a relação entre lobo principal e lobo secundário correspondente.

Suponhamos então que pretendemos dimensionar um agregado transversal com uma determinada relação R , em termos de campo eléctrico, entre lobo principal e lobo secundário. Como devemos ter $\delta = 0$ e um máximo de radiação para $\theta = \pi/2$, de 7.41 resulta

$$x_0 = x|_{\theta=\pi/2} = b \quad (7.44)$$

Vimos anteriormente que os lobos secundários têm todos amplitude unitária. Assim, para se obter a relação entre amplitudes desejada, o lobo principal terá uma amplitude de R . Como o lobo principal é obtido para $x > 1$ e esta zona do polinómio resulta das funções hiperbólicas então

$$T_{(N-1)}(x_0) = R \Leftrightarrow \cosh \left[(N-1) \cosh^{-1} b \right] = R \quad (7.45)$$

de onde resulta

$$b = \cosh \left(\frac{1}{N-1} \cosh^{-1} R \right) \quad (7.46)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[R + (R^2 - 1)^{1/2} \right]^{\frac{1}{N-1}} + \left[R + (R^2 - 1)^{1/2} \right]^{\frac{1}{1-N}} \right\} \quad (7.47)$$

Para calcular a largura do feixe podemos começar por notar que o primeiro nulo acontece para

$$x_n = \cos \left(\frac{\pi}{2(N-1)} \right) \quad (7.48)$$

Utilizando este resultado em 7.41 vem

$$Z_n = 2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{b} \cos \frac{\pi}{2(N-1)} \right] \quad (7.49)$$

donde resulta que a direcção $\theta = \theta_n$ à qual este nulo está associado é de

$$\cos \theta_n = \frac{2}{\beta d} \cos^{-1} \left[\frac{1}{b} \cos \left(\frac{\pi}{2(N-1)} \right) \right] \quad (7.50)$$

resultando finalmente

$$FNBW = \pi - 2\theta_n \quad (7.51)$$

Por outro lado, se o dado inicial for a largura de feixe desejada, então o parâmetro b é definido através da expressão 7.50 em conjunto com a expressão 7.51.

$$b = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2N-2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta d}{2} \cos \theta_n \right)} \quad (7.52)$$

Conhecido o valor de b , o nível de lobos secundários fica imediatamente imposto. Tem-se

$$R = T_{N-1}(b) \quad (7.53)$$

$$= \cosh \left[(n-1) \cosh^{-1} b \right] \quad (7.54)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[b + (b^2 - 1)^{1/2} \right]^{n-1} + \left[b + (b^2 - 1)^{1/2} \right]^{1-n} \right\} \quad (7.55)$$

Como exemplo, suponhamos que pretendemos dimensionar o agregado anterior de 5 elementos, de modo a obter uma relação entre lobo principal e lobos secundários de 20dB, ou seja $R = 10$.

De 7.46 resulta

$$b = \cosh \left(\frac{1}{4} \cosh^{-1} 10 \right) = 1.2933 \quad (7.56)$$

Daqui e de 7.43 resulta que as amplitudes de alimentação dos vários elementos valem

$$\begin{cases} a_1 = 1.3988 \\ a_2 = 2.2501 \\ a_3 = 2.7024 \end{cases} \quad (7.57)$$

Normalizando os coeficientes de alimentação em relação ao elemento mais baixo resulta ainda

$$a_1 = 1 \quad (7.58)$$

$$a_2 = 1.609 \quad (7.59)$$

$$a_3 = 1.932 \quad (7.60)$$

Note-se que a largura de feixe depende do espaçamento entre elementos utilizado e que até aqui ainda não foi especificado pois nos cálculos efectuados não existe dependência com o espaçamento entre elementos. No entanto, tal como se prova pelos diagramas de radiação obtidos para este exemplo e mostrados na figura 7.9, se o espaçamento entre elementos for superior a um determinado valor começam a aparecer lobos secundários que violam a relação exigida.

Para perceber o modo como o diagrama de radiação é obtido a partir do respectivo polinómio, relembremos que a variável x está relacionada com a coordenada θ através de

$$x = b \cos \left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos \theta \right) \quad (7.61)$$

Na tabela C.1 mostra-se a relação entre os valores de θ e x para vários espaçamentos entre elementos. Na figura 7.4.1 é mostrado $|T_4(x)|$ e são marcados os pontos assinalados na tabela C.1. Os lobos secundários com uma amplitude maior que a desejada aparecem porque a zona do polinómio que vai dar origem ao factor de agregado atinge valores de $x < -1$. Para evitar que isto aconteça é necessário impor o valor mínimo para x de -1 . Assim vem que

$$-1 = b \cos \left(\frac{\pi d_{max}}{\lambda} \cos \theta \right) \quad (7.62)$$

Como os potenciais lobos secundários que violem a relação exigida aparecerão para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ resulta que o espaçamento máximo entre elementos é de

$$d_{max} = \frac{\lambda}{\pi} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{b} \right) \quad (7.63)$$

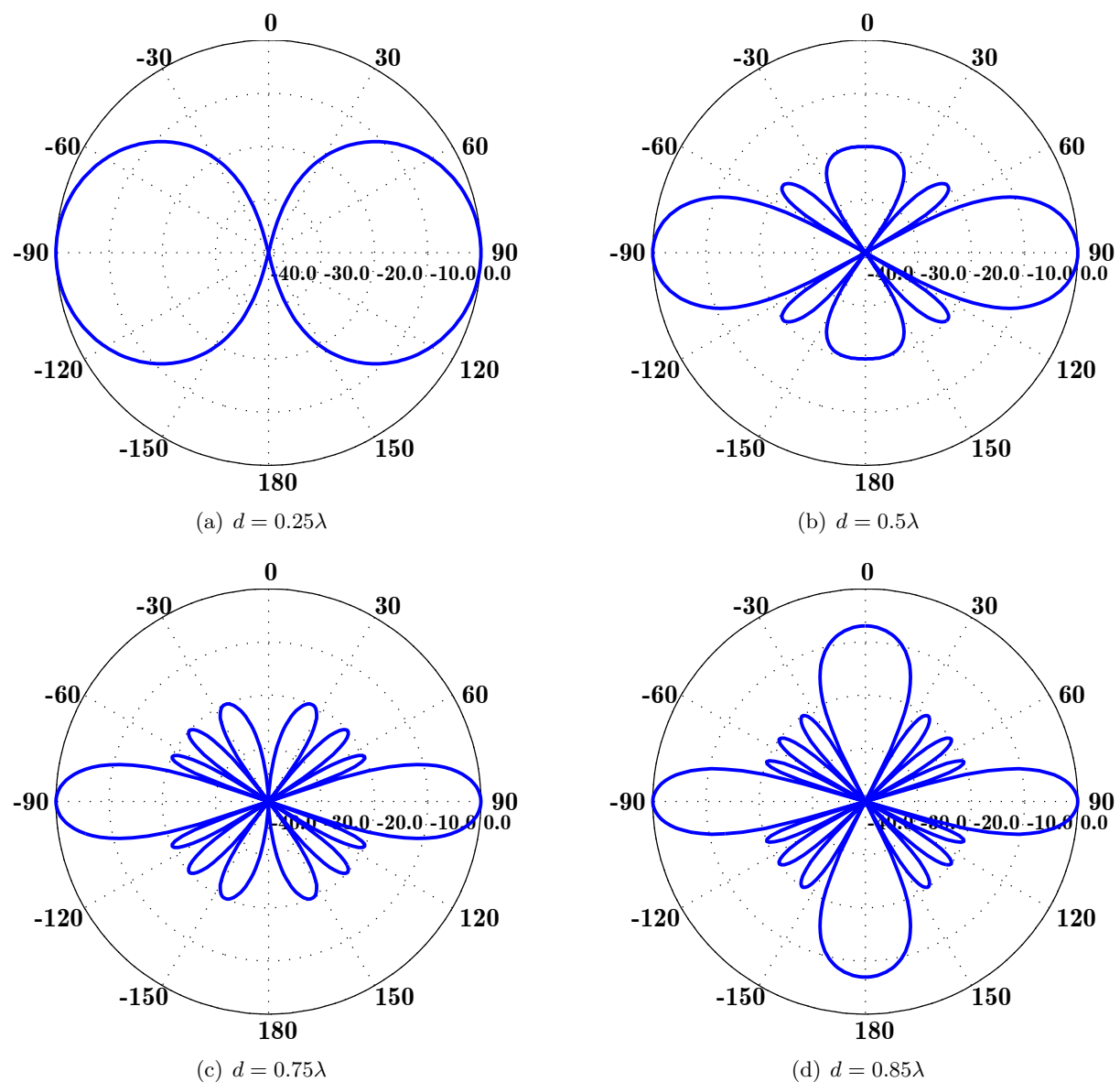


Figura 7.9: Diagrama de radiação de um agregado de 5 fontes isotrópicas com alimentação de *Chebyshev* com uma relação de 20dB entre o lobo principal e os lobos secundários

Tabela 7.2: Construção do diagrama de radiação a partir de $|T_4(x)|$

| θ | x ($d = 0.25\lambda$) | | x ($d = 0.5\lambda$) | | x ($d = 0.85\lambda$) | |
|----------|------------------------------|---|-----------------------------|---|------------------------------|---|
| 0 | 0.92 | A | 0.0 | B | -1.15 | C |
| 30 | 1.01 | | 0.27 | | -0.87 | |
| 60 | 1.20 | | 0.92 | | 0.30 | |
| 90 | 1.29 | D | 1.29 | D | 1.29 | D |
| 120 | 1.20 | | 0.92 | | 0.30 | |
| 150 | 1.01 | | 0.27 | | -0.87 | |
| 180 | 0.92 | A | 0.0 | B | -1.15 | C |

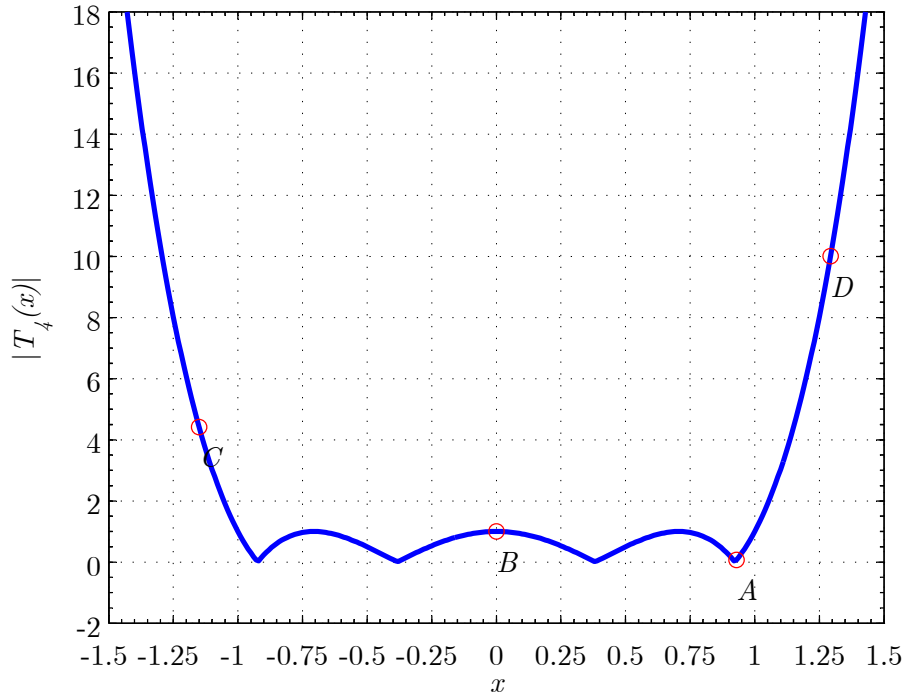


Figura 7.10: Representação de $|T_4(x)|$

7.4.2 Distribuição Binomial

Consideremos duas fontes isotrópicas com igual amplitude de alimentação cujo factor de agregado vale

$$F_Z = \sum_{n=1}^2 e^{j(n-1)Z} = 1 + e^{jZ} \quad (7.64)$$

Se ao aumentarmos o número de fontes for possível escrever o factor de agregado na seguinte forma

$$F_Z = (1 + e^{jZ})^{N-1} \quad (7.65)$$

então a forma do factor de agregado será dada pela multiplicação de $N - 1$ formas do tipo da equação 7.64. Para determinar as amplitudes dos vários elementos, a expressão 7.65 pode ser decomposta em série utilizando a expansão binomial, obtendo-se

$$(1 + x)^{N-1} = 1 + (N-1)x + \frac{(N-1)(N-2)}{2!}x^2 + \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{3!}x^3 + (...) \quad (7.66)$$

Os coeficientes da série podem ser obtidos a partir do triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 N = 1 & & & & & & 1 \\
 N = 2 & & & & 1 & & 1 \\
 N = 3 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 N = 4 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 N = 5 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 N = 6 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array} \tag{7.67}$$

Sendo N o número de elementos, o triângulo de Pascal dá-nos a relação entre as amplitudes de alimentação dos vários elementos que leva a que o factor de agregado seja dado por 7.65. De especial interesse é a situação em que o agregado é transversal (desfasamento progressivo nulo) e com um espaçamento entre elementos $d = \lambda/2$. O diagrama de radiação obtido para dois elementos é o mostrado na figura 7.11, onde se nota que este não apresenta lobos secundários. Estendendo o raciocínio para um conjunto de N fontes, quando o factor de agregado for dado por 7.65 temos a garantia que este não apresentará nenhum lobo secundário.

Em geral, no caso de um agregado transversal, um agregado binomial apresenta as seguintes características

1. Para $d < \lambda/2$ o factor de agregado não apresenta lobos secundários.
2. Para $d = \lambda/2$ o factor de agregado não apresenta lobos secundários e aparece um nulo de radiação da direcção do alinhamento do agregado.
3. Para $d > \lambda/2$ o factor de agregado apresenta lobos secundários.

7.5 Comparação entre métodos

Na tabela 7.3 é feita a comparação dos três esquemas de distribuição de amplitudes de alimentação estudados anteriormente, aplicados a um agregado de 5 elementos, alimentados em fase e espaçados de $\lambda/2$. A alimentação com distribuição binomial é aquela que apresenta uma melhor relação entre as amplitudes do lobo principal e dos lobos secundários(uma vez que consegue eliminar por completo estes últimos) sendo, no entanto, o método que conduz a uma menor directividade e o que obriga a uma maior variação entre as várias amplitudes de alimentação dos vários elementos. Este facto, em especial para agregados de muitos elementos, pode levar a

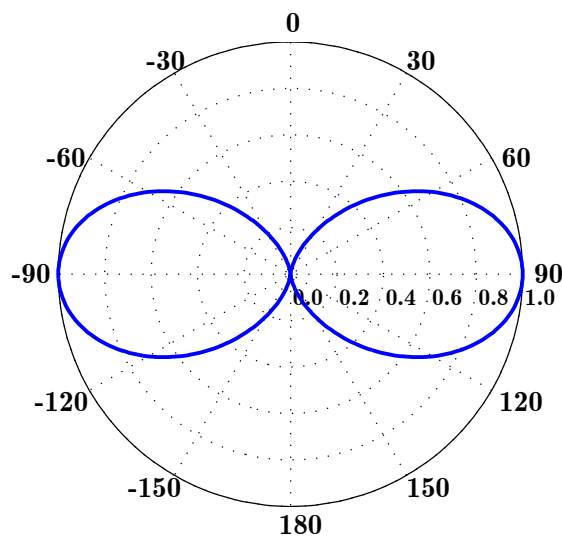


Figura 7.11: Diagrama de radiação de duas antenas isotrópicas espaçadas de $\lambda/2$

| Tabela 7.3: Comparação das várias distribuições de amplitudes | | | |
|---|-------------|-------------|----------------------|
| | Uniforme | Binomial | <i>Chebyshev</i> |
| R [dB] | 15 | inf | 20 |
| Directividade [dB] | 7.0 | 5.6 | 6.7 |
| Amplitudes | [1 1 1 1 1] | [1 4 6 4 1] | [1 1.61 1.93 1.61 1] |

problemas de implementação prática devido à grande diferença de amplitudes. A alimentação com distribuição de *Chebyshev* é um compromisso entre a distribuição uniforme e a binomial, uma vez que, não eliminado por completo os lobos secundários, leva a uma menor diminuição de directividade e tem uma relação entre amplitudes de alimentação mais suave.

Existem outros esquemas de alimentação dados por vários tipos de distribuições (triangular, Riesz, Riemann, Tukey, Bohman, Poisson, Cauchy, gaussiana, Taylor, entre outras), sendo que todas elas têm um factor em comum: para se proceder à diminuição dos lobos secundários, as amplitudes de alimentação vão diminuindo à medida que se vai do elemento central do agregado em direcção aos elementos mais periféricos. Isto é facilmente explicável recorrendo a um agregado de dois elementos. Nesta caso, à medida que a separação entre elementos vai aumentando, o número de lobos secundários também vai aumentando. Num agregado com N elementos, dando-se maior amplitude aos elementos centrais aumenta-se a influência destes no factor de agregado, que, como têm espaçamentos menores, terão uma menor tendência a dar origem a lobos secundários.

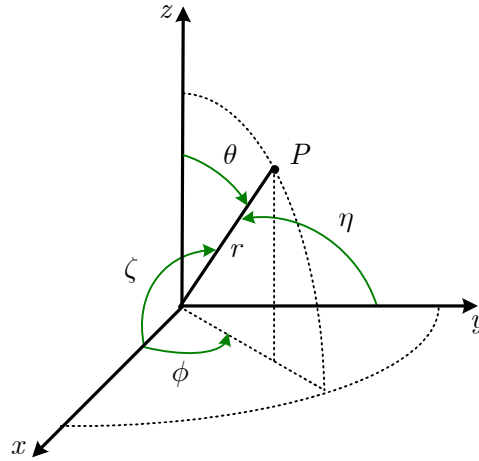


Figura 7.12: Ângulos em coordenadas esféricas para representação dos agregados planar e volumétrico

7.6 Agregados Planos e Volumétricos

No estudo de agregados efectuado até aqui assumimos que a orientação do agregado era sempre segundo Oz . Na realidade a orientação pode ser segundo uma qualquer direcção, o que, embora não altere o funcionamento do agregado, altera e complica a representação matemática dos resultados. Por esta razão não iremos aqui efectuar o estudo do agregado admitindo uma orientação arbitrária. No entanto vamos dedicar algum tempo a mais dois alinhamentos, segundo Ox e Oy , pois são os suficientes para representar os agregados planar e volumétrico. Para um agregado orientado segundo Oz sabemos que o factor de agregado F_Z é dado pela expressão 7.14 para agregados uniformes e pela expressão 7.35 para agregados não uniformes. Em ambos os casos temos

$$Z = \beta d_z \cos \theta + \delta_z$$

Por analogia, para um agregado orientado segundo Ox o factor de agregado é F_X , e escreve-se do mesmo modo que para o agregado linear segundo Oz desde que se substitua Z por X , com

$$X = \beta d_x \cos \zeta + \delta_x \quad (7.68)$$

De igual modo, para um agregado segundo Oy , o factor de agregado vale F_Y com

$$Y = \beta d_y \cos \eta + \delta_y \quad (7.69)$$

Os ângulos η e ζ , cuja representação é mostrada na figura 7.12, estão para os eixos Oy e Ox , respectivamente, tal como o ângulo θ está para o eixo Oz . Estes novos ângulos estão relacionados

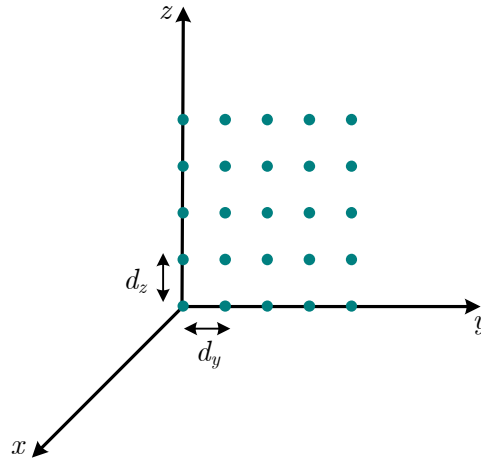


Figura 7.13: Exemplo de um agregado plano disposto no plano zOy

com os ângulos das coordenadas esféricas através de

$$\cos \zeta = \cos \phi \sin \theta \quad (7.70)$$

$$\sin \zeta = \sqrt{1 - [\cos \phi \sin \theta]^2} \quad (7.71)$$

$$\cos \eta = \sin \phi \sin \theta \quad (7.72)$$

$$\sin \eta = \sqrt{1 - [\sin \phi \sin \theta]^2} \quad (7.73)$$

O campo gerado por um agregado planar pode ser decomposto no produto de dois agregados lineares. Por exemplo, para uma matriz de antenas dispostas no plano xOz o campo total é dado por

$$E_T(\theta, \phi) = E(\theta, \phi) F_X F_Z \quad (7.74)$$

de igual modo, para uma matriz de antenas dispostas no plano yOz o campo total é dado por

$$E_T(\theta, \phi) = E(\theta, \phi) F_Y F_Z \quad (7.75)$$

e para uma matriz de antenas dispostas no plano yOx o campo total é dado por

$$E_T(\theta, \phi) = E(\theta, \phi) F_Y F_X \quad (7.76)$$

Tomemos como exemplo um agregado planar disposto no plano yOz formando uma matriz de 5×5 em que os elementos estão espaçados da seguinte forma: $d_y = \lambda/4$ e $d_z = \lambda/2$, tal como exemplificado na figura 7.13. Admitamos que se pretende obter um máximo de radiação na direcção Oy . Para que tal aconteça é necessário que cada conjunto de elementos orientado

paralelamente ao eixo Oz funcione como diagrama transversal e portanto o desfasamento entre elementos será

$$\delta_z = 0 \quad (7.77)$$

Por outro lado, os elementos dispostos paralelamente ao eixo Oy têm de formar um agregado longitudinal, o que implica que tenha de existir um desfasamento progressivo de

$$\delta_y = -\beta d = -\frac{\pi}{2} \quad (7.78)$$

Note-se que também se poderia construir um agregado volumétrico. Neste caso o campo pode ser decomposto no produto de três agregados lineares e o campo total é dado por

$$E_T(\theta, \phi) = E(\theta, \phi)F_X F_Y F_Z \quad (7.79)$$

