数学Ｂ
いろいろな数列の漸化式

目次

第 1 章　隣接 2 項間漸化式

初項と，隣接する 2 項の関係を定めれば，数列のすべての項が決定される。各項をそれ以前の項で表した等式のことを **漸化式** という。隣接する 2 項間にある関係を表した漸化式のことを特に，**隣接 2 項間漸化式** という。

与えられた隣接 2 項間漸化式から一般項を求めることは，一般には困難であるが，漸化式が特別な形をしていれば一般項を求められる場合がある。ここでは，一般項を求められる特別な隣接 2 項間漸化式について見ていこう。

1.1　$a_{n+1} = a_n$（恒等型）

$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a} \tag{1.1}$$

である。

[証明]

$n = 1$ のとき,

$$a_1 = a$$

より，式 (1.1) が成立する。

$n = k$ のとき式 (1.1) が成立する，つまり $a_k = a$ であると仮定すると,

$$a_{k+1} = a_k = a$$

より，$n = k + 1$ のときにも式 (1.1) が成立する。

以上より，$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = a$$

である。

当たり前といえば当たり前である。次の項がその直前の項と同じになるということは，a_1 の値から変化しないということを意味する。

1.2　$a_{n+1} = a_n + p$（等差型）

$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n + p$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = a + p(n-1)} \tag{1.2}$$

である。

[証明]

$n = 1$ のとき，式 (1.2) の右辺を計算すると

$$a + p(1-1) = a = a_1$$

より，式 (1.2) が成立する。

$n = k$ のとき式 (1.2) が成立する，つまり $a_k = a + p(k-1)$ であると仮定すると，

$$a_{k+1} = a_k + p = a + p(k-1) + p = a + p\{(k+1) - 1\}$$

より，$n = k + 1$ のときにも式 (1.2) が成立する。

以上より，$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n + p$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = a + p(n-1)$$

である。

1.3　$a_{n+1} = pa_n$（等比型）

$a_1 = a$，$a_{n+1} = pa_n$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = ap^{n-1}} \tag{1.3}$$

である。

[証明]

$n = 1$ のとき，式 (1.3) の右辺を計算すると

$$ap^{1-1} = a = a_1$$

より，式 (1.3) が成立する。

$n = k$ のとき式 (1.3) が成立する，つまり $a_k = ap^{k-1}$ であると仮定すると，

$$a_{k+1} = pa_k = p\left(ap^{k-1}\right) = ap^{(k+1)-1}$$

より，$n = k + 1$ のときにも式 (1.3) が成立する。

以上より，$a_1 = a$，$a_{n+1} = pa_n$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = ap^{n-1}$$

である。

1.4　$a_{n+1} = a_n + f(n)$（階差型）

$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n + f(n)$ という条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ (n \geqq 2), \quad a_1 = a$$

である。ただし，a_1 のときも n の式が成り立つ場合は 1 つの式で表すことができる。

［参考］ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ の性質と計算方法

性質 1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{f(k) + g(k)\} = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$

性質 2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$　**（初項 1，公比 r の等比数列第 n 項までの和）**

$$\begin{aligned}(1-r)\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(r^{k-1} - r^k\right) \\ &= 1 - r^n\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$

m 次の項の和は

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{k^{m+1}-(k-1)^{m+1}\right\}=n^{m+1}$$

を利用する。このような式を立てることで，$k^{m+1}-(k-1)^{m+1}$ が m 次式となり，$(m-1)$ 次までの項の総和を用いて表せる。

- $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} 1}$

$$\sum_{k=1}^{n}\{k-(k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}1=n$$

- $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2-(k-1)^2\right\}&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\\&=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=2\sum_{k=1}^{n}k-n\\&=n^2\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\left(n^2+n\right)=\frac{1}{2}n(n+1)$

- $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{k^3-(k-1)^3\right\} &= \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)\\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{3}{2}n(n+1)+n\\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)\\ &= n^3\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{k^4-(k-1)^4\right\} &= \sum_{k=1}^{n}\left(4k^3-6k^2+4k-1\right) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(2n^3+3n^2+n-2n^2-2n+n\right) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(2n^3+n^2\right) \\
&= n^4
\end{aligned}
$$

より， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\left(n^4+2n^3+n^2\right)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

同様にして， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$ 以降も計算することができる。

[例題]

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 4n - 3$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

$b_n = a_{n+1} - a_n = 4n - 3$ とする。
$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 3) \\ &= 1 + 2(n-1)n - 3(n-1) \\ &= 2n^2 - 5n + 4 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 &= 2 - 5 + 4 \\ &= 1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

より，この式は $n = 1$ のときも成立する。よって，求める一般項は

$$a_n = 2n^2 - 5n + 4$$

である。

1.5　$a_{n+1} = pa_n + f(n)$（特性方程式型）

この式を適切に変形することで，

$$b_{n+1} = pb_n$$

という，恒等型（§1.1）や等比型（§1.3）の漸化式を得られる。

変形して $b_{n+1} = pb_n$ の形で表すためには，$b_n = a_n - g(n)$ とおき，等式を満たすように $g(n)$ を適切に定めればよい。

この考え方は，等差型（§1.2）や階差型（§1.4）の漸化式に対しても使うことができる。

この考え方を使いこなすには慣れるしかないが，分かりやすいものとして，$f(n)$ が n の m 次式のとき，$g(n)$ は $p = 1$ のとき $(m+1)$ 次，$p \neq 1$ のとき m 次になるという性質がある。

具体的な使い方は，いくつかの例題で確認しよう。

[例題 1]

$a_1 = 9$，$a_{n+1} = a_n + 7$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 1] 普通は等差型（§1.2）の公式で解く。

$a_{n+1} = a_n + 7$ を変形して $b_{n+1} = b_n$ の形で表すために，$b_n = a_n - (\alpha_1 n + \alpha_0)$ とおいて α_1，α_0 の値を定める。このとき

$$a_{n+1} - \{\alpha_1(n+1) + \alpha_0\} = a_n - (\alpha_1 n + \alpha_0)$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = a_n + \alpha_1$$

となる。これが $a_{n+1} = a_n + 7$ となるためには,

$$\alpha_1 = 7$$

とすればよい。

このとき，$b_1 = 2 - \alpha_0$，$b_{n+1} = b_n$ であるから,

$$b_n = b_1 = 2 - \alpha_0$$

である。これと $a_n = b_n + 7n + \alpha_0$ より，求める一般項は

$$a_n = 7n + 2$$

である。

[例題 2]

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 4n - 3$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 2] 普通は階差型（§1.4）の考え方で解く。

$a_{n+1} = a_n + 4n - 3$ を変形して $b_{n+1} = b_n$ の形で表すために，$b_n = a_n - \left(\alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0\right)$ とおいて α_2，α_1，α_0 の値を定める。このとき

$$a_{n+1} - \left\{\alpha_2 (n+1)^2 + \alpha_1 (n+1) + \alpha_0\right\} = a_n - \left(\alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0\right)$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = a_n + 2\alpha_2 n + (\alpha_2 + \alpha_1)$$

となる。これが $a_{n+1} = a_n + 4n - 3$ となるためには，

$$\alpha_2 = 2, \quad \alpha_1 = -5$$

とすればよい。

このとき，$b_1 = 4 - \alpha_0$，$b_{n+1} = b_n$ であるから，

$$b_n = b_1 = 4 - \alpha_0$$

である。これと $a_n = b_n + 2n^2 - 5n + \alpha_0$ より，求める一般項は

$$a_n = 2n^2 - 5n + 4$$

である。

[例題 3]

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+6n-5$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 3]

$a_{n+1}=3a_n+6n-5$ を変形して $b_{n+1}=3b_n$ の形で表すために，$b_n=a_n-(\alpha_1 n+\alpha_0)$ とおいて，α_1，α_0 の値を定める。このとき

$$a_{n+1}-\{\alpha_1(n+1)+\alpha_0\}=3\{a_n-(\alpha_1 n+\alpha_0)\}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1}=3a_n-2\alpha_1 n+(\alpha_1-2\alpha_0)$$

となる。これが $a_{n+1}=3a_n+6n-5$ となるためには，

$$\alpha_1=-3, \quad \alpha_0=1$$

とすればよい。

このとき，$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$ であるから，

$$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

である。これと $a_n=b_n-3n+1$ より，求める一般項は

$$a_n=3^n-3n+1$$

である。

[例題 4]

$a_1 = 7$，$a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 5^n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 4] 指数関数は和の形と相性が悪く，積の形と相性が良い。

$a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 5^n$ の両辺を $\dfrac{1}{5^{n+1}}$ 倍すると,

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n}{5^n} + \frac{3}{5}$$

となり，$b_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{5}$$

と表せる。これを $c_{n+1} = \dfrac{2}{5}c_n$ の形で表すために，$c_n = b_n - \alpha$ とおいて α の値を定める。このとき

$$b_{n+1} - \alpha_1 = \frac{2}{5}(b_n - \alpha_1)$$

であり，これを整理すると,

$$b_{n+1} = \frac{2}{5}b_n + \frac{3}{5}\alpha$$

となる。これが $b_{n+1} = \dfrac{2}{5}b_n + \dfrac{3}{5}$ となるためには,

$$\alpha = 1$$

とすればよい。

このとき，$c_1 = b_1 - 1 = \dfrac{2}{5}$，$c_{n+1} = \dfrac{2}{5}c_n$ であるから，

$$c_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

であり，$b_n = c_n + 1$ より

$$b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1$$

である。これと $a_n = 5^n b_n$ より，求める一般項は

$$a_n = 2^n + 5^n$$

である。

[例題 5]

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n-4$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 5]

$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n-4$ を変形して $b_{n+1}=2b_n$ の形で表すために，$b_n=a_n-(\alpha\cdot 5^n+\beta)$ とおいて，α，β を定める。このとき

$$a_{n+1}-\left(\alpha\cdot 5^{n+1}+\beta\right)=2\{a_n-(\alpha\cdot 5^n+\beta)\}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1}=2a_n+3\alpha\cdot 5^n-\beta$$

となる。これが $a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n-4$ となるためには，

$$\alpha=1,\quad \beta=4$$

とすればよい。

このとき，$b_1=-8$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから，

$$b_n=-8\cdot 2^{n-1}=-2^{n+2}$$

である。これと $a_n=b_n+5^n+4$ より，求める一般項は

$$a_n=5^n-2^{n+2}+4$$

である。

［例題 6］

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-\dfrac{n+2}{n(n+1)}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

［解答 6］分数式は，部分分数分解してみる。

（ただし，すべての場合でうまくいくとは限らない。）

$a_{n+1}=2a_n-\dfrac{n+2}{n(n+1)}$ を変形して $b_{n+1}=2b_n$ の形で表すために，$b_n=a_n-f(n)$ とおいて，$f(n)$ を定める。このとき

$$a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1}=2a_n+\{f(n+1)-2f(n)\}$$

となる。これが $a_{n+1}=2a_n-\dfrac{n+2}{n(n+1)}$ となるためには，

$$f(n+1)-2f(n)=-\frac{n+2}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}$$

であればよい。つまり，

$$f(n)=\frac{1}{n}$$

とすればよい。

このとき，$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから，

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

である。これと $a_n=b_n+\dfrac{1}{n}$ より，求める一般項は

$$a_n=2^n+\frac{1}{n}$$

である。

1.6 $a_{n+1} = pa_n^q$（対数型）

両辺の対数（底は任意の実数で構わないが，$\log_c p$ が有理数になるような c を底に選ぶと変形がしやすい。）をとることで

$$\log_c a_{n+1} = q \log_c a_n + \log_c p$$

とでき，§1.5 の形になるため，一般項を求められるようになる。

[例題]

$a_1 = -1$，$a_{n+1} = -4a_n^2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

与式より $a_n < 0$ である。両辺の絶対値（底が正の数であるときは真数にできるのが正の数であるということに注意する）をとり，2 を底とする対数をとると

$$\log_2 |a_{n+1}| = 2\log_2 |a_n| + 2$$

となる。ここで $b_n = \log_2 |a_n| + 2$ とおくと，この式は

$$b_{n+1} = 2b_n$$

と表せる。$b_1 = 2$ より，

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

である。これと $|a_n| = 2^{b_n - 2}$ より，

$$|a_n| = 2^{2^n - 2}$$

とわかる。

$a_n < 0$ より，求める一般項は

$$a_n = -2^{2^n - 2}$$

である。

1.7　$a_{n+1} = f(n)a_n$（階比型）

この形の漸化式で与えられる数列の一般項のよくある求め方は，第 n 項から第 1 項まで遡ることで式を求めるものである。しかし，

$$\frac{a_{n+1}}{g(n+1)} = \frac{pa_n}{g(n)}$$

とできれば，$b_n = \dfrac{a_n}{g(n)}$ とおくことで一般項を求められる。ここでは変形を利用して，一般項を求めてみよう。

$f(n)$ が指数関数である場合は，一旦両辺の対数をとると分かりやすくなることがある。

[例題 1]

$a_1 = 4$，$a_{n+1} = \left(2 + \dfrac{4}{n}\right)a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 1]

$a_{n+1} = \left(2 + \dfrac{4}{n}\right)a_n$ を変形して $b_{n+1} = pb_n$ の形で表すために，$b_n = \dfrac{a_n}{f(n)}$ とおいて，p，$f(n)$ を定める。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{pa_n}{f(n)}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = \frac{pf(n+1)}{f(n)}a_n$$

となる。これが $a_{n+1}=\left(2+\dfrac{4}{n}\right)a_n$ となるためには,

$$\frac{pf(n+1)}{f(n)}=2+\frac{4}{n}=\frac{2(n+2)}{n}=\frac{2(n+1)(n+2)}{n(n+1)}$$

であればよい。つまり,

$$p=2,\quad f(n)=n(n+1)$$

とすればよく，このとき，$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから,

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

である。これと $a_n=n(n+1)b_n$ より，求める一般項は

$$a_n=2^n n(n+1)$$

である。

[例題 2]

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = (n+1)a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 2]

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ を変形して $b_{n+1} = pb_n$ の形で表すために，$b_n = \dfrac{a_n}{f(n)}$ とおいて，p，$f(n)$ を定める。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{pa_n}{f(n)}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = \frac{pf(n+1)}{f(n)}a_n$$

となる。これが $a_{n+1} = (n+1)a_n$ となるためには，

$$\frac{pf(n+1)}{f(n)} = n+1 = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!}$$

であればよい。つまり，

$$p = 1, \quad f(n) = n!$$

とすればよく，このとき，$b_1 = 1$，$b_{n+1} = b_n$ であるから，

$$b_n = b_1 = 1$$

である。これと $a_n = n! \cdot b_n$ より，求める一般項は

$$a_n = n!$$

である。

[例題 3]

$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2^{2n+1}a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 3-1]

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ を変形して $b_{n+1} = pb_n$ の形で表すために，$b_n = \dfrac{a_n}{f(n)}$ とおいて，p，$f(n)$ を定める。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{pa_n}{f(n)}$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = \frac{pf(n+1)}{f(n)}a_n$$

となる。これが $a_{n+1} = 2^{2n+1}a_n$ となるためには，

$$\frac{pf(n+1)}{f(n)} = 2^{2n+1} = 2^{(n+1)^2-n^2} = \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}}$$

であればよい。つまり，

$$p = 1,\quad f(n) = 2^{n^2}$$

とすればよく，このとき，$b_1 = 1$，$b_{n+1} = b_n$ であるから，

$$b_n = b_1 = 1$$

である。これと $a_n = 2^{n^2}b_n$ より，求める一般項は

$$a_n = 2^{n^2}$$

である。

[解答 3-2]

与式の両辺に，2 を底とする対数をとると，

$$\log_2 a_{n+1} = (2n+1) + \log_2 a_n$$

これを変形すると

$$\log_2 a_{n+1} - (n+1)^2 = \log_2 a_n - n^2$$

とできる。（詳しくは §1.4，§1.5，または §1.12 を参照）

$b_n = \log_2 a_n - n^2$ とおくと，$b_1 = 0$，$b_{n+1} = b_n$ であるから，

$$b_n = b_1 = 0$$

である。これと $a_n = 2^{b_n + n^2}$ より，求める一般項は

$$a_n = 2^{n^2}$$

である。

1.8 $a_{n+1} = f_1(n)a_n + f_2(n)$

階比型（§1.7）のときと同様に変形し，

$$\frac{a_{n+1}}{g_1(n+1)} = \frac{pa_n}{g_1(n)} + g_2(n)$$

とできれば，$b_n = \dfrac{a_n}{g_1(n)}$ とおくことで階差型や特性方程式型となり，§1.4 や §1.5 と同様の考え方で一般項を求められる。

[例題]

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n + 2n^2 + 3n + 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ を変形して $b_{n+1} = pb_n + g(n)$ の形で表すために，$b_n = \dfrac{a_n}{f(n)}$ とおいて，p，$f(n)$，$g(n)$ を定める。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{pa_n}{f(n)} + g(n)$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1} = \frac{pf(n+1)}{f(n)}a_n + f(n+1)g(n)$$

となる。これが $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n + 2n^2 + 3n + 1$ となるためには，

$$\frac{pf(n+1)}{f(n)} = \frac{n+1}{n}$$

であればよい。つまり，

$$p = 1, \quad f(n) = n$$

とすればよく，また，

$$g(n) = 2n + 1$$

である。このとき，$b_1 = 1$，$b_{n+1} = b_n + 2n + 1$ であるから，

$$b_n = b_1 + \left(n^2 - 1\right) = n^2$$

である。（§1.4 参照）これと $a_n = nb_n$ より，求める一般項は

$$a_n = n^3$$

である。

1.9　$a_{n+1} = \dfrac{f_1(n)a_n}{f_2(n)a_n + f_3(n)}$

$a_{n+1} \neq 0$ かつ $f_1(n)a_n \neq 0$ であるなら，両辺の逆数をとることができ，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{f_3(n)}{f_1(n)}\frac{1}{a_n} + \frac{f_2(n)}{f_1(n)}$$

とすれば，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくことで §1.8 の形になるため，一般項を求められるようになる。

[例題]

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{2^{2n+1}a_n}{2^{1-n^2}a_n + 1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

$a_{n+1} = 0$ と仮定すると a_n も 0 となり，$a_1 = 0$ となる。しかしこれは $a_1 = 1$ に矛盾する。よって $a_{n+1} \neq 0$ かつ $2^{2n+1}a_n \neq 0$ である。

与式の両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{a_n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+2n}$$

となる。この両辺に $2^{(n+1)^2} = 2^{n^2+2n+1}$ を掛けると

$$\frac{2^{(n+1)^2}}{a_{n+1}} = \frac{2^{n^2}}{a_n} + 2$$

となる。(§1.7 参照)

さらに両辺から $2(n+1)=2n+2$ を引くと

$$\frac{2^{(n+1)^2}}{a_{n+1}}-2(n+1)=\frac{2^{n^2}}{a_n}-2n$$

となる。(§1.5 参照)

ここで，$b_n=\dfrac{2^{n^2}}{a_n}-2n$ とおくと，$b_1=0$，$b_{n+1}=b_n$ であるから，

$$b_n=b_1=0$$

である。これと $a_n=\dfrac{2^{n^2}}{b_n+2n}$ より，求める一般項は

$$a_n=\frac{2^{n^2-1}}{n}$$

である。

1.10 $a_{n+1} = \dfrac{f_1(n)a_n + f_2(n)}{f_3(n)a_n + f_4(n)}$

変形して

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{g_1(n)\{a_n - g(n)\}}{g_2(n)\{a_n - g(n)\} + g_3(n)}$$

とできれば，$b_n = a_n - g(n)$ とおくことで，§1.9 の形になり，一般項を求められるようになる。

[例題 1]

$a_1 = 4$，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 4}{a_n - 1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 1]

与式を変形して $b_{n+1} = \dfrac{f_1(n)b_n}{f_2(n)b_n + f_3(n)}$ の形で表すために，$b_n = a_n - g(n)$ とおいて，$f_1(n)$，$f_2(n)$，$f_3(n)$，$g(n)$ を定める。

このとき

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{f_1(n)\{a_n - g(n)\}}{f_2(n)\{a_n - g(n)\} + f_3(n)}$$

であり，これを整理すると

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{f_1(n)a_n - f_1(n)g(n)}{f_2(n)a_n + \{f_3(n) - f_2(n)g(n)\}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\{f_1(n) + f_2(n)g(n+1)\}a_n + \{f_3(n)g(n+1) - f_2(n)g(n)g(n+1) - f_1(n)g(n)\}}{f_2(n)a_n + \{f_3(n) - f_2(n)g(n)\}}$$

となる。

これが $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$ となるためには，

$$g(n)=2,\ f_1(n)=1,\ f_2(n)=1,\ f_3(n)=1$$

とすればよい。（連立方程式を解き，解を求めた。）

このとき

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{b_n+1}$$

であり，$b_1\neq 0$ より $b_{n+1}\neq 0$ かつ $b_n\neq 0$ だから，両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+1$$

とできる。$b_1=2$ より $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2n-1}{2}$$

とわかる。（§1.2 参照）

したがって，

$$b_n=\frac{2}{2n-1}$$

である。これと $a_n=b_n+2$ より，求める一般項は

$$a_n=\frac{4n}{2n-1}$$

である。

[例題 2]

$a_1 = 3$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3^{n+1}}{3^{n-1}a_n + 2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答 2]

与式を変形して $b_{n+1} = \dfrac{f_1(n)b_n}{f_2(n)b_n + f_3(n)}$ の形で表すために，$b_n = a_n - g(n)$ とおいて，$f_1(n)$，$f_2(n)$，$f_3(n)$，$g(n)$ を定める。

このとき

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{f_1(n)\{a_n - g(n)\}}{f_2(n)\{a_n - g(n)\} + f_3(n)}$$

であり，これを整理すると

$$a_{n+1} - g(n+1) = \frac{f_1(n)a_n - f_1(n)g(n)}{f_2(n)a_n + \{f_3(n) - f_2(n)g(n)\}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\{f_1(n) + f_2(n)g(n+1)\}a_n + \{f_3(n)g(n+1) - f_2(n)g(n)g(n+1) - f_1(n)g(n)\}}{f_2(n)a_n + \{f_3(n) - f_2(n)g(n)\}}$$

となる。

これが $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3^{n+1}}{3^{n-1}a_n + 2}$ となるためには，

$$g(n) = 3,\ f_1(n) = 2 - 3^n,\ f_2(n) = 3^{n-1},\ f_3(n) = 3^n + 2$$

とすればよい。（連立方程式を解き，解の 1 つを求めた。）

このとき，$b_1 = 0$ であるから，

$$b_n = 0$$

である。これと $a_n = b_n + g(n)$ より，求める一般項は

$$a_n = 3$$

である。（他の解を用いても同じ結果が得られる。）

$a_k = 3$ のとき $a_{k+1} = 3$ になるということから，数学的帰納法を用いて証明してもよい。

1.11　演習問題（基礎〜標準レベルのみ）

以下の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1. $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n - 2$
2. $a_1 = 7$，$a_{n+1} = a_n + 3$
3. $a_1 = 4$，$a_{n+1} = 8a_n$
4. $a_1 = 6$，$a_{n+1} = 9a_n$
5. $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
6. $a_1 = 0$，$a_{n+1} = a_n + 6n^2 - 4n - 1$
7. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n + 2^n$
8. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$
9. $a_1 = 3$，$a_{n+1} = 5a_n - 8$
10. $a_1 = 5$，$a_{n+1} = 4a_n + 9$
11. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n + 5n - 4$
12. $a_1 = 4$，$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 5$
13. $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4a_n - 6n - 1$
14. $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 4n^2 - 5n + 1$

1.12　演習問題解答

詳しい解答は省略する。

1. $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n - 2$ より，求める一般項は

$$a_n = 3 - 2(n-1) = -2n + 5$$

である。

→ 初項 3，公差 -2 の等差数列

2. $a_n = 3n + 4$

→ 初項 7，公差 3 の等差数列

3. $a_1 = 4$，$a_{n+1} = 8a_n$ より，求める一般項は

$$a_n = 4 \cdot 8^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{3(n-1)} = 2^{3n-1}$$

である。

→ 初項 4，公比 8 の等比数列

4. $a_n = 2 \cdot 3^{2n-1}$

→ 初項 6，公比 9 の等比数列

5. 数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を利用すると，

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 1$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n + n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

この式は $n = 1$ でも成り立つ。したがって求める一般項は

$$a_n = n^2$$

である。

6. 数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を利用すると，

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 6n^2 - 4n - 1$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(6k^2 - 4k - 1\right) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= (n-1)n(2n-1) - 2(n-1)n - (n-1) \\ &= 2n^3 - 3n^2 + n - 2n^2 + 2n - n + 1 \\ &= 2n^3 - 5n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

この式は $n = 1$ でも成り立つ。したがって求める一般項は

$$a_n = 2n^3 - 5n^2 + 2n + 1$$

である。

7. $a_n = 2^n$

8. 与式を変形して $b_{n+1}=3b_n$ の形で表すために，$b_n=a_n-\alpha$ とおいて α の値を定める。このとき

$$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1}=3a_n-2\alpha$$

となる。これが $a_{n+1}=3a_n+2$ となるためには,

$$\alpha=-1$$

とすればよい。

　このとき，$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$ であるから,

$$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

である。これと $a_n=b_n-1$ より，求める一般項は

$$a_n=3^n-1$$

である。

9. $a_n=5^{n-1}+2$

　$\rightarrow b_n=a_n-2$ とおくと，$b_{n+1}=5b_n$ の形にできる。

10. $a_n=2^{2n+1}-3$

　$\rightarrow b_n=a_n+3$ とおくと，$b_{n+1}=4b_n$ の形にできる。

11. 与式を変形して $b_{n+1}=2b_n$ の形で表すために $b_n=a_n-\alpha_1 n-\alpha_0$ とおき，α_1，α_0 の値を定める。このとき

$$a_{n+1}-\alpha_1(n+1)-\alpha_0=2(a_n-\alpha_1 n-\alpha_0)$$

であり，これを整理すると，

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha_1 n+(\alpha_1-\alpha_0)$$

となる。これが $a_{n+1}=2a_n+5n-4$ となるためには,

$$\alpha_1=-5,\quad \alpha_0=-1$$

とすればよい。

このとき，$b_1=8$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから,

$$b_n=8\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$$

である。これと $a_n=b_n-5n-1$ より，求める一般項は

$$a_n=2^{n+2}-5n-1$$

である。

12. $a_n=3^n-n+2$

$\rightarrow b_n=a_n+n-2$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$ の形にできる。

13. $a_n=-2^{2n-1}+2n+1$

$\rightarrow b_n=a_n-2n-1$ とおくと，$b_{n+1}=4b_n$ の形にできる。

14. 与式を変形して $b_{n+1}=2b_n$ の形で表すために,

$$b_n=a_n-\alpha_2n^2-\alpha_1n-\alpha_0$$

とおき，α_2，α_1，α_0 の値を定める。このとき

$$a_{n+1}-\alpha_2(n+1)^2-\alpha_1(n-1)-\alpha_0=2\bigl(a_n-\alpha_2n^2-\alpha_1n-\alpha_0\bigr)$$

であり，これを整理すると,

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha_2n^2+(2\alpha_2-\alpha_1)n+(\alpha_2+\alpha_1-\alpha_0)$$

となる。これが $a_{n+1}=2a_n+4n^2-5n+1$ となるためには,

$$\alpha_2=-4,\quad \alpha_1=-3,\quad \alpha_0=-8$$

とすればよい。

このとき，$b_1=16$，$b_{n+1}=2b_n$ であるから,

$$b_n=16\cdot 2^{n-1}=2^{n+3}$$

である。これと $a_n=b_n-4n^2-3n-8$ より，求める一般項は

$$a_n=2^{n+3}-4n^2-3n-8$$

である。

第 2 章　隣接 3 項間漸化式

初項，第 2 項，隣接する 3 項の関係を定めれば，数列のすべての項が決定される。隣接する 3 項間にある関係を表した漸化式を，**隣接 3 項間漸化式** という。2 項間漸化式の考え方を利用することで同様に解くことができる。

2.1　$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

　この式を適切に変形することで,

$$a_{n+2} - \alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1} - \alpha_1 a_n)$$

の形で表すことができれば，$b_n = a_{n+1} - \alpha_1 a_n$ とおくことにより

$$b_{n+1} = \alpha_2 b_n$$

という，等比型（§1.3）の漸化式を得られる。

[例題]

　$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

　与式を変形して

$$a_{n+2} - \alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1} - \alpha_1 a_n)$$

の形で表すために α_1，α_2 を定める。整理すると

$$a_{n+2} - (\alpha_1 + \alpha_2)a_{n+1} + \alpha_1\alpha_2 a_n = 0$$

となる。これが $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ となるためには,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

とすればよい。（和と積の情報から二次方程式を作って解いた。）

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと，$b_1 = -1$，$b_{n+1} = 3b_n$ より，

$$b_n = -3^{n-1}$$

となる。これと $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ より，

$$a_{n+1} = 2a_n - 3^{n-1}$$

という隣接 2 項間漸化式が得られる。この漸化式に対して特性方程式型（§1.5）の **［例題 4］** の考え方を用いると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{9}$$

$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n - \frac{1}{9}$$

である。

$$d_n = c_n + \frac{1}{3}$$

とおくことで $d_{n+1} = \dfrac{2}{3}d_n$ となり，これを用いると $d_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となる。したがって，$c_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3}$ であり，求める一般項は

$$a_n = 2^n - 3^{n-1}$$

である。

2.2　$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = r$

この式を適切に変形することで,

$$a_{n+2} - \alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1} - \alpha_1 a_n) + r$$

の形で表すことができれば，$b_n = a_{n+1} - \alpha_1 a_n$ とおくことにより

$$b_{n+1} = \alpha_2 b_n + r$$

という，特性方程式型（§1.5）の漸化式を得られる。

[例題]

$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答]

与式を変形して

$$a_{n+2} - \alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1} - \alpha_1 a_n) + 2$$

の形で表すために α_1，α_2 を定める。整理すると

$$a_{n+2} - (\alpha_1 + \alpha_2)a_{n+1} + \alpha_1\alpha_2 a_n = 2$$

となる。これが $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$ となるためには,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

とすればよい。

$b_n = a_{n+1} - 2a_n$ とおくと，$b_1 = 2$，$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ より，

$$b_n = 3^n - 1$$

となる。これと $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ より，

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n - 1$$

という隣接 2 項間漸化式が得られる。この漸化式に対して特性方程式型（§1.5）の **［例題 3］** の考え方を用いると，

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) + 3^n$$

さらに特性方程式型（§1.5）の **［例題 4］** の考え方を用いると，

$$\frac{a_{n+1} - 1}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n - 1}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$c_n = \dfrac{a_n - 1}{3^n}$ とおくと

$$c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}$$

である。

$$d_n = c_n - 1$$

とおくことで $d_{n+1} = \dfrac{2}{3}d_n$ となり，これを用いると $d_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ となる。したがって，$c_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + 1$ であり，求める一般項は

$$a_n = -3 \cdot 2^{n-1} + 3^n + 1$$

である。