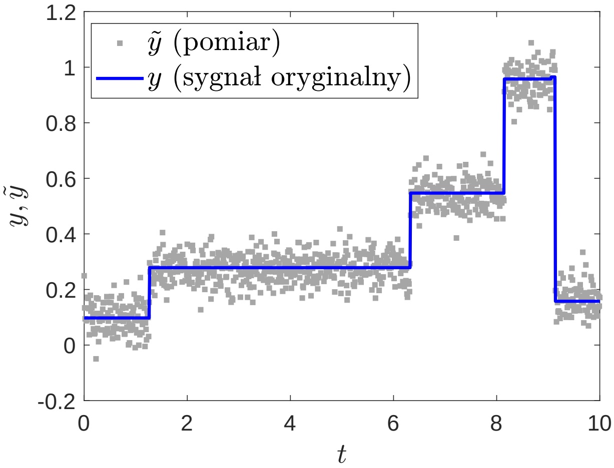
1DR2243:A - Teoria i metody optymalizacji, lab.
Rekonstrukcja sygnału kawałkami stałego. LASSO

(opracował: M.T., ostatnia modyfikacja: 8 września 2022)

1 Wstęp

Będziemy rozpatrywać zagadnienie dopasowanie kawałkami stałego (ang. *piece-wise constant fitting*) [1]). Załóżmy, że dysponujemy wynikami pomiaru kawałkami stałego sygnału y. Pomiary te są obarczone szumem, zatem to co mamy do dyspozycji to wektor próbek $\tilde{y}$. Oznaczmy przez $y \in \mathbb{R}^n$ wektor próbek sygnału, przez $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ wektor próbek pomiaru.



Rysunek 1: Sygnał kawałkami stały y i jego zaszumiony pomiar $\tilde{y}$.

Chcemy wyznaczyć estymatę (wektor) $\hat{y}$ sygnału y. Poszukiwanie takiej estymaty możemy sformułować jako zadanie optymalizacji (tzn. $\hat{y}$ jest rozwiązaniem rozpatrywanego zadania optymalizacji)

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_2^2 \tag{1a}$$
$$\text{subject to} \quad \mathbf{card}(Dv) \leqslant k \tag{1b}$$

gdzie $\mathbf{card}(u)$ oznacza liczbę elementów niezerowych wektora u (w rozpatrywanym przypadku $u = Dv$), k jest przyjętą (arbitralnie) maksymalną liczbą zmian wartości sygnału, zaś D i Dv, odpowiednio,

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Dv = \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \\ \vdots \\ v_n - v_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Z konstrukcji macierzy D wynika, że $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$. Problem (1) jest bardzo trudnym zadaniem optymalizacji, możemy jednak, wykorzystując normę l_1, zastąpić je różnymi heurystykami, np.

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_2^2 \tag{3a}$$
$$\text{subject to} \quad \|Dv\|_1 \leqslant q \tag{3b}$$

dla odpowiednio dobranej liczby q, lub

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_2^2 + \tau \|Dv\|_1 \tag{4}$$

dla odpowiednio dobranego parametru τ. Zadanie (4) spotyka się również pod nazwą LASSO (ang. *least absolute shrinkage and selection operator*). Sformułowanie LASSO jest jedną z podstawowych metod poszukiwania tzw. reprezentacji rzadkich, odgrywających ważną rolę między innymi w kompresji sygnałów [1]. Sformułowania (3) i (4) nie są sobie równoważne, nie są również równoważne zadaniu (1), będąc jedynie jego pewnym przybliżeniem. Niezwykle istotną cechą zadań (3) i (4) jest to, że są zadaniami wypukłymi. Estymatę $\hat{y}$ możemy też wyznaczyć rozwiązując modyfikacje (3) i (4) w postaci

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_2 \tag{5a}$$
$$\text{subject to} \quad \|Dv\|_1 \leqslant q \tag{5b}$$

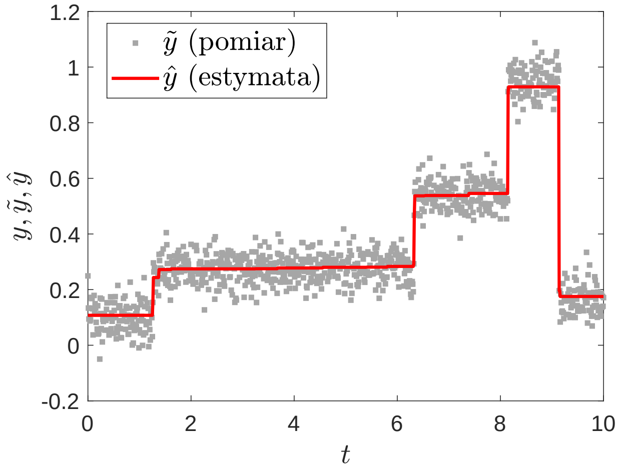
dla odpowiednio dobranej liczby q, oraz, odpowiednio,

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_2 + \tau \|Dv\|_1 \tag{6}$$

dla odpowiednio dobranego parametru τ.

2 Zadania

Zadanie 1. Pobrać plik danych `Data01.mat` (ISOD). Dla pobranych danych wyznaczyć rozwiązania zadań (3) i (4), dla różnych wartości parametrów q i τ. Należy skorzystać w tym celu z pakietu CVX [2]. Wygenerować wykresy podobne do przedstawionych na Rys. 1-2. Przy konstruowaniu macierzy D można skorzystać z funkcji `diag`. Należy zwrócić uwagę, że zamiast tworzyć macierz D, można zamiast Dv użyć składni `v(2:end)-v(1:end-1)`, gdzie `end` jest dostępnym w środowisku Matlab obiektem, który zwraca wartość indeksu ostaniego elementu wektora.



Rysunek 2: Rekonstrukcja $\hat{y}$ sygnału kawałkami stałego y na podstawie pomiaru $\tilde{y}$.

Zadanie 2. Zamiast (5) i (6) możemy rozpatrzyć inne modyfikacje, np.

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_1 \tag{7a}$$
$$\text{subject to} \quad \|Dv\|_1 \leqslant q \tag{7b}$$

dla odpowiednio dobranej liczby q, oraz, odpowiednio,

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_1 + \tau \|Dv\|_1 \tag{8}$$

dla odpowiednio dobranego parametru τ, które można sprawoadzić do postaci zadań LP [3] i rozwiązać np. korzystając z a) procedury `linprog`, b) procedury `solve` środowiska Matlab. Sprowadzając (7) i (8) do zadań LP na ogół korzysta się z faktu, że zadanie optymalizacji

$$\begin{aligned} &\underset{v}{\text{minimize}} && f_0(v) && \text{(9a)}\\ &\text{subject to} && f_i(v) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m && \text{(9b)}\\ & && h_i(v) = 0, \quad i = 1, \ldots, p && \text{(9c)} \end{aligned}$$

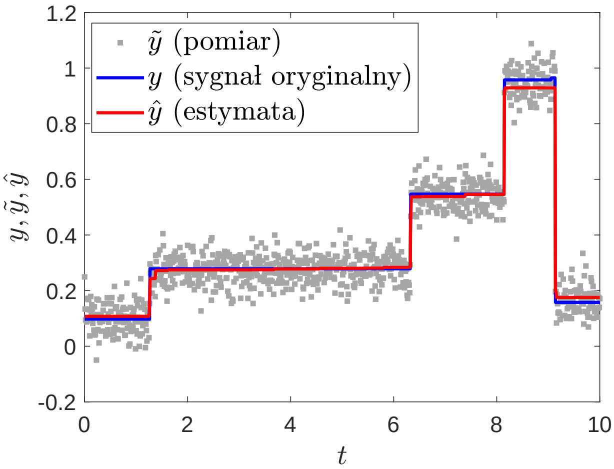
jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{\varepsilon, v}{\text{minimize}} && \varepsilon && \text{(10a)}\\ &\text{subject to} && f_0(v) \leqslant \varepsilon && \text{(10b)}\\ & && f_i(v) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m && \text{(10c)}\\ & && h_i(v) = 0, \quad i = 1, \ldots, p && \text{(10d)} \end{aligned}$$

Przekształć (7) i (8) do postaci LP

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{minimize}} && c^{\mathrm{T}} x && \text{(11a)}\\ &\text{subject to} && Ax \leqslant b && \text{(11b)} \end{aligned}$$

i wyznacz rozwiązania korzystając z a) procedury `linprog`, b) procedury `solve` środowiska Matlab.



Rysunek 3: Rekonstrukcja sygnału kawałkami stałego. „Prawdziwy” sygnał y na ogól nie jest znany.

Wskazówka do Zadania 2

Rozpatrujemy zadanie

$$\begin{aligned} &\underset{v}{\text{minimize}} && \|\tilde{y} - v\|_1 && \text{(12a)}\\ &\text{subject to} && \|Dv\|_1 \leqslant q && \text{(12b)} \end{aligned}$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ są dane, natomiast $v \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych optymalizacyjnych. Zadanie (12) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \mu}{\text{minimize}} && \sum_{i=1}^{n} |\tilde{y}_i - v_i| && \text{(13a)}\\ &\text{subject to} && \sum_{i=1}^{m} |\mu_i|_1 \leqslant q && \text{(13b)}\\ & && \mu = Dv && \text{(13c)} \end{aligned}$$

gdzie

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{14}$$

Zadanie (13) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \mu, \xi, \delta}{\text{minimize}} && \sum_{i=1}^{n} \xi_i && \text{(15a)}\\ &\text{subject to} && |\tilde{y}_i - v_i| \leqslant \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n && \text{(15b)}\\ & && \sum_{i=1}^{m} \delta_i \leqslant q && \text{(15c)}\\ & && |\mu_i| \leqslant \delta_i, \quad i = 1, \ldots, m && \text{(15d)}\\ & && \mu = Dv && \text{(15e)} \end{aligned}$$

Zadanie (15) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \mu, \xi, \delta}{\text{minimize}} && \sum_{i=1}^{n} \xi_i && \text{(16a)}\\ &\text{subject to} && -\xi_i \leqslant \tilde{y}_i - v_i \leqslant \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n && \text{(16b)}\\ & && \sum_{i=1}^{m} \delta_i \leqslant q && \text{(16c)}\\ & && -\delta_i \leqslant \mu_i \leqslant \delta_i, \quad i = 1, \ldots, m && \text{(16d)}\\ & && \mu = Dv && \text{(16e)} \end{aligned}$$

Zadanie (16) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \mu, \xi, \delta}{\text{minimize}} && \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}} \xi && \text{(17a)}\\ &\text{subject to} && -\xi \leqslant \tilde{y} - v \leqslant \xi && \text{(17b)}\\ & && \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \delta \leqslant q && \text{(17c)}\\ & && -\delta \leqslant \mu \leqslant \delta && \text{(17d)}\\ & && \mu = Dv && \text{(17e)} \end{aligned}$$

gdzie

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \tag{18}$$

$$\mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{19}$$

Zadanie (17) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \xi, \delta}{\text{minimize}} && \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}} \xi && \text{(20a)}\\ &\text{subject to} && -\xi \leqslant \tilde{y} - v \leqslant \xi && \text{(20b)}\\ & && \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \delta \leqslant q && \text{(20c)}\\ & && -\delta \leqslant Dv \leqslant \delta && \text{(20d)} \end{aligned}$$

Zadanie (20) jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} &\underset{v, \xi, \delta}{\text{minimize}} && \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}} \xi && \text{(21a)}\\ &\text{subject to} && -\xi \leqslant \tilde{y} - v && \text{(21b)}\\ & && \tilde{y} - v \leqslant \xi && \text{(21c)}\\ & && \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \delta \leqslant q && \text{(21d)}\\ & && -\delta \leqslant Dv && \text{(21e)}\\ & && Dv \leqslant \delta && \text{(21f)} \end{aligned}$$

czyli

$$\underset{v,\xi,\delta}{\text{minimize}} \quad \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}\xi \tag{22a}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0_{n\times m} \\ -I_n & -I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \\ -D & 0_{m\times n} & -I_m \\ D & 0_{m\times n} & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \xi \\ \delta \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ -\tilde{y} \\ q \\ 0_m \\ 0_m \end{bmatrix} \tag{22b}$$

Przyjmując oznaczenia

$$A = \begin{bmatrix} I_n & -I_n & 0_{n\times m} \\ -I_n & -I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} \\ -D & 0_{m\times n} & -I_m \\ D & 0_{m\times n} & -I_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0_n \\ \mathbf{1}_n \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ -\tilde{y} \\ q \\ 0_m \\ 0_m \end{bmatrix} \tag{23}$$

oraz

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \xi \\ \delta \end{bmatrix}. \tag{24}$$

możemy zapisać zadanie (22) w postaci

$$\underset{x}{\text{minimize}} \quad c^{\mathrm{T}}x \tag{25a}$$

$$\text{subject to} \quad Ax \leqslant b \tag{25b}$$

Podobnie, można pokazać, że zadanie

$$\underset{v}{\text{minimize}} \quad \|\tilde{y} - v\|_1 + \tau\,\|Dv\|_1 \tag{26}$$

jest równoważne zadaniu

$$\underset{v,\xi,\delta}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{n}\xi_i + \tau\sum_{i=1}^{m}\delta_i \tag{27a}$$

$$\text{subject to} \quad -\xi \leqslant x - v \leqslant \xi \tag{27b}$$

$$-\delta \leqslant Dv \leqslant \delta \tag{27c}$$

czyli

$$\underset{v,\xi,\delta}{\text{minimize}} \quad \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}\xi + \tau\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\delta \tag{28a}$$

$$\text{subject to} \quad -\xi \leqslant x - v \leqslant \xi \tag{28b}$$

$$-\delta \leqslant Dv \leqslant \delta \tag{28c}$$

Sprowadzenie tego zadania do postaci (25) jest już relatywnie proste.

3 Forma sprawozdania

Wszystkie pliki związane z pojedynczym zadaniem należy umieścić w folderze o nazwie `zadanie<nr zadania>`. Następnie wszystkie foldery umieszczamy w jednym folderze nadrzędnym, o nazwie `cwiczenie<nr ćwiczenia>`, kompresujemy do pliku `.zip`, który następnie umieszczamy w ISOD, za pomocą odpowiedniej bramki. Każdy folder musi być „autonomiczny”, tzn. po uruchomieniu skryptu wszystko musi się wykonać, nie mogą pojawiać się jakieś komunikaty, że brakuje danych czy tego typu. Wystąpienie tego typu problemów będzie powodować obniżenie oceny z zadania lub nawet brak zaliczenia danego zadania. Oddanie zadań z danego ćwiczenia po wyznaczonym terminie również będzie skutkować obniżeniem punktacji.
Bardzo proszę o przestrzeganie podanych zasad, szczególnie dotyczących nazw folderów i plików. Proszę w nazwach tych nie używać spacji, czy polskich liter w rodzaju „ą” lub „ł”, proszę również nie zaczynać ich cyfrą.
Generalnie, o ile nie zostanie wyraźnie powiedziane inaczej, nie ma potrzeby przygotowania formalnych sprawozdań. Wystarczą skrypty, jednak kod musi być czytelny, dobrze skomentowany (ale nie na siłę). Muszą się generować odpowiednie rysunki (również z opisem, tzn. opisem osi, legendą, tytułem). Oczywiście opis zależy od ryunku i nie zawsze potrzebna jest, przykładowo, legenda. Należy podchodzić do tego ze zdrowym rozsądkiem.

Literatura

[1] G.C. Calafiore and L. El Ghaoui. *Optimization Models*. Control systems and optimization series. Cambridge University Press, 2014.

[2] Inc. CVX Research. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0. `http://cvxr.com/cvx`, August 2012.

[3] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004. `http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/`.

Rysunek 4: Pies domowy (*Canis familiaris*) – udomowiony gatunek ssaka drapieżnego z rodziny psowatych (*Canidae*), traktowany przez niektóre ujęcia systematyczne za podgatunek wilka, a przez inne za odrębny gatunek, opisywany pod synonimicznymi nazwami *Canis lupus familiaris* lub *Canis familiaris*. Od czasu jego udomowienia powstało wiele ras, znacznie różniących się morfologią i cechami użytkowymi. Rasy pierwotne powstawały głównie w wyniku presji środowiskowej. Rasy współczesne uzyskano w wyniku doboru sztucznego. [`https://pl.wikipedia.org/wiki/Pies_domowy`]