1DR2243:A - Teoria i metody optymalizacji, lab.
Zadanie izoperymetryczne.

(opracował: M.T., ostatnia modyfikacja: 8 września 2022)

1 Wstęp

Rozpatrywane w ćwiczeniu zadanie, opracowane na podstawie [1, 2], jest ciekawe samo w sobie, jednak ma jeszcze tę dodatkową (a może nawet główną) zaletę, że ilustruje szeroką klasę metod rozwiązywania zadań „ciągłych" poprzez ich dyskretyzację.

Weźmy pod uwagę problem wyznaczenia krzywej na płaszczyźnie XY w taki sposób, aby powierzchnia zawarta między tą krzywą a osią X była możliwie największa. Z założenia będziemy rozpatrywać jedynie krzywe postaci

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \,|\, y = f(x)\}, \tag{1}$$

gdzie $f : [0, a] \to \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla danej wartości zmiennej x istnieje tylko jeden y, wyznaczony przez $y = f(x)$. Zakładamy również, że

$$f(0) = f(a) = 0. \tag{2}$$

Długość rozpatrywanej krzywej nie może przekraczać zadanej wartości L, czyli

$$\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x \leqslant L. \tag{3}$$

Zagrodzona powierzchnia A jest równa

$$A = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Dodatkowo, żądamy aby rozpatrywana krzywa przechodziła przez pewne zadane punkty, tzn. dla pewnych ustalonych $\{t_1, \ldots, t_j\}$ oraz $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_j\}$, mamy $f(x = t_k) = \bar{y}_k$, dla $k = 1, \ldots, j$. Ponadto nakładamy ograniczenia na maksymalną krzywiznę

$$|f''(x)| \leqslant C, \tag{5}$$

gdzie C jest pewną ustaloną stałą.
Posumowując, rozpatrywane zadanie jest postaci

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} && \int_0^a f(x)\mathrm{d}x && \text{(6a)}\\
&\text{subject to} && \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x \leqslant L && \text{(6b)}\\
& && |f''(x)| \leqslant C && \text{(6c)}\\
& && f(x = t_k) = \bar{y}_k, \qquad k = 1, \ldots, j && \text{(6d)}
\end{aligned}$$

dla pewnych ustalonych $\{t_1, \ldots, t_j\}$ oraz $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_j\}$.

Ażeby sformułować tak postawione zadanie jako zadanie optymalizacji skończenie wymiarowej (ang. *finite dimensional optimization problem*), dyskretyzujemy zmienną x. Kładziemy $x_i = (i - 1)h$, $i = 1, \ldots, N + 1$, gdzie $h = a/N$ jest krokiem dyskretyzacji, mamy $x_1 = 0$, $x_{N+1} = Nh = a$. Oznaczamy $y_i = f(x_i)$, wówczas

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h = h\sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{7}$$

Wyrażenie

$$h\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{8}$$

jest zatem funkcją celu.
Ograniczenie długości krzywej można napisać w postaci

$$h\sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)^2} \leqslant L, \tag{9}$$

gdzie przyjmujemy, że

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \tag{10}$$

Oznaczając $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$, możemy napisać

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^a g(x)\mathrm{d}x\\
&\approx h\sum_{i=1}^{N} g(x_i)\\
&= h\sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\\
&\approx h\sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)^2}\\
&= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}\\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\| \begin{bmatrix} h \\ y_{i+1} - y_i \end{bmatrix} \right\|
\end{aligned} \tag{11}$$

Zauważmy, że wyrażenie $\sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ jest długością odcinka łączącego punkty (x_i, y_i) i (x_{i+1}, y_{i+1}).

Dodatkowo, żądamy aby rozpatrywana krzywa przechodziła przez pewne zadane punkty. Oznaczmy zbiór indeksów tych punktów przez

$$\mathcal{F} \subseteq \{1, \ldots, N + 1\}. \tag{12}$$

Przyjmujemy, że dla $j \in \mathcal{F}$ mamy $y_j = y_j^{\text{fixed}}$, gdzie $\boldsymbol{y}^{\text{fixed}} \in \mathbb{R}^{N+1}$ (elementy wektora $\boldsymbol{y}^{\text{fixed}}$ których indeksy nie należą do $\mathcal{F}$ ignorujemy). Występującą w ograniczeniu krzywizny

$$|f''(x)| \leqslant C \tag{13}$$

drugą pochodną przybliżamy ilorazem

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{h} \tag{14}$$

skąd otrzymujemy warunek

$$-C \leqslant \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \leqslant C, \quad i = 1, \ldots, N - 1. \tag{15}$$

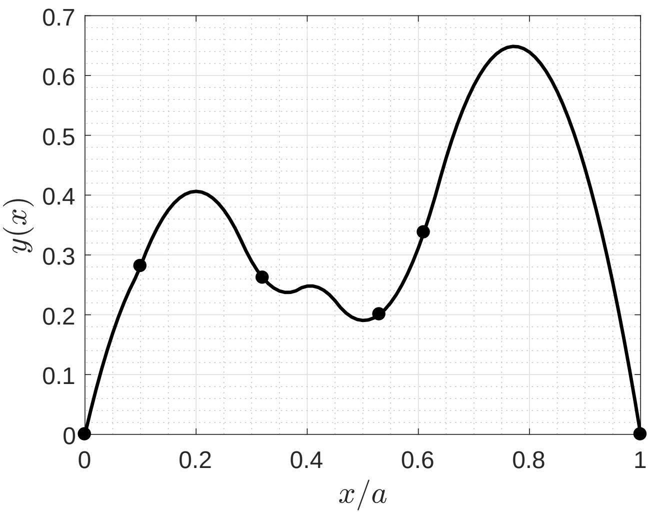
Podsumowując, należy rozwiązać następujące zadanie optymalizacji

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} && h\sum_{i=1}^{N} y_i && \text{(16a)}\\
&\text{subject to} && \sum_{i=1}^{N}\left\| \begin{bmatrix} h \\ y_{i+1}-y_i \end{bmatrix} \right\| \leqslant L && \text{(16b)}\\
& && \left| \frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2} \right| \leqslant C, \ \ i=1,\ldots,N-1 && \text{(16c)}\\
& && y_1 = 0 && \text{(16d)}\\
& && y_{N+1} = 0 && \text{(16e)}\\
& && y_j = y_j^{\text{fixed}}, \quad j\in\mathcal{F} && \text{(16f)}
\end{aligned}
$$

względem zmiennych $y_1,\ldots,y_{N+1}$, które jest zadaniem wypukłym.

2 Zadania

Zadanie 1. Należy wyznaczyć poszukiwaną krzywą (tzn. punkty $y_1,\ldots,y_{N+1}$) dla danych z pliku `isoPerimData.mat` oraz wygenerować odpowiedni wykres (Rys. 1).



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ maksymalizującej całkę $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ przy zadanych ograniczeniach.

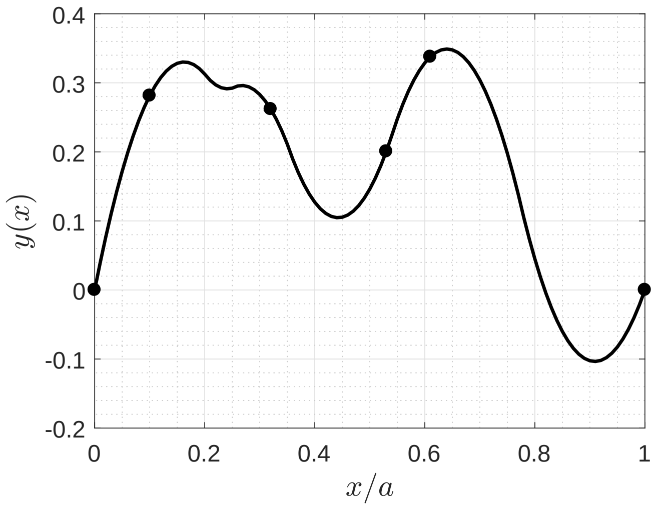
Modyfikacje zadania
Rozpatrzyć zadanie:

(a) *minimalizacji* pola pod krzywą (Rys. 2),
[Odp. $A = 0.1746$]

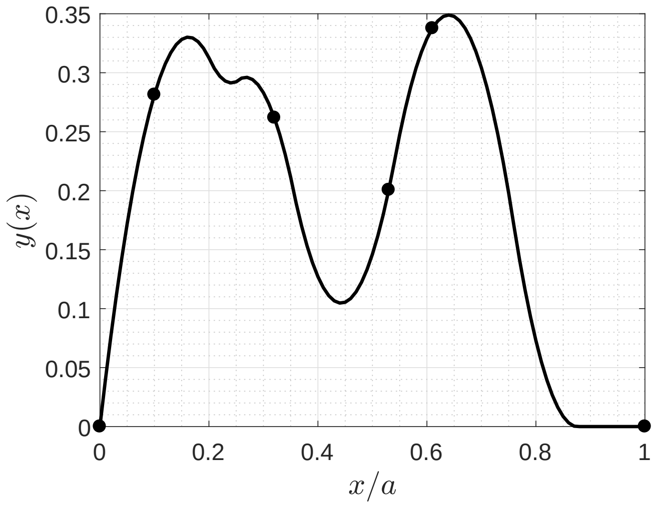
(b) minimalizacji pola pod krzywą przy nieujemnych zmiennych optymalizacyjnych (Rys. 3),
[Odp. $A = 0.1890$]

(c) maksymalizacji pola pod krzywą przy usunięciu ograniczenia na maksymalną krzywiznę.
[Odp. $A = 0.6016$]

Zinterpretuj otrzymane wyniki.



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x)$ minimalizującej całkę $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ przy zadanych ograniczeniach.



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x)$ minimalizującej całkę $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ przy zadanych ograniczeniach oraz dodatkowym warunku nieujemności zmniennych optymalizacyjnych.

Ponieważ zadania rozwiązujemy korzystając z pakietu CVX [3], należy zwrócić uwagę na następujące kwestie. Możemy zacytować następujący fragment [3]:

> As another example consider the function $\sqrt{x^2+1} = \left\| \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2$, which is convex. If it is written as
>
> ```
> norm( [ x; 1 ] )
> ```
>
> (assuming `x` is a scalar variable or affine expression) it will be recognized by CVX as a convex expression, and therefore can be used in (appropriate) constraints and objectives. But if it is written as
>
> ```
> sqrt( x^2 + 1 )
> ```
>
> CVX will reject it, since convexity of this function does not follow from the CVX ruleset.

Drugą kwestią na którą trzeba zwrócić uwagę jest różnica między zmiennymi optymalizacyjnymi (ang. *optimization variables*) a zmiennymi wyrażeniowymi (ang. *expression holders*). Szczegółową dyskusję na ten temat można znaleźć w [3] w podrozdziale 4.8 Assignment and expression holders. Tutaj podamy krótki przykład. Otóż załóżmy, że chcemy zminimalizować sumę kwadratów elementów pewnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

który jest zmienną optymalizacyjną, przy ograniczeniu $Ax \leqslant b$, gdzie macierz A i wektor b mają odpowiednie wymiary i są znane. Oczywiście możemy to zrobić za pomocą kodu

```
cvx_begin
   variable x(n)
   minimize ( x'*x )
   subject to
      A*x <= b
cvx_end
```

Możemy jednak skorzystać ze zmiennych wyrażeniowych i napisać następujący kod

```
cvx_begin
   variable x(n)
   expression s
   s = 0;
   for k = 1:n
      s = s + (x(k))^2;
   end
   minimize ( s )
   subject to
      A*x <= b
cvx_end
```

Oczywiście pierwszy kod jest krótszy i bardziej przejrzysty, zatem możemy powiedzieć, że jest lepszy. Jednak w wielu sytuacjach zmienne wyrażeniowe mogą być bardzo użyteczne, zadanie izoperymetryczne postaci (16) jest tutaj dobrym przykładem.

3 Zadanie izoperymetryczne w literaturze pięknej

Prawdopodobnie pierwszą wzmiankę na temat zadania izoperymetrycznego można znaleźć w *Eneidzie* Wergiliusza. Poniżej cytat z [2]:

> *Remark (for your amusement only).* The isoperimetric problem is an ancient problem in mathematics with a history dating all the way back to the tragedy of queen Dido and the founding of Carthage. The story (which is mainly the account of the poet Virgil in his epic volume Aeneid), goes that Dido was a princess forced to flee her home after her brother murdered her husband. She travels across the Mediterranean and arrives on the shores of what is today modern Tunisia. The natives weren't very happy about the newcomers, but Dido was able to negotiate with the local King: in return for her fortune, the King promised to cede her as much land as she could mark outwith the skin of a bull.
>
> The king thought he was getting a good deal, but Dido outmatched him in mathematical skill. She broke down the skin into thin pieces of leather and sewed them into a long piece of string. Then, taking the seashore as an edge, they laid the string in a semicircle, carving out a piece of land larger than anyone imagined; and on this land, the ancient city of Carthage was born. When the king saw what she had done, he was so impressed by Dido's talent that he asked her to marry him. Dido refused, so the king built a university in the hope that he could find another woman with similar talent.

Rysunek 4: Death of Dido, by Guercino, AD 1631. [`https://en.wikipedia.org/wiki/Dido`]

4 Forma sprawozdania

Wszystkie pliki związane z pojedynczym zadaniem należy umieścić w folderze o nazwie `zadanie<nr zadania>`. Następnie wszystkie foldery umieszczamy w jednym folderze nadrzędnym, o nazwie `cwiczenie<nr ćwiczenia>`, kompresujemy do pliku `.zip`, który następnie umieszczamy w ISOD, za pomocą odpowiedniej bramki. Każdy folder musi być „autonomiczny", tzn. po uruchomieniu skryptu wszystko musi się wykonać, nie mogą pojawiać się jakieś komunikaty, że brakuje danych czy tego typu. Wystąpienie tego typu problemów będzie powodować obniżenie oceny z zadania lub nawet brak zaliczenia danego zadania. Oddanie zadań z danego ćwiczenia po wyznaczonym terminie również będzie skutkować obniżeniem punktacji.
Bardzo proszę o przestrzeganie podanych zasad, szczególnie dotyczących nazw folderów i plików. Proszę w nazwach tych nie używać spacji, czy polskich liter w rodzaju „ą" lub „ł", proszę również nie zaczynać ich cyfrą.
Generalnie, o ile nie zostanie wyraźnie powiedziane inaczej, nie ma potrzeby przygotowania formalnych sprawozdań. Wystarczą skrypty, jednak kod musi być czytelny, dobrze skomentowany (ale nie na siłę). Muszą się generować odpowiednie rysunki (również z opisem, tzn. opisem osi, legendą, tytułem). Oczywiście opis zależy od ryunku i nie zawsze potrzebna jest, przykładowo, legenda. Należy podchodzić do tego ze zdrowym rozsądkiem.

Literatura

[1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004. `http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/`.

[2] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Additional Exercises for Convex Optimization*. 2004. `https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook_extra_exercises.pdf`.

[3] Inc. CVX Research. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0. `http://cvxr.com/cvx`, August 2012.