# 1DR2243:A - Teoria i metody optymalizacji, ćw.
# Zadanie dualne. Lokalizacja źródła sygnału

(opracował Maciej Twardy, ostatnia modyfikacja 30 października 2018)

---

**Zadanie** (literatura: [1, 2], opracowano na podstawie zadania 4.4 *Source localization from range measurements* z [2])

Sygnał emitiowany przez źródło o nieznanym położeniu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$, $n = 3$) jest odbierany przez $m$ sensorów, których położenia (znane) są dane przez wektory $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m \in \mathbb{R}^n$. Na podsatwie siły mierzonego sygnału, można otrzymać zaszumione estymaty $d_k$ ($k = 1, \ldots, m$) odległości $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_k\|$ sensorów od źródła. Chcemy oszacować położenie źródła na podstawie ostymat odległości $d_k$ ($k = 1, \ldots, m$), rozwiązując zadanie minimalizacji

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} \left( \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_k\|^2 - d_k^2 \right)^2 \tag{1}$$

Wprowadzając dodatkową zmienną $t = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ możemy napisać (1) równoważnie

$$\begin{aligned} \underset{t\in\mathbb{R},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \sum_{k=1}^{m} \left( t - 2\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{y}_k\|^2 - d_k^2 \right)^2 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Zadanie (2) nie jest wypukłe, ale w rozpatrywanym przypadku zachodzi silna dualność (więcej szczegółów na ten temat w [1], str. 229). Rozwiązać (2) dla $n = 2$, $m = 5$ oraz

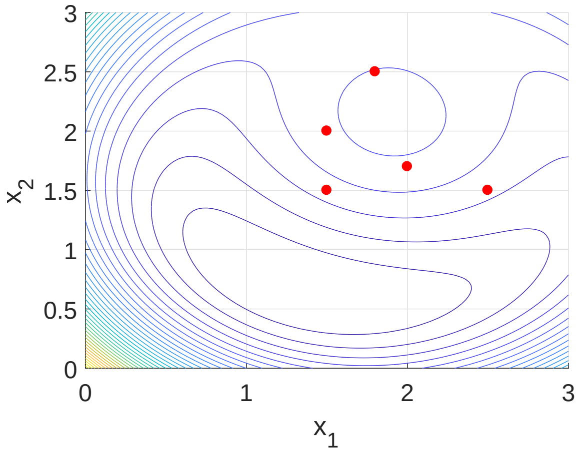
$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_4 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_5 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

oraz

$$d_1 = 2.00, \quad d_2 = 1.24, \quad d_3 = 0.59, \quad d_4 = 1.31, \quad d_5 = 1.44.$$

Poniższy rysunek przedstawia poziomice funkcji $f_0$ oraz położenia sensorów.




**Rys. 1** Lokalizacja sensorów i poziomice funkcji $f_0$ z (1)

Zadanie (1) nie jest wypukłe, jednak zachodzi dla niego silna dualność [1]. Wprowadźmy oznaczenia

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}} & 1 \\ -2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}} & 1 \\ -2\boldsymbol{y}_3^{\mathrm{T}} & 1 \\ -2\boldsymbol{y}_4^{\mathrm{T}} & 1 \\ -2\boldsymbol{y}_5^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} d_1^2 - \|\boldsymbol{y}_1\|^2 \\ d_2^2 - \|\boldsymbol{y}_2\|^2 \\ d_3^2 - \|\boldsymbol{y}_3\|^2 \\ d_4^2 - \|\boldsymbol{y}_4\|^2 \\ d_5^2 - \|\boldsymbol{y}_5\|^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{bmatrix}$$

Wówczas zadanie (2) można napisać w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n+1}}{\text{minimize}} \quad & \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Lagranżjan dla zadania (3)

$$L(\boldsymbol{z}, \mu) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z} - 2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} + \|b\|^2 \tag{4}$$

Lagranżjan (4) jest ograniczony z dołu względem $\boldsymbol{z}$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} \succeq 0, \qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q})$$

zatem funkcja dualna Lagrange'a

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \inf_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) \\ &= -(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q})^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) + \|b\|^2 \end{aligned}$$

jest określona na zbiorze

$$\Omega = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} \succeq 0, \ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q})\}$$

Zadanie dualne

$$\begin{aligned} \underset{\mu\in\mathbb{R}}{\text{maximize}} \quad & g(\mu) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} \succeq 0 \\ & (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q}) \end{aligned} \tag{5}$$

jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} \underset{\mu\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad & -g(\mu) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} \succeq 0 \\ & (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q}) \end{aligned}$$

które jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} \underset{\mu\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad & (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q})^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) - \|b\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} \succeq 0 \\ & (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q}) \end{aligned}$$

które jest równoważne zadaniu

$$\begin{aligned} \underset{\mu\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad & t - \|b\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & t \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{Q}) \end{aligned} \tag{6}$$

Zauważmy, że zależność

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{Q})$$

wynika z jednego z warunków KKT, tzn. z warunku

$$\nabla_{\boldsymbol{z}} L(\boldsymbol{z},\mu) = 0$$

czyli

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{c} \tag{7}$$

Można zatem spróbować rozwiązać zadanie (6) rozwiązując najpierw zadanie

$$\begin{array}{ll} \underset{\mu\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} & t-\|b\|^2 \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} & t \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array} \tag{8}$$

a następnie dla wyznaczonej wartości $\mu^*$ rozwiązać równanie (7) tzn.

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu^*\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu^*\boldsymbol{c}$$

Jeżeli dla znalezionego rozwiązania $\boldsymbol{z}^*$ zachodzi

$$\|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu^*\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu^*\boldsymbol{c}\| = 0$$

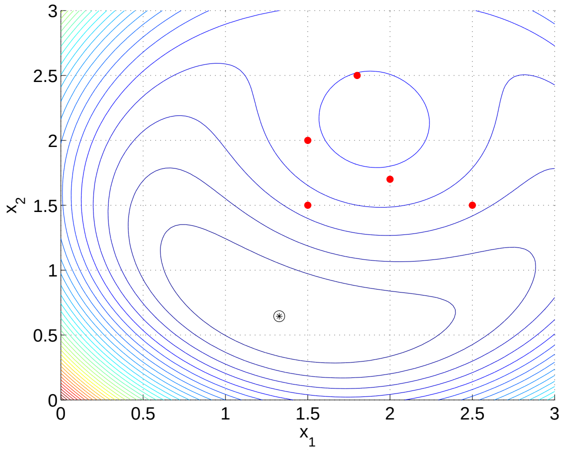
to warunek

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{c}) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{Q})$$

jest spełniony.

Należy wygenerować wykres wykres poziomic funkcji celu wraz z zaznaczonymi położeniami sensorów (tak jak przedstawia to Rys. 1), można skorzystać w tym celu z funkcji `contour`. Zadanie (8) można rozwiązać korzystając z pakietu `CVX`, pracując w tzw. trybie `SDP` (ang. *semidefinite programming*) [3]. Należy następnie wygenerować wykres poziomic funkcji celu wraz z zaznaczonymi położeniami sensorów oraz wyznaczonym położeniem źródła (tak jak przedstawia to Rys. 2).

(Rozwiązanie: $\boldsymbol{x}^* = [1.33,\ 0.64]^{\mathrm{T}}$)




**Rys. 2** Lokalizacja sensorów i źródła sygnału oraz poziomice funkcji $f_0$ z (1)

# Literatura


[1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004. `http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/` [Online; accessed 19.02.2016].

[2] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Additional Exercises for Convex Optimization.* 2004. `http://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/` [Online; accessed 19.02.2016].

[3] Michael C. Grant and Stephen P. Boyd. *The CVX Users' Guide.* CVX Research, Inc., 2015. `http://web.cvxr.com/cvx/doc/CVX.pdf` [Online; accessed 06.03.2016].