

1 Preliminaria

Algorytm Levenberga–Marquardta (LM) służy do rozwiązywania zadań optymalizacji postaci

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|f(\mathbf{x})\|_2^2, \quad (1)$$

gdzie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ jest zadaną (różniczkowalną) funkcją [1]. Oznaczając

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

możemy zapisać (1) w postaci

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x})^2, \quad (3)$$

gdzie $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ są składowymi funkcji f . Rozpatrywane zadanie nazywamy nieliniowym zadaniem LS (ang. *nonlinear least-squares problem*). Oznaczając

$$Df(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_k)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{x}_k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(\mathbf{x}_k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(\mathbf{x}_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

możemy zapisać algorytm LM w pseudokodzie

| Algorytm Levenberga–Marquardta |
|---|
| dane: różniczkowalna funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, punkt startowy \mathbf{x}_0 , startowa wartość parametru ufności $\lambda_0 > 0$, maksymalna liczba iteracji k_{\max} |
| <pre> $k \leftarrow 0$ while $k < k_{\max}$ $\mathbf{J} \leftarrow Df(\mathbf{x}_k)$ $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k - [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda_k \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{J}^T f(\mathbf{x}_k)$ if $\ f(\mathbf{x}_{k+1})\ ^2 < \ f(\mathbf{x}_k)\ ^2$ $\lambda_{k+1} \leftarrow 0.8 \lambda_k$ else $\lambda_{k+1} \leftarrow 2 \lambda_k$ $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k$ end $k \leftarrow k + 1$ end </pre> |

Założmy, że dysponujemy N pomiarami y_1, \dots, y_m pewnego procesu o modelu $\varphi(\mathbf{x}, t)$ dla odpowiednich chwil czasowych t_1, \dots, t_m . Chcemy wyznaczyć wektor parametrów \mathbf{x} , tak aby zminimalizować wyrażenie

$$\sum_{i=1}^m [\varphi(\mathbf{x}, t) - y_i]^2. \quad (5)$$

Zauważmy, że jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$f_i(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, t) - y_i, \quad (6)$$

to minimalizacja wyrażenia (5) sprowadza się do zadania optymalizacji (1). Mamy wówczas

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{x}, t_1) - y_1 \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{x}, t_N) - y_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

oraz

$$Df(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_1)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_1)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_2)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_N)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_N)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_N)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Przykład 1. Załóżmy, że dysponujemy N pomiarami y_1, \dots, y_m procesu

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (9)$$

dla odpowiednich chwil czasowych t_1, \dots, t_m . Chcemy znaleźć wartości parametrów A , ω oraz ϕ tak aby otrzymać najlepsze dopasowanie modelu $\varphi(\mathbf{x}, t)$ do posiadanych danych pomiarowych. Innymi słowy, chcemy zminimalizować wyrażenie

$$\sum_{i=1}^m [A \sin(\omega t_i + \phi) - y_i]^2, \quad (10)$$

względem parametrów A , ω i ϕ , co jest równoważne rozwiązaniu zadania (1) dla

$$f_i(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_2 t + x_3) - y_i, \quad (11)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = [A, \omega, \phi]^T \quad (12)$$

jest wektorem zmiennych optymalizacyjnych (które w rozpatrywanym kontekście mają interpretację parametrów modelu). Dla funkcji o składowych (11) mamy

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = x_1 \sin(x_2 t + x_3) \quad (13)$$

oraz

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_1} = \sin(x_2 t_k + x_3), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_2} = x_1 t_k \cos(x_2 t_k + x_3), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_3} = x_1 \cos(x_2 t_k + x_3), \quad (16)$$

dla $k = 1, \dots, N$, zatem zgodnie ze wzorem (8) otrzymujemy

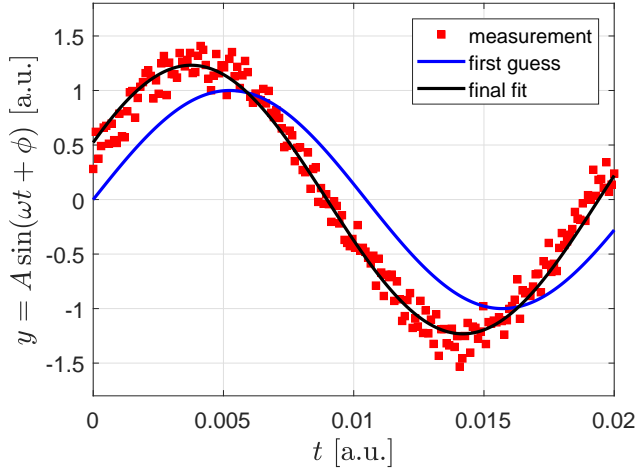
$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) & x_1 t_1 \cos(\alpha_1) & x_1 \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_2) & x_1 t_2 \cos(\alpha_2) & x_1 \cos(\alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(\alpha_N) & x_1 t_N \cos(\alpha_N) & x_1 \cos(\alpha_N) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

gdzie $\alpha_k = x_2 t_k + x_3$ dla $k = 1, \dots, N$, oraz

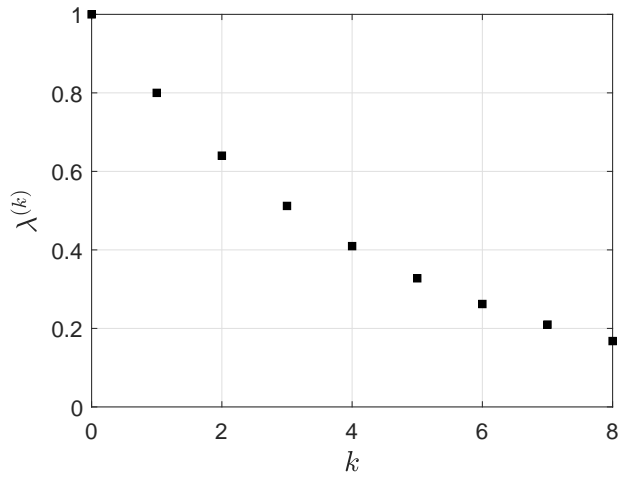
$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \sin(\alpha_1) - y_1 \\ x_1 \sin(\alpha_2) - y_2 \\ \vdots \\ x_1 \sin(\alpha_N) - y_N \end{bmatrix}. \quad (18)$$

2 Zadania

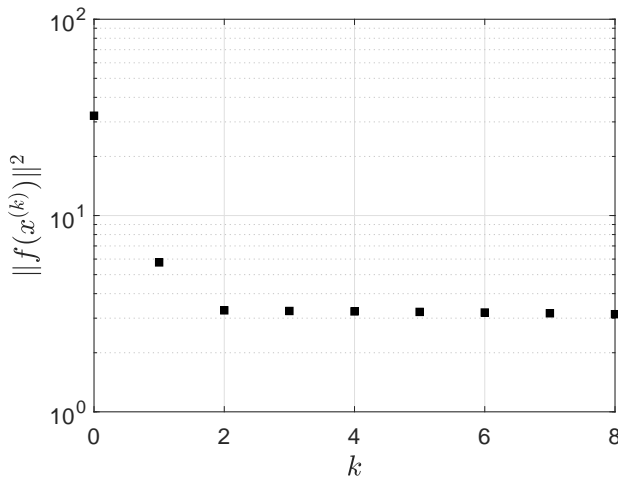
Zadanie 1. Korzystając z algorytmu LM dopasować parametry modelu $y = A \sin(\omega t + \phi)$ do danych pomiarowych z pliku LM01Data.mat. Przyjąć $\lambda_0 = 1.0$. Napisać odpowiedni skrypt w środowisku Matlab i wygenerować wykresy przedstawione na Rys. 1–3.



Rysunek 1: Rekonstrukcja sygnału sinusoidalnego $y = A \sin(\omega t + \phi)$ [Zadanie 1].



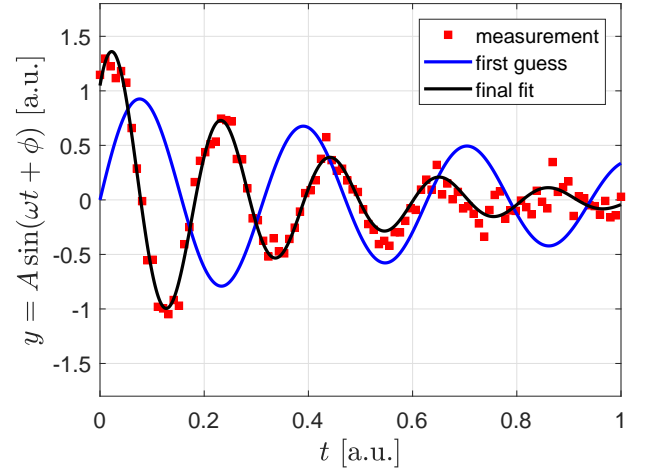
Rysunek 2: Zmiany wartości współczynnika ufności λ_k w kolejnych iteracjach algorytmu LM [Zadanie 1].



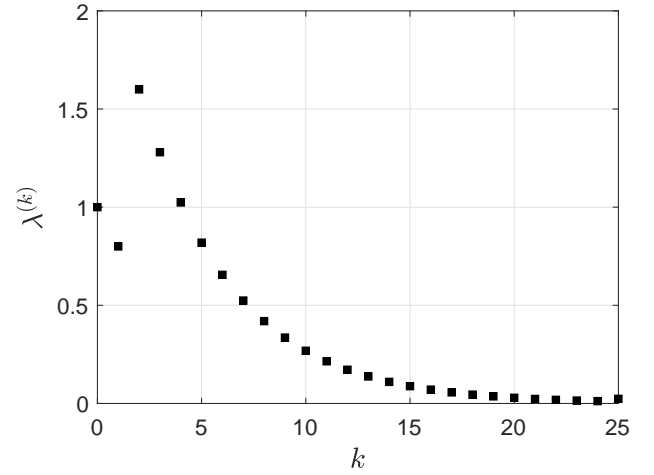
Rysunek 3: Zmiany wartości funkcji celu w kolejnych iteracjach algorytmu LM [Zadanie 1].

Zadanie 2. Korzystając z algorytmu LM dopasować parametry modelu $y = Ae^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ do danych pomiarowych z

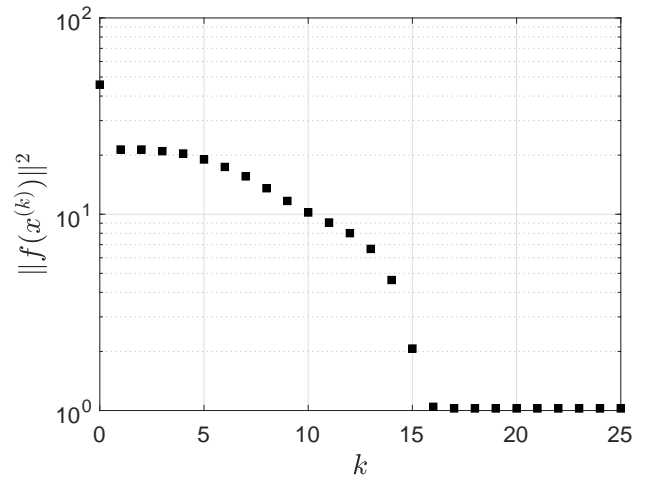
pliku LM04Data.mat. Napisać odpowiedni skrypt w środowisku Matlab i wygenerować wykresy przedstawione na Rys. 4–6.



Rysunek 4: Rekonstrukcja tłumionego sygnału sinusoidalnego $y = Ae^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ [Zadanie 2].



Rysunek 5: Zmiany wartości współczynnika ufności λ_k w kolejnych iteracjach algorytmu LM [Zadanie 2].



Rysunek 6: Zmiany wartości funkcji celu w kolejnych iteracjach algorytmu LM [Zadanie 2].

Zadanie 3. W pracy [2] rozpatruje się transmitancję

$$G(s) = -M\omega_s \frac{Ks + 2\Delta}{s^4 + Ks^3 + 2\Sigma s^2 + K\Sigma s + \Delta^2}, \quad (19)$$

gdzie

$$M = \frac{2\sqrt{V_{\text{in}} - V_{\text{out}}}}{\pi|1 - \omega_s^2 LC|}, \quad (20)$$

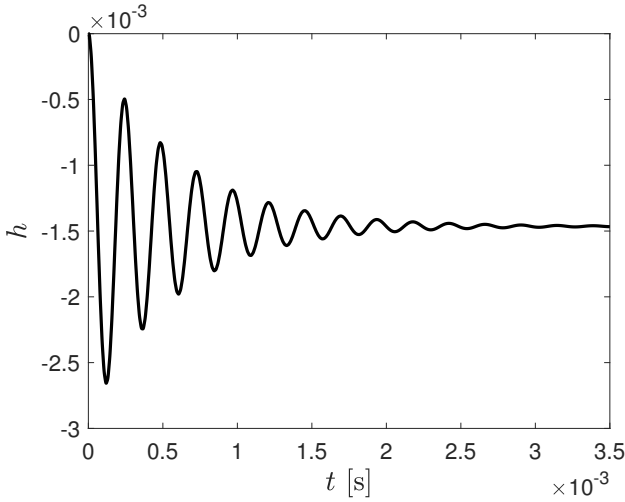
$$K = \frac{2\omega_0^2 V_{\text{out}}}{\pi M \omega_s}, \quad (21)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (22)$$

$$\Sigma = \omega_s^2 + \omega_0^2, \quad (23)$$

$$\Delta = \omega_s^2 - \omega_0^2 \quad (24)$$

oraz $L = 197 \times 10^{-6}$ H, $C = 100 \times 10^{-9}$ F, $V_{\text{in}} = 14.0$ V, $V_{\text{out}} = 1.95$ V, $\omega_s = 40 \times 2\pi \times 10^3$ rad/s. Rysunek 7 przedstawiono wykres odpowiedzi skokowej dla tej transmitancji.



Rysunek 7: Odpowiedź skokowa układu opisanego transmitancją (19) [Zadanie 3].

Odpowiedź ta przypomina odpowiedź skokową członu oscylacyjnego. Zauważmy, że człon oscylacyjny jest członem drugiego rzędu, natomiast transmitancja (19) jest rzędu czwartego. Na ogół łatwiej jest zaprojektować regulator dla członu drugiego rzędu niż dla członu czwartego rzędu, dlatego chcielibyśmy znaleźć taki człon drugiego rzędu, którego odpowiedź skokowa jest możliwie najbardziej zbliżona do odpowiedzi skokowej członu (19). Wiemy, że odpowiedź skokowa członu oscylacyjnego

$$G_{\text{osc}}(s) = \frac{k}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}, \quad (25)$$

jest dana wzorem

$$h_{\text{osc}}(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos(\lambda t) + \frac{\gamma}{\lambda} \sin(\lambda t) \right) \right], \quad (26)$$

gdzie

$$\gamma = \frac{\xi}{T}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}. \quad (27)$$

Ze wzoru (27) wynika, że

$$\xi = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}}, \quad (28)$$

innymi słowy

$$T = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}}, \quad \xi = \gamma T. \quad (29)$$

Dysponując wartościami odpowiedzi skokowej $h(t)$ transmitancji (19) i oznaczając, $y_i = h(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, możemy wyznaczyć poszukiwane wartości parametrów γ i λ minimalizując wyrażenie

$$\sum_{i=1}^N \left\{ k \left[1 - e^{-\gamma t_i} \left(\cos(\lambda t_i) + \frac{\gamma}{\lambda} \sin(\lambda t_i) \right) \right] - y_i \right\}^2, \quad (30)$$

co przy oznaczeniu

$$f_i(k, \gamma, \xi) = k \left[1 - e^{-\gamma t_i} \left(\cos(\lambda t_i) + \frac{\gamma}{\lambda} \sin(\lambda t_i) \right) \right] - y_i, \quad (31)$$

dla $i = 1, \dots, N$ oraz $k = x_1$, $\gamma = x_2$, $\xi = x_3$ sprowadza się do zadania (1). Zauważmy, że

$$\frac{\partial f_i}{\partial k} = 1 - e^{-\gamma t_i} \left(\cos(\lambda t_i) + \frac{\gamma}{\lambda} \sin(\lambda t_i) \right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \gamma} = k e^{-\gamma t_i} \left(t_i \cos(\lambda t_i) - \frac{1 - t_i \gamma}{\lambda} \sin(\lambda t_i) \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = k e^{-\gamma t_i} \left[\left(t_i + \frac{\gamma}{\lambda^2} \right) \sin(\lambda t_i) - \frac{\gamma}{\lambda} t_i \cos(\lambda t_i) \right], \quad (34)$$

dla $i = 1, \dots, N$. Zatem, biorąc pod uwagę wspomniane już oznaczenia $k = x_1$, $\gamma = x_2$, $\xi = x_3$ mamy

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 1 - e^{-x_2 t_i} \left(\cos(x_3 t_i) + \frac{x_2}{x_3} \sin(x_3 t_i) \right), \quad (35)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_2} = x_1 e^{-x_2 t_i} \left(t_i \cos(x_3 t_i) - \frac{1 - t_i x_2}{x_3} \sin(x_3 t_i) \right), \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_3} = x_1 e^{-x_2 t_i} \left[\left(t_i + \frac{x_2}{x_3^2} \right) \sin(x_3 t_i) - \frac{x_2}{x_3} t_i \cos(x_3 t_i) \right], \quad (37)$$

dla $i = 1, \dots, N$.

Korzystając z metody LM wyznaczyć odpowiednik drugiego rzędu w postaci członu oscylacyjnego dla transmitancji (19). Odpowiedź skokową transmitancji (19) możesz wyznaczyć samodzielnie lub skorzystać z danych w pliku `reductionData.mat`. Wykonaj odpowiednie wykresy. Jako punkt startowy przyjmij $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 1]^T$. Więcej informacji na temat transmitancji i odpowiedzi skokowej układu można znaleźć np. w [3] i [4].

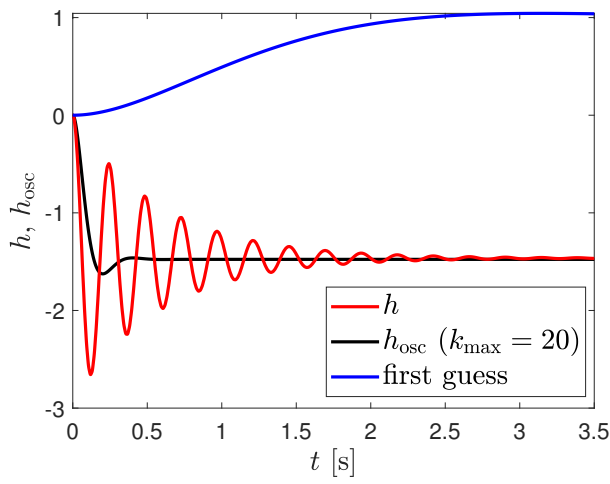
Uwaga: Z Rys. 7 wynika, że wartości y_1, y_2, \dots, y_N i t_1, t_2, \dots, t_N są stosunkowo małe, rzędu 10^{-3} . Wygodnie jest obliczenia prowadzić dla przeskalowanych wartości $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N$ i $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_N$ a następnie odzyskać „prawdziwe” wartości parametrów przeskalowując je ponownie. Jeśli $\tilde{y}_i = 10^3 \times y_i$ i $\tilde{t}_i = 10^3 \times t_i$ dla $i = 1, \dots, N$, to po zakończeniu trzeba otrzymane parametry k , γ i λ przemnożyć przez 10^{-3} . Ostatecznie, zidentyfikowane wartości parametrów, już po przeskalowaniu, to

$$k = -1.4639 \times 10^{-3}, \quad (38)$$

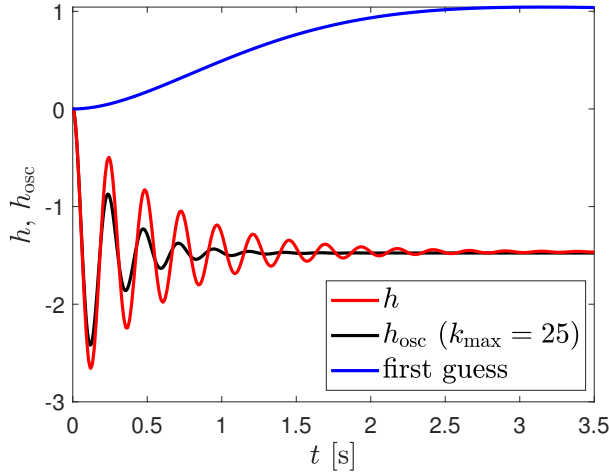
$$\gamma = 1.7303 \times 10^{-3}, \quad (39)$$

$$\lambda = -25.9807 \times 10^{-3}. \quad (40)$$

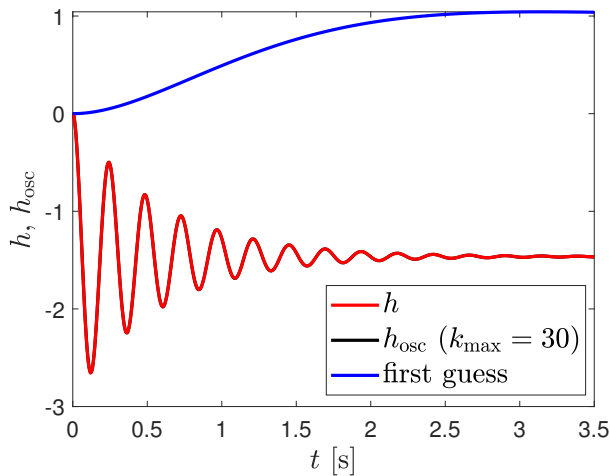
$$(41)$$



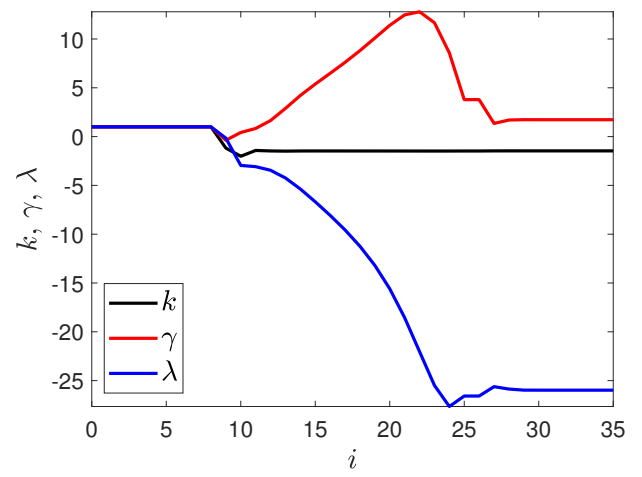
Rysunek 8: Wykresy odpowiedzi skokowa $h(t)$ (czerwony) układu opisanego transmitancją (19) oraz odpowiedzi skokowe $h_{osc}(t)$ członu oscylacyjnego opisanego transmitancją (25) dla wartości parametrów początkowych (niebieski) oraz po 20 iteracjach (czarny). [Zadanie 3].



Rysunek 9: Wykresy odpowiedzi skokowa $h(t)$ (czerwony) układu opisanego transmitancją (19) oraz odpowiedzi skokowe $h_{osc}(t)$ członu oscylacyjnego opisanego transmitancją (25) dla wartości parametrów początkowych (niebieski) oraz po 25 iteracjach (czarny). [Zadanie 3].



Rysunek 10: Wykresy odpowiedzi skokowa $h(t)$ (czerwony) układu opisanego transmitancją (19) oraz odpowiedzi skokowe $h_{osc}(t)$ członu oscylacyjnego opisanego transmitancją (25) dla wartości parametrów początkowych (niebieski) oraz po 30 iteracjach (czarny). [Zadanie 3].



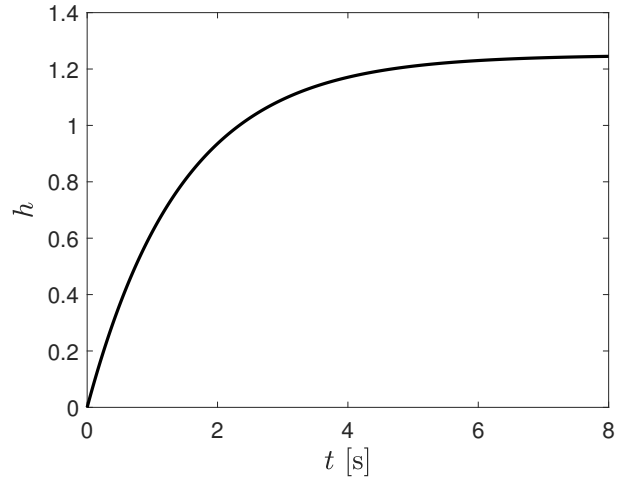
Rysunek 11: Zmiany wartości parametrów k , γ i λ w kolejnych iteracjach algorytmu LM. [Zadanie 3].

Zadanie 4. Człon inercyjny jest opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}. \quad (42)$$

Odpowiedź skokowa tego członu jest dana wzorem

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (43)$$



Rysunek 12: Wykres odpowiedzi skokowej $h(t)$ członu inercyjnego. [Zadanie 4].

Założmy, że dysponujemy próbkami odpowiedzi skokowej y_1, \dots, y_N dla chwil t_1, \dots, t_N i chcemy wyznaczyć wartości wzmocnienia k i stałej czasowej T dopasowując wzór (43) metodą LM. Innymi słowy chcemy metodą LM zminimalizować względem k i T wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^N [h(t_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^N \left[k \left(1 - e^{-\frac{t_i}{T}} \right) - y_i \right]^2. \quad (44)$$

Odpowiada to zadaniu (1) dla

$$f_i = k \left(1 - e^{-\frac{t_i}{T}} \right) - y_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Mamy

$$\frac{\partial f_i}{\partial k} = 1 - e^{-\frac{t_i}{T}}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T} = -\frac{k}{T^2} e^{-\frac{t_i}{T}}, \quad (47)$$

dla $i = 1, \dots, N$.

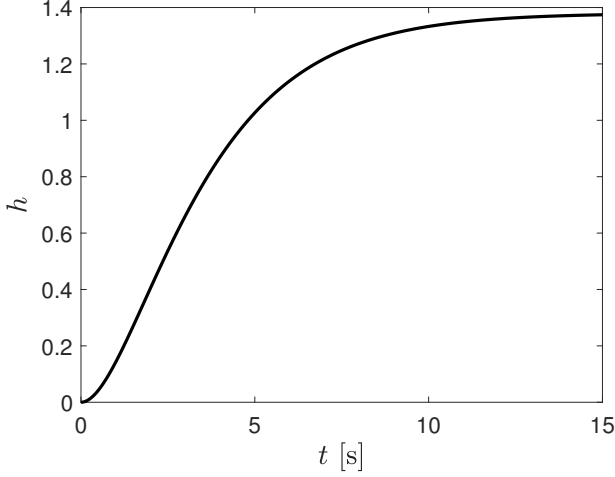
Dla danych z pliku `inertialData.mat` wyznacz metodą LM wartości parametrów k i T , wykonaj odpowiednie wykresy. (Odpowiedź: $k = 1.45$, $T = 1.25$.)

Zadanie 5. Człon dwuinercyjny jest opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (48)$$

Odpowiedź skokowa tego członu jest dana wzorem

$$h(t) = k \left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right]. \quad (49)$$



Rysunek 13: Wykres odpowiedzi skokowej $h(t)$ członu dwuinercyjnego. [Zadanie 5].

Założmy, że dysponujemy próbkami odpowiedzi skokowej y_1, \dots, y_N dla chwil t_1, \dots, t_N i chcemy wyznaczyć wartości wzmocnienia k i stałych czasowych T_1 i T_2 dopasowując wzór (49) metodą LM. Innymi słowy chcemy metodą LM zminimalizować względem k, T_1 i T_2 wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^N [h(t_i) - y_i]^2. \quad (50)$$

czyli

$$\sum_{i=1}^N \left\{ k \left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-\frac{t_i}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t_i}{T_2}} \right) \right] - y_i \right\}^2. \quad (51)$$

Odpowiada to zadaniu (1) dla

$$f_i = k \left[1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-\frac{t_i}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t_i}{T_2}} \right) \right] - y_i \quad (52)$$

oraz $i = 1, \dots, N$.

Mamy

$$\frac{\partial f_i}{\partial k} = 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{-\frac{t_i}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t_i}{T_2}} \right), \quad (53)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_1} = \frac{k}{T_2 - T_1} \left[\frac{t_i}{T_1} e^{-\frac{t_i}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t_i}{T_2}} - e^{-\frac{t_i}{T_1}} \right) \right], \quad (54)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial T_2} = \frac{k}{T_1 - T_2} \left[\frac{t_i}{T_2} e^{-\frac{t_i}{T_2}} + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \left(e^{-\frac{t_i}{T_1}} - e^{-\frac{t_i}{T_2}} \right) \right], \quad (55)$$

dla $i = 1, \dots, N$.

Dla danych z pliku `twoInertialData.mat` wyznacz metodą LM wartości parametrów k i T , wykonaj odpowiednie wykresy.

(Odpowiedź: $k = 1.38, T_1 = 1.45, T_2 = 2.32$.)

Literatura

- [1] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
- [2] S.R. Sanders, J.M. Noworolski, X.Z. Liu, and G.C. Verghese. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(2):251–259, 1991.
- [3] T. Kaczorek, A. Dzieliński, W. Dąbrowski, and R. Łopatka. *Podstawy teorii sterowania*. Wydawnictwo WNT : Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, wyd. 3 - 1 dodr. (pwn). edition, 2016.
- [4] J. Mazurek, H. Vogt, and W. Żydanowicz. *Podstawy automatyki*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, wyd. 7. edition, 2006.



Rysunek 14: Shakira performing on stage in Toronto, Canada in 2018 for her El Dorado World Tour. [<https://en.wikipedia.org/wiki/Shakira>]