SLAM 技术习题第一章

Kun Lin

August 2023

1 分别用左右扰动模型，计算 $\frac{\partial R^{-1}p}{\partial R}$.

首先进行一些必要的引理推导：

$$
\begin{aligned}
R &= \exp(\phi^\wedge) \\
\Rightarrow \phi^\wedge &= \log(R) \\
R^{-1} &= \exp(\phi'^\wedge) \\
\Rightarrow \phi'^\wedge &= \log(R^{-1}) \\
&= -\log(R) \\
&= -\phi^\wedge \\
\Rightarrow \phi' &= -\phi \\
\Rightarrow R^{-1} &= \exp(-\phi^\wedge)
\end{aligned}
$$

左扰动模型：设旋转小量为 θ，则其求导可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R^{-1}p}{\partial \theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\exp(\theta^\wedge)\exp(-\phi^\wedge)p - \exp(-\phi^\wedge)p}{\theta} \\
&\text{Using 1st order Taylor expansion} \\
&\approx \lim_{\theta\to 0}\frac{(I+\theta^\wedge)\exp(-\phi^\wedge)p - \exp(-\phi^\wedge)p}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^\wedge\exp(-\phi^\wedge)p}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^\wedge R^{-1}p}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{-(R^{-1}p)^\wedge\theta}{\theta} \\
&= -(R^{-1}p)^\wedge
\end{aligned}
$$

右扰动模型：设旋转小量为 θ，则其求导可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R^{-1}p}{\partial \theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\exp(-\phi^\wedge)\exp(\theta^\wedge)p - \exp(-\phi^\wedge)p}{\theta} \\
&\text{Using 1st order Taylor expansion} \\
&\approx \lim_{\theta\to 0}\frac{\exp(-\phi^\wedge)(I+\theta^\wedge)p - \exp(-\phi^\wedge)p}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\exp(-\phi^\wedge)\theta^\wedge p}{\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{-R^{-1}p^\wedge\theta}{\theta} \\
&= -R^{-1}p^\wedge
\end{aligned}
$$

2 分别用左右扰动模型，计算 $\frac{\partial R_1 R_2^{-1}}{\partial R_2}$.

左扰动模型：设旋转小量为 θ，则其求导可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\partial R_2} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 \mathrm{Exp}(\theta) R_2^{-1}) - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&\text{Using adjoint map} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1} R_2 \mathrm{Exp}(\theta) R_2^{-1}) - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1} \mathrm{Exp}(R_2 \theta)) - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&\text{Using BCH approximation} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1}) + J_r^{-1}(\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1}))\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\mathrm{R}_2 \theta)) - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&= J_r^{-1}(\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})) R_2
\end{aligned}$$

右扰动模型：设旋转小量为 θ，则其求导可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\partial R_2} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1} \mathrm{Exp}(\theta)) - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&\text{Using BCH approximation} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1}) + J_r^{-1}(\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1}))\theta - \mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1})}{\theta} \\
&= J_r^{-1}(\mathrm{Log}(R_1 R_2^{-1}))
\end{aligned}$$

3 将实践环节中的运动学修改成带一定角速度的平抛运动。车辆受固定的 Z 轴角速度影响，具有一定的初始水平速度，同时受 $-Z$ 方向的重力加速度影响。请修改程序，给出动画演示。

代码 diff 位于此处，完整文件位于motion.cc，演示动画位于homework1_motion.m4v 。

4 自行寻找相关材料，说明高斯牛顿法和 Levenberg-Marquardt 法在处理非线性迭代时的差异。

高斯牛顿法和 LM 法都是用于求解非线性最小二乘问题的方法，其区别在于 LM 法在高斯牛顿法的基础上加入了一个阻尼系数，用于控制迭代过程中的步长，从而使得 LM 法具有更好的收敛性。在每一次的迭代之后，通过计算更新新区域的半径（阻尼系数），使得 LM 在梯度下降和牛顿法之间自动选择（使用一次或者二次函数拟合），从而使得 LM 法具有更好的收敛性。