เอกสารประกอบการสอน

กระบวนวิชา 261494 (261494)

กระบวนวิชาหัวข้อพิเศษสำหรับวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ 1 (ทฤษฎีฟัซซีเซต)

Advanced Topic in Computer Engineering I (Fuzzy Set Theory)

จัดทำโดย

ดร. ศันสนีย์ เอื้อพันธ์วิริยะกุล
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

พ.ศ. 2547

คำนำ

ปัจจุบันการนำทฤษฎีฟัซซีเซต ไปประยุกต์ใช้มีอยู่มากในงานหลายประเภท รวมถึง ระบบควบคุม การรู้จำรูปแบบ การประมวลผลสัญญาณภาพดิจิตอล ฯลฯ วิศวกรหรือผู้ที่เกี่ยวข้องควรมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ ทฤษฎีฟัซซีเซต และสามารถนำไปใช้งานได้

ผู้เขียนได้เปิดสอนเนื้อหาวิชานี้ในกระบวนวิชา 261494 กระบวนวิชาหัวข้อพิเศษสำหรับวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ 1 (ทฤษฎีฟัซซีเซต) (Advanced Topic in Computer Engineering I (Fuzzy Set Theory)) ซึ่งเป็นกระบวนวิชาเลือกสำหรับนักศึกษาปริญญาตรี ของภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ กระบวนวิชานี้ไม่ได้จำกัดเฉพาะนักศึกษาในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์เท่านั้น แต่ยังเหมาะสำหรับผู้ที่สนใจในทฤษฎี และการประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆด้วย

เนื้อหาในเอกสารการสอนฉบับนี้เป็นเพียงเนื้อหาที่เป็นบทนำเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซต และการประยุกต์ใช้อย่างง่าย แต่อย่างไรก็ตามในเอกสารนี้ยังมีเนื้อหาที่ครอบคลุมถึงพื้นฐานของ เซต ความสัมพันธ์และลอจิกแบบดั้งเดิม (classical set, relation and logic) ดังนั้นเอกสารฉบับนี้จึงเหมาะกับนักศึกษาในระดับปริญญาตรี หรือผู้ที่ไม่มีความรู้ทางด้านนี้มาก่อน

สำหรับคำศัพท์ทางเทคนิคที่เป็นภาษาอังกฤษที่ใช้ในเอกสารประกอบการสอนนี้ ผู้เขียนพยายามใช้คำภาษาไทยที่เหมาะสมที่สุดเท่าที่พึงกระทำได้ และให้สื่อความหมายที่ถูกต้องให้มากที่สุด โดยอ้างอิงถึงศัพท์เทคนิคของวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตย สถาน ทั้งนี้ทั้งนั้น ผู้เขียนได้เขียนคำศัพท์ภาษาอังกฤษประกอบไว้ด้วย เพื่อความเข้าใจที่ถูกต้อง นอกจากนี้ เพื่อความชัดเจนและเพื่อคุณภาพที่ดีของเอกสาร ผู้เขียนได้จัดทำรูปในเนื้อหาใหม่เองทั้งหมด

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารนี้จะเอื้อประโยชน์ให้ผู้อ่านได้รับความรู้ทางด้านการประมวลผลสัญญาณดิจิตอล โดยเฉพาะอย่างยิ่งการนำไปใช้งานทางด้านโทรคมนาคม นอกจากนี้ผู้เขียนยังหวังว่าเอกสารนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับบุคคลทั่วไปที่มีความสนใจทางด้านนี้อีกด้วย หากผู้อ่านมีข้อคิดเห็นหรือข้อแนะนำประการใด อันจะเป็นผลให้เอกสารนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น โปรดส่งอีเมล์มายังผู้เขียนที่ sansanee@eng.cmu.ac.th

ศันสนีย์ เอื้อพันธ์วิริยะกุล

ประมวลวิชา

(Course Syllabus)

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วศ.คพ. 494 (261494) **กระบวนวิชาหัวข้อพิเศษสำหรับวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ 1 (ทฤษฎีฟัซซีเซต)**

จำนวนหน่วยกิต: 3 หน่วยกิต

เงื่อนไขที่ต้องผ่านก่อน: นักศึกษาชั้นปีที่ 4

คำอธิบายลักษณะกระบวนวิชา:

บทนำเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซต ลอจิกและทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิม แนวคิดเบื้องต้นและคุณสมบัติของฟัซซีเซต ความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม ความสัมพันธ์แบบฟัซซี เลขคณิตเชิงฟัซซี ฟัซซีลอจิก การประยุกต์ใช้ฟัซซี

วัตถุประสงค์:

1. เพื่อให้นักศึกษาได้ความเข้าใจและติดตามเทคโนโลยีในทฤษฎีฟัซซีเซต
2. เพื่อให้นักศึกษานำทฤษฎีฟัซซีเซตไปประยุกต์ใช้งานด้านต่าง ๆได้

เนื้อหากระบวนวิชา	**จำนวนชั่วโมงบรรยาย**
1. บทนำเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซต (Introduction to fuzzy sets theory)	1.5
2. ลอจิกและทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิม (Classical logic and set theory)	1.5
3. แนวคิดเบื้องต้นและคุณสมบัติของฟัซซีเซต (Basic concepts and properties of fuzzy sets)	6
4. ความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม (Classical relations)	3
5. ความสัมพันธ์แบบฟัซซี (Fuzzy relations)	6
6. เลขคณิตเชิงฟัซซี (Fuzzy arithmetic)	9
7. ฟัซซีลอจิก (Fuzzy logic)	9
8. การประยุกต์ใช้ฟัซซี (Fuzzy applications)	9
รวม	45

ลักษณะกิจกรรมการเรียนการสอน: บรรยายโดยอาจารย์ผู้สอน มีการบ้านสำหรับเนื้อหาแต่ละบท มีการบ้านที่ใช้คอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหา โดยที่นักศึกษาจะต้องส่งรายงานและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ของการบ้านแต่ละชิ้นตามระยะเวลาที่กำหนด

การประเมินผล:

1.	คะแนนความตั้งใจและเข้าชั้นเรียน	5 คะแนน
2.	การบ้านและรายงาน	25 คะแนน
3.	สอบกลางภาค	30 คะแนน
4.	สอบปลายภาค	40 คะแนน
	คะแนนรวม	100 คะแนน

แหล่งวิทยาการหลัก: เอกสารประกอบการสอนกระบวนวิชา 261494 โดย ดร. ศันสนีย์ เอื้อพันธ์วิริยะกุล

แหล่งวิทยาการสำหรับอ่านประกอบ:

[Acharya03] Acharya, U. R., Baht, P. S., Iyengar, S. S., Rao A., and Dua S., "Classification of heart rate data using artificial neural network and fuzzy equivalence relation", *Pattern Recognition*, 36, 2003, pp. 61-68.

[Bellman70] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., "Decision making in a fuzzy environment", *Management Science*, 17(4), 1970, pp. 141-164.

[Bezdek99] Bezdek, J. C., Keller, J. and Krishnapuram, R. and Pal, N, R, *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Blin74] Blin, J. M., "Fuzzy relations in group decision theory", *J. of Cybernetics*, 4(2), 1974, pp. 12-22.

[Blin73] Blin J. M. and Whinston, A. B., "Fuzzy sets and social choice", *J. of Cybernetics*, 3(4), pp. 28-36.

[Dong85] Dong, W.M., Shah, H.C. and Wong, F.S., "Fuzzy computations in risk and decision analysis", *Civ. Engng Syst.*, 2, 1985, pp.201-208.

[Dong87] Dong, W.M. and Wong, F.S., "Fuzzy Weighted Averages and Implementation of The Extension Principle", *Fuzzy Sets and Systems*, 21, 1987, pp.183-199.

[Klir95] Klir, G. J. and Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, New Jersey, Prentice hall, 1995.

[Klir97] Klir G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications*, New Jersey, Prentice hall, 1997.

[Kosko92] Kosko, B., *Neural Networks and Fuzzy Systems:A Dynamic Systems Approach to Machine Intelligence*, Prentice Hall, 1991

[Krishnapuram03] Krishnapuram, R., "An Introduction to Fuzzy Systems", Tutorial at Faculty of Engineering, Chiang Mai University, Chiang Mai, 2003.

[Kruse95] Kruse, R., Gebhardt, J. and Klawonn, F., *Foundations of Fuzzy Systems*, England, John Wiley & Son Ltd., 1995.

[Moore66] Moore, R. E., *Interval Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1966.

[Shimura73] Shimura, M., “Fuzzy Sets concept in rank-ordering objects” *J. or Math. Analysis and Applications*, 43(3), 1973, pp.717-733.

[Zadeh95] Zadeh, L.A., “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8(3), 1965, pp. 338-353.

สารบัญ

บทนำเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซต
Introduction to Fuzzy Set Theory

1

ในบทนี้จะกล่าวถึงความหมายโดยทั่วไปของคำว่าฟัซซีเซต รวมถึงตัวอย่างเหตุการณ์ในชีวิตประจำวันที่มีความไม่แน่นอน หรือความคลุมเครือ เข้ามาเกี่ยวข้องเพื่อเป็นการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับฟัซซีเซตให้มากขึ้น

1.1 อะไรคือความไม่แน่นอน (Uncertainty)

มนุษย์เราใช้ความรู้ที่ได้จากประสบการณ์เกี่ยวกับโลกที่เราใช้ชีวิตอยู่ และเราใช้ความสามารถที่มีอยู่ในการให้เหตุและผล ในการสร้างความสำคัญของข้อมูลต่างๆ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือเราสามารถทำความเข้าใจกับสิ่งที่อยู่รอบตัวเรา เรียนรู้สิ่งใหม่ๆ วางแผนการสำหรับอนาคตได้ แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นความสามารถของเราถูกจำกัดในการรับรู้ต่างๆ หรือเราถูกจำกัดความสามารถในการให้เหตุให้ผลอย่างถ่องแท้ นั่นคือเราถูกจำกัดจาก ความไม่แน่นอน (uncertainty)

ความไม่แน่นอน (uncertainty) คือสภาวะที่มีความเป็นไปได้ที่จะเกิดข้อผิดพลาดเนื่องจากการที่เราได้ข้อมูล (information) ไม่ครบทั้งหมด เกี่ยวกับสิ่งแวดล้อมที่อยู่รอบตัวเรา หรืออีกนัยหนึ่งคือมนุษย์พยายามที่จะทำการตัดสินใจ จัดการ หรือวิเคราะห์ ข้อมูล เหตุการณ์ หรือทำนายเหตุการณ์ในอนาคต แต่เราไม่มีข้อมูลทั้งหมดในมือทำให้มีโอกาสที่จะเกิดความผิดพลาดได้ ตัวอย่างเช่นการขับรถบนถนน ถ้าเราขับไปในที่ที่เราไม่คุ้นเคยเราไม่สามารถบอกได้ว่าเราสามารถขับรถได้เร็วที่ความเร็วเท่าไร่เนื่องจากเราไม่สามารถบอกได้ว่าข้างหน้าจะเป็นถนนตรงหรือทางโค้งหรือมีสิ่งกีดขวางหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1.1 ความไม่แน่นอนกับความซับซ้อน (uncertainty and complexity)

การขับรถเกียร์ธรรมดา หรือเกียร์กระปุก เป็นการขับที่มีความซับซ้อนมากกว่าการขับรถเกียร์อัตโนมัติ ซึ่งการที่จะขับรถเกียร์ธรรมดาได้ดีต้องอาศัยความรู้และความชำนาญมากกว่า แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นการขับรถทั้งสองก็มีความไม่แน่นอนเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยนั่นคือ เราไม่รู้อย่างแน่นอนว่าเมื่อไหร่ควรจะหยุด หรือ อ้อม เพื่อหลบสิ่งกีดขวาง ถ้าขับรถในที่ที่มีการจราจรหนาแน่น ความไม่แน่นอนก็ยิ่งเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกันกับความซับซ้อน นั้นคือความซับซ้อนเพิ่มขึ้นเมื่อเราตระหนักว่าเรามีความรู้เท่าใด และมีสิ่งที่เราไม่รู้เท่าใด ■

ตัวอย่างที่ 1.2 ความไม่แน่นอนกับการวัด (uncertainty and measurement)

ไม่ว่าเครื่องมือวัดจะมีความเที่ยงตรงขนาดใด ความไม่แน่นอนจะมีอยู่ตลอดเวลาถึงแม้ว่าขนาดเล็กเพียงใดก็ตาม ตัวอย่างเช่นเครื่องมือวัดที่มี เป็นไม้บรรทัดที่มีหน่วยเป็น ฟุต และหน่วยย่อยเป็น นิ้ว โดยที่แต่ละช่องที่แบ่งไว้คือ 1/16 นิ้ว แต่ถ้าเป็นไม้บรรทัดที่ใช้ในการทดลอง อาจเป็นช่องละ 1/64 นิ้ว หรือเล็กไปกว่านั้นซึ่งอาจจะเป็น $1/10^6$ แต่ไม่ว่าจะมีความละเอียดมากเพียงไรก็ยังมีความเป็นไปได้ที่จะเกิดความผิดพลาด เช่นต้องการวัดวัตถุอันหนึ่งแต่ปรากฏว่าไม่สามารถบอกความยาวได้แน่นอนเนื่องจากความยาวของวัตถุนั้นไปสิ้นสุดระหว่างช่องที่แบ่งไว้นั่นเอง ■

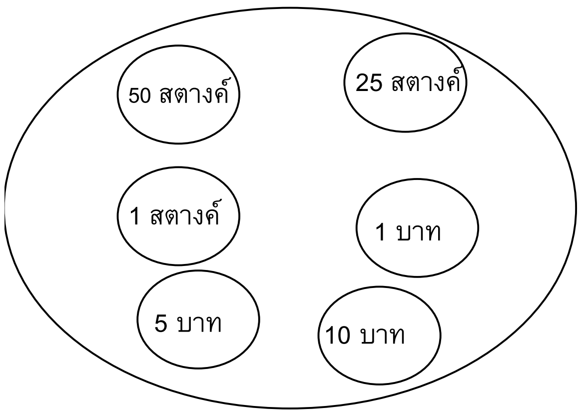
1.2 ภาษากับความคลุมเครือ (Vagueness)

ความเข้าใจผิดที่เป็นผลมาจากการใช้คำในความหมายที่แตกต่างกัน คือความหมายของความคลุมเครือ (vagueness) หรืออีกนัยหนึ่งคือ มนุษย์เรามีความหมายหลักที่เหมือนกัน และสามารถสื่อสารกันได้ถึงระดับหนึ่งแต่ความหมายอาจจะไม่ถูกต้องนัก เช่นคำว่า ‘หนาว (cold)’ สำหรับประชากรที่อาศัยอยู่ที่กรุงเทพอาจจะมีความรู้สึกถึงคำว่า ‘หนาว’ ที่แตกต่างจากคนที่อาศัยอยู่ที่เชียงใหม่ แต่ประชากรทั้งสองที่ รู้ว่าคำว่า ‘หนาว’ หมายถึงอะไร นั่นคือทั้งสองจะไม่บอกว่า ‘หนาว’ ที่อุณหภูมิเท่ากับ 35 องศาเซลเซียส แต่คนที่อาศัยอยู่ที่กรุงเทพอาจจะบอกว่าหนาวที่อุณหภูมิเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส ในขณะที่คนที่อาศัยอยู่ที่เชียงใหม่มีความทนทานกับอากาศมากกว่าและถ้าอุณหภูมิต่ำกว่า 10 องศาเซลเซียสคนที่นี่ถึงบอกว่า ‘หนาว’ ซึ่งแตกต่างจากคนที่กรุงเทพ

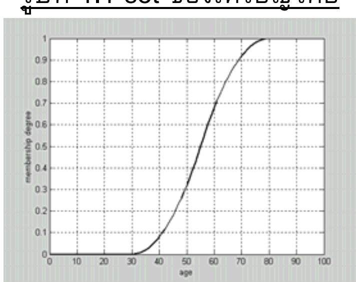
นอกเหนือจากในภาษาแล้วยังมีปรากฏการณ์ที่เรียกว่า ‘heap paradox’ ที่สามารถอธิบายคำว่า vagueness ได้เช่นเดียวกัน ปรากฏการณ์นี้เกี่ยวข้องกับ ของที่อยู่รวมกันมากๆ เช่น กองหิน ถ้าเราเอาหินออกหนึ่งก้อนจากกอง ก็ยังเรียกกองนี้ว่ากองหินอยู่ แต่ถ้าเราเอาหินออกที่ละก้อนไปเรื่อยๆ จนเหลือแค่ 2 ก้อนเราก็จะไม่เรียกว่ากองหินอีกแล้ว แต่ในระหว่างทางคำถามที่เกิดขึ้นคือเมื่อไหร่เราจะหยุดเรียกกองหินกองนี้ว่ากองหิน

1.3 ทฤษฎีฟัซซีเซต และ ทฤษฎีความน่าจะเป็น (Fuzzy Set Theory versus Probability Theory)

ในปี ค.ศ. 1965 L. A. Zadeh [Zadeh65] ได้เผยแพร่งานวิจัยในเรื่อง Fuzzy Sets ในวารสารวิชาการ ซึ่งในผลงานนี้ได้อธิบายเกี่ยวกับแนวคิดของฟัซซีเซต (fuzzy set) ซึ่งเป็น set ที่มีขอบที่ไม่คมชัด (un-sharp boundary) ทั้งนี้ตรงข้ามกับคริสป์เซต (crisp set) ปกติ ที่ขอบเขตต้องเด่นชัด จาก



รูปที่ 1.1 set ของเหรียญไทย



รูปที่ 1.2 membership function ของ fuzzy set 'แก่' ('old')

รูปที่ 1.1 เป็นรูปของ set ของเหรียญไทย ถ้าสมมุติว่ามีเหรียญบางเหรียญที่ชำรุดหรือหัก ถ้าถามว่าเหรียญนั้นอยู่ใน set นี้หรือเปล่า ถ้าเป็น คริสป์เซต (crisp set) คำตอบคืออยู่หรือไม่อยู่เท่านั้น

แต่ในทางตรงข้าม Fuzzy set เป็น set ที่มีขอบที่ไม่ชัดดังนั้นคำว่าเป็นสมาชิกของ fuzzy set ไม่ใช่แค่เป็นหรือไม่เป็น หรืออยู่หรือไม่อยู่เท่านั้น หรืออีกนัยหนึ่งคืออยู่ใน set ด้วย ระดับ (degree) ของความเป็นสมาชิก ที่มากกว่าหรือน้อยกว่า ดังเช่นฟังก์ชันในรูปที่ 1.2 ซึ่งอาจเป็นฟังก์ชันที่อธิบายถึง fuzzy set 'แก่' ('old') ถ้าถามว่าถึงปริมาณใดที่คนอายุ 55 65 75 หรือ 85 เป็นคนแก่ คำตอบก็ขึ้นอยู่กับมุมมองของแต่ละคน แต่ทั้งนี้ทั้งนั้น 85 เป็นคนแก่แน่นอน แต่ 65 และ 75 ไม่แน่ว่าจะเป็นคนแก่ ซึ่งจะขึ้นกับแต่ละสถานการณ์ ส่วน 55 อาจจะไม่ชัดสำหรับเราทุกคนว่าอยู่ใน set หรือไม่ สามารถสรุปได้ว่า fuzzy set ไม่ใช่การยืนยันหรือปฏิเสธสิ่งใดสิ่งหนึ่ง

ทฤษฎีความน่าจะเป็นถูกนำไปใช้ในหลายสาขาวิชาแต่ก็ยังไม่สามารถครอบคลุมความไม่แน่นอน (uncertainty) ในหลายด้านได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความไม่แน่นอนที่เกิดจากความคลุมเครือ (vagueness) ในด้านภาษาได้ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ทั้งทฤษฎีความน่าจะเป็น และ ทฤษฎีฟัซซี สามารถอธิบาย ความไม่แน่นอนในรูปแบบที่แตกต่างกันนั่นคือ ทฤษฎีความน่าจะเป็นเกี่ยวข้องกับความคาดหวังของเหตุการณ์ในอนาคต ที่ขึ้นกับสิ่งที่รู้อยู่แล้ว เช่น เราสนใจว่ามีโอกาสมากน้อยเท่าไรที่คนต่อไปที่เดินเข้ามาในห้องเรียนเป็นคนสูง ซึ่งแนวคิดของความสูงในที่นี้มาจากการกระจายของส่วนสูงของคนไทยทั้งหมด ถ้าในห้องเรียนที่เรานั่งอยู่มีแต่นักกีฬาบาสเกตบอลซึ่งเป็นคนสูงส่วนใหญ่เราก็คาดหวังว่าคนที่เดินเข้ามาจะสูงด้วย แต่ถ้าเราอยู่ในห้องที่มีคนที่มีส่วนสูงปกติอยู่ความคาดหวังของเราอาจลดต่ำลง ในที่นี้ความรู้สึกของความไม่แน่นอนอยู่ที่การทำนายเกี่ยวกับเหตุการณ์

แต่ความไม่แน่นอนในความหมายของฟัซซี ไม่ใช่ความไม่แน่นอนของความคาดหวัง แต่เป็นความไม่แน่นอนจากแนวคิดที่ถูกอธิบายโดยคำพูดเช่นเราอยู่ในห้องที่มีแต่นักกีฬาบาสเกตบอล ถ้ามีคนสูง 180 เซนติเมตรเดินเข้ามา เราอาจตั้งคำถามว่ามีโอกาสเท่าไรที่คนผู้นี้สูง คำตอบคือไม่มีความคาดหวังอีกต่อไปเนื่องจากเขาอยู่ในห้องแล้ว แต่ถ้าถามว่ามีความถูกต้องเท่าไรที่จะกล่าวได้ว่าคนผู้นี้เป็นคนสูง ถ้าเราเปรียบเทียบกับประชากรในประเทศไทย คำตอบจะเป็น ถูกต้องมาก แต่ถ้าเราเปรียบเทียบกับประชากรในห้อง คำตอบจะเป็น ถูกต้องน้อย ถ้าคนส่วนใหญ่สูง จากที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติของแต่ละบุคคล คือ ส่วนสูง(height) กับความไม่ชัดเจนของแนวคิดคือ สูง (tallness)

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถกล่าวได้ว่าความน่าจะเป็น เป็นทฤษฎีของเหตุการณ์สุ่ม (random event) ซึ่งเกี่ยวข้องกับโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง ในขณะที่ ทฤษฎีฟัซซีเซตไม่ขึ้นกับเหตุการณ์ แต่เกี่ยวข้องกับแนวคิด (concept) เช่น สูง (tall) อุ่น (warm) หนาว (cold) เป็นต้น

1.4 การประยุกต์ใช้ (Application)

มีการนำ ทฤษฎีฟัซซีเซตไปใช้ในงานหลายด้านได้แก่ การตัดสินใจ (decision making) การรู้จำรูปแบบ (pattern recognition) การหาเหตุผลโดยใช้กฎ (rule-based reasoning) การแทนความรู้ (knowledge representation) การควบคุม (control) การคืนข้อมูล (information retrieval) ทั้งนี้เป็นเพราะ ฟัซซีเซตเป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการเข้ารหัส (encode) และสามารถแทนความสำนึกร่วม (common sense) เกี่ยวกับความรู้ต่างๆในโลกได้

ลอจิกและทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิม

Classical Logic and Set Theory

2

เนื่องจากวิชานี้เป็นเพียงฟัซซีเซตพื้นฐาน และเนื้อหาในบทที่ 2 นี้ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อเป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับลอจิกและเซตแบบดั้งเดิม ที่สามารถนำมาใช้ในฟัซซีเซตได้

ลอจิกแบบดั้งเดิม (classical logic) เป็นการศึกษาที่เกี่ยวกับรูปแบบของการให้เหตุผลที่ถูกต้อง หมายถึงบทสรุปที่เป็นจริงมาจากข้อตั้ง (premise) ที่เป็นจริงหรือหลักฐานที่สมบูรณ์ (perfect evidence) และถูกเรียกว่าลอจิกแบบแผน (formal logic)

2.1 ลอจิกแบบพจน์ (Propositional Logic)

เป็นระบบที่เป็นแบบแผน (formal system) ที่ใช้แทนความรู้ในเรื่องของประโยคประกาศ (declarative sentence) ที่แสดงออกถึงพจน์ (proposition) โดยใช้ตัวอักษรหรือสัญลักษณ์ แทนแต่ละพจน์ และใช้ตัวเชื่อมมาเชื่อมต่อระหว่างพจน์

การหาเหตุผลมีอยู่ด้วยกัน 2 รูปแบบคือ

1. *deductive reasoning*

If today is Tuesday, then my logic class meets at room 205. (1)

Today is Tuesday. (2)

So my logic class meets at room 205. (3)

ความหมายคือถ้าประโยคที่ 1 และ 2 ซึ่งเป็น ข้อตั้ง (premise) เป็นจริงทั้งคู่ ประโยคที่ 3 ซึ่งเป็น บทสรุป (conclusion) เป็นจริงและไม่มีโอกาสเป็นเท็จ

2. *inductive reasoning*

Meteor 1 disintegrated upon entering the Earth's atmosphere. (1)

″ 2 ″--″ (2)

″ 3 ″--″ (3)

⋮

″ 50 ″--″ (50)

Thus, all meteors disintegrate upon entering the Earth's atmosphere

ความหมายคือ ถ้า ประโยคที่เป็น ข้อตั้ง (ประโยคที่ 1 ถึง 50) เป็นจริงสามารถอนุมานได้ว่าบทสรุปเป็นจริงแต่ในกรณีนี้มีโอกาสที่บทสรุปเป็นเท็จได้

แต่ในวิชานี้เราสนใจที่จะศึกษา deductive reasoning เท่านั้น นั่นคือ

<u>ข้อตั้ง</u>:	$m \rightarrow p$	(ความหมายคือ m ส่อความถึง (imply) p)
	p	(ความหมายคือ มี p)
<u>บทสรุป</u>:	p	

พจน์ (proposition) ที่เป็นประโยคง่ายๆซึ่งไม่มีคำปฏิเสธ (negating word) หรือคำนำหน้า (prefix) เช่น "A dog has four legs" เราสามารถแทนประโยคนี้ด้วยตัวอักษรใดๆ สมมุติให้เป็น *p*

หรือประโยค . “Tomorrow is Sunday” เราก็สามารถแทนได้ด้วย q ถ้าเราต้องการแทนประโยค “A dog has four legs and tomorrow is Sunday” เราสามารถเชื่อมทั้งสองพจน์ได้เป็น p and q หรือ $p \wedge q$ สัญลักษณ์ที่ใช้เชื่อมประโยคในหนังสือเล่มนี้แสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 สัญลักษณ์ที่ใช้เชื่อมประโยค

สัญลักษณ์	**ใช้แทน**
~	not, un-, im-, in-
$\wedge$	and, but, however
$\vee$	or, unless
$\rightarrow$	if - then, imply, only if
$\leftrightarrow$	iff, when and only when

โดยปกติเราใช้ ตารางความจริง (truth table) ในการพิสูจน์หรือหาความจริงของประโยคเช่น ตารางความจริงของ ~

ตารางที่ 2.2 ตารางความจริง ของ ~

p	$\sim p$
T	F
F	T

ในบางครั้งค่าความจริงของพจน์ ก็ถูกแทนด้วย 0(แทนเท็จ) และ 1(แทนจริง) หรือ F(แทนเท็จ) และ T(แทนจริง) และในวิชานี้เราใช้สัญลักษณ์ $|p|$ แทนค่าความจริงของ พจน์ที่ถูกแทนด้วย p ดังนั้นจาก ตารางความจริงข้างต้นจะได้ว่า $|\sim p| = 1 - |p|$ เสมอ

ตัวเชื่อม conjunction $\wedge$ มีตารางความจริงตามตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ตารางความจริง ของ $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

จากตารางที่ 2.3 แสดงให้เห็นว่า ความจริงมีลักษณะเป็นฟังก์ชัน (truth functional) นั่นคือมีลักษณะหรือรูปแบบที่แสดงถึงค่าความจริงของตัวเชื่อม หรืออีกนัยหนึ่งคือ ค่าความจริงของประโยคที่ซับซ้อนเป็นฟังก์ชันของค่าความจริงของแต่ละพจน์ที่ประกอบในประโยคนั้นดังนั้นเราสามารถหา ฟังก์ชันมาอธิบายลักษณะของ $\wedge$ ได้เช่น $|p \wedge q| = \min(|p|, |q|)$ หรือ $|p \wedge q| = |p|\ |q|$ หรือ $|p \wedge q| = \max[0, |p| + |q| - 1]$ เป็นต้น

จากตารางที่ 2.4 เราสามารถหาฟังก์ชันอธิบาย ตัวเชื่อม disjunction ($\vee$) ได้เช่น $|p \vee q| = \max[|p|, |q|]$ หรือ $|p \vee q| = \min[1, |p| + |q|]$ ส่วนตัวเชื่อม implication ($\rightarrow$) เราสามารถใช้ $|p \rightarrow q| = \min[1, 1+|q| - |p|]$ หรือ $|p \rightarrow q| = 1 - |p|\ (1 - |q|)$ และ สำหรับตัวเชื่อม equivalence ($\leftrightarrow$) เราสามารถใช้ $|p \leftrightarrow q| = |p|\ |q| + |\sim p|\ |\sim q|$ มาอธิบายได้เช่นกัน

ในแต่ละแถวของตารางของความจริงที่กล่าวข้างต้นเป็นความจริงที่เกิดขึ้นตามค่าความจริงที่ให้กับแต่ละพจน์ ซึ่งเราเรียกว่า contingent propositional form แต่ถ้าประโยคใดก็ตามมีค่าความจริงก็ต่อเมื่อมีการถามจากผู้รู้ หรือจากประสบการณ์ เราเรียกว่า empirical proposition

ตารางที่ 2.4 ตารางความจริง ของ $\vee$ $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

ประโยคใดก็ตามที่เป็นประโยคขัดแย้ง (contradiction) จะเป็นประโยคที่เป็นเท็จตลอดเวลา เช่น $p \wedge \sim p$ (กฎของความขัดแย้ง หรือ law of contradiction) ส่วนประโยคใดก็ตามที่เป็นจริงตลอดเวลา เรียกว่า ประโยคซ้ำความ (tautology) เช่น $p \vee \sim p$ (กฎนิรมัชฌิม หรือ law of excluded middle) หรือประโยค $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ (การส่อความแบบลอจิก (logical implication หรือ entailment)) หรือประโยค $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (logical equivalence: ประโยคที่ถ้าข้างใดเป็นจริงอีกข้างก็เป็นจริงด้วย)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าเราสามารถแสดงลอจิกฟังก์ชันหลายประเภทไม่ว่าจะเป็นกลุ่มของประโยคซ้ำความ (tautology contingent) หรือ ประโยคขัดแย้ง (contradiction) ในรูปแบบของ จริง หรือเท็จได้โดยใช้ ฟังก์ชันลอจิก (logic function) ซึ่งเป็นแผนที่ค่าความจริงของแต่ละประโยค หรือตัวแปรเอาต์พุต ถูกให้ค่าในแต่ละการผสม (combination) ของตัวแปรอื่นหรือตัวแปรอินพุต ดังนั้นถ้ามี n ตัวแปรอินพุตจะมีการผสมทั้งหมด 2^n ครั้งและแต่ละครั้งแต่ละตัวแปรจะมีค่าความจริงเป็น จริงหรือเท็จ ดังนั้นมีตัวแปรเอาต์พุตทั้งหมด 2^{2^n} ครั้ง ดังนั้น ฟังก์ชันลอจิก ของ 2 ตัวแปรอินพุตคือ p และ q จะมี 16 ตัวแปรเอาต์พุตคือ r_i สำหรับ i ที่เท่ากับ1 ถึง 16 ดังแสดงในตารางที่ 2.5 จากตารางจะเห็นได้ว่า r_1 เป็น ประโยคซ้ำความ (tautology) ส่วน r_2 เป็น ดิสจังชัน (disjunction) r_3 เป็น การส่อความ (implication ($q \rightarrow p$)) r_4 เป็น ข้อความยืนยัน (assertion ($p \vee (p \wedge q)$)) r_{15} เป็น ประโยคที่ไม่ใช่ทั้งคู่ (neither-nor ($\sim(p \vee q)$)) และ r_{16} เป็น ประโยคขัดแย้ง (contradiction)

ตารางที่ 2.5 ฟังก์ชันลอจิกของ 2 ตัวแปร

p	q	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

นอกเหนือจากการใช้ตารางความจริงในการช่วยหาค่าความจริงของประโยค ยังสามารถนำมาใช้ในการแยกระหว่างการอนุมานที่สมเหตุสมผล (valid inference) ออกจากการอนุมานที่ไม่สมเหตุสมผล (invalid inference) (คือการอนุมานที่ให้บทสรุปเป็นเท็จในขณะที่ข้อตั้งเป็นจริงทั้งหมด) ได้อีกด้วย เช่น

ข้อตั้ง: $p \rightarrow q$

$\underline{\sim p \quad}$

บทสรุป: $\sim q$

ซึ่งจะพิสูจน์ได้จากตารางที่ 2.6 ว่า มีการให้ค่าที่ข้อตั้งทั้งคู่เป็นจริง แต่บทสรุปไม่เป็นจริง ทำให้เป็นการอนุมานที่ไม่สมเหตุสมผล (invalid)

ตารางที่ 2.6 ตารางความจริง ของ การอนุมานที่ไม่สมเหตุสมผล

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

การอนุมานมีได้หลายรูปแบบซึ่งในตารางที่ 2.7 จะแสดงรูปแบบของการอนุมานพื้นฐาน (basic inference form)

ตารางที่ 2.7 รูปแบบของการอนุมานพื้นฐาน

Conjunction: p $\underline{q \quad}$ $p \vee q$	Simplification: $\underline{p \wedge q}$ p	Addition: $\underline{p \quad}$ $p \vee q$
Disjunctive Syllogism: $p \vee q$ $\underline{\sim p \quad}$ q	Modus Ponens: $p \rightarrow q$ $\underline{p \quad}$ q	Modus Tollens: $p \rightarrow q$ $\underline{\sim q \quad}$ $\sim p$
Constructive Delimma: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$ $\underline{p \vee r \qquad\qquad}$ $q \vee s$	Destructive Dilemma: $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$ $\underline{\sim q \vee \sim s \qquad\qquad}$ $\sim p \vee \sim r$	Hypothetical Syllogism: $p \rightarrow q$ $\underline{q \rightarrow r}$ $p \rightarrow r$
	Absorption: $\underline{p \rightarrow q}$ $p \rightarrow (p \wedge q)$	

และในการทำการอนุมานหรือต้องการหาค่าความจริงของบทสรุปจำเป็นที่จะต้องใช้กฎของการแทนค่า (rule of replacement) ดังต่อไปนี้

involution: $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

commutativity: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

associativity: $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

De Morgan's Laws: $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Distributivity:	$p\wedge(q\vee r) \leftrightarrow (p\wedge q) \vee (p\wedge r)$
	$p\vee(q\wedge r) \leftrightarrow (p\vee q) \wedge (p\vee r)$
Equivalence:	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow p)]$
	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p\wedge q) \vee (\sim p\wedge\sim q)]$
Contraposition:	$(p\rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q\rightarrow\sim p)$
Implication:	$(p\rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p\vee q)$
Exportation:	$[p\rightarrow(q\rightarrow r)] \leftrightarrow [(p\wedge q) \rightarrow r]$
Idempotency:	$(p\wedge p) \leftrightarrow p$
	$(p\vee p) \leftrightarrow p$

ตัวอย่างที่ 2.1 ถ้าต้องการ บทสรุปว่า $\sim r$ เป็นจริงจากข้อตั้ง $\sim(p\vee q)$ และ $r\rightarrow q$ ทำได้โดยใช้ตารางที่ 2.7 และ กฎของการแทนค่าข้างต้นดังนี้

	$\sim(p\vee q)$	(1)
	$r\rightarrow q$	(2)
จาก 1 และ De Morgan's Laws จะได้	$\sim p \wedge \sim q$	(3)
จาก 3 และ Commutativity จะได้	$\sim q \wedge \sim p$	(4)
จาก 4 และ Simplification จะได้	$\sim q$	(5)
จาก 5 2 และ Modus Tollens จะได้	$\sim r$	(บทสรุป) ■

2.2 ลอจิกแบบเพรดิเคต (Predicate Logic)

ลอจิกแบบพจน์เป็นลอจิกที่ความสมเหตุสมผลขึ้นอยู่กับรูปแบบของพจน์ซึ่งเป็นหน่วยที่ง่ายที่สุดในการหาเหตุผล นั่นคือเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่สมบูรณ์ 2 พจน์ แต่หลายครั้งในการอนุมานไม่ได้ขึ้นกับความสัมพันธ์ภายนอกเพียงอย่างเดียว เช่น

ข้อตั้ง: All dogs are quadrupeds.

Lassie is a dog.

บทสรุป: Therefore, Lassie is a quadrupeds.

ถ้าเราใช้วิธีการในหัวข้อ 2.1 จะได้

ข้อตั้ง: p

q

บทสรุป: r

การที่เราจะทดสอบว่าการอนุมานนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ทำได้โดยใช้ ตารางความจริงดังแสดงในตารางที่ 2.8 และเราจะพบว่ามีการให้ค่าความจริงอย่างน้อย 1 ครั้งที่จะทำให้การอนุมานนี้ไม่สมเหตุสมผล ซึ่งในความเป็นจริงการอนุมานนี้เป็นการอนุมานที่ถูกต้อง สิ่งที่ทำให้เกิดเหตุการณ์นี้เป็นเพราะว่ามีความสัมพันธ์ภายในที่ไม่ได้ถูกนำมาใช้

ตารางที่ 2.8 ตารางความจริงของการอนุมานที่ใช้แต่ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์

p	*q*	*r*
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

ในข้อตั้งข้างต้นมี พจน์เดี่ยวคือ “Lassie is a dog” และมีพจน์ทั่วไปคือ “All dogs are quadrupeds” ซึ่งทั้งสองมีสิ่งที่เรียกว่า คำที่เป็น subject ซึ่งเป็นคำที่บ่งบอกถึงประเภทของสิ่งของที่เรากล่าวถึงในที่นี้คือ “dogs” และ “Lassie” และคำที่เป็นเพรดิเคต ซึ่งเป็นคำที่บอกถึงคุณสมบัติของสิ่งของนั้นคือ “are quadrupeds” และ “is a dog” เราใช้ตัวอักษรตัวใหญ่แทน คำที่เป็นเพรดิเคต เช่น D และตัวอักษรตัวเล็กแทนคำที่เป็น subject เช่น *l* ส่วนตัวอักษรตัวเล็กที่อยู่ทางด้านท้ายของลำดับตัวอักษรจะแทนตัวแปรต่างๆ เช่น *w x y z* ซึ่งโดยปกติเราเรียก D*x* ว่าฟังก์ชันของพจน์เนื่องจากมีพจน์บางพจน์ที่ถูกสร้างขึ้นจากการแทนค่าตัวแปรด้วยค่าคงที่ นอกเหนือจากนี้เรายังต้องการตัวบ่งปริมานเช่น $\forall$ คือตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (for all) $\exists$ คือตัวบ่งปริมาณบางส่วน (for some) ดังนั้นเราสามารถแทนการอนุมานข้างบนได้เป็น

ข้อตั้ง: $(\forall x)(Dx \rightarrow Qx)$

$\underline{Dl\qquad\qquad}$

บทสรุป: Ql

ความหมายของข้อตั้ง$(\forall x)(Dx \rightarrow Qx)$ คือ “for any x if x is a dog then x is a quadrupeds” แต่ถ้าข้อตั้งเป็น $(\exists x)(Dx \wedge Qx)$ จะหมายความว่า “there exist at least one thing such that it is both a dog and a quadruped”

ตัวแปรจะถูกยึดหนี่ยว (bind) ถ้าตัวแปรนั้นอยู่ในขอบเขตของตัวบ่งปริมาณ นิพจน์ทั่วไปจะเป็นพจน์ (proposition) ได้ก็ต่อเมื่อ ตัวแปรทุกตัวถูกยึดเหนี่ยว

ในลอจิกแบบเพรดิเคต เราใช้กฎการอนุมานและกฎการแทนแบบเดียวกับที่ใช้ในลอจิกแบบพจน์ แต่ในความเป็นจริงยังมีกฎอื่นที่ถูกนำมาใช้แต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ นอกจากกฎการแทนตัวบ่งชี้ที่แสดงในตารางที่ 2.9

ตารางที่ 2.9 กฎการแทนตัวบังชี้

$(\forall x)Px$	$\leftrightarrow$	$\sim(\exists x)\sim Px$
$\sim(\forall x)Px$	$\leftrightarrow$	$(\exists x)\sim Px$
$(\forall x)\sim Px$	$\leftrightarrow$	$\sim(\exists x)Px$
$\sim(\forall x)\sim Px$	$\leftrightarrow$	$(\exists x)Px$

2.3 ทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิม (Classical Set Theory)

การเขียนเซต $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ถูกเรียกว่าวิธีการแสดง (list method) ซึ่งเป็นการแทนเซตด้วยการแจงส่วนประกอบในเซตโดยที่ a_i สำหรับ i เท่ากับ 1 ถึง n เป็นสมาชิกหรือส่วนประกอบของเซต A ($a_i \in A$) และขนาดหรือคาดินาวริตี้ (cardinality) ของเซต A ($|A|$) เท่ากับ n ซึ่งเป็นจำนวนของสมาชิกในเซต A ถ้ามีสมาชิกเพียง 1 ตัวเรียกเซตนี้ว่าเป็น ซิงเกลตัน (singleton) นอกเหนือจากการแสดงเซตด้วยวิธีการแสดงแล้วเรายังสามารถเขียนเซตให้อยู่ในรูปของกฎได้เช่น เซต $C = \{x \mid \mathrm{P}(x)\}$ หมายความว่าเซต C ประกอบด้วยสมาชิก x ที่ทุก x มีคุณสมบัติ P เช่น $C = \{a \mid a$ มีคุณสมบัติ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, ..., \mathrm{P}_n\}$ หรือ $C = \{x \mid x$ เป็นตัวเลขจำนวนเต็ม$\}$

ส่วนเซตที่มีสมาชิกเป็นเซตเราเรียกว่า ครอบครัวของเซต (family of sets) ซึ่งเขียนได้เป็น $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ โดยที่ i เป็น ตัวบ่งชี้ (index) และ I เป็นเซตของตัวบ่งชี้ (index set)

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีฟัซซีเซตโดยปกติจะมีการกล่าวถึง เซตสากล (universal set) ซึ่งเป็นเซตที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ในความสนใจของการประยุกต์นั้นเช่น เราต้องการแยกนักเรียนที่อยู่ในโรงเรียนหนึ่ง เซตสากลในกรณีนี้จะเป็นนักเรียนทุกคนในโรงเรียนนั้นโดยปกติเราใช้สัญลักษณ์ X แทนเซตสากล และในเมื่อเรามีเซตสากล เราก็มีเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยนั่นคือ เซตว่าง (empty set) โดยปกติเราใช้สัญลักษณ์ $\varnothing$ แทนเซตว่าง

ถ้าสมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B แสดงว่าเซต A เป็นซับเซต (subset) ของเซต B ($A \subseteq B$) ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แสดงว่าทั้งสองเซตมีจำนวนสมาชิกที่เท่ากัน นั่นคือ เซต A เท่ากับเซต B ($A = B$) แต่ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ แสดงว่าเซต A เป็นซับเซตแท้ (proper subset) ของเซต B ($A \subset B$)

พาวเวอร์เซต (power set) ของเซต X ใด ๆคือ $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นทุกซับเซตของเซต X ดังนั้น $A \in \mathcal{P}(X)$ และ $A \subseteq X$ ขนาดของพาวเวอร์เซตหรือจำนวนของซับเซตของ X ($|\mathcal{P}(X)|$) เท่ากับ 2^n ถ้า $|X| = n$

2.3.1 การดำเนินการของเซต (Set Operation)

เซตของสิ่งของต่าง ๆโดยมากจะมีความสัมพันธ์ในทางใดทางหนึ่งเราสามารถให้นิยามกับความสัมพันธ์เหล่านั้นได้ดังนี้ สมมุติให้เซตสากลเป็น X และให้ A B และ C เป็นซับเซตของ X

คอมพลีเมนต์ (*complement*): $\overline{A} = \{x \mid x \in X$ *และ* $x \notin A\}$

$\overline{\phi} = X$ และ $\overline{X} = \phi$

ยูเนียน (union): $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

$A \cup X = X$

ยูเนียนของทุกเซตในครอบครัวเซต $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ เขียนได้เป็น $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

อินเตอเซกชัน (intersection) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

อินเตอเซกชันของทุกเซตในครอบครัวเซต $\{A_1, A_2,...,A_n\}$ เขียนได้เป็น $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

ดิฟเฟอเรนซ์ (Difference) $A - B = \{x \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

$A - X = \varnothing$

$X - A = \overline{A}$

2.3.2 คุณสมบัติพื้นฐาน (Fundamental Property)

โดยปกติคริสป์เซตหรือเซตดั้งเดิมจะมีคุณสมบบัติพื้นฐานดังต่อไปนี้

อินโวลูชัน (involution) $\overline{\overline{A}} = A$

คอมมิวเททิฟ (commutative) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

แอสโซสิเอทิวิตี้ (associativity) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ไอเดมโพเทนซี (idempotency) $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

การกระจาย (distribution) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

การดูกกลืน (absorption) $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

ไอเดนติตี้ (identity) $A \cap X = A$

$A \cup \varnothing = A$

กฎนิรมัชฌิม (law of excluded middle) $A \cup \overline{A} = X$

กฎการขัดแย้ง (law of contradiction) $A \cap \overline{A} = \phi$

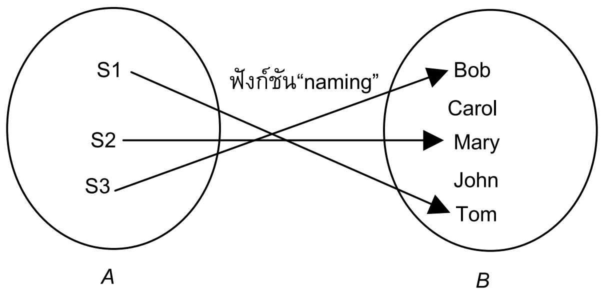
De Morgan's Law $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

จากที่กล่าวมาทั้งหมด จะเห็นได้ว่าแต่ละคุณสมบัติจะมีคุณสมบัติที่คล้ายกับภาพสะท้อนนั่นคือ $\varnothing$ $\cup$ และ $\cap$ เป็นภาพสะท้อนของ X $\cap$ และ $\cup$ นั่นเอง

2.3.3 ฟังก์ชันลักษณะ (Characteristic Function)

ฟังก์ชันลักษณะเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่จะอธิบายเซต และการอธิบายเซตวิธีนี้สามารถขยายไปสู่ฟัซซีเซตได้ โดยปกติฟังก์ชันคือฟังก์ชันที่ให้ค่ากับสมาชิกของเซตหนึ่งไปสู่สมาชิกของอีกเซตหนึ่ง เช่นฟังก์ชัน “naming” ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ฟังก์ชัน “naming”

ในรูปที่ 2.1 สมาชิกของเซต *B* เป็นภาพ หรือค่าของสมาชิกของเซต *A* การให้ค่านี้ต้องมีขอบเขตดังนี้

1. สมาชิกทุกตัวในเซต *A* ต้องถูกให้ค่าด้วยสมาชิกในเซต *B*
2. มีเพียงแค่สมาชิก 1 ตัวใน *B* ที่ถูกให้ค่ากับ สมาชิกใน *A*

โดยปกติฟังก์ชัน *f* จากเซต *A* ไปยังเซต *B* เขียนได้เป็น $f: A \rightarrow B$ และมีได้หลายรูปแบบเช่น ฟังก์ชัน onto หมายถึงสมาชิกทุกตัวใน *B* ถูกให้ค่ากับสมาชิกใน *A* ฟังก์ชัน many to one คือฟังก์ชันที่ มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัวใน *A* มีค่าเป็นสมาชิกตัวเดียวกันใน *B* และฟังก์ชัน one to one คือฟังก์ชันที่ สมาชิกใน *B* ถูกให้ค่ากับสมาชิกใน *A* ไม่มากกว่า 1 ตัว

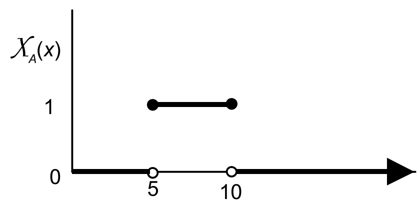
ย้อนกลับมาที่การอธิบายเซต ให้เซตสากลเป็น *X* และให้ *A* เป็นซับเซตใดๆของ *X* ดังนั้นฟังก์ชันลักษณะของเซต *A* สำหรับสมาชิก *x* ใดๆใน *X* $(\mathcal{X}_A(x))$ คือ

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } x \in A \\ 0 \text{ ถ้า } x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

ตัวอย่าง 2.2 ให้เซต *A* เป็นเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ 5 ถึง 10 ฟังก์ชันลักษณะของเซต *A* คือ

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } 5 \le x \le 10 \\ 0 \text{ ที่เหลือ} \end{cases} \tag{2.2}$$

และแสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ฟังก์ชันลักษณะของเซต *A*

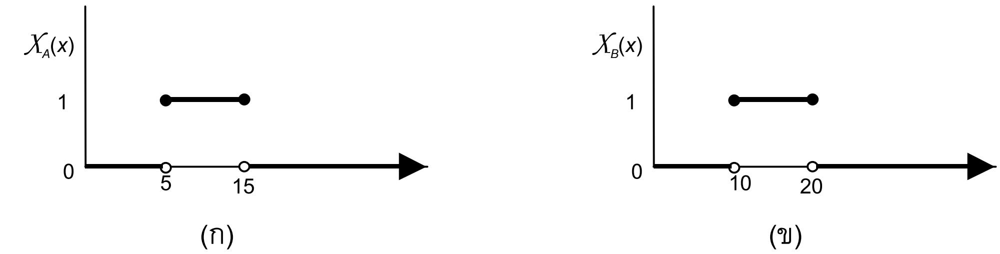
■

เมื่ออธิบายหรือแทนเซตด้วยวิธีนี้ เราสามารถอธิบายแนวคิดต่างๆของเซตฟังก์ชันได้เช่น $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{X}_A(x) \le \mathcal{X}_B(x)$ สำหรับทุก *x* ที่เป็นสมาชิกของ *X* และการดำเนินการต่างๆของเซตก็สามารถอธิบายได้ดังนี้

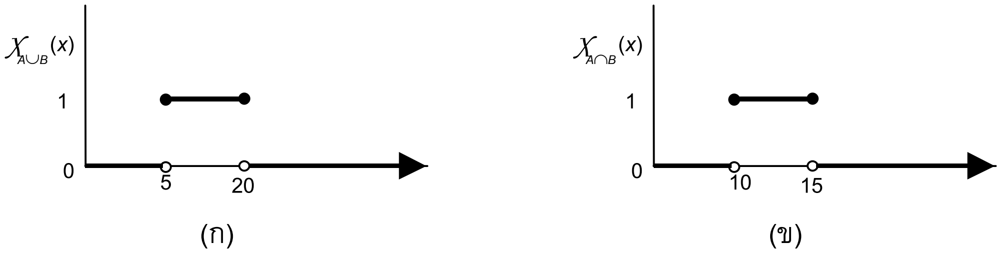
$$\mathcal{X}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathcal{X}_A(x) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{X}_{A \cup B}(x) = \max(\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)) \tag{2.4}$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \min\left(\mathcal{X}_A(x),\, \mathcal{X}_B(x)\right) \tag{2.5}$$



รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันลักษณะของเซต (ก) *A* และ (ข) *B*



รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันลักษณะของ (ก) $A \cup B$ และ (ข) $A \cap B$

ตัวอย่าง 2.3 ให้เซต *A* เป็นเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ 5 ถึง 15 ดังรูปที่ 2.3(ก) และ เซต *B* เป็นเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ 10 ถึง 20 ดังรูปที่ 2.3(ข) และ รูปที่ 2.4 แสดงฟังก์ชันลักษณะของ $A \cup B$ นั่นคือจำนวนจริงตั้งแต่ 5 ถึง 20 เป็นสมาชิกของ $A \cup B$ และฟังก์ชันลักษณะของ $A \cap B$ ซึ่งมีความหมายว่าจำนวนจริงตั้งแต่ 10 ถึง 15 เป็นสมาชิกของ $A \cap B$ นั่นเอง

■

ส่วนแนวคิดอื่นๆเช่น linear ordering หรือ total ordering ของเซตคือ เลขจำนวนจริงใดๆ 2 ตัวเลขที่สามารถถูกจัดลำดับโดยที่สามารถใช้ การแสดงออกของ $\leq$ โดยที่เลขจำนวนจริงนั้นๆอยู่ในเซตของเลขจำนวนจริงที่ถูกแทนด้วย $\Re$ และถูกแสดงบนเส้นจำนวนจริง

เซตของจุดใดๆที่อยู่ระหว่าง จุด *a* และ *b* ของจำนวนจริงที่ $a \leq b$ ถูกเรียกว่าช่วง (interval) โดยที่ช่วงปิด (close interval) คือ $[a,\, b]$ คือช่วงหรือเซตของทุกๆจุดที่อยู่ระหว่าง *a* และ *b* รวมทั้ง *a* และ *b* ช่วงเปิด (open interval) คือ $(a,\, b)$ คือช่วงหรือเซตของทุกๆจุดที่อยู่ระหว่าง *a* และ *b* ไม่รวมทั้ง *a* และ *b* และช่วงเปิดครึ่ง (half-open interval) คือ $[a,\, b)$ คือช่วงหรือเซตของทุกๆจุดที่อยู่ระหว่าง *a* และ *b* รวมทั้ง *a* และ $(a,\, b]$ คือช่วงหรือเซตของทุกๆจุดที่อยู่ระหว่าง *a* และ *b* รวมทั้ง *b*

2.3.4 คาร์ทีเชียนโพรดักส์ (Cartesian Product)

คาร์ทีเชียนโพรดักส์ ของเซตของจำนวนจริง 2 เซตถูกแทนด้วย $\Re \times \Re$ เป็นระนาบที่มี 2 มิติ (dimension) ใน ยูคริเดียนสเปซ (Euclidean space) และถูกแสดงใน คาร์ทีเชียนโคออดิเนต (cartesian coordinate) หรือ แกน *x-y* แต่ถ้าเป็นคาร์ทีเชียนโพรดักส์ ของเซตของจำนวนจริง *n* เซต โดยที่ $n \geq 1$ ถูกเรียกเป็น *n* มิติ ใน ยูคริเดียนสเปซ

คาร์ทีเซียนโพรดักส์ ของเซต A และเซต B คือ

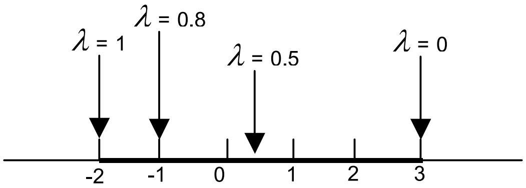
$$A \times B = \{<a, b> \mid a \in A \text{ และ } b \in B\} \qquad (2.6)$$

โดยที่ $<a, b> \neq <b, a>$ สมมุติให้ $A = \{J, B, S\}$ และ $B = \{L, M, D\}$ คาร์ทีเซียนโพรดักส์ของ A และ B คือ $A \times B = \{<J,L>, <J,M>, <J,D>, <B,L>, <B,M>, <B,D>, <S,L>, <S,M>, <S,D>\}$

2.3.5 คอนเวกซิตี้ (Convexity)

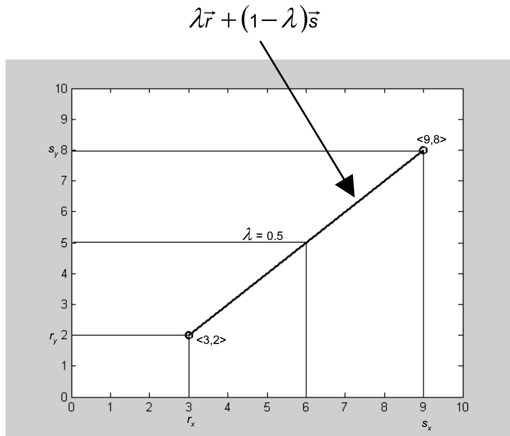
ซับเซต A ใดๆในยูคริเดียนสเปซจะ คอนเวกซ์ (convex) เมื่อมีเส้นตรงที่ลากระหว่างจุดใดๆ ในเซต อยู่ในเซตด้วยหรืออีกนัยหนึ่งคือ เซต A จะคอนเวกซ์ก็ต่อเมือ (iff) $\vec{r}, \vec{s} \in A$ และ λ ใดๆที่เป็นสมาชิกของ $[0,1]$ แล้ว $\lambda\vec{r} + (1-\lambda)\vec{s} \in A$

ในยูคริเดียนสเปซ 1 มิติ เวกเตอร์ r และ s เป็นแค่จำนวนจริงค่าหนึ่ง และสมมุติให้ $r \leq s$ เมื่อ $\lambda = 0$ จะได้ $\lambda r + (1-\lambda)s = s$ และเมื่อ $\lambda = 1$ จะได้ $\lambda r + (1-\lambda)s = r$ ดังนั้นถ้า λ อยู่ระหว่าง 0 และ 1 เราจะได้จุดที่อยู่ระหว่าง r และ s ดังเช่นรูปที่ 2.5 ซึ่งแสดงถึงคอนเวกซิตี้ของเซต $[-2,3]$ จะเห็นได้ว่าซับเซตที่คอนเวกซ์ในเส้นจำนวนจริงต้องเป็นช่วงของจำนวนจริง ดังนั้น $[0,1] \cup [2,3]$ จะเป็นเซตที่คอนเวกซ์หรือไม่



รูปที่ 2.5 $\lambda r + (1-\lambda)s$ ในยูคริเดียนสเปซ 1 มิติของช่วงหรือเซต [-2,3]

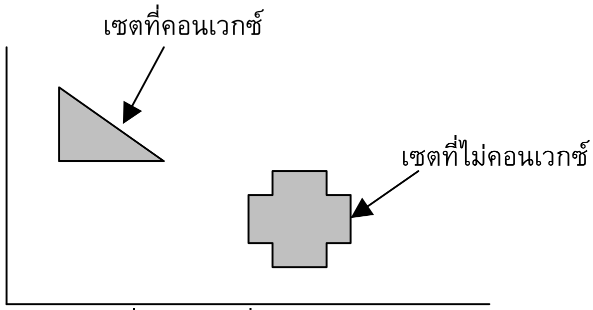
สำหรับเซตที่อยู่ใน 2 มิติ เวกเตอร์ r และ s จะเป็นจุดใน 2 มิติ โดยที่ $\vec{r} = <r_x, r_y>$ และ $\vec{s} = <s_x, s_y>$ และ $\lambda\vec{r} + (1-\lambda)\vec{s}$ จะเป็นเส้นที่ลากระหว่างทั้งสองจุดนั่นเองเช่น $\vec{r} = <3,2>$ และ $\vec{s} = <9,8>$ และเส้น $\lambda\vec{r} + (1-\lambda)\vec{s}$ แสดงในรูปที่ 2.6 จะเห็นได้ว่าที่ $\lambda = 0.5$ จุดบนเส้นตรงคือ $<6,5>$ นั่นเอง



รูปที่ 2.6 $\lambda\vec{r} + (1-\lambda)\vec{s}$ ในยูคริเดียนสเปซ 2 มิติ

ถ้าเป็น n มิติ $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ หรือเท่ากับ $(r_i \mid i \in N_n)$ และ $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ หรือเท่ากับ $(s_i \mid i \in N_n)$

โดยที่ $N_n = \{1,2,...,n\}$ และถ้าเซต A ใดๆคอนเวกซ์ แล้ว $\vec{t} = \left(\lambda r_i + (1-\lambda)s_i \mid i \in N_n\right)$ สำหรับ λ ใดๆที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ จะอยู่ในเซต A ด้วย ตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.7 แสดงถึงเซตที่คอนเวกซ์และไม่คอนเวกซ์



รูปที่ 2.7 เซตที่คอนเวกซ์และไม่คอนเวกซ์

2.3.6 พาร์ทิชัน (Partition)

ให้เซต A เป็นเซตไม่ว่างแล้วพาร์ทิชันของ A ($\Pi(A)$) จะเป็นครอบครัวของซับเซตของ A ที่ไม่มีสมาชิกร่วมนั่นคือยูเนียนของเซตที่อยู่ในครอบครัวนี้จะทำให้ได้เซต A

$$\prod(A) = \{A_i \mid i \in I, \phi \notin A_i \subseteq A\} \tag{2.7}$$

จะถูกเรียกว่าพาร์ทิชันของ A ก็ต่อเมื่อ (iff) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ และ $A_i \cap A_j = \varnothing$

ซับเซต A_i ในพาร์ทิชันมักถูกเรียกว่า บล็อก (block) ของพาร์ทิชันนั้น เช่นเซตของนักเรียนสามารถถูกพาร์ทิชันเป็น 2 ซับเซตคือ นักเรียนหญิงและนักเรียนชาย พาร์ทิชัน $\Pi_1(A)$ เป็นพาร์ทิชันที่แบ่งละเอียด (refinement) ของพาร์ทิชัน $\Pi_2(A)$ ได้ถ้าทุกบล็อกที่อยู่ในพาร์ทิชัน $\Pi_1(A)$ อยู่ในบล็อกของพาร์ทิชัน $\Pi_2(A)$ เช่นแต่ละบล็อกในพาร์ทิชันของนักเรียน ({นักเรียนหญิง, นักเรียนชาย}) ที่กล่าวข้างต้นอาจถูกแบ่งละเอียดออกเป็นบล็อกเล็กๆได้

แนวคิดเบื้องต้นและคุณสมบัติของฟัซซีเซต
Basic Concepts and Properties of Fuzzy Sets

3

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดต่างๆไม่ว่าจะเป็นฟัซซีเซตแบบปกติและแบบพิเศษต่างๆ รวมถึงนิยามพื้นฐานต่างๆที่เกี่ยวกับฟัซซีเซต เพื่อนำมาใช้ในบทอื่นๆต่อไป

ขอบเขตของเซตดั้งเดิมต้องมีความคมชัด ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกจึงต้องมีความแน่นอน นั่นคือ เป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซต ขอบเขตที่คมชัดนี้ถูกแสดงในลอจิกแบบดั้งเดิมเช่นกัน นั่นคือ คุณสมบัติของพจน์แต่ละพจน์จะเป็นจริงหรือไม่จริง แต่อย่างไรก็ตามเซตและพจน์โดยทั่วไปไม่ได้มีคุณสมบัตินี้ตลอดไป ยกตัวอย่างเช่น เซตของคนสูงไม่มีขอบเขตที่แน่นอน นั้นคือเส้นแบ่งระหว่างความสูงเพื่อเป็นการแบ่งระหว่างคนสูงกับคนไม่สูงที่จริงเป็นขอบเขตเทียมที่สร้างขึ้นมาเท่านั้น และโดยปกติจะแทนความคิดที่ว่าใครควรจะอยู่ในเซตของคนสูง เช่น คนที่มีความสูง 1.79 เมตร และ 1.80 เมตร คนไหนเป็นคนสูง และคนไหนไม่เป็นคนสูง

เมื่อพิจารณาคุณสมบัติหลายคุณสมบัติของคริสป์เซต (crisp set) หรือเซตดั้งเดิม และความสัมพันธ์ระหว่าง คริสป์เซต ที่มีต่อกัน จะเห็นได้ว่ามีบางคุณสมบัติที่ขึ้นอยู่กับลักษณะของขอบเขตที่คมชัด เช่น กฎของความขัดแย้ง (law of contradiction) ของพจน์เป็นการยืนยันความจริงและปฏิเสธพจน์นั้นในเวลาเดียวกัน ($p \wedge \sim p$) ถ้าเป็นกฎของเซตจะเป็นการบอกว่า สมาชิกใดๆไม่สามารถอยู่ในเซตและอยู่ในคอมพลีเมนต์ (complement) ของเซตนั้นพร้อมกันได้ ($A \cap \overline{A} = \phi$) ส่วนกฎนิรมัชฌิม (law of excluded middle) ของพจน์เป็นการบอกว่าพจน์ใดๆสามารถมีความจริงที่เป็นจริงหรือไม่จริงแต่ไม่สามารถเป็นทั้งสองอย่างได้ ($p \vee \sim p$) และถ้าเป็นกฎในเซตเป็นการบอกว่าค่าใดๆเป็นได้แค่สมาชิกของเซตหรือคอมพลีเมนต์ (complement)ของเซตนั้นเท่านั้น ($A \cup \overline{A} = X$)

ซึ่งในชีวิตประจำวันประโยคที่เป็นจริงหรือเท็จไม่มีอยู่จริง ตัวอย่างเช่นประโยค 'เจเป็นคนแข็งแรง' ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าไม่ใช่เพราะว่า เจเป็นนักกีฬา หรือเป็นคนป่วยหนัก เราเพียงแค่บอกได้ว่าประโยคนี้มีความเป็นจริงไม่มากก็น้อย (more or less) เพราะเราไม่สามารถรู้ถึงเส้นแบ่งระหว่าง แข็งแรง และไม่แข็งแรง เซตคนแข็งแรงในเซตดั้งเดิม จะมีอยู่จริงถ้ามีสมมุติฐานที่สำคัญและทำให้เกิดเส้นแบ่งที่ชัดเจน

ความคลุมเครือและความไม่แน่นอนเป็นปัญหาสำคัญในปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence) ตัวอย่างเช่นคนบอกว่า หน้าผาอันตรายและคนสามารถบอกได้ว่าที่ตรงไหนเป็นหน้าผา แต่การที่เราจะทำให้หุ่นยนต์มีความสามารถเช่นเดียวกับมนุษย์เป็นสิ่งที่ยากเนื่องจาก คำว่าใช่หรือไม่ใช่ในลอจิกแบบดั้งเดิมเป็นหนึ่งในปัญหาที่เกิดขึ้น แต่ถ้าเราให้ขอบเขตไม่คมชัดได้ กฎของความขัดแย้ง และกฎนิรมัชฌิมจะไม่เป็นจริงอีกต่อไปนั่นคือเราสามารถพูดได้ว่าคนคนนี้เป็นคนสูงถึงระดับ (degree) หนึ่งและไม่สูงถึงระดับหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นสิ่งที่ต้องการ

3.1 ฟังก์ชันสมาชิก (Membership Functions)

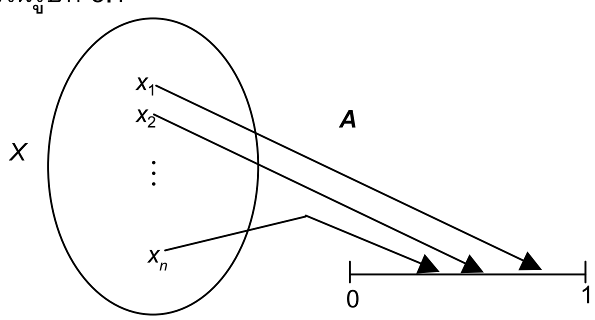
สมาชิกของฟัซซีเซตเป็นเรื่องของระดับ (degree) เช่นคนคนหนึ่งเป็นสมาชิกของเซต 'คนสูง' ถึงระดับ (degree) ที่คนคนนั้นมีคุณสมบัติเข้าข่ายของแนวคิดของ 'สูง' หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ระดับ

ของสมาชิก ของแต่ละสมาชิกในฟัซซีเซตบ่งบอกถึง ระดับของความใช้แทนกันได้ (degree of compatibility) ของสมาชิกต่อแนวคิดที่แทนฟัซซีเซตนั้น

ฟัซซีเซต ***A*** ถูกกำหนดบนเซตสากล (universal set) *X* โดยเป็นฟังก์ชันแบบเดียวกับฟังก์ชันลักษณะ ซึ่งถูกเรียกว่าฟังก์ชันสมาชิก (membership function) ที่จะให้ค่าเป็นตัวเลข ($\boldsymbol{A}(x)$) กับสมาชิก *x* ในเซต *X* ซึ่งตัวเลขนี้เป็นสมาชิกของช่วงปิด $[0,1]$ ซึ่งเป็นค่าที่บอกลักษณะของระดับของสมาชิก *x* ใน ***A***

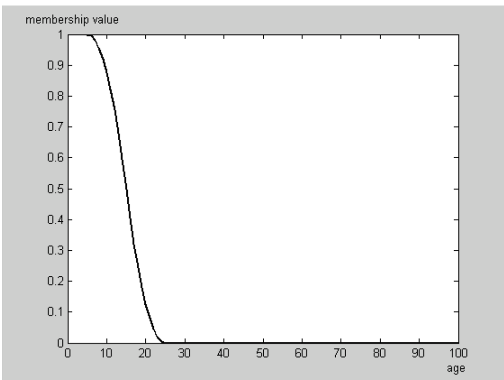
$$\boldsymbol{A}: X \rightarrow [0,1] \text{ หรือ } \mu_A: X \rightarrow [0,1] \tag{3.1}$$

ฟังก์ชันลักษณะนี้แสดงในรูปที่ 3.1

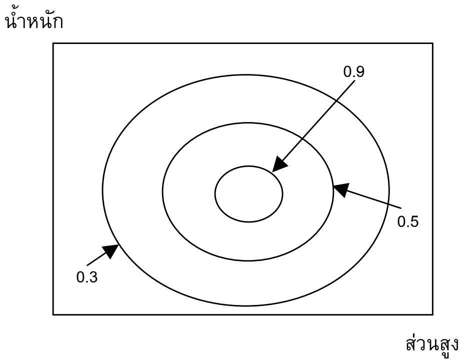


รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันสมาชิก ***A***

ในบางครั้งการแทนฟังก์ชันสมาชิกแบบรูปดังตัวอย่างในรูปที่ 3.2(ก) ซึ่งเป็นฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต 'young' หรือ ตัวอย่างในรูปที่ 3.2(ข) เป็นการแทนฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซตที่มี 2 มิติที่แต่ละมิติมีความสัมพันธ์กันเช่น เซตของ 'คนตัวใหญ่' ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วย ส่วนสูงและน้ำหนัก โดยปกติการแทนแบบนี้ถูกเรียกว่าการแทนแบบแผนภาพคอนทัวร์ (contour diagram) นั่นคือจุดที่อยู่ในวงกลม 0.9 จะมีค่าสมาชิกมากกว่า 0.9 ที่อื่นก็เป็นเช่นเดียวกัน



(ก)



(ข)

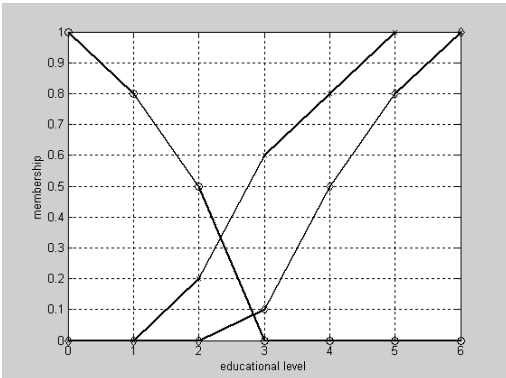
รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต 'young'

อีกตัวอย่างของการแทนแบบรูปคือ สมมุติให้ เซตสากล (universal set) ประกอบด้วย ระดับของการศึกษา 7 ระดับดังตารางที่ 3.1 ในชีวิตปัจจุบันคนมักจะพูดว่ามีการศึกษาสูง หรือต่ำ ซึ่งจากการพูดแบบนี้แสดงให้เห็นความคลุมเครือในภาษาเช่นกัน ถ้าเราพยายามจะอธิบายความคลุมเครือเหล่านี้ด้วย ฟังก์ชันสมาชิก 'การศึกษาน้อย' 'การศึกษาสูง' 'การศึกษาสูงมาก' ดังรูปที่ 3.3 ซึ่งพยายามอธิบายแนวคิดเรื่องการศึกษา เช่นถ้าคนที่จบปริญญาตรีจะเทียบเท่ากับมีค่าความเป็นสมาชิก 0.8 ในฟัซซีเซต 'การศึกษาสูง' และมีค่าความเป็นสมาชิก 0.5 ในฟัซซีเซต 'การศึกษาสูงมาก' นี่แสดงให้เห็นว่าคนที่จบปริญญาตรีมีการศึกษาในระดับที่ดีแต่เนื่องจากมีปริญญาที่สูงกว่าอีก 2 ระดับทำให้

ฟัซซีเซต ‘การศึกษาสูง’ มีความเหมาะสมกับปริญญาตรีมาก ในขณะที่ ฟัซซีเซต ‘การศึกษาสูงมาก’ มีความเหมาะสมน้อยลงไป

ตารางที่ 3.1 เซตของยูนิเวอรส์

เลขหมาย	ระดับการศึกษา
0	ไม่มีการศึกษา
1	ประถมศึกษา
2	มัธยมศึกษา
3	หลักสูตรวิชาชีพขั้นสูง
4	ปริญญาตรี
5	ปริญญาโท
6	ปริญญาเอก



รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต ‘การศึกษาน้อย(O)’ ‘การศึกษาสูง(×)’ ‘การศึกษาสูงมาก(◊)’

รูปร่างที่แน่นอนของการเปลี่ยนแปลงของค่าความเป็นสมาชิกจาก 0 ไป 1 ในฟัซซีเซตต่างๆ มีรูปร่างที่ไม่ใช่สิ่งที่ต้องคำนึงถึงมากเนื่องจากเราไม่รู้แน่นอนเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงให้เป็นไปตามความหมายในภาษาในแต่ละใจความ ดังนั้นรูปร่างจะเป็นไปตามประสบการณ์ว่าคำนั้นถูกใช้อย่างไรในใจความนั้น และในหลายงานหรือการประยุกต์ใช้ไม่สนใจในรูปร่างที่แท้จริง ดังนั้นรูปร่างของฟัซซีเซตที่ง่ายจึงถูกใช้ในงานส่วนใหญ่

นอกเหนือจากการแทนฟังก์ชันสมาชิกด้วยรูปยังมีการแทนด้วยตาราง (tabular) หรือการแสดง (list) เพราะโดยปกติการแทนด้วยรูปทำได้ถ้าเป็นฟังก์ชันใน 1 หรือ 2 มิติ ในยูคริเดียนสเปซ (Euclidean space) การแทนด้วยตารางทำได้เช่นตารางที่ 3.2 ซึ่งเป็นฟัซซีเซต ***A***

ตารางที่ 3.2 ฟัซซีเซต ***A***

ชื่อนักศึกษา (สัญญลักษณ์)	ค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต ***A***
Carry (x_1)	0.8
Bill (x_2)	0.3
J-H (x_3)	0.5
Wabei (x_4)	0.9

การแทนด้วยการแสดงของฟัซซีเซต ***A*** ทำได้โดย ***A*** $=\{$<Carry,0.8>, <Bill,0.3>, <J-H,0.5>, <Wabei,0.9>$\}$ หรือถ้าใช้สัญลักษณ์จะได้ ***A*** $=\{$<x_1,0.8>, <x_2,0.3>, <x_3,0.5>, <x_4,0.9>$\}$ แต่ในหลายครั้งเราด้วยการแสดงดังสมการที่ 3.2

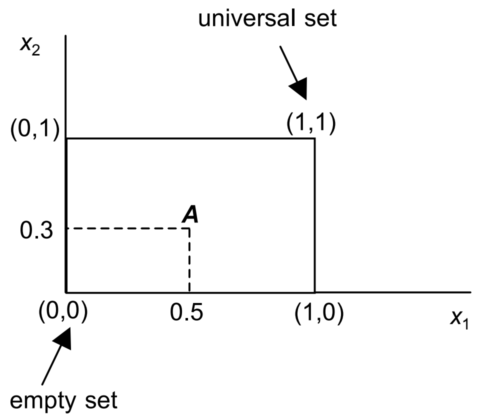
$$\boldsymbol{A} = \frac{0.8}{\text{Carry}} + \frac{0.3}{\text{Bill}} + \frac{0.5}{\text{J-H}} + \frac{0.9}{\text{Wabei}} \tag{3.2}$$

การแทนด้วยสมการที่ 3.2 ไม่ได้เป็นการหารหรือบวกตามความหมายทางคณิตศาสตร์จริงเป็นเพียงแค่การแสดงซึ่งบ่งบอกว่าแต่ละตัวมีค่าความเป็นสมาชิกเป็นเช่นไรเช่น Carry มีค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต ***A*** เท่ากับ 0.8 สัญลักษณ์ของฟัซซีเซตในกรณีที่เป็นดิสครีต (discrete) เป็นดังสมการที่ 3.3ก และถ้าเป็นต่อเนื่อง (continuous) เป็นดังสมการที่ 3.3ข

$$\boldsymbol{A} = \sum \frac{\boldsymbol{A}(x)}{x} \tag{3.3ก}$$

$$\boldsymbol{A} = \int_{x} \frac{\boldsymbol{A}(x)}{x} \tag{3.3ข}$$

นอกเหนือจากการแทนดังที่กล่าวแล้วยังมีการแทนด้วยเรขาคณิต (geometric) สมมุติให้ $X=\{x_1, x_2,\ldots x_n\}$ โดยที่แต่ละ x ถูกมองเป็นพิกัด (coordinate) ใน n มิติในยูคริเดียนสเปซ ถ้าจำกัดพิกัดให้อยู่ในช่วงปิด $[0,1]$ เราจะได้ซับเซตของยูคริเดียนสเปซ ที่เรียกว่า n มิติ ในหน่วยลูกบาศก์ (unit cube) แต่ละจุดที่อยู่ในหน่วยลูกบาศก์ ถูกอธิบายด้วยค่าใน n พิกัดนั้น เช่น $X = \{x_1, x_2\}$ ดังรูปที่ 3.4

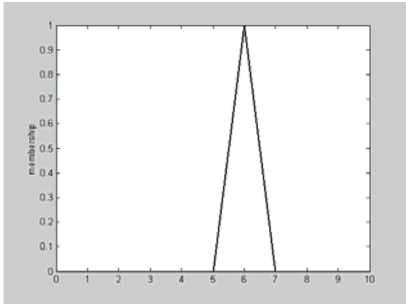


<u>รูปที่ 3.4 การแทนด้วยเรขาคณิต</u>

จากรูปที่ 3.4 ฟัซซีเซต ***A*** $= 0.5/x_1 + 0.3/x_2$ และฟัซซีเซตว่างคือจุดที่ (0,0) และ ฟัซซีเซตของเซตสากล คือจุดที่ (1,1) นั่นเอง ฟัซซีพาวเวอร์เซต (power set) ($\tilde{\mathcal{P}}(X)$) คือเซตของฟัซซีเซตทุกฟัซซีเซตบน X ไม่จำเป็นต้องมีจำนวนจำกัด หรือทุกจุดที่อยู่ในกรอบ เช่นทุกจุดในกรอบในรูปที่ 3.4 โดยปกติ $\tilde{\mathcal{P}}(X)$ คือ $[0,1]^n = \mathrm{I}^n$

การแทนในรูปแบบสุดท้ายคือการแทนโดยใช้การวิเคราะห์ (analytic) โดยปกติการแทนแบบนี้จะใช้เมื่อเซตสากล มีสมาชิกไม่จำกัดดังตัวอย่างที่ 3.1

ตัวอย่างที่ 3.1 ฟัซซีเซต ***A*** หรือ ‘ประมาณ 6’ สามารถเขียนได้ดังรูป 3.5



รูปที่ 3.5 ฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต 'ประมาณ 6'

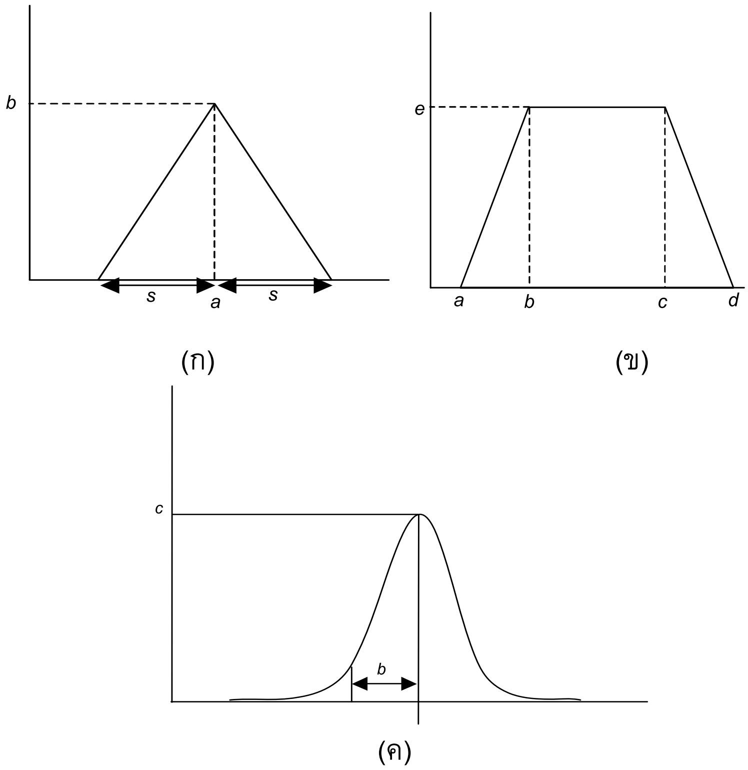
โดยที่เขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{cases} x-5 & 5\le x\le 6 \\ 7-x & 6\le x\le 7 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{3.4}$$

■

โดยปกติแล้วฟังก์ชันที่มีรูปร่างเป็นสามเหลี่ยมที่สมมาตรดังรูป 3.6(ก) สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันในสมการที่ 3.5

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{cases} b\left(1-\dfrac{|x-a|}{s}\right) & a-s\le x\le a+s \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{3.5}$$



รูปที่ 3.6 (ก) ฟังก์ชันรูปสามเหลี่ยม (ข) ฟังก์ชันรูปสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal) (ค) ฟังก์ชันระฆังคว่ำ (Bell-shaped)

และฟังก์ชันที่มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal) ซึ่งในบางครั้งอาจเขียนได้เป็นฟัซซีเซต (*a*, *b*, *c*, *d*) ดังรูปที่ 3.6(ข) สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันในสมการที่ 3.6

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{cases}\dfrac{(a-x)e}{a-b} & a\le x\le b\\ e & b\le x\le c\\ \dfrac{(d-x)e}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & \text{else}\end{cases} \tag{3.6}$$

ยังมีฟังก์ชันในรูปแบบระฆังคว่ำ (Bell-shaped) ดังรูป 3.6(ค) ซึ่งถูกใช้ในหลายงาน โดยที่เขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\boldsymbol{A}(x)=ce^{\frac{-(x-a)^2}{b}} \tag{3.7}$$

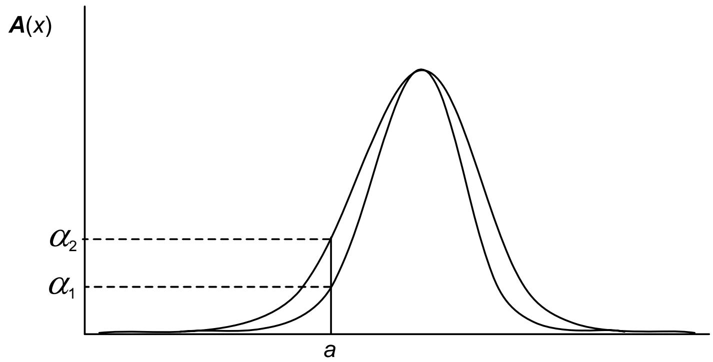
3.2 ฟัซซีเซตรูปแบบอื่น

3.2.1 ฟัซซีเซตแบบช่วง (Interval-Valued Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซตที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้เป็นฟัซซีเซตที่แต่ละสมาชิกในเซตมีค่าความเป็นสมาชิกเป็นช่วงปิดของจำนวนจริงที่มีค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบน ไม่ใช่ตัวเลขดังเช่นฟัซซีเซตในหัวข้อที่แล้ว นั่นคือ

$$\boldsymbol{A}: X \rightarrow \mathcal{E}([0,1]) \tag{3.8}$$

โดยที่ $\mathcal{E}([0,1])$ เป็น ครอบครัว (family) ของ ช่วงปิดของจำนวนจริงทั้งหมดใน ช่วง $[0,1]$ นั่นคือ $\mathcal{E}([0,1]) \subset \mathcal{P}([0,1])$ ตัวอย่างของฟัซซีเซตแบบช่วงแสดงในรูป 3.7 จากตัวอย่างในรูป ค่าความเป็นสมาชิกของ *a* ($\boldsymbol{A}(a)$) มีค่าเท่ากับ $[\alpha_1, \alpha_2]$ ฟัซซีเซตแบบนี้จะไม่จำเพาะ (specific) ดังเช่นฟัซซีเซตปกติ แต่อย่างไรก็ตามฟัซซีเซตแบบนี้ถูกใช้ในงานหลาย ๆอย่าง แต่ข้อเสียคือ เสียเวลาในการทำงานกับฟัซซีเซตแบบนี้มาก



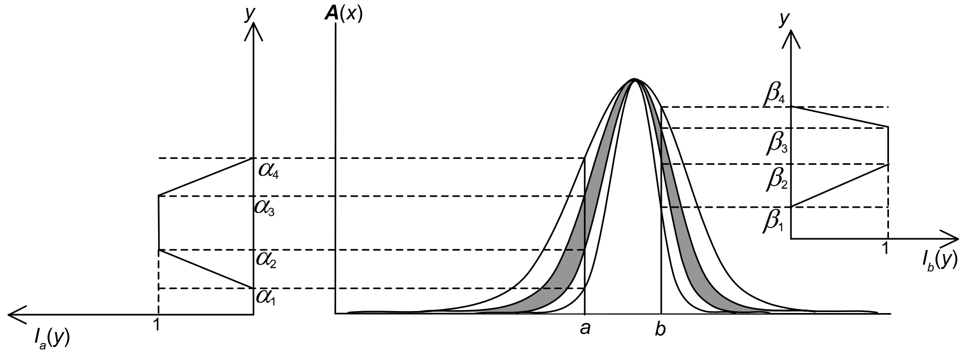
รูปที่ 3.7 ฟัซซีเซตแบบช่วง

3.2.2 ฟัซซีเซตแบบ ชนิดที่ 2 (Type-2 Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซตแบบนี้เป็นฟัซซีเซตที่มีค่าความเป็นสมาชิกเป็นฟัซซีเซตนั่นคือ

$$\boldsymbol{A} : X \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}([0,1]) \tag{3.9}$$

โดยที่ $\tilde{\mathcal{P}}([0,1])$ เป็นเซตของ ฟัซซีเซตปกติที่ถูกนิยามให้อยู่ในเซตสากล (universal set) $[0,1]$ ดังนั้น เราสามารถเรียก $\tilde{\mathcal{P}}([0,1])$ ได้อีกอย่างหนึ่งว่าฟัซซีพาวเวอร์เซต ของ $[0,1]$ ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 (type-2 fuzzy set)

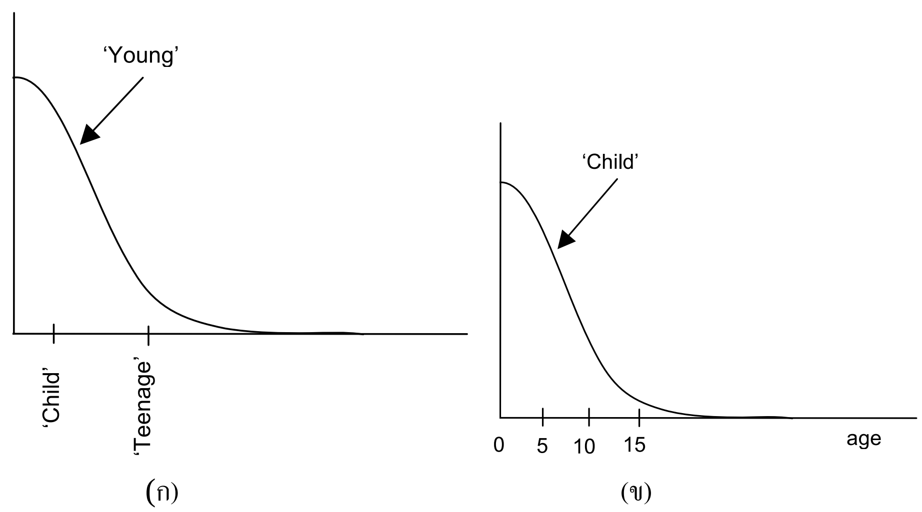
จากตัวอย่างในรูปที่ 3.8 ค่าความเป็นสมาชิกของ *a* เป็นฟัซซีเซต (α_1, α_2, α_3, α_4) และความเป็นสมาชิกของ *b* เป็นฟัซซีเซต (β_1, β_2, β_3, β_4) นอกเหนือจากฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 แล้วยังมีฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 3 หรือที่สูงกว่า 3 ได้ โดยการเวียนเกิด (recursive) ในรูปแบบที่กล่าวมาแล้ว

3.2.3 ฟัซซีเซตแบบระดับที่ 2 (Level 2 Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซตแบบนี้มีขึ้นมาใช้กับเหตุการณ์ที่แต่ละองค์ประกอบของเซตสากลไม่สามารถถูกระบุได้แน่นอน นั่นคือ แต่ละองค์ประกอบเป็นฟัซซีเซต และฟังก์ชันสมาชิกมีรูปแบบดังนี้คือ

$$\boldsymbol{A} : \tilde{\mathcal{P}}(X) \rightarrow ([0,1]) \tag{3.10}$$

โดยที่ $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ เป็นฟัซซีพาวเวอร์เซตของ *X* ตัวอย่างของฟัซซีเซตแบบระดับที่ 2 เป็นดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 ฟัซซีเซตแบบระดับที่ 2 'Young' และ 'Child'

จากตัวอย่างในรูปจะเห็นว่าฟัซซีเซต 'Young' เป็นฟัซซีเซตของเซตสากล $\{$'Child', 'teenage'$\}$ ซึ่งเห็นได้ว่า 'Child' และ 'teenage' เป็นฟัซซีเซตที่ถูกกำหนดให้อยู่ในเซตสากลของอายุ $\{0,1,2,... \}$ และเช่นเดียวกับฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 ฟัซซีเซตแบบนี้สามารถมีระดับที่สูงๆขึ้นไปได้และมีวิธีแบบเวียนเกิดเช่นเดียวกัน

3.3 การสร้างฟัซซีเซต

โดยปกติแล้วมีวิธีการสร้างฟัซซีเซตหลายรูปแบบ และในการทำงานหลายครั้งการสร้างเกิดจากสอบถามผู้เชี่ยวชาญ แต่ถ้ามีผู้เชี่ยวชาญมากกว่า 1 คน เราสามารถทำการรวมความคิดเหล่านั้นเพื่อสร้างระดับของค่าสมาชิกที่น่าเชื่อถือได้

ตัวอย่างที่ 3.2 สมมุติให้คนขับรถ 5 คนคือ สมชาย วรพจน์ กานต์ เกิด และ อ้น และเรามีกรรมการทั้งหมด 10 คน นั่นคือ r_1 r_2 จนถึง r_{10} เราต้องการหาคนที่ขับรถดี่ที่สุด เราจึงทำการถามกรรมการทั้ง 10 เกี่ยวกับคนทั้ง 5 ว่าแต่ละคน ขับรถดีหรือไม่ โดยที่ให้ตอบเป็น 1 (ใช่) และ 0 (ไม่ใช่) คำตอบทั้งหมดแสดงในตารางที่ 3.3

<u>ตารางที่ 3.3 คำตอบจากกรรมการทั้ง 10</u>

	สมชาย(x_1)	วรพจน์(x_2)	กานต์(x_3)	เกิด(x_4)	อ้น(x_5)
r_1	1	1	1	1	1
r_2	0	0	1	1	1
r_3	0	1	0	1	0
r_4	1	0	1	1	1
r_5	0	0	1	1	1
r_6	0	1	1	1	1
r_7	0	0	0	0	0
r_8	1	1	1	1	1
r_9	0	0	0	1	0
r_{10}	0	0	0	1	0

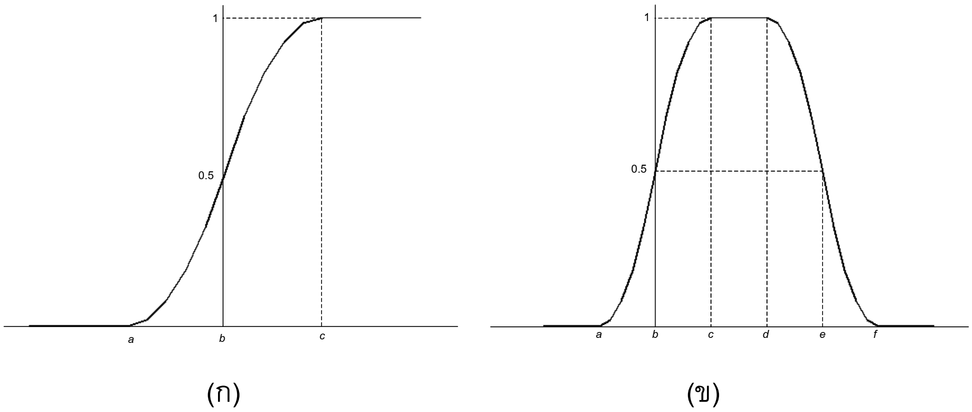
เราสามารถรวมความเห็นทั้งหมดได้โดยการหาสัดส่วนของคำตอบ ใช่ต่อสัดส่วนทั้งหมดดังนั้นจะได้ฟัซซีเซตของคนขับรถดี(***A***)เป็น $\boldsymbol{A} =$ 0.3/สมชาย + 0.4/วรพจน์ + 0.6/กานต์ + 0.9/เกิด + 0.6/อ้น

■

ยังมีฟังก์ชันในทางคณิตศาสตร์ที่เรานำมาใช้ในการสร้างฟังก์ชันสมาชิกเช่น S-function ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$S(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le a\\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a\le x\le b\\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{c-b}\right)^2 & b\le x\le c\end{cases} \tag{3.11}$$

และ π-function ซึ่งมีลักษณะเป็น S-function + ภาพสะท้อนของ S-function ทั้ง S- และ π-function แสดงในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 (ก) S-function (ข) π-function

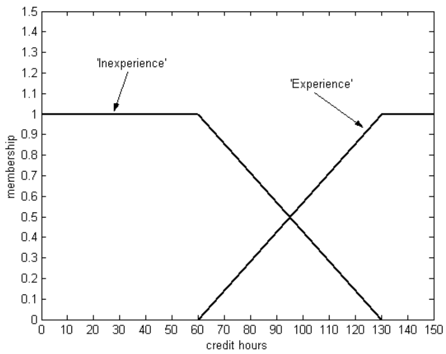
3.4 การดำเนินการในฟัซซีเซต (Operations on Fuzzy Sets)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการต่างๆ เช่น ฟัซซีคอมพลีเมนต์ (fuzzy complement) ฟัซซียูเนียน (fuzzy union) ฟัซซีอินเตอเซกชัน (fuzzy intersection) และคุณสมบัติของการดำเนินการเหล่านี้

ให้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ ถูกกำหนดให้อยู่บนเซตสากล X และ ฟัซซีคอมพลีเมนต์ ($\overline{\boldsymbol{A}}$) เป็นฟัซซีเซตในเซตสากล X เช่นกัน โดยปกติ $\boldsymbol{A}(x)$ บอกถึงระดับของความเป็นสมาชิกของ x ใน $\boldsymbol{A}$ ดังนั้น $\overline{\boldsymbol{A}}(x)$ จะบอกถึงระดับของความไม่เป็นสมาชิกของ x ใน $\boldsymbol{A}$ ซึ่งเราสามารถเขียนให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้คือ $\forall x \in X$

$$\overline{\boldsymbol{A}}(x)=1-\boldsymbol{A}(x) \tag{3.12}$$

ตัวอย่างของฟัซซีคอมพลีเมนต์แสดงในรูปที่ 3.11 ซึ่ง 'Inexperience' เป็นฟัซซีคอมพลีเมนต์ของ 'Experience' ฟัซซีเซต จากรูปจะเห็นว่าที่จำนวนชั่วโมงเท่ากับ 80 มีระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต 'Inexperience' เท่ากับ 0.7 ในขณะที่ระดับความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต 'Experience' เป็น 0.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่า คอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซตแตกต่างจากในเซตแบบดั้งเดิม นั่นคือค่าความเป็นสมาชิกหรือฟังก์ชันสมาชิกสามารถเหลื่อมกันได้



รูปที่ 3.11 ฟัซซีเซต 'Experience' และ 'Inexperience'

ในกรณีของฟัซซียูเนียนมาตรฐานของฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** สามารถเขียนฟังก์ชันสมาชิกที่แสดงถึงค่าความเป็นสมาชิกของทุก $x \in X$ ในฟัซซียูเนียนได้เป็น

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})(x) = \max[\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x)] \tag{3.13}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 ให้ X เป็นเซตของคนไข้จำนวน n คน โดยที่ชื่อของแต่ละคนถูกแทนด้วยตัวเลข 1,2,...,n และให้ฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** เป็นฟัซซีเซตของคนไข้ที่มี ความดันสูง และไข้สูงตามลำดับดังนั้น $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ ของคนไข้ในเซต X แสดงถึง การมีความดันสูงหรือไข้สูง

ค่าความเป็นสมาชิกของคนไข้แต่ละคนในฟัซซีเซตทั้งสามแสดงในตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4 ค่าความเป็นสมาชิกของคนไข้ในฟัซซีเซต ***A B*** และ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

คนไข้	***A***	***B***	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
1	1	1	1
2	0.5	0.6	0.6
3	1	0.1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0.1	0.7	0.7

■

กฎนิรมัชฌิม (law of excluded middle) ในเซตแบบดั้งเดิมที่กล่าวว่า $A \cup \overline{A} = X$ ไม่เป็นจริงในกรณีของฟัซซียูเนียนมาตรฐานและฟัซซีคอมพลีเมนต์มาตรฐาน เช่นถ้า $\boldsymbol{A}(x)$ มีค่าเท่ากับ 0.6 และ $\overline{\boldsymbol{A}}(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 0.4 ดังนั้น $(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}})(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 0.6 ดังนั้น x เป็นสมาชิกของเซตสากลด้วยค่าความเป็นสมาชิกที่ไม่เท่ากับ 1 ดังนั้นกฎนี้ไม่เป็นจริง

ในกรณีของฟัซซีอินเตอเซกชันมาตรฐานฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** สามารถเขียนฟังก์ชันสมาชิกที่แสดงถึงค่าความเป็นสมาชิกของทุก $x \in X$ ในฟัซซีอินเตอเซกชันได้เป็น

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})(x) = \min[\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x)] \tag{3.14}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 ให้ ***A*** และ ***B*** เป็นฟัซซีเซตของแม่น้ำที่ยาว และแม่น้ำที่ใช้เดินเรือได้ ตามลำดับ โดยที่เซตสากลเป็น {อะเมซอน, ไนล์, เจ้าพระยา, โขง, แม่ปิง} และ $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ เป็นฟัซซีเซตของแม่น้ำที่ยาวและใช้เดินเรือได้ ค่าความเป็นสมาชิกของแม่น้ำในฟัซซีเซตทั้งสามแสดงในตารางที่ 3.5

ตารางที่ 3.5 ค่าความเป็นสมาชิกของคนไข้ในฟัซซีเซต ***A B*** และ ***A*** $\cap$ ***B***

แม่น้ำ	***A***	***B***	***A*** $\cap$ ***B***
อะเมซอน	1	0.8	0.8
ไนล์	0.9	0.7	0.7
เจ้าพระยา	0.8	0.8	0.8
โขง	0.5	0.6	0.5
แม่ปิง	0.4	0.3	0.3

■

เช่นเดียวกับกฎนิรมัชฌิม กฎของความขัดแย้ง (law of contradiction) ที่กล่าวว่า $A \cap \overline{A} = \phi$ ไม่เป็นจริงสำหรับฟัซซีอินเตอเซกชันมาตรฐานและฟัซซีคอมพลีเมนต์มาตรฐาน เช่นถ้า $\boldsymbol{A}(x)$ มีค่าเท่ากับ 0.6 และ $\overline{\boldsymbol{A}}(x)$ มีค่าเท่ากับ 0.4 ดังนั้น $(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}})(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 0.4 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า x ยังเป็นสมาชิกของ $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}}$ ถึงระดับหนึ่งซึ่งขัดกับนิยามของฟัซซีเซตว่างที่กล่าวว่า ทุก $x \in X$ จะมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0 เสมอ

แต่อย่างไรก็ตามคุณสมบัติอื่นเช่น คอมมิวเททิฟ (commutative) แอสโซสิเอทิวิตี้ (associativity) ไอเดมโพเทนซี (idempotency) การกระจาย (distribution) De Morgan's Law ยังคงเป็นความจริงสำหรับการดำเนินการฟัซซีเซตโดยวิธีมาตรฐานเหล่านี้ แต่ถ้าใช้การดำเนินการที่ไม่ใช่วิธีมาตรฐาน คุณสมบัติเหล่านี้อาจจะไม่เป็นจริงอีกต่อไป

ตัวอย่างที่ 3.5 พิสูจน์ว่าคุณสมบัติของการกระจาย (distribution) $(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}))$ ของการดำเนินการฟัซซีเซตโดยวิธีมาตรฐานเป็นจริง

ทำได้โดย
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}))(x) &= \boldsymbol{A}(x) \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})(x) \\ &= \boldsymbol{A}(x) \cap (\boldsymbol{B}(x) \cup \boldsymbol{C}(x))\end{aligned}$$

เนื่องจากคุณสมบัติของการหา minimum และ maximum ทำให้
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x) \cap (\boldsymbol{B}(x) \cup \boldsymbol{C}(x)) &= (\boldsymbol{A}(x) \cap \boldsymbol{B}(x)) \cup (\boldsymbol{A}(x) \cap \boldsymbol{C}(x)) \\ &= (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})(x) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})(x) \\ &= ((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}))(x)\end{aligned}$$

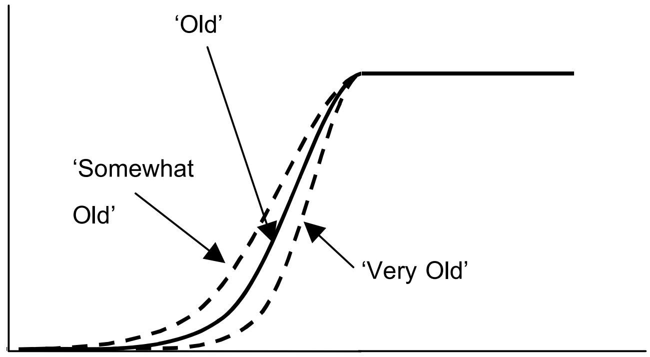
ทำให้คุณสมบัติการกระจายเป็นจริง ■

ในเซตแบบดั้งเดิมยังมีการดำเนินการเกี่ยวกับการเป็นเซตย่อย(inclusion)และความเท่ากันของเซต ซึ่งในฟัซซีเซตก็มีการดำเนินการเหล่านี้เช่นกัน นั่นคือ $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ถ้า $\boldsymbol{A}(x) \leq \boldsymbol{B}(x)$ สำหรับทุกๆ x และ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ถ้า $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)$ สำหรับทุกๆ x นั่นเอง

นอกเหนือจากการดำเนินการข้างต้น ยังมีการดำเนินการอีกประเภทหนึ่งที่อาจจะมีความสำคัญในการทำอนุมาน (inference) นั่นคือ การดำเนินการเอกภาพ (unary operation) ซึ่งเป็นการจัดการกับฟัซซีเซตโดยตรง นั่นคือ

$$\boldsymbol{A}^{a}(x) = (\boldsymbol{A}(x))^{a} \tag{3.15}$$

โดยที่ถ้า a มีค่ามากกว่า 1 จะทำให้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ มีความเป็นจำเพาะ (specific) มากขึ้นเช่น 'very $\boldsymbol{A}$' และถ้า a มีค่าน้อยกว่า 1 จะทำให้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ มีความเป็นจำเพาะ (specific) น้อยลงเช่น 'somewhat $\boldsymbol{A}$' ดังแสดงในรูปที่ 3.12 ซึ่งมีฟัซซีเซต 'Old' ฟัซซีเซต 'Very Old' ที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็น Old^2 และ ฟังก์ชัน 'Somewhat Old' ที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็น $\text{Old}^{1/2}$ นั่นเอง



รูปที่ 3.12 ฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซต 'Old' 'Very Old' และ 'Somewhat Old'

3.5 คุณสมบัติของฟัซซีเซต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติที่จะถูกกล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ นั่นคือ

ซัปพอร์ต (support) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ คือเซตของสมาชิกในเซตสากลที่มีค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ ไม่เท่ากับ 0

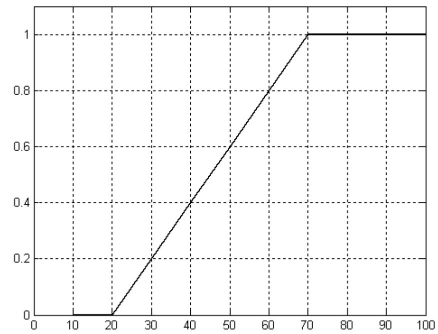
$$\text{supp}(\boldsymbol{A}) = \{ x \in X \mid \boldsymbol{A}(x) > 0 \} \tag{3.16}$$

ความสูง (height) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ ($\text{h}(\boldsymbol{A})$)คือ ค่าความเป็นสมาชิกที่มากที่สุดของ x ใดๆในฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ ถ้า $\text{h}(\boldsymbol{A}) = 1$ ฟัซซีเซตนั้นจะเป็น นอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต ถ้า $\text{h}(\boldsymbol{A}) < 1$ ฟัซซีเซตนั้นจะเป็น ซับนอร์แมล (subnormal) ฟัซซีเซต และถ้า $\text{h}(\boldsymbol{A}) > 1$ฟัซซีเซตนั้นจะเป็น ซุปเปอร์นอร์แมล (supernormal) ฟัซซีเซต

คอร์ (core) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ คือ เซตของสมาชิกในเซตสากลที่มีค่าความเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ เท่ากับ $\text{h}(\boldsymbol{A})$

$$\text{core}(\boldsymbol{A}) = \{ x \in X \mid \boldsymbol{A}(x) \geq \text{h}(\boldsymbol{A}) \} \text{ หรือ } \text{core}(\boldsymbol{A}) = \{ x \in X \mid \boldsymbol{A}(x) = \text{h}(\boldsymbol{A}) \} \tag{3.17}$$

α-cut ของฟัซซีเซต จากรูปที่ 3.13 ถ้าเราดูที่ช่วงปิดของค่าความเป็นสมาชิก $[0.2, 0.6]$ จะเห็นได้ว่าค่าความเป็นสมาชิกช่วงนี้เป็นค่าความเป็นสมาชิกของช่วงปิด $[30, 50]$ และเช่นเดียวกันกับที่ค่าความเป็นสมาชิก $\leq$ 0.8 เป็นค่าความเป็นสมาชิกของช่วงปิด $[0,60]$ สำหรับช่วงอื่นๆก็เช่นเดียวกัน ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ฟัซซีเซตโดยปกติจะมีตัวร่วมเป็นครอบครัวของซับเซตแบบดั้งเดิม (family of crisp subsets) ของ X เสมอ



รูปที่ 3.13 ฟัซซีเซต $\boldsymbol{E}$

ดังนั้นที่ค่าความเป็นสมาชิกที่มากกว่าหรือเท่ากับ ค่าใดๆ (α) ที่อยู่ในช่วงปิด $[0, 1]$ เราจะได้เซตแบบดั้งเดิม ${}^{\alpha}\boldsymbol{A}$ (α-cut ของ $\boldsymbol{A}$)

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{A} = \{x \in X \mid \boldsymbol{A}(x) \geq \alpha\} \tag{3.18}$$

จากรูปที่ 3.13 ${}^{0}\boldsymbol{E} = [0,100]$ หรือ ${}^{0.2}\boldsymbol{E} = [30,100]$ หรือ ${}^{1}\boldsymbol{E} = [70,100]$ จากรูปเราสังเกตเห็นได้ว่า ถ้า $\alpha_1 < \alpha_2$ แล้ว ${}^{\alpha 1}\boldsymbol{A} \supseteq {}^{\alpha 2}\boldsymbol{A}$ และ ${}^{\alpha 1}\boldsymbol{A} \cap {}^{\alpha 2}\boldsymbol{A} = {}^{\alpha 2}\boldsymbol{A}$ ในขณะเดียวกัน ${}^{\alpha 1}\boldsymbol{A} \cup {}^{\alpha 2}\boldsymbol{A} = {}^{\alpha 1}\boldsymbol{A}$

นอกเหนือจาก α-cut ที่กล่าวมาข้างต้นยังมี α-cut แบบเข้ม (strong α-cut) นั่นคือเซตที่มีแต่สมาชิกที่มีค่าความเป็นสมาชิกมากกว่าค่า α เท่านั้น นั่นคือ

$$ {}^{\alpha+}\boldsymbol{A} = \{x \in X \mid \boldsymbol{A}(x) > \alpha\} \tag{3.19}$$

จากรูปที่ 3.13 ${}^{0+}\boldsymbol{E} = (20,100]$ หรือ ${}^{0.2+}\boldsymbol{E} = (30,100]$ หรือ ${}^{1+}\boldsymbol{E} = \varnothing$ แต่อย่างไรก็ตามคุณสมบัติอื่นยังคงอยู่นั่นคือ ถ้า $\alpha_1 < \alpha_2$ แล้ว ${}^{\alpha 1+}\boldsymbol{A} \supseteq {}^{\alpha 2+}\boldsymbol{A}$ และ ${}^{\alpha 1+}\boldsymbol{A} \cap {}^{\alpha 2+}\boldsymbol{A} = {}^{\alpha 2+}\boldsymbol{A}$ ในขณะเดียวกัน ${}^{\alpha 1+}\boldsymbol{A} \cup {}^{\alpha 2+}\boldsymbol{A} = {}^{\alpha 1+}\boldsymbol{A}$

<u>เซตระดับ (level set) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$</u> คือเซตของ α-cut เด่นๆของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ นั่นคือ

$$ \mathrm{L}_{\boldsymbol{A}} = \wedge_{\boldsymbol{A}} = \{\alpha \mid \boldsymbol{A}(x) = \alpha;\ \exists x \in X\} \tag{3.20}$$

ถ้าต้องการแปลง α-cut ให้เป็นฟัซซีเซตชนิดพิเศษ ${}_{\alpha}\boldsymbol{A}$ ทำได้โดย

$$ {}_{\alpha}\boldsymbol{A}(x) = \alpha({}^{\alpha}\boldsymbol{A}(x)) \tag{3.21}$$

ตัวอย่างที่ 3.6 ให้ $\boldsymbol{A} = 0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5$ และ $\mathrm{L}_{\boldsymbol{A}} = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$

$$ {}^{0.2}\boldsymbol{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$ {}^{0.4}\boldsymbol{A} = 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$ {}^{0.6}\boldsymbol{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$ {}^{0.8}\boldsymbol{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$ {}^{1}\boldsymbol{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5$$

แปลง α-cut เหล่านี้ให้เป็นฟัซซีเซตจะได้

$$_{0.2}\boldsymbol{A} = 0.2/\,x_1 + 0.2/\,x_2 + 0.2/\,x_3 + 0.2/\,x_4 + 0.2/\,x_5$$

$$_{0.4}\boldsymbol{A} = 0/\,x_1 + 0.4/\,x_2 + 0.4/\,x_3 + 0.4/\,x_4 + 0.4/\,x_5$$

$$_{0.6}\boldsymbol{A} = 0/\,x_1 + 0/\,x_2 + 0.6/\,x_3 + 0.6/\,x_4 + 0.6/\,x_5$$

$$_{0.8}\boldsymbol{A} = 0/\,x_1 + 0/\,x_2 + 0/\,x_3 + 0.8/\,x_4 + 0.8/\,x_5$$

$$_{1}\boldsymbol{A} = 0/\,x_1 + 0/\,x_2 + 0/\,x_3 + 0/\,x_4 + 1/\,x_5$$

■

ทฤษฎีการแยก (Decomposition Theorem) ของฟัซซีเซต จากตัวอย่างที่ 3.6 จะเห็นได้ว่าถ้าเราทำการยูเนียน ฟัซซีเซตพิเศษ ($_{0.2}\boldsymbol{A} \cup {}_{0.4}\boldsymbol{A} \cup {}_{0.6}\boldsymbol{A} \cup {}_{0.8}\boldsymbol{A} \cup {}_{1}\boldsymbol{A}$) เข้าด้วยกันจะได้ฟัซซีเซต ***A*** กลับมา การทำแบบนี้เป็นไปตามทฤษฎีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้คือ

ทฤษฎีที่ 3.1 กล่าวว่าสำหรับฟัซซีเซต ***A*** ใดๆที่เป็นสมาชิกของ $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ ฟัซซีพาวเวอร์เซตของ X จะได้ว่า

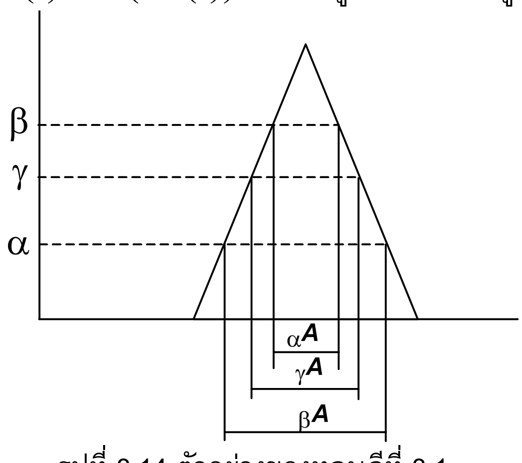
$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\boldsymbol{A} \tag{3.22}$$

โดยที่ $_{\alpha}\boldsymbol{A}$ ถูกนิยามดังสมการที่ 3.21 และการยูเนียนเป็นการยูเนียนด้วยวิธีมาตรฐาน ตัวอย่างของทฤษฎีนี้แสดงในรูปที่ 3.14 ซึ่งแสดงแค่ α-cut ของค่า α 3 ค่าเท่านั้น และ ***A*** เกิดจากการยูเนียน $_{\alpha}\boldsymbol{A}$ สำหรับ ทุกๆ α

ทฤษฎีที่ 3.2 กล่าวว่าสำหรับฟัซซีเซต ***A*** ใดๆที่เป็นสมาชิกของ $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ ฟัซซีพาวเวอร์เซตของ X จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}\boldsymbol{A} \tag{3.23}$$

โดยที่ $_{\alpha+}\boldsymbol{A}$ ถูกนิยามเป็น $_{\alpha+}\boldsymbol{A}(x) = \alpha({}^{\alpha+}\boldsymbol{A}(x))$ และการยูเนียนเป็นการยูเนียนด้วยวิธีมาตรฐาน



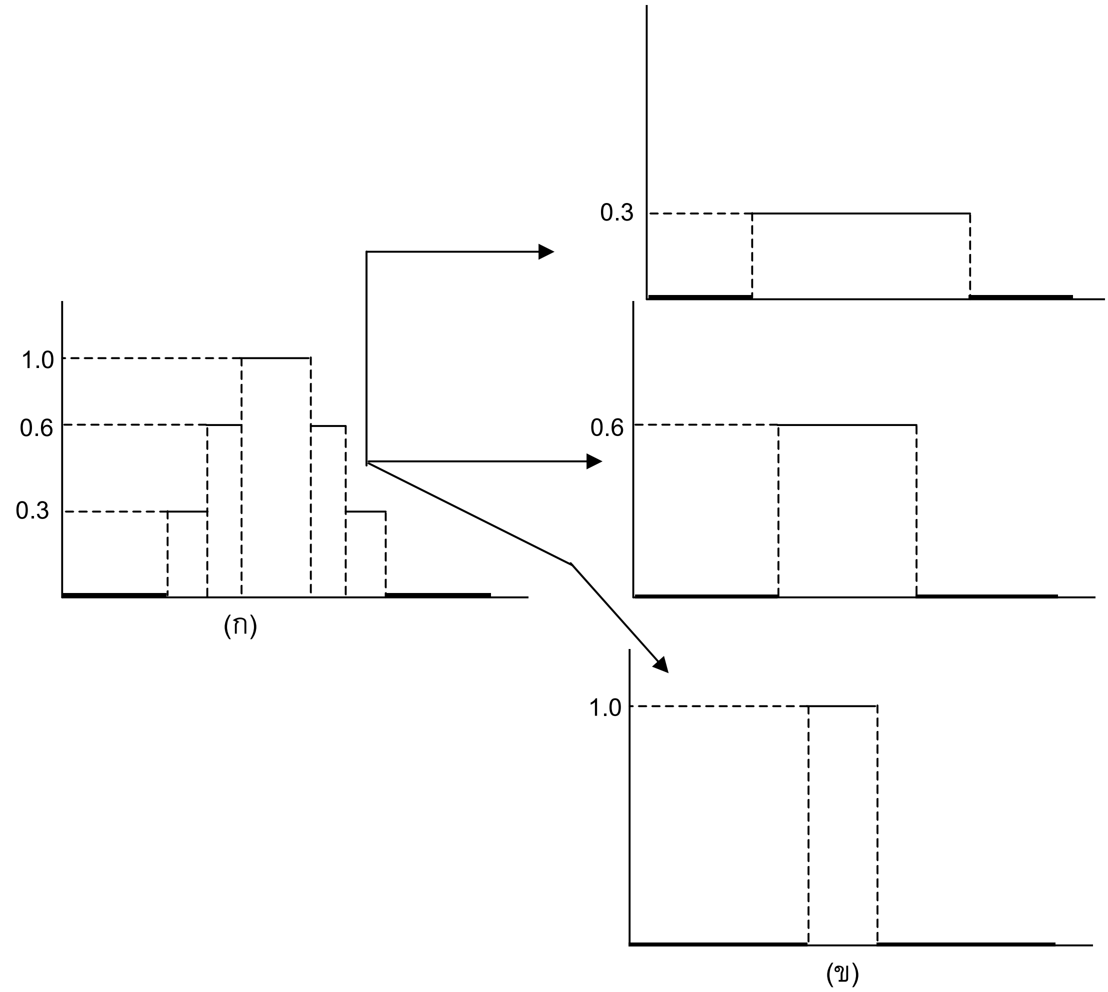
รูปที่ 3.14 ตัวอย่างของทฤษฎีที่ 3.1

ทฤษฎีที่ 3.3 กล่าวว่าสำหรับฟัซซีเซต ***A*** ใดๆที่เป็นสมาชิกของ $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ ฟัซซีพาวเวอร์เซตของ X จะได้ว่า

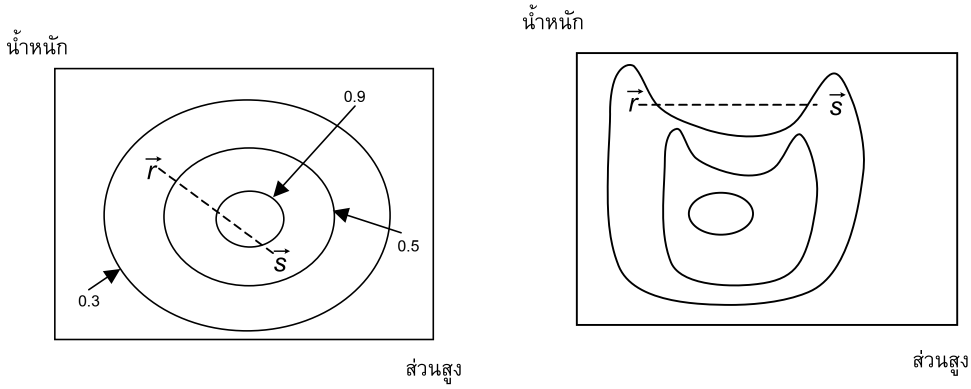
$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{\alpha \in \wedge_{\boldsymbol{A}}} {}_{\alpha}\boldsymbol{A} \tag{3.24}$$

โดยที่ $\wedge_A$ เป็นเซตระดับของฟัซซีเซต ***A*** และ $_{\alpha}$***A*** ถูกนิยามดังสมการที่ 3.21 และการยูเนียนเป็นการยูเนียนด้วยวิธีมาตรฐาน ตัวอย่างของทฤษฎีนี้แสดงในรูปที่ 3.15 ซึ่งในรูป $\wedge_A = \{0,\ 0.3,\ 0.6,\ 1\}$ และ $_0A = \varnothing$ ดังนั้น ***A*** จึงถูกแทนได้ด้วย $_{0.3}A$ $_{0.6}A$ และ $_1A$ นั่นเอง

<u>คอนเวกฟัซซีเซต (Convex Fuzzy Set)</u> ฟัซซีเซต ***A*** คอนเวกก็ต่อเมื่อ $A(\lambda\vec{r} + (1-\lambda)\vec{s}) \geq \min(A(\vec{r}),\ \ A(\vec{s}))$ นั่นคือค่าความเป็นสมาชิกของจุดที่อยู่บนเส้นที่ลากระหว่างจุด $\vec{r}$ และ $\vec{s}$ มากกว่าหรือเท่ากับค่าความเป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดของทั้งสองจุดดังรูปที่ 3.16 ที่แสดงแผนภาพคอนทัวร์ (contour diagram) และเส้นประแสดงค่าความเป็นสมาชิกของจุดที่อยู่ระหว่าง $\vec{r}$ และ $\vec{s}$ จะเห็นได้ว่า แผนภาพคอนทัวร์ในรูปที่ 3.16(ก) แสดงคอนเวกฟัซซีเซตเพราะไม่มีจุดบนเส้นประที่มีค่าความเป็นสมาชิกน้อยกว่า $\vec{r}$ และ $\vec{s}$ และรูปที่ 3.16(ข) แสดงฟัซซีเซตที่ไม่คอนเวกเพราะมีบางจุดบนเส้นที่หลุดออกไปจากคอนทัวร์นั่นคือมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0 ซึ่งน้อยกว่าของ $\vec{r}$ และ $\vec{s}$ หรือถ้าจะทำให้การพิจารณาคอนเวกฟัซซีเซตง่าย เราสามารถใช้คุณสมบัติของ เซตดั้งเดิมผ่านทาง α-cut ได้ นั่นคือ ถ้าฟัซซีเซต ***A*** เป็นคอนเวกฟัซซีเซต แล้ว (ก) α-cut ของทุกค่า α จะต่อเนื่องกันตลอด และ(ข) แต่ละ α-cut จะเป็นคอนเวกในแนวคิดของเซตดั้งเดิม



<u>รูปที่ 3.15 ตัวอย่างของทฤษฎีที่ 3.3 (ก) ฟัซซีเซต ***A*** (ข) การแยกของฟัซซีเซต ***A*** ให้เป็น $_{0.3}A$ $_{0.6}A$ และ $_1A$</u>



รูปที่ 3.16 แผนภาพคอนทัวร์ของ (ก) คอนเวกฟัซซีเซต (ข) ฟัซซีเซตที่ไม่คอนเวก

ตัวเลขฟัซซี (Fuzzy Number) คือฟัซซีเซตที่เป็นคอนเวกฟัซซีเซต ต่อเนื่องแบบพีซไวส์ (piece-wise continuous) และ นอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต

สเกลาร์คาดินาวริตี้ (Scalar Cardinality) หรือ การนับซิกมา (Sigma Count) $(|\boldsymbol{A}|)$ อธิบายได้ด้วย

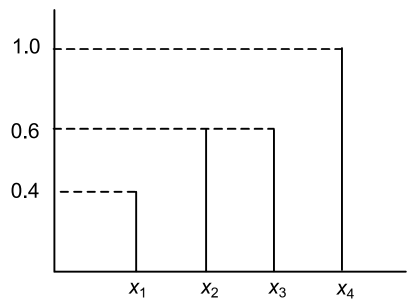
ฟัซซีเซตไม่ต่อเนื่อง (discrete fuzzy set): $|\boldsymbol{A}| = \sum_{x} \boldsymbol{A}(x)$ (3.25)

ฟัซซีเซตต่อเนื่อง (continuous fuzzy set): $|\boldsymbol{A}| = \int_{x} \boldsymbol{A}(x)dx$ (3.26)

ฟัซซีคาดินาวริตี้ (Fuzzy Cardinality) $|\tilde{\boldsymbol{A}}|$ อธิบายได้ด้วย

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}|\left(\left|{}^{\alpha}\boldsymbol{A}\right|\right) = \alpha \quad \forall \alpha \tag{3.27}$$

ตัวอย่างที่ 3.7 ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ แสดงในรูปที่ 3.17 และ จากรูปจะได้ว่า $\left|{}^{0.4}\boldsymbol{A}\right| = 4$, $\left|{}^{0.6}\boldsymbol{A}\right| = 3$, $\left|{}^{1.0}\boldsymbol{A}\right| = 1$ ดังนั้น $|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \frac{0.4}{4} + \frac{0.6}{3} + \frac{1.0}{1}$ ■



รูปที่3.17 ฟัซซีเซตไม่ต่อเนื่อง

3.6 หลักการการขยาย (Extension Principle)

ในการที่จะทำการคำนวณใดๆกับฟัซซีเซต เราจำเป็นต้องฟัซซีฟาย (fuzzify) ฟังก์ชันแบบดั้งเดิม และหลักการในการฟัซซีฟายฟังก์ชันดั้งเดิมนี้เรียกว่าหลักการการขยาย (extension principle)

ตัวอย่างที่ 3.8 สมมุติให้การกระจายของอายุของพนักงานและเงินเดือนของพวกเขาของบริษัทแห่งหนึ่งเป็นดังตารางที่ 3.6 และเราต้องการทราบว่าเงินเดือนของพนักงานที่ อายุน้อย (ฟัซซีเซต 'young') เป็นเท่าไร

ตารางที่ 3.6 การกระจายของอายุและเงินเดือน

อายุ(ปี)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
เงินเดือน ($\times 10^3$)	2.5	2.5	3.0	3.5	3.5	4.0	4.0	4.5	4.5	5.0

สมมุติให้ตารางที่ 3.6 เป็นฟังก์ชันที่ส่งทอดเซต $X=\{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65\}$ ไปยังเซต $Y=\{2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ และ ฟัซซีเซต 'Young' $= \boldsymbol{A} = 1/20 + 1/25 + 0.8/30 + 0.6/35 + 0.4/40 + 0.2/45 + 0/50 + 0/55 + 0/60 + 0/65$ ต้องการหาฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}$ ซึ่งเป็นฟัซซีเซตของเงินเดือนของคนอายุน้อย

ฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}$ จะขึ้นกับ ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ โดยฟังก์ชัน f สำหรับทุก x ใน X .ให้ y ใน Y เป็น $y=f(x)$ ซึ่งมีค่าตามตารางที่ 3.6 ดังนั้นความสัมพันธ์ของทั้งสองเป็น

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{A}(x)}{f(x)} \tag{3.28}$$

จะได้ว่า $\boldsymbol{B} = 1/f(20) + 1/f(25) + 0.8/f(30) + 0.6/f(35) + 0.4/f(40) + 0.2/f(45) + 0/f(50) + 0/f(55) + 0/f(60) + 0/f(65) = 1/2.5 + 1/2.5 + 0.8/3 + 0.6/3.5 + 0.4/3.5 + 0.2/4 + 0/4 + 0/4.5 + 0/4.5 + 0/5$

จากฟังก์ชันสมาชิกของ $\boldsymbol{B}$ จะเห็นว่าเงินเดือนเดียวกันเกี่ยวข้องกับอายุมากกว่า 1 อายุ เช่นที่เงินเดือน 3.5 เกี่ยวข้องกับพนักงานที่มีอายุ 35 และ 40 ซึ่งมีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 0.6 และ 0.4 และเนื่องจากธรรมชาติของการเลือก (disjunctive) เราสามารถหาค่าที่มากที่สุดได้ดังนั้น

$$\boldsymbol{B} = 1/2.5 + 0.8/3 + 0.6/3.5 + 0.2/4 + 0/4.5 + 0/5 \qquad \blacksquare$$

เราสามารถอธิบายหลักการนี้ได้โดยให้ $f: X \longrightarrow Y$ โดย X และ Y เป็นเซตดั้งเดิมที่มีสมาชิกจำกัด และ f เป็นฟังก์ชันส่งทอดของทั้งสอง ซึ่งเราสามารถอุปนัยฟังก์ชันให้เป็น ฟังก์ชันอีก 2 ฟังก์ชัน ได้คือ $\tilde{f}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ส่งทอด $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ ไปยัง $\tilde{\mathcal{P}}(y)$ และฟังก์ชัน $\tilde{f}^{-1}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันส่งทอด $\tilde{\mathcal{P}}(y)$ ไปยัง $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ โดยที่นิยามของทั้งสองเป็น

$$\left(\tilde{f}(\boldsymbol{A})\right)(y) = \max_{x \mid y=f(x)} \boldsymbol{A}(x) \tag{3.29}$$

สำหรับทุก $\boldsymbol{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(x)$, $y \in$ Y และ

$$\left(\tilde{f}^{-1}(\boldsymbol{B})\right)(x) = \boldsymbol{B}(f(x)) \tag{3.30}$$

สำหรับทุก $\boldsymbol{B} \in \tilde{\mathcal{P}}(y)$ และ $x \in$ X จากตัวอย่าง 3.7 $\tilde{f}$ ถูกใช้เมื่อเราต้องการหาเงินเดือนของคนอายุน้อย และ $\tilde{f}^{-1}$ ถูกใช้เมื่อเรารู้ว่าเงินเดือนน้อย (ฟัซซีเซต 'low') และอยากทราบว่าอายุเท่าไรนั่นเอง

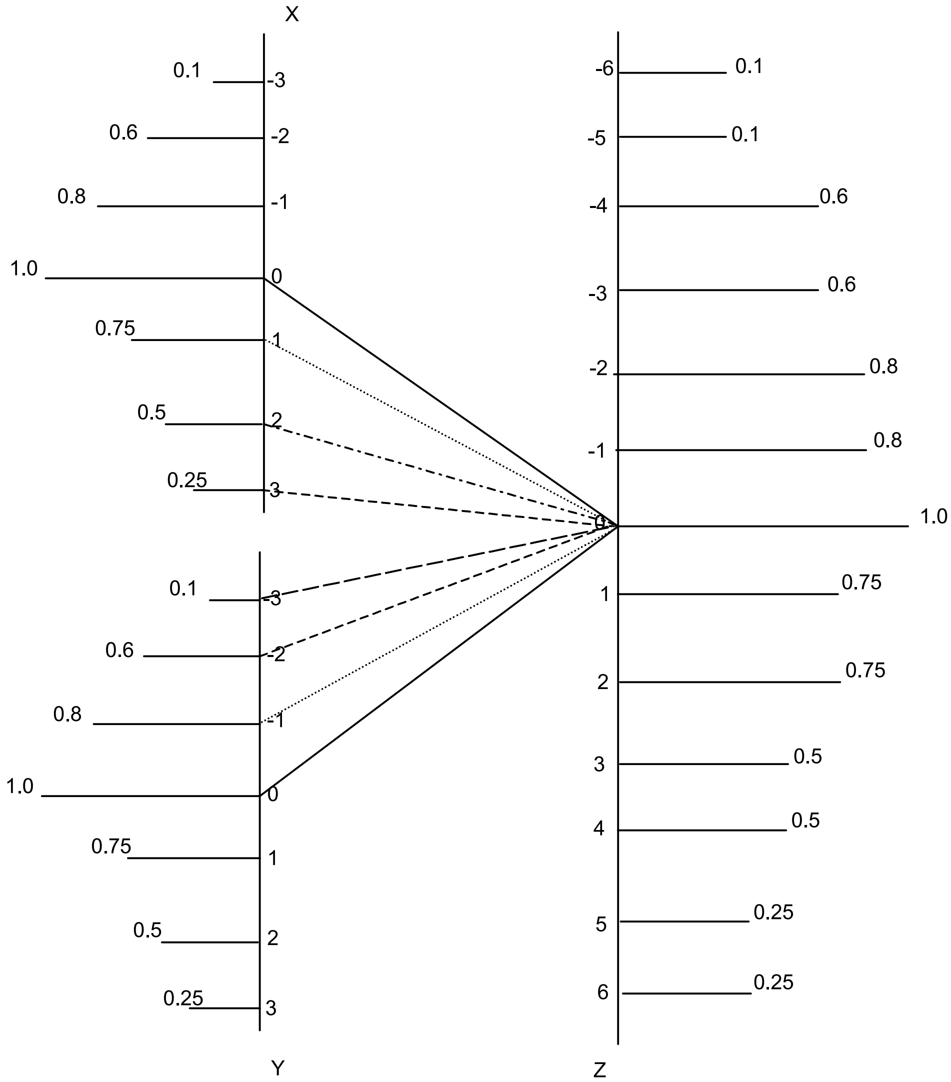
ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ถูกนิยามบนเซตของจำนวนจริงจะได้ว่า

$$\left(\tilde{f}(\boldsymbol{A})\right)(y) = \sup_{x \mid y = f(x)} \boldsymbol{A}(x) \tag{3.31}$$

ที่กล่าวข้างต้นเป็นหลักการขยายซึ่งให้วิธีการที่จะนิยามฟังก์ชันที่มี ฟัซซีเป็นอินพุตและเอาต์พุตนั่นเอง และถ้ามีอินพุตมากกว่า 1 คือ $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ โดยที่ $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ... $x_r \in X_r$ และเราไม่ทราบค่าที่แน่นอนของอินพุตทั้งหมด เราสามารถแปลงการคำนวณนี้เป็น $\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots \boldsymbol{A}_r)$ โดยที่ $\boldsymbol{A}_1$ เป็นฟัซซีเซตบน X_1, $\boldsymbol{A}_2$ เป็นฟัซซีเซตบน X_2,..., $\boldsymbol{A}_r$ เป็นฟัซซีเซตบน X_r ดังนั้น

$$\boldsymbol{B} = \left\{\left(y, \boldsymbol{B}(y)\right) \middle| y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right)\right\}$$

โดยที่ $$\boldsymbol{B}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\left[\boldsymbol{A}_1(x_1), \boldsymbol{A}_2(x_2), \ldots, \boldsymbol{A}_r(x_r)\right] & \text{if } f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{3.32}$$



รูปที่ 3.18 ฟัซซี ***X Y*** และ ***Z***

ตัวอย่างที่ 3.9 จากตัวอย่างที่ 3.7 ถ้าเราทราบว่า เงินเดือนน้อยคือ ฟัซซีเซต ***B*** ซึ่งมีฟังก์ชันสมาชิกเป็น $\boldsymbol{B} = 1/2.5 + 0.75/3 + 0.5/3.5 + 0.25/4 + 0/4.5 + 0/5$ ต้องการทราบว่าพนักงานที่มีเงินเดือนน้อยอายุเท่าไร

$\tilde{f}^{-1}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}[f(20)]/20 + \boldsymbol{B}[f(25)]/25 + \boldsymbol{B}[f(30)]/30 + \boldsymbol{B}[f(35)]/35 + \boldsymbol{B}[f(40)]/40 + \boldsymbol{B}[f(45)]/45 + \boldsymbol{B}[f(50)]/50 + \boldsymbol{B}[f(55)]/55 + \boldsymbol{B}[f(60)]/60 + \boldsymbol{B}[f(65)]/65$

จะได้ $\tilde{f}^{-1}(\boldsymbol{B}) = 1/20 + 1/25 + 0.75/30 + 0.5/35 + 0.5/40 + 0.25/45 + 0.25/50 + 0/55 + 0/60 + 0/65$ ■

ตัวอย่างที่ 3.10 ต้องการหา $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ โดยที่ ***X*** และ ***Y*** เป็นตัวเลขฟัซซี 'ประมาณ 0' รูปที่ 3.18 แสดงฟัซซีเซต ***X Y*** และ ***Z*** ในรูปแสดงบางคู่ของ (x, y) ที่ทำให้เกิด z=0 เท่านั้น เนื่องจากเราต้องการหาผลบวก เราสามารถหาได้ว่าฟัซซีเซต ***Z*** จะมีค่าความเป็นสมาชิกมากกว่า 0 เมื่อ ค่าผลบวกในแนวคิดดั้งเดิมมีค่าตั้งแต่ –6 ถึง 6 นั้นเอง เซตดั้งเดิมของผลบวกที่ 0 เป็น $f^{-1}(0) = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{Z}(0) = \max_{(x,y)\in f^{-1}(0)} \left\{ \begin{array}{l} \min(0.1,0.25), \min(0.6,0.5), \min(0.8,0.75), \min(1,1), \min(0.75,0.8), \\ \min(0.5,0.6), \min(0.25,0.1) \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{Z}(0) = \max\{0.1,0.5,0.75,1,0.75,0.5,0.1\}$$

$$\boldsymbol{Z}(0) = 1$$

การคำนวณหาค่าความเป็นสมาชิกที่จุดอื่นก็ทำเช่นเดียวกับที่ 0 นั่นเอง ■

3.7 ความเป็นฟัซซีของฟัซซีเซต (Fuzziness of Fuzzy Sets)

เราสามารถมองเซตแบบดั้งเดิมให้เป็นฟัซซีเซตชนิดพิเศษได้นั่นคือค่าความเป็นสมาชิกมีค่าได้เพียง 0 และ 1 เซตเหล่านี้มีขอบเขตที่คมชัดนั่นคือไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากเป็นสมาชิกเป็นไม่เป็นสมาชิกอย่างค่อยเป็นค่อยไปและดังนั้นเซตเหล่านี้จึงไม่มีความไม่แน่นอนหรือมีความเป็นฟัซซีเลย และเซตอื่นๆที่ไม่มีความคมชัด จะเกี่ยวข้องกับระดับความเป็นฟัซซี ซึ่งเป็นผลมาจากความไม่คมชัดของขอบเขตนั่นเอง ถ้าเซตมีความไม่คมชัดที่ขอบมากเท่าไร เซตนั้นก็เป็นฟัซซีมากเท่านั้น ฟัซซีเซตต่างกัน มีระดับความเป็นฟัซซีที่ต่างกันได้ และระดับความเป็นฟัซซีเรียกว่า ความเป็นฟัซซีของฟัซซีเซต ให้ระดับความเป็นฟัซซีของแต่ละฟัซซีเซตเป็นเลขที่มีแต่ค่าบวกซึ่งการให้ค่านี้เรียกว่าการวัดความเป็นฟัซซี (measure fuzziness) นั่นคือค่าความเป็นฟัซซีของฟัซซีเซต***A*** เป็น $f(\boldsymbol{A})$ โดยที่

$$f: \tilde{\mathcal{P}}(x) \rightarrow \mathfrak{R}^{+} \tag{3.33}$$

ในการวัดนี้มีสิ่งที่จำเป็น 3 สิ่งคือ

1. $f(\boldsymbol{A})$ = 0 ก็ต่อเมื่อ ***A*** เป็นเซตแบบดั้งเดิม
2. $f(\boldsymbol{A})$ จะมีค่ามากที่สุดก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{A}(x) = 0.5$ สำหรับทุก $x \in X$
3. $f(\boldsymbol{A}) \leq f(\boldsymbol{B})$ เมื่อ ***A*** มีความคมชัดที่ขอบเขตมากกว่า ***B*** ซึ่งหมายความว่า

$$\boldsymbol{A}(x) \le \boldsymbol{B}(x) \text{ เมื่อ } \boldsymbol{B}(x) \le 0.5$$
$$\text{และ} \quad \boldsymbol{A}(x) \ge \boldsymbol{B}(x) \text{ เมื่อ } \boldsymbol{B}(x) \ge 0.5$$

วิธีที่จะวัดความเป็นฟัซซีของเซตมีอยู่ด้วยกันหลายวิธีแต่เราจะกล่าวถึงวิธีที่วัดความแตกต่างระหว่าง เซตและคอมพรีเมนต์ของเซต(ตามความหมายของการดำเนินการมาตรฐาน) นั้น ซึ่งเราเลือก Hamming distance มาใช้วัดความแตกต่างนั่นคือ ความแตกต่างของแต่ละจุดเป็น

$$\left| \boldsymbol{A}(x) - (1\text{-}\boldsymbol{A}(x)) \right| = \left| 2\boldsymbol{A}(x) - 1 \right| \quad \text{สำหรับทุก } x \in X \tag{3.34}$$

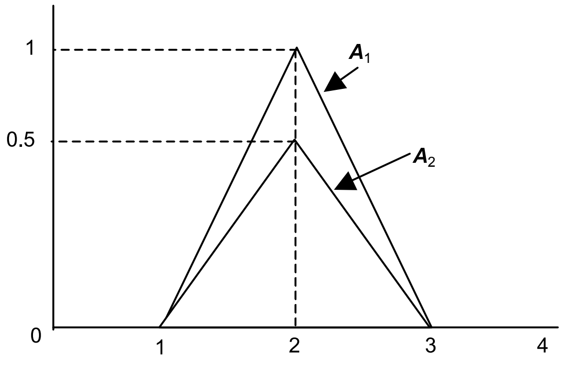
และเนื่องจากว่าถ้าเซตนั้นแตกต่างจากคอมพรีเมนต์ของเซตนั้นมากแสดงว่ามีความเป็นฟัซซีน้อย ดังนั้นการวัดความเป็นฟัซซีของแต่ละจุดจะเป็น 1 – $\left| 2\boldsymbol{A}(x) - 1 \right|$ ดังนั้น

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{x \in X} \left(1 - \left|2\boldsymbol{A}(x) - 1\right|\right) \tag{3.35}$$

ซึ่งค่า $f(\boldsymbol{A})$ จะมีค่าอยู่ในช่วงปิด $[0, |X|]$ นั่นคือถ้าเป็นเซตแบบดั้งเดิม $f(\boldsymbol{A})$ = 0 และถ้า $\boldsymbol{A}(x)$ = 0.5 สำหรับทุก x จะทำให้ $f(\boldsymbol{A})$ = $|X|$ นั่นเอง ถ้า X เป็นช่วงปิด $[a, b]$ ฟังก์ชันนี้จะเป็น

$$f(\boldsymbol{A}) = \int_a^b \left(1 - \left|2\boldsymbol{A}(x) - 1\right|\right) dx = b - a - \int_a^b \left|2\boldsymbol{A}(x) - 1\right| dx \tag{3.36}$$

ตัวอย่างที่ 3.11 ต้องการวัดค่าความเป็นฟัซซีของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}_1$ และ $\boldsymbol{A}_2$ ที่แสดงในรูปที่ 3.19 โดยที่เซตสากล X เป็นช่วงปิด $[0,4]$



รูปที่ 3.19 ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}_1$ และ $\boldsymbol{A}_2$

ดังนั้น $f(\boldsymbol{A}_1) = 4 - \int_0^1 dx - \int_1^2 |2x - 3| dx - \int_2^3 |5 - 2x| dx - \int_3^4 dx = 1$

$f(\boldsymbol{A}_2) = 4 - \int_0^1 dx - \int_1^2 |x - 2| dx - \int_2^3 |2 - x| dx - \int_3^4 dx = 1$

ถึงแม้ว่าในตัวอย่างนี้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}_1$ และ $\boldsymbol{A}_2$ จะเป็นคู่นอร์แมลซึ่งกันและกัน และทั้งสองมีค่าความเป็นฟัซซีเท่ากันไม่ได้หมายความว่าเซตที่เป็นคู่นอร์แมลซึ่งกันและกัน จะมีค่าความเป็นฟัซซีเท่ากัน ซึ่งในตัวอย่างนี้เป็นเพียงเหตุบังเอิญเท่านั้น ■

ความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม

Classical Relations

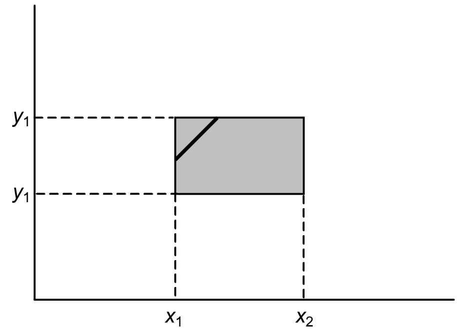
4

เนื่องจากการประยุกต์ใช้ฟัซซีเซตที่ใช้กันมากทั้งในอดีตและปัจจุบันคือการหาเหตุผลหรือการอนุมาน ซึ่งวิธีการทำอนุมานในฟัซซีเซตจะต้องรู้ถึงความสัมพันธ์ของฟัซซีเซตด้วย และในบทนี้จะทบทวนความสัมพันธ์แบบดั้งเดิมที่เราจะใช้ในการอ้างอิงถึงในบทที่ 5

4.1 บทนำของความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม

การมีหรือไม่มีการรวมตัว (association) การตอบโต้ (interaction) หรือ การเชื่อมโยง (connection) ระหว่างสมาชิกของเซตตั้งแต่ 2 เซตขึ้นไปจะอยู่ในลำดับจำเพาะ เช่น คน 2 คนคือ J และ C เกี่ยวพันกัน <J,C> จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ เช่น เป็นพี่ของ (brother of) โดยปกติความสัมพันธ์จะถูกอ่านจากซ้ายไปขวาดังนั้นจึงเป็น J เป็นพี่ของ C

ในบทที่ 2 เราได้พูดถึงคาร์ทีเซียนโพรดักส์ ของเซต A และเซต B ว่าเป็น $A \times B = \{<a, b> | a \in A$ และ $b \in B\}$ โดยที่ $<a, b> \neq <b, a>$ ดังนั้นคาร์ทีเซียนโพรดักส์ของ $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ จะเป็นทุกจุดที่อยู่ในกรอบในรูป 4.1

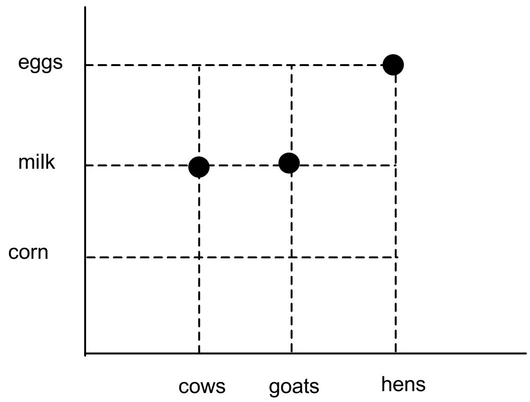


รูปที่ 4.1 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ และ ความสัมพันธ์ $x = y$

ความสัมพันธ์ (R) ระหว่าง สมาชิกของเซต X และ Y เป็นซับเซตของคาร์ทีเซียนโพรดักส์ของเซต X และเซต Y นั่นคือ $R \subseteq X \times Y$ สมาชิกใน R มีความสัมพันธ์กัน และส่วนอื่นที่ไม่ได้อยู่ใน R ไม่มีความสัมพันธ์กัน จากรูป 4.1 เส้นในกรอบคือเส้นที่บ่งบอกถึงคู่ (x, y) ที่เท่ากันหรือเรียกว่าความสัมพันธ์เท่าเทียม (equality relation) ซึ่งความสัมพันธ์นี้เป็นซับเซตของ $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ นั่นเอง ถ้าความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับเซต 3 เซต เรียกว่าความสัมพันธ์ไตรภาค (ternary relation) ถ้า 4 เซตเรียกว่า ความสัมพันธ์จตุรภาค (quaternary relation) และถ้า n เซตเรียกว่าความสัมพันธ์ n มิติ (n-dimension relation) ซึ่งคือ $R \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ในบางครั้งเซตทั้ง n เซตเป็นเซตที่เท่ากันคือ X จะได้ $R \subseteq X^n$ เช่นความสัมพันธ์ที่เกิดจากเซตบนเส้นจำนวนจริง 3 เซต ก็จะเป็น $R \subseteq \Re^3$

4.2 การแทน (representation) ความสัมพันธ์

การแทนแบบแรก คือการแทนในระบบพิกัด เช่นความสัมพันธ์ เป็นผลผลิตของ $R = \{$<eggs, hens>, <milk, cows>, <milk, goats>$\}$ แสดงในรูป 4.2 ซึ่งในรูปจะไม่มีจุดที่แกนของ corn เลย เนื่องจากไม่ได้อยู่ในความสัมพันธ์



รูปที่ 4.2 ความสัมพันธ์ เป็นผลผลิตของ

การแทนแบบที่สอง คือการแทนโดยใช้เมตริกซ์ (matrix) นั่นคือค่าฟังก์ชันลักษณะของความสัมพันธ์คือ

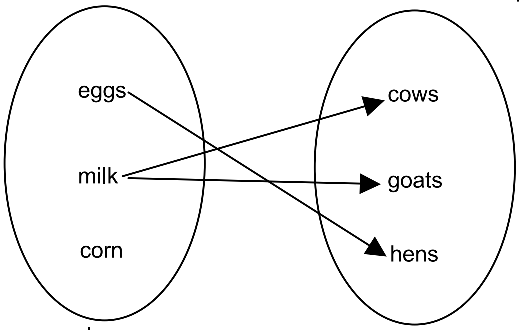
$$\mathcal{X}_R(x) = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } < x, y > \in R \\ 0 \text{ ถ้า } < x, y > \notin R \end{cases} \tag{4.1}$$

นำค่านี้ใส่ในเมตริกซ์ ดังนั้นความสัมพันธ์ เป็นผลผลิตของ จากตัวอย่างข้างบน เขียนเป็นเมตริกซ์ได้เป็น

R	cows	goats	hens
eggs	0	0	1
milk	1	1	0
corn	0	0	0

ถ้าความสัมพันธ์เป็น n มิติจะเขียนเป็นเมตริกซ์หรือแถวลำดับ n มิติ

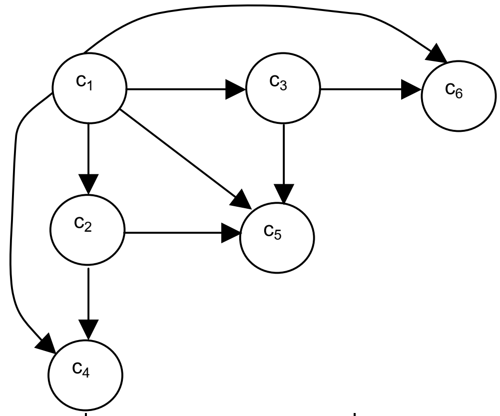
การแทนแบบที่สาม คือการแทนแบบการส่ง (mapping) ซึ่งเป็นการส่งจากสมาชิกในเซตแรกไปหาสมาชิกในเซตที่สองซึ่งสมาชิกในเซตแรกสามารถถูกส่งไปหาสมาชิกในเซตที่สองได้มากกว่า 1 ตัว ตัวอย่างของความสัมพันธ์เป็นผลผลิตของจากตัวอย่างข้างบน แสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ เป็นผลผลิตของ

สำหรับความสัมพันธ์แบบทวิภาคที่สมาชิกทุกตัวในเซตที่หนึ่งถูกส่งไปยังสมาชิกในเซตที่สอง เราเรียกว่าฟังก์ชัน นั่นคือ $R \subseteq A \times B$ และเป็นฟังก์ชันด้วยคือ $R\colon A \rightarrow B$

การแทนแบบที่สี่ คือการแทนแบบกราฟระบุทิศทาง (directed graph) โดยปกติจะแทนความสัมพันธ์ทวิภาคของเซตเหมือนคือ $R \subseteq X^2$ และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ (ก) สมาชิกแต่ละตัวของเซต X ถูกแทนด้วยจุดต่อ (node) ในกราฟ และ (ข) การเชื่อมต่อโดยตรงระหว่างจุดต่อ บ่งบอกถึงคู่ของสมาชิกที่อยู่ในเซตความสัมพันธ์ หรือคือสมาชิกที่มีความสัมพันธ์กัน เช่นความสัมพันธ์ เป็นเงื่อนไขของ ที่แสดงในรูปที่ 4.4 สามารถอ่านได้ว่า c_1 เป็นเงื่อนไขของ c_i โดยที่ i ไม่เท่ากับ 1 หรือ c_3 เป็นเงื่อนไขของ c_6 และคู่อื่นก็อ่านแบบเดียวกัน



รูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์เป็นเงื่อนไขของ

4.3 การดำเนินการของความสัมพันธ์ทวิภาค (Operations on Binary Relations)

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นเซตชนิดหนึ่ง แนวคิดทุกอย่างในเรื่องเซตสามารถนำมาใช้กับความสัมพันธ์ได้ แต่อย่างไรก็ตามยังมีการดำเนินการอื่นที่ใช้ในความสัมพันธ์เท่านั้น นั่นคือ ความสัมพันธ์ผกผัน (inverse) และการประกอบ (composition)

4.3.1 ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse Relation)

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ทวิภาค ($R \subseteq X \times Y$) แล้วคำนิยามของความสัมพันธ์ผกผัน (R^{-1}) คือการเปลี่ยนลำดับของสมาชิกในแต่ละคู่ที่อยู่ในความสัมพันธ์ R นั่นคือ

$$R^{-1} \subseteq Y \times X \tag{4.2}$$

ดังนั้น $(R^{-1})^{-1} = R$ จากตัวอย่างเรื่องความสัมพันธ์ เป็นผลผลิตของ ในหัวข้อ 4.2 จะได้ $R^{-1} = \{$ <cows, milk>, <goats, milk>, <hen, eggs>$\}$ และเนื่องจากสมาชิกทุกตัวในเซตแรกของ R^{-1} ถูกส่งทอดไปยังสมาชิกในเซตที่สองทำให้ R^{-1} เป็นฟังก์ชันในขณะที่ R ไม่เป็นฟังก์ชัน

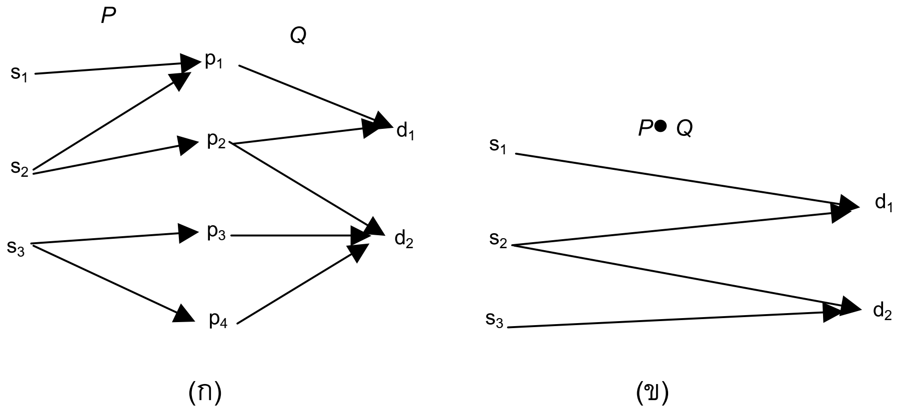
4.3.2 การประกอบ (Composition) ของความสัมพันธ์

ถ้ารวมความสัมพันธ์ทวิภาค 2 อัน ที่เข้ากันได้ (compatible) จะได้ความสัมพันธ์ทวิภาคอีกอันหนึ่ง นั่นคือ

$$P \subseteq X \times Y$$

$$Q \subseteq Y \times Z$$

P และ *Q* จะเข้ากันได้ถ้าเซตที่สองใน *P* เป็นเซตเดียวกันกับเซตแรกใน *Q* ดังนั้นการประกอบของทั้งสองความสัมพันธ์ เป็น $P \bullet Q$ ถูกนิยามเป็น $R = P \bullet Q \subseteq X \times Z$ ที่ $\langle x, z \rangle \in R$ ก็ต่อเมื่อมีสมาชิก *y* ในเซต *Y* ที่อยู่ในความสัมพันธ์ *P* ($\langle x, y \rangle \in P$) และอยู่ในความสัมพันธ์ *Q* ($\langle y, z \rangle \in Q$) ดังรูปที่ 4.5 ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ *P* ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอาการ (s_1, s_2, s_3) กับคนไข้ (p_1, p_2, p_3, p_4) และ *Q* เป็นความสัมพันธ์ระหว่างคนไข้ (p_1, p_2, p_3, p_4) กับโรค (d_1, d_2) และผลสุดท้ายความสัมพันธ์ระหว่างอาการ (s_1, s_2, s_3) กับโรค (d_1, d_2) ซึ่งเกิดจากการประกอบของ *P* และ *Q* หรือเป็น $P \bullet Q$ นั่นเอง



รูปที่ 4.5 (ก) ความสัมพันธ์ *P* และ *Q* (ข) ความสัมพันธ์ $P \bullet Q$

การประกอบของความสัมพันธ์มีคุณสมบัติดังนี้คือ ให้ความสัมพันธ์ *P* และ *Q* เข้ากันได้และความสัมพันธ์ *Q* และ *R* ก็เป็นความสัมพันธ์ที่เข้ากันได้ ดังนั้น

$$(P \bullet Q) \bullet R = P \bullet (Q \bullet R) \tag{4.3}$$

$$P \bullet Q \neq Q \bullet P \tag{4.4}$$

$$(P \bullet Q)^{-1} = Q^{-1} \bullet P^{-1} \tag{4.5}$$

4.4 ความสัมพันธ์ที่เท่ากัน และเข้ากันได้ (Equivalence and Compatibility Relations)

ความสัมพันธ์ที่เกิดจากเซตเดียว *X* เช่นเป็นซับเซตของ X^2 มีความสัมพันธ์ที่มีความสำคัญอยู่ 3 ความสัมพันธ์ นั่นคือ ความสัมพันธ์ที่เท่ากัน (equivalence relation) ความสัมพันธ์ที่เข้ากันได้ (compatibility relation) และความสัมพันธ์ลำดับ (ordering relation)

ความสัมพันธ์ที่เท่ากันของเซตใดๆ *X* หมายความว่า สมาชิกของเซต *X* จะมีความสัมพันธ์กันถ้าสมาชิกเท่ากัน ในเรื่องของลักษณะสมบัติบางอย่างที่ถูกระบุไว้

ตัวอย่างที่ 4.1 ให้เซต *X* เป็นเซตของนักเรียน $\{A,B,C,D,G,J,L,M,N,P\}$ และลักษณะสมบัติของนักเรียนเหล่านี้แสดงในตารางที่ 4.1 ถ้าเลือกลักษณะสมบัติบางอย่างจาก (เกรด, ภาควิชา, อายุ, เป็นนักเรียนเต็มเวลาหรือบางเวลา(FT/PT)) หรือลักษณะสมบัติผสม เราสามารถใช้สิ่งที่เลือกไว้มานิยามความสัมพันธ์ที่เท่ากันได้ สมมุติว่าเราเลือก เกรด เป็นลักษณะสมบัติที่จะบอกว่าเป็นความสัมพันธ์ที่เท่ากันจะได้ว่า B เท่ากับ C D เท่ากับ G หรือ A ไม่เท่ากับ B เป็นต้น ซึ่งความสัมพันธ์นี้ถูกเรียกว่า

ความสัมพันธ์มีเกรดที่เท่ากัน และจะเห็นได้ชัดว่า <A, A>, <B, B>, <C, C>,... ต้องอยู่ในความสัมพันธ์ มีเกรดเท่ากัน ด้วยซึ่งหมายความว่าทุกคนเท่ากันกับตัวเองในเรื่องของเกรด ■

ถ้าความสัมพันธ์ที่มีคู่ที่เป็นสมาชิกที่เป็นตัวเดียวกันเช่น <A, A> แสดงว่าความสัมพันธ์นี้เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive relation) ดังนั้นความสัมพันธ์ มีเกรดเท่ากัน ในตัวอย่างที่ 4.1 เป็นความสัมพันธ์สะท้อน ถ้าความสัมพันธ์นั้นมีสมาชิกที่เป็นคู่และคู่ผกผันของคู่นั้น เช่น <B, C> และ <C, B> เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นสมมาตร (symmetry) และถ้าความสัมพันธ์มีคู่ที่สมาชิกในคู่ ตัวที่สองมีความสัมพันธ์กับตัวอื่น และสมาชิกตัวแรกก็มีความสัมพันธ์กับตัวนั้นด้วย เช่น <A, L> <L, N> และ <A, N> เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์เดียวกัน แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็น ความสัมพันธ์ถ่ายทอด (transitive relation) ซึ่งความสัมพันธ์ที่เท่ากันเป็นทั้งความสัมพันธ์สะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

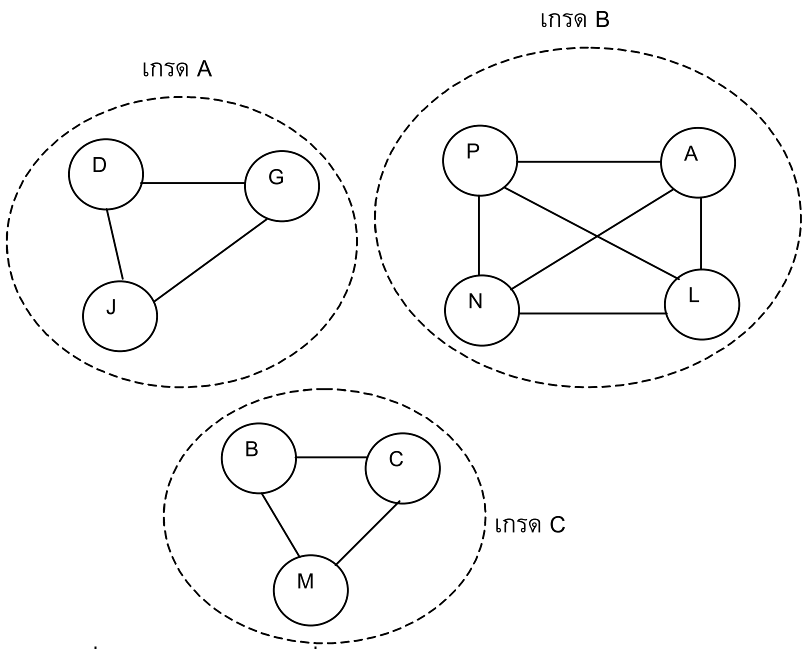
ตารางที่ 4.1 เซตนักเรียน

นักเรียน	เกรด	ภาควิชา	อายุ	FT/Pt
A	B	ชีววิทยา	19	FT
B	C	ฟิสิกส์	19	FT
C	C	คณิตศาสตร์	20	PT
D	A	คณิตศาสตร์	19	FT
G	A	คณิตศาสตร์	19	FT
J	A	บริหารธุรกิจ	21	PT
L	B	เคมี	21	PT
M	C	ชีววิทยา	19	FT
N	B	ชีววิทยา	19	FT
P	B	บริหารธุรกิจ	21	PT

เราสามารถเขียนนิยามของความสัมพันธ์เหล่านี้ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ดังนี้ ให้ R เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบนเซต X

1. R เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive relation) ก็ต่อเมื่อ <*x*, *x*> $\in R$ สำหรับ แต่ละ $x \in R$ ถ้ามี x อย่างน้อย 1 ตัวที่ <*x*, *x* > ไม่อยู่ใน R เรียกว่า irreflexive แต่ถ้าทุก x ที่ <*x*, *x*> ไม่อยู่ใน R เรียกว่า antireflexive
2. R เป็นสมมาตร (symmetry) ก็ต่อเมื่อแต่ละคู่ของสมาชิกใน X ซึ่ง <*x*, *y*> และ <*y*, *x*> เป็นสมาชิกใน R ทั้งคู่หรือไม่เป็นทั้งคู่ ถ้ากรณีที่กล่าวข้างต้นไม่เป็นจริงสำหรับบางคู่ x y เรียกว่า asymmetric ถ้า <*x*, *y*> และ <*y*, *x*> อยู่ใน R และ $x = y$ สำหรับทุกคู่ <*x*, *y*> แสดงว่าเป็น antisymmetry แต่ถ้ามีแต่ <*x*, *y*> หรือ <*y*, *x*> อยู่ใน R เมื่อ $x \neq y$ เป็น strictly antisymmetric
3. R เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด (transitive relation) ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก x y และ z ใน X ที่ <*x*,*z*> เป็นสมาชิกใน R เมื่อ <*x*, *y*> และ <*y*, *z*> เป็นสมาชิกของ R ทั้งคู่ ถ้าที่กล่าวข้างต้นไม่

เป็นจริงสำหรับ <*x,z*> บางคู่แสดงว่าเป็น nontransitive และถ้า <*x,z*> ไม่อยู่ใน *R* แต่ <*x, y*> และ <*y, z*> เป็นสมาชิกของ *R* ทั้งคู่ แสดงว่าเป็น antitransitive



รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ที่เท่ากัน (มีเกรดเท่ากัน) จากตัวอย่าง 4.1

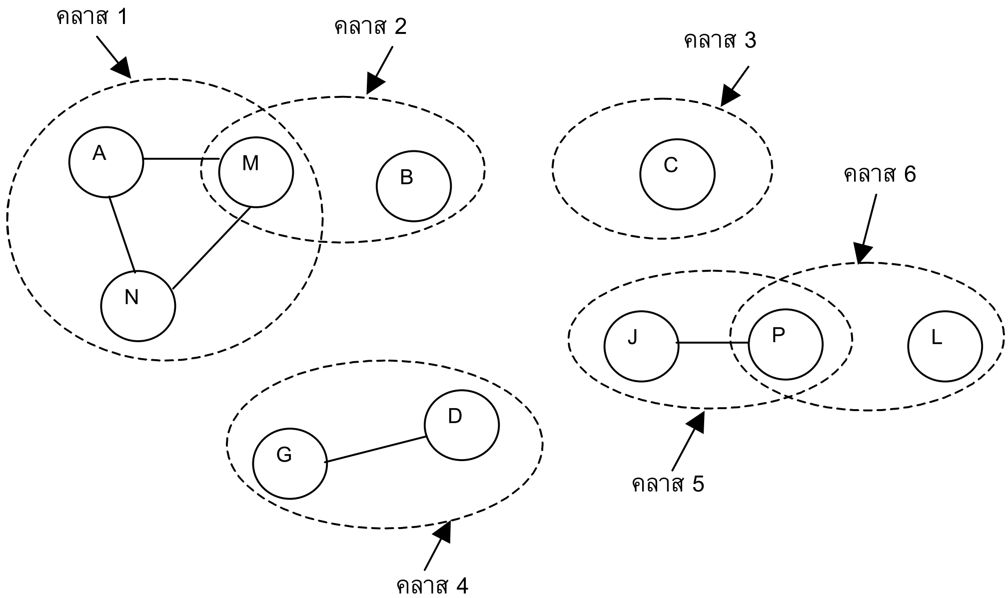
ความสัมพันธ์ใดที่มีครบทั้งสามข้อเป็นความสัมพันธ์ที่เท่ากัน (equivalence relation) ตารางที่ 4.2 แสดงความสัมพันธ์ที่เท่ากัน (มีเกรดเท่ากัน) จากตัวอย่าง 4.1 ซึ่ง 1 แสดงถึงมีความสัมพันธ์กัน และ 0 คือไม่มีความสัมพันธ์กัน และรูปที่ 4.6 แสดงความสัมพันธ์นี้ในรูปของกราฟมีทิศทางโดยที่ความสัมพันธ์สะท้อน ซึ่งโดยปกติจะเป็นเส้นที่พุ่งเข้าหาตัวเอง ถูกละไว้ในฐานที่เข้าใจและทิศทางก็ถูกละไว้เช่นกันเพราะแต่ละคู่มีทิศทางที่ไปทั้งสองข้างนั่นเอง จากรูปเห็นว่าความสัมพันธ์นี้จะพาร์ทิชัน

ตารางที่ 4.2 ความสัมพันธ์มีเกรดเท่ากัน

R	A	B	C	D	G	J	L	M	N	P
A	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
B	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
C	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
G	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
J	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
L	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
M	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
N	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
P	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1

เซตของนักเรียนโดยที่นักเรียนในแต่ละซับเซตจะมีความสัมพันธ์กันโดยที่ จะไม่มีความสัมพันธ์กับนักเรียนในซับเซตอื่น ซับเซตเหล่านี้ถูกเรียกว่า คลาสที่เท่ากัน (equivalence class) เช่นนักเรียนที่มีเกรด B ทำให้เกิดคลาสที่เท่ากัน ในความสัมพันธ์ มีเกรดเท่ากัน

ถ้าความสัมพันธ์ใดที่เป็นความสัมพันธ์สะท้อน และสมมาตร แต่ไม่จำเป็นจะต้องเป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด เป็นความสัมพันธ์ที่เข้ากันได้ (compatibility relation) นั่นคือสมาชิกในเซตที่มีความสัมพันธ์ที่เข้ากันได้ถูกมองว่าเข้ากันได้(ในทางที่กำหนดไว้)แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ตัวอย่างเช่น นักเรียน 2 คนจากตาราง 4.1 เข้ากันได้ถ้าทั้งสองมีข้อแตกต่างกันไม่มากกว่า 1 ลักษณะสมบัติ จากทั้ง 4 ลักษณะสมบัติ รูปที่ 4.7 แสดงความสัมพันธ์ที่เข้ากันได้ตามข้อแตกต่างของลักษณะสมบัติที่กล่าวไปแล้ว จะเห็นว่าเซตของนักเรียนถูกแบ่งเป็นซับเซตของนักเรียนที่เข้ากันได้ ซึ่งซับเซตเหล่านี้เรียกว่า คลาสที่เข้ากันได้ (compatibility class) และคลาสที่เข้ากันได้ ที่ไม่ได้อยู่ในคลาสที่เข้ากันได้อื่นถูกเรียกว่า แมกซิแมลคลาสที่เข้ากันได้ (maximal compatibility class) ซึ่งในรูปมีทั้งหมด 6 แมกซิแมลคลาสที่เข้ากันได้คือ คลาส 1 ถึง 6 เช่น A M และ N เป็นนักเรียนที่เข้ากันได้ตามแนวคิดที่ให้ และมีแต่ M เท่านั้นที่เข้ากันได้กับ B และ C ไม่เข้ากันได้กับนักเรียนคนอื่นเลยยกเว้นตัวเอง ดังนั้น C จึงสร้างแมกซิแมลคลาสที่เข้ากันได้ของตัวเอง



<u>รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ที่เข้ากันที่ถูกกำหนดในเซตของนักเรียนจากตารางที่ 4.2</u>

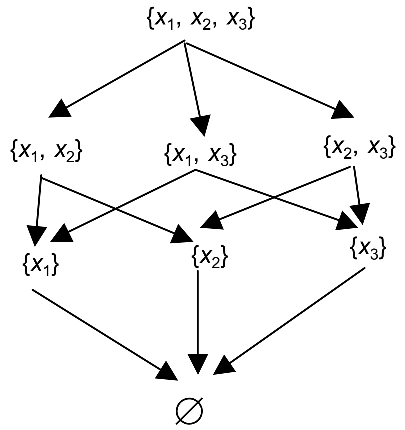
4.5 ลำดับบางส่วน (Partial Ordering)

ในชีวิตประจำวันเราเจอการเรียงลำดับมากมายเช่นลำดับของวิชาที่นักศึกษาต้องลงเรียนก่อนหลัง ลำดับของคนโดยเรียงจากอายุ ส่วนสูง น้ำหนัก เงินเดือน หรืออื่นๆ ซึ่งเราสามารถสังเกตได้ง่ายๆว่าความสัมพันธ์ลำดับ (ordering relation) ต้องเป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด และต้องไม่สมมาตร นั่นคือ ถ้า x มาก่อน y ตามการเรียงลำดับบางอย่าง แล้ว y ไม่สามารถมาก่อน x ได้ตามการเรียงลำดับแบบเดียวกัน และถ้า x มาก่อน y และ y มาก่อน z แล้วแสดงว่า x มาก่อน z นั่นเอง

ชนิดของความสัมพันธ์ลำดับที่เป็นพื้นฐานที่สุดคือความสัมพันธ์ลำดับบางส่วน (partial ordering) ซึ่งคือความสัมพันธ์ที่ สะท้อน (reflexive) อสมมาตร (asymmetry หรือ antisymmetry) และถ่ายทอด (transitive) ความสัมพันธ์ของเซต X จะเป็นความสัมพันธ์ที่อสมมาตรก็ต่อเมื่อสำหรับ x และ y ใดๆใน X ถ้า $\langle x, y\rangle \in R$ และ $\langle y, x\rangle \in R$ แล้ว $x = y$

เราใช้ $x \leq y$ อธิบายความสัมพันธ์ลำดับบางส่วน (R) ของสมาชิก x และ y ในเซตใดๆ ซึ่งหมายความว่า x มาก่อน y หรือ x เป็นตัวนำหน้า (predecessor) ของ y หรือ y มาทีหลัง x หรือ y เป็นตัวตามหลัง (successor) ของ x ในความสัมพันธ์ ซึ่งสมาชิกใน R จะเป็น $<x, y>$ ถ้า $x \leq y$ และไม่มี $z \in X$ ที่ทำให้ $x \leq z$ และ $z \leq y$ แสดงว่า x เป็นตัวนำหน้าทันทีของ y หรือ y เป็นตัวตามหลังทันทีของ x

เราสามารถเรียงลำดับของสมาชิกของพาวเวอร์เซตของ X ($\mathcal{P}(X)$) ได้โดยความสัมพันธ์ของการเป็นเซตย่อย (inclusion) นั่นคือสำหรับ $<A, B>$ ของเซต A และ B ใน $\mathcal{P}(X)$ A จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ B ($A \leq B$) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และในการที่จะแสดงว่าการเรียงลำดับนี้เป็นบางส่วน ต้องแสดงว่ามีคุณสมบัติสะท้อน ถ่ายทอด และอสมมาตร นั่นคือ $\leq$ มีสะท้อนเนื่องจาก $A \subseteq A$ สำหรับเซตใดๆ และ $\leq$ มีการถ่ายทอดเนื่องจาก $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้วทำให้ $A \subseteq C$ ส่วนคุณสมบัติสุดท้ายคืออสมมาตรนั้น ก็มีเนื่องจาก ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้วแสดงว่า $A = B$ ความสัมพันธ์ลำดับบางส่วนของสมาชิกของ $\mathcal{P}(\{x_1, x_2, x_3\})$ แสดงในแผนภาพในรูปที่ 4.8 ซึ่งแต่ละซับเซตจะเชื่อมต่อกับตัวนำหน้าทันทีและตัวตามหลังทันทีเสมอ เราเรียกแผนภาพนี้ว่า Hasse diagrams ตัวอย่างเช่น $\{x_1, x_2\} \leq \{x_1, x_2, x_3\}$ นั่นเอง



รูปที่ 4.8 Hasse diagram ของ ความสัมพันธ์ลำดับบางส่วนของสมาชิกของ $\mathcal{P}(\{x_1, x_2, x_3\})$

ความสัมพันธ์ลำดับเชิงเส้น (linear ordering) เป็นความสัมพันธ์ลำดับบางส่วนที่นอกเหนือจากจะต้องเป็นความสัมพันธ์สะท้อน ถ่ายทอด และ อสมมาตรแล้วจะต้องมีคุณสมบัตินี้คือ $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ สำหรับทุก a และ $b \in X$

ให้ X เป็นซับเซตในเซต $\Re$ ถ้ามี u ที่ทำให้ $x \leq u$ สำหรับทุก x ใน X เราเรียก u ว่าเป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ X (หรือ X มีขอบเขตบน) ถ้าไม่มีตัวเลขใดที่เล็กกว่า u เป็นขอบเขตบนของ X แล้ว u เป็น ขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (least upper bound) หรือ ซูพรีมัม (supremum) ของ X ซึ่งเขียนได้เป็น

$$u = \sup X \tag{4.6}$$

และถ้า $\sup X$ เป็นสมาชิกใน X แล้วค่านี้จะเป็นตัวเลขที่มากที่สุด (maximum) ใน X ซึ่งเป็น

$$u = \max X \tag{4.7}$$

ถ้ามี l ที่ทำให้ $l \leq x$ สำหรับทุก x ใน X เราเรียก l ว่าเป็น ขอบเขตล่าง (lower bound) ของ X (หรือ X มีขอบเขตล่าง) และถ้าไม่มีตัวเลขใดที่มากกว่า l เป็นขอบเขตล่าง เราเรียก l ว่าเป็นขอบเขตล่างที่มากที่สุด (greatest lower bound) หรืออินฟิมัม (infimum) ของ X ซึ่งเขียนได้เป็น

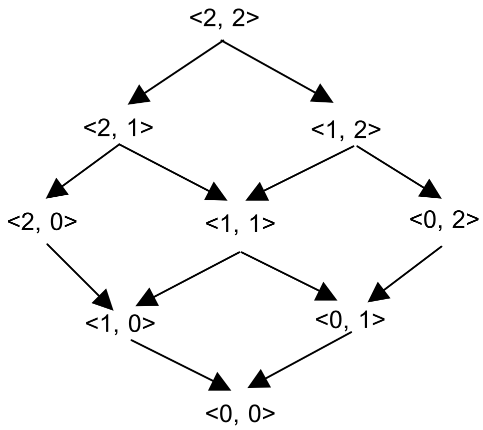
$$l = \inf X \tag{4.8}$$

และถ้า $\inf X$ เป็นสมาชิกของ X แล้วค่านี้จะเป็นตัวเลขที่น้อยที่สุด (minimum) ใน X ซึ่งเป็น

$$l = \min X \tag{4.9}$$

เช่นถ้า $X = [0, 1]$ แล้ว X จะมีขอบเขตทั้งบนและล่างนั่นคือ $\sup X = \max X = 1$ และ $\inf X = \min X = 0$ และถ้า $X = (0, 1)$ แล้ว X จะมีขอบเขตทั้งบนและล่างนั่นคือ $\sup X = 1$และ $\inf X = 0$ จะไม่มีค่า min และ max

เราหาความสัมพันธ์ลำดับบางส่วนของคาร์ทีเชียนโพรดักส์ของเซต n เซตได้ดังนี้ ให้ $<a_1, a_2, \ldots a_n>$ และ $<b_1, b_2, \ldots b_n>$ ของคาร์ทีเชียนโพรดักส์ แล้ว $<a_1, a_2, \ldots a_n> \leq <b_1, b_2, \ldots b_n>$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq b_n$ ซึ่งการกำหนดแบบนี้เราสามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายว่า มีคุณสมบัติ สะท้อน ถ่ายทอด และอสมมาตร รูปที่ 4.9 แสดงความสัมพันธ์ลำดับบางส่วนของสมาชิกของ $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$



รูปที่ 4.9 Hasse diagram ของสมาชิกของ $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$

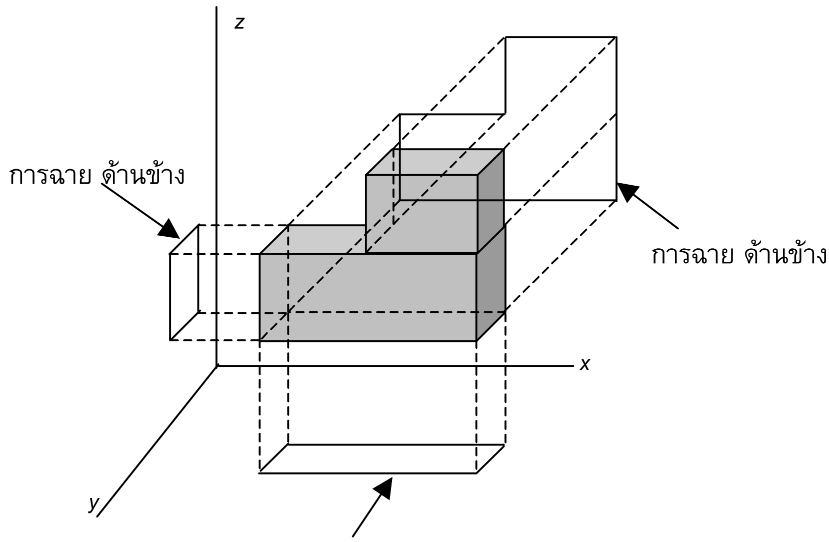
ให้ $\vec{y} = (y_j \mid j \in J)$ และ $\vec{x} = (x_i \mid i \in N_n)$ และ $J \subset N_n$ และ $|J| = r$ และ $\vec{y}$ เป็นซับซีเควน (subsequence) ของ $\vec{x}$ ($\vec{y} \prec \vec{x}$) ถ้า $y_j = x_j$ สำหรับทุก $j \in J$ ตัวอย่างเช่น $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ และ $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ที่ $J = (2,3,6)$ ดังนั้น $\vec{y} \prec \vec{x}$ ก็ต่อเมื่อ $y_1 = x_2$, $y_2 = x_3$ และ $y_3 = x_6$

4.6 การฉาย (Projections) และ การขยายแบบไซลินดิก (Cylindric Extensions)

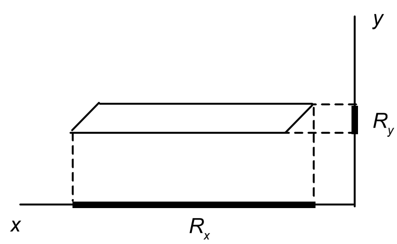
การฉาย (Projection) ของความสัมพันธ์ n มิติ (R) ไปยังซับเซตที่กำหนดไว้ใน k มิติ โดยที่ $1 \leq k \leq n$ เป็นการดำเนินการที่สร้าง ความสัมพันธ์ k มิติที่เข้ากันได้กับ R ความสัมพันธ์ k มิติประกอบด้วย k ทูเพิล (tuple) ทุกอันที่ได้มาจาก n ทูเพิลใน R โดยไม่สนใจส่วนที่เหลือใน $n - k$ มิติ รูปที่ 4.10(ก) แสดงตัวอย่างของการฉายวัตถุใน 3 มิติไปยัง 2 มิติ ซึ่งทุกจุดในวัตถุใน 3 มิติ ถูกมองว่ามีความสัมพันธ์กันในยูคริเดียนสเปซ (Euclidean space) 3 มิติ และแต่ละ 2 มิติของการฉายอาจถูกฉายไปยังมิติอื่นที่เกี่ยวข้องได้ แสดงในรูปที่ 4.10(ข)

อีกตัวอย่างของการฉายคือ สมมุติให้ R เป็นความสัมพันธ์ 3 มิติซึ่งเป็นซับเซตของ $\{0,1\}^3$ ความสัมพันธ์ R เป็น

R:			
	0	0	1
	0	1	1
	1	1	0
	1	1	1



(ก)



(ข)

<u>รูปที่ 4.10 (ก) การฉายความสัมพันธ์ 3 มิติไปยัง 2 มิติ (ข) การฉาย 2 มิติไปยัง 1 มิติ</u>

การฉายไปยัง 2 มิติจะเป็นการเลือกมา 2 จาก 3 มิติ ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ R_{12} R_{13} R_{23} ดังนี้

R_{12}:			R_{13}:			R_{23}:		
	0	0		0	1		0	1
	0	1		1	0		1	1
	1	1		1	1		1	0

โดยที่คอลัมน์ที่ 1 ของ R_{12} มาจากคอลัมน์ที่ 1 ของ R และคอลัมน์ที่ 2 ของ R_{12} มาจากคอลัมน์ที่ 2 ของ R และการฉายอื่นก็คิดเช่นเดียวกัน

ถ้ามีความสัมพันธ์ n มิติ (R) แล้วการขยายแบบไซลินดิก (cylindric extension) คือการดำเนินการที่สร้างความสัมพันธ์ (n+k) มิติโดยที่ $k \geq 1$ และความสัมพันธ์นี้จะเข้ากันได้ในเรื่องที่ถ้าฉายกลับไปยัง n มิติจะได้ R เดิมกลับมา การขยายแบบไซลินดิกของความสัมพันธ์ R ประกอบด้วย (n+k) ทูเพิลที่ได้จากการถ่ายซ้ำของแต่ละ n ทูเพิลของ R และในการถ่ายซ้ำแต่ละอันจะมีสมาชิกมา

จากการจัดหมู่ (combination) ของแต่ละมิติที่เพิ่มเข้ามา k มิติ เพิ่มเข้าไปด้วย ซึ่งสมาชิกที่เพิ่มเข้าไปเหล่านี้จะถูกเรียงตามลำดับที่กำหนดไว้ เราเรียกการขยายแบบไซลินดิกไปทางทิศ d เป็น $\mathrm{cyl}_d(R)$ จากตัวอย่างข้างต้นถ้าต้องการขยายแบบไซลินดิก R_{12} ไปยังทิศที่ 3 โดยที่แต่ละสมาชิกของ R_{12} จะถูกขยายไปที่ สมาชิก 0 และ 1 ของ เซต $\{0,1\}$ ของทิศที่ 3 และสมาชิกในทิศที่ 3 จะอยู่ที่คอลัมน์ที่ 3

cyl_3 (R_{12}):	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	1	0
	1	1	1

ถ้าต้องการขยายแบบไซลินดิก R_{13} ไปยังทิศที่ 2 ทำแบบเดียวกันกับข้างต้นและสมาชิกในทิศที่ 2 ที่เพิ่มเข้ามาจะอยู่ที่คอลัมน์ที่ 2

cyl_2 (R_{13}):	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	0
	1	0	1
	1	1	1

ถ้าต้องการขยายแบบไซลินดิก R_{23} ไปยังทิศที่ 1 ทำแบบเดียวกันกับข้างต้นและสมาชิกในทิศที่ 1 ที่เพิ่มเข้ามาจะอยู่ที่คอลัมน์ที่ 1

cyl_1 (R_{23}):	0	0	1
	1	0	1
	0	1	1
	1	1	1
	0	1	0
	1	1	0

โดยปกติแล้วอินเตอเซกชันของการขยายของการฉายของความสัมพันธ์ใดจะได้ความสัมพันธ์เดิมเสมอ และจะเท่ากับความสัมพันธ์เดิมก็ต่อเมื่อความสัมพันธ์นั้นถูกแทนด้วยการฉายทั้งหมด ซึ่งการทำกลับแบบนี้เรียกว่าการปิดแบบไซลินดิก (cylindric closure) ดังนั้นจากตัวอย่างข้างต้นจะได้ว่า

$$\mathrm{cyl}_3(R_{12}) \cap \mathrm{cyl}_2(R_{13}) \cap \mathrm{cyl}_1(R_{23}) = R$$

ความสัมพันธ์แบบฟัซซี

Fuzzy Relations

5

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์แบบฟัซซีเพื่อเป็นการปูพื้นฐานทางด้านทฤษฎีฟัซซีเซต เพื่อที่นักศึกษาจะสามารถเข้าใจการดำเนินการต่าง ๆที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ได้

5.1 บทนำของความสัมพันธ์แบบฟัซซี

ในขณะที่ความสัมพันธ์แบบดั้งเดิมอธิบายแค่การมีหรือไม่มีของการรวมตัว (association) การตอบโต้ (interaction) หรือ การเชื่อมโยง (connection) ระหว่างสมาชิกของเซตตั้งแต่ 2 เซตขึ้นไป ความสัมพันธ์แบบฟัซซีสามารถอธิบายถึงความแข็งแรงของการมีอยู่ของการรวมตัว (association) การตอบโต้ (interaction) หรือ การเชื่อมโยง (connection)

ความสัมพันธ์แบบฟัซซีถูกนิยามบนเซตสากลที่เป็นคาร์ทีเซียนโพรดักส์ ตัวอย่างเช่น $\boldsymbol{R}$ ถูกนิยามบนเซต D ของเอกสารและเซต T เป็นเซตของคำหลัก (key term) ที่มีความสำคัญในระบบการสืบค้นข้อมูล ฟังก์ชันสมาชิกถูกนิยามบนคาร์ทีเซียนโพรดักส์ $D \times T$ สำหรับเอกสารแต่ละอัน (d) ในเซต D และคำหลักแต่ละคำ (t) ในเซต T เราสามารถแปลระดับของการเป็นสมาชิก $\boldsymbol{R}(d,t)$ ได้เป็นระดับของการตรงประเด็นของเอกสาร d ต่อคำหลัก t ให้คาร์ทีเซียนโพรดักส์ $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ดังนั้นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบนคาร์ทีเซียนโพรดักส์นี้เป็น

$$\boldsymbol{R} = \sum \frac{\boldsymbol{R}(x_1, x_2, ..., x_n)}{(x_1, x_2, ..., x_n)} \tag{5.1}$$

โดยที่ $\boldsymbol{R}(x_1, x_2, ... x_n)$ เท่ากับตัวเลขใด ๆที่อยู่ในช่วงปิด $[0,1]$

ตัวอย่างที่ 5.1 ให้เซต $X = \{\text{Ken, Joe, Tsugi}\}$ และ เซต $Y = \{\text{Midori, Eve, Doris}\}$ เรารู้ว่า Ken แต่งงานกับ Doris Joe แต่งงานกับ Eve และ Tsugi แต่งงานกับ Midori เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\boldsymbol{Married} = \frac{1}{(Ken, Doris)} + \frac{1}{(Joe, Eve)} + \frac{1}{(Tsugi, Midori)}$$

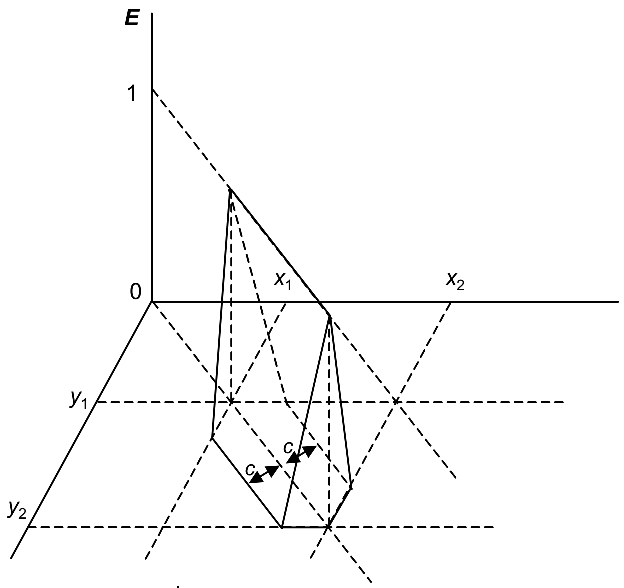
เนื่องจากในความสัมพันธ์นี้มีเพียงแค่แต่งหรือไม่แต่งเท่านั้น ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกจึงมีแค่ 0 หรือ 1 แต่ถ้าเราต้องการหาความสัมพันธ์ของความเป็นเพื่อนอาจจะได้ว่า

$$\boldsymbol{Friend} = \frac{0.8}{(Ken, Doris)} + \frac{0.6}{(Joe, Eve)} + \frac{0.9}{(Tsugi, Midori)}$$

จะเห็นได้ว่า Ken เป็นเพื่อนกับ Doris ด้วยค่าความเป็นสมาชิกในความสัมพันธ์เป็น 0.8 ส่วนคู่อื่นก็เช่นเดียวกัน ■

สำหรับความสัมพันธ์เท่ากับ ($\boldsymbol{E}$) เช่น x เท่ากับ y เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ฟัซซีในการจับแนวคิดที่กว้างขึ้นได้และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพจน์ทางภาษาศาสตร์ได้เช่น ”x เป็นประมาณ

เท่ากับ (approximately equal) y” หรือ ”x ใกล้ (close to) y” สมมุติให้ $\boldsymbol{E}(x,y) = \max(0,1-(|x-y|/c))$ โดยที่ c เป็นตัวเลขจำนวนจริงบวกที่ค่าถูกเลือกในเนื้องานแต่ละงาน เพื่อให้ ***E*** เป็นตัวแทนที่ดีของแนวคิดของงานนั้นตัวอย่างของความสัมพันธ์แบบฟัซซี ***E*** (y ใกล้ (close to) *x*) แสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ความสัมพันธ์แบบฟัซซี

5.2 การแทน (representation) ความสัมพันธ์ฟัซซี

การแทนความสัมพันธ์แบบฟัซซีมีอยู่หลายวิธีด้วยกัน เช่นการแทนแบบการแสดง (list) เมตริกซ์ (matrices) แบบส่ง(mapping) หรือแบบกราฟระบุทิศทาง (directed graph) ซึ่งเราจะได้กล่าวถึงต่อไป

การแทนแบบการแสดง (list method) เนื่องจากความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นฟัซซีเซตชนิดหนึ่งดังนั้นจึงใช้การแสดงเป็นการแทนเซตได้ซึ่งการแทนแบบนี้ได้กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ 5.1 หรือ สมการที่ 5.1 นั่นเอง

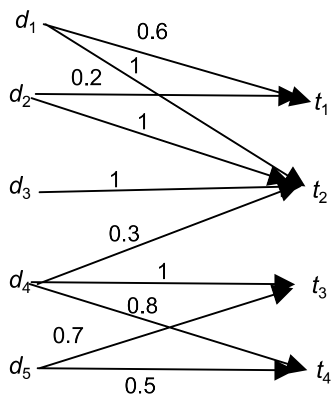
การแทนแบบเมตริกซ์ (matrices method) การแทนแบบนี้จะเป็นเช่นเดียวกับการแทนแบบเมตริกซ์ในบทที่ 4 ต่างกันเพียงแต่ว่าค่าที่ใส่ในเมตริกซ์แทนที่จะเป็นค่าจากฟังก์ชันลักษณะ แต่เป็นค่าความเป็นสมาชิกของคู่ความสัมพันธ์นั้นที่มีต่อความสัมพันธ์เช่น

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $r_{ij} = \boldsymbol{R}(x_i,y_j)$ สำหรับทุก i=1,...,n และ j = 1,...,m เช่นตัวอย่างเรื่องความสัมพันธ์ ***Friend*** จากหัวข้อ 5.1 ถ้าจะแสดงเป็นเมตริกซ์จะได้

$$
\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{ccc} & & \end{array} \\
\boldsymbol{R} = \begin{array}{r} \text{Ken} \\ \text{Joe} \\ \text{Tsugi} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} \text{Midori} & \text{Eve} & \text{Doris} \end{array}
\end{array}
$$

<u>การแทนแบบการส่ง (mapping)</u> ในกรณีนี้ก็เป็นเช่นเดียวกับการแทนแบบการส่งในเรื่องความสัมพันธ์แบบดั้งเดิมเพียงแต่การส่งจากสมาชิกหนึ่งไปหาอีกอันหนึ่งจะเป็นการส่งที่มีความแข็งแรงเข้ามาเกี่ยวข้องคือค่าความเป็นสมาชิกนั่นเองเช่นความสัมพันธ์แบบฟัซซีของ เอกสารและคำหลักที่เคยกล่าวถึงในหัวข้อ 5.1 แสดงในรูปที่ 5.2 ซึ่งเราสามารถอ่านได้จากรูปเช่น คู่ d_1 t_1 มีค่าความเป็นสมาชิกในความสัมพันธ์นี้เท่ากับ 0.6 หรือ $\frac{0.6}{d_1\boldsymbol{R}t_1}$ นั่นเอง



<u>รูปที่ 5.2 การแทนแบบการส่งของความสัมพันธ์แบบฟัซซี</u>

การหาค่าโดเมน (domain) และเรนจ์ (range) ในความสัมพันธ์แบบดั้งเดิมโดยปกติทำได้คือให้ $R \subseteq X \times Y$ แล้ว

$$\text{โดเมน ของ } R = \{x \mid x \in X, <x, y> \in R, \exists y \in Y\} \tag{5.2}$$

$$\text{เรนจ์ ของ } R = \{y \mid y \in Y, <x, y> \in R, \exists x \in X\} \tag{5.3}$$

หรือมีความหมายว่า x เป็นสมาชิกของโดเมน ของ R เมื่อมีลูกศรพุ่งออกจาก x อย่างน้อย 1 อัน และ y เป็นสมาชิกของเรนจ์ ของ R เมื่อมีลูกศรพุ่งเข้าอย่างน้อย 1 อัน ถ้าดูจากการแทนแบบส่ง

การหาค่าโดเมน (domain) และเรนจ์ (range) ในความสัมพันธ์แบบฟัซซีหาได้จาก

$$\boldsymbol{domainR}(x) = \max_{y \in Y} \boldsymbol{R}(x, y) \tag{5.4ก}$$

$$\boldsymbol{rangeR}(y) = \max_{x \in X} \boldsymbol{R}(x, y) \tag{5.4ข}$$

ความหมายของสมการที่ 5.4ก คือ ค่าที่แข็งแรงที่สุดในการเชื่อม x และ y เข้าด้วยกัน ดังนั้นจากรูปที่ 5.2 ***domainR***(x) ที่ คู่ d_1 และ t ใดๆจะเท่ากับ 1 เพราะจากรูปจะได้ $\frac{0.6}{d_1\boldsymbol{R}t_1}$ และ $\frac{1}{d_1\boldsymbol{R}t_2}$ ดังนั้นค่าที่มากที่สุดจะเป็น 1 และจากสมการที่ 5.4ข มีความหมายว่า ***rangeR***(y) คือค่าที่มากที่สุดใน

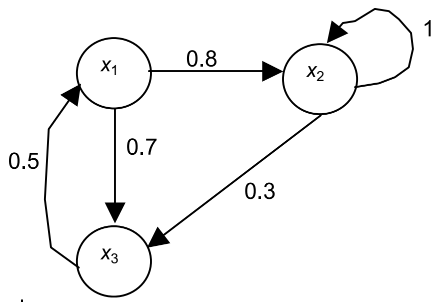
ความสัมพันธ์สำหรับ y ที่มีต่อ x ใดๆ จากรูปที่ 5.2 ได้ว่า $\frac{0.6}{d_1 \boldsymbol{R} t_1}$ และ $\frac{0.2}{d_2 \boldsymbol{R} t_1}$ ทำให้ค่าที่แข็งแรงที่สุดของ t_1 คือ 0.6 นั่นเอง

เนื่องจากความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นฟัซซีเซตดังนั้นเราสามารถหาความสูง (height) ได้คือ

$$h(\boldsymbol{R}) = \max_{y \in Y} \max_{x \in X} \boldsymbol{R}(x, y) \tag{5.5}$$

นั่นคือค่าความเป็นสมาชิกที่มากที่สุดในความสัมพันธ์ ***R*** นั่นเอง

<u>การแทนแบบกราฟมีทิศทาง</u> การแทนแบบนี้เป็นเช่นเดียวกับในความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม เพียงแต่ แต่ละเส้นเชื่อม (edge) จะมีค่าความเป็นสมาชิกกำกับอยู่ ดังรูป ที่ 5.3 ซึ่งเป็นกราฟแบบมีทิศทางของ ความสัมพันธ์ที่ถูกนิยามบน $X = \{x_1, x_2, x_3\}$



<u>รูปที่ 5.3 กราฟมีทิศทางของความสัมพันธ์แบบฟัซซี</u>

5.3 การดำเนินการของความสัมพันธ์ทวิภาคแบบฟัซซี (Operations on Binary Fuzzy Relations)

ความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นฟัซซีเซตชนิดหนึ่ง ดังนั้นเราสามาถนำการดำเนินการต่างๆ เช่น (ฟัซซีคอมพลีเมนต์ ฟัซซียูเนียน ฟัซซีอินเตอเซกชัน สเกลาร์คาดินาวริดี้ ฟัซซีคาดินาวริดี้ คอนเวกฟัซซีเซต และ α-cut) ของฟัซซีเซตมาใช้ที่นี้ได้เช่นกัน เราสามารถแทนความสัมพันธ์ฟัซซี $\boldsymbol{R}(x, y)$ ทุกอันด้วย $\boldsymbol{R} = \bigcup_{\alpha} {}_{\alpha}\boldsymbol{R}$ โดยที่ $\alpha \in \wedge_{\boldsymbol{R}}$ เช่นรูปที่ 5.2 จะได้ $\wedge_{\boldsymbol{R}} = \{0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0\}$ และที่ $\alpha = 0.8$ จะได้ ${}^{0.8}\boldsymbol{R} = \{<d_1, t_2>, <d_2, t_2>, <d_3, t_2>, <d_4, t_3>, <d_4, t_4>\}$ และสำหรับความสัมพันธ์ผกผัน (inverse) และการประกอบ (composition) ของความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นดังนี้

5.3.1 ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse Relation) ของความสัมพันธ์ทวิภาคแบบฟัซซี

นิยามของความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 4.3.1 นั่นคือ ถ้า ***R*** เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบน $X \times Y$ แล้ว $\boldsymbol{R}^{-1}$ จะเป็นความสัมพันธ์บน $Y \times X$ โดยที่

$$\boldsymbol{R}^{-1}(y, x) = \boldsymbol{R}(x, y) \tag{5.6}$$

สำหรับทุกคู่ของ $<y, x> \in Y \times X$ และจะเห็นได้ว่า $(\boldsymbol{R}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{R}$ สำหรับความสัมพันธ์ทวิภาคแบบฟัซซีทุกอัน เช่นถ้าเรามี

$$
\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } \boldsymbol{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5.3.2 การประกอบ (Composition) ของความสัมพันธ์แบบฟัซซี

การประกอบของความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นเช่นเดียวกับการประกอบของความสัมพันธ์แบบดั้งเดิมนั่นคือความสัมพันธ์ทวิภาคทั้ง 2 อัน (P และ Q) ต้องเข้ากันได้ (compatible) (คาร์ทีเซียนโพรดักส์ของทั้งสองคือ $X \times Y$ และ $Y \times Z$ จะต้องมี Y ในคาร์ทีเซียนโพรดักส์แรกและคาร์ทีเซียนโพรดักส์ที่สอง) จะได้ $R = P \bullet Q$ ซึ่งประกอบด้วย <*x*, *z*> ของ $X \times Z$ ซึ่งถูกเชื่อมด้วยความสัมพันธ์ P และ Q โดยผ่าน $y \in Y$ อย่างน้อย 1 ตัว

เมื่อ $\boldsymbol{P}$ และ $\boldsymbol{Q}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซี แต่ละการเชื่อมจาก x ถึง z โดยผ่านทางความสัมพันธ์และสมาชิกใน Y บางตัวเป็นเรื่องของระดับ โดยที่ค่าระดับนี้ขึ้นอยู่กับ $\boldsymbol{P}(x, y)$ และ $\boldsymbol{Q}(y, z)$ และถูกเลือกจากค่าที่น้อยที่สุดระหว่าง 2 ค่านี้ นั่นคือค่าความเป็นสมาชิกของลูกโซ่ <*x*, *y*, *z*> เป็นค่าที่อ่อนแอที่สุดของทั้ง 2 การเชื่อม <*x*, *y*> และ <*y*, *z*> และถ้าค่าความเป็นสมาชิกของการเชื่อมหนึ่งเป็น 0 ค่าระดับของการเชื่อมทั้งหมดจะเป็น 0 ด้วยโดยที่ไม่สนใจว่าอีกอันจะเป็นอะไร การเชื่อมจาก x ไป z ทั้งหมด เราจะเลือกค่าที่มากที่สุดเป็นค่าความเป็นสมาชิกที่อธิบายความสัมพันธ์ x ไป z นี้ นั่นคือ

$$
\boldsymbol{R}(x,z) = (\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q})(x,z) = \max_{y \in Y} \min\left[\boldsymbol{P}(x,y), \boldsymbol{Q}(y,z)\right] \qquad (5.7)
$$

เราเรียกการคำนวณในสมการที่ 5.7 ว่าการทำการประกอบ max-min (max-min composition) แต่ถ้าเปลี่ยน min เป็นการคูณ เราเรียกว่าการประกอบ max-product (max-product composition) ซึ่งเขียนได้เป็น

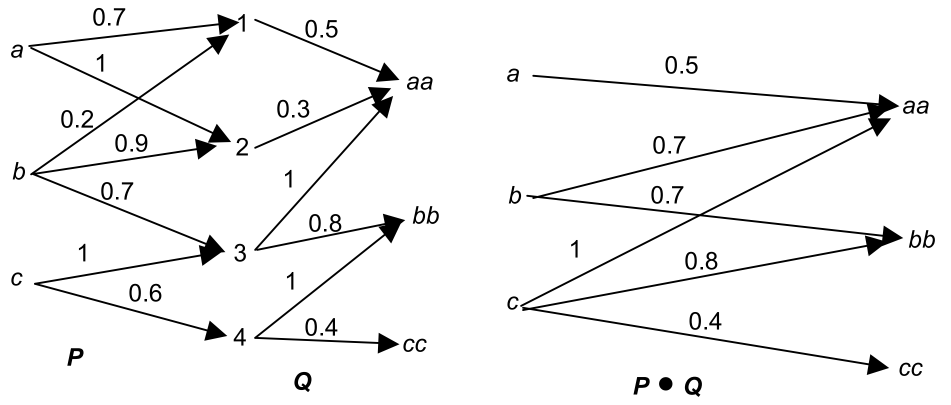
$$
\boldsymbol{R}(x,z) = (\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q})(x,z) = \max_{y \in Y}\left[\boldsymbol{P}(x,y) \times \boldsymbol{Q}(y,z)\right] \qquad (5.8)
$$

ตัวอย่างที่ 5.2 ให้ $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $Z = \{aa, bb, cc\}$ และความสัมพันธ์แบบฟัซซี P บน $X \times Y$ และ Q บน $Y \times Z$ เป็นดังรูปที่ 5.4

การหาค่าความเป็นสมาชิกของการประกอบใช้การประกอบ max-min เช่นที่คู่ <*b*, *aa*> หาค่าความเป็นสมาชิกจากคู่ <*b*,1> กับ <1,*aa*> และ <*b*,2> กับ <2,*aa*> และ <*b*,3> กับ <3,*aa*> ซึ่ง เป็น max(min(0.2,0.5), min(0.9,0.3), min(0.7,1)) ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของ <*b*, *aa*> คือ 0.7 ■

คุณสมบัติของการประกอบเช่น $(\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q}) \bullet \boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \bullet (\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{R})$ หรือ $(\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q})^{-1} = \boldsymbol{Q}^{-1} \bullet \boldsymbol{P}^{-1}$ หรือ $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{P}$ เป็นจริงสำหรับความสัมพันธ์แบบฟัซซีด้วย

ในการประกอบความสัมพันธ์มีการนำการเชื่อมความสัมพันธ์ (relation join) มาใช้ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อต่อไป



(ก) (ข)

รูปที่ 5.4 (ก) ความสัมพันธ์แบบฟัซซี ***P*** และ ***Q*** (ข) การประกอบ ***P*** ● ***Q***

5.3.2.1 การเชื่อมความสัมพันธ์ (Relation Join)

ถ้าเป็นในกรณีความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม ถ้า $P \subseteq X \times Y$ และ $Q \subseteq Y \times Z$ แล้วการเชื่อมความสัมพันธ์ $P * Q = \{<x, y, z> \mid <x, y> \in P$ และ $<y, z> \in Q\}$ ส่วนในกรณีของความสัมพันธ์แบบฟัซซีจะได้เป็น

$$(\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q})(x, y, z) = \min[\boldsymbol{P}(x, y), \boldsymbol{Q}(y, z)] \tag{5.9}$$

จะเห็นได้ว่าสมการนี้คือค่าความเป็นสมาชิกของลูกโซ่ <*x*, *y*, *z*> ซึ่งเป็นค่าที่อ่อนแอที่สุดของทั้ง 2 การเชื่อม <*x*, *y*> และ <*y*, *z*> และจะได้ว่า การประกอบเป็นการหาค่าที่มากที่สุดของการเชื่อม

$$(\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{Q})(x,z) = \max_{y \in Y}(\boldsymbol{P} * \boldsymbol{Q})(x,y,z) \tag{5.10}$$

5.4 การฉาย (Projection) และการขยายแบบไซลินดิก (Cylindrical Extensions)

ให้ความสัมพันธ์แบบฟัซซีเป็นความสัมพันธ์ที่เป็นซับเซตของคาร์ทีเซียนโพรดักส์ $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ($\boldsymbol{R}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) และต้องการสร้างความสัมพันธ์แบบฟัซซีอันใหม่บนคาร์ทีเซียนโพรดักส์ Y ซึ่ง $Y = \{x_j \mid j \in J \subset N_n\}$ โดยที่ $|J| = r$ ดังนั้นการฉายความสัมพันธ์ ***R*** ลงบน Y เป็น

$$[\boldsymbol{R} \downarrow Y](\vec{y}) = \max_{\vec{x} \succ \vec{y}} \boldsymbol{R}(\vec{x}) \tag{5.11}$$

โดยที่ $\vec{y}$ เป็น r ทูเพิลใน Y และ $\vec{x}$ เป็น n ทูเพิลใน X และ $\vec{x} \succ \vec{y}$ คือ $\vec{y}$ เป็นซับซีเควน (subsequence) ของ $\vec{x}$

ตัวอย่างที่ 5.3 ให้เซต $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ เป็นเซตของโรค และเซต $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ เป็นเซตของอาการ และความสัมพันธ์แบบฟัซซีของโรคและอาการบน $S \times D$ คือ

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นการฉาย $\boldsymbol{Q}$ ลงบน S คือ

$$\left[\boldsymbol{Q} \downarrow S\right](s) = \boldsymbol{Q}_1 = \max_{d \in D} \boldsymbol{Q}(s,d)$$
$$= \frac{0.7}{s_1} + \frac{0.8}{s_2} + \frac{0.9}{s_3}$$

และการฉาย $\boldsymbol{Q}$ ลงบน D คือ

$$\left[\boldsymbol{Q} \downarrow D\right](d) = \boldsymbol{Q}_2 = \max_{s \in S} \boldsymbol{Q}(s,d)$$
$$= \frac{0.7}{d_1} + \frac{0.7}{d_2} + \frac{0.8}{d_3} + \frac{0.9}{d_4} + \frac{0.6}{d_5} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.4 ให้ $\boldsymbol{R}$ เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $X_1 \times X_2 \times X_3$ โดยที่ $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$ $X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$ และ $X_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}\}$ และมีค่าเป็น

$$\boldsymbol{R} = \frac{0.5}{x_{11}, x_{21}, x_{31}} + \frac{0.3}{x_{11}, x_{21}, x_{32}} + \frac{0.6}{x_{11}, x_{22}, x_{31}} + \frac{0.2}{x_{11}, x_{23}, x_{31}} \qquad (5.12)$$

การฉาย $\boldsymbol{R}$ ลงบน Y ($X_1 \times X_3$) ซึ่งมีทั้งหมด 9 คู่นั่นคือ $\{<x_{11}, x_{31}>, <x_{11}, x_{32}>, <x_{11}, x_{33}>, <x_{12}, x_{31}>, <x_{12}, x_{32}>, <x_{12}, x_{33}>, <x_{13}, x_{31}>, <x_{13}, x_{32}>, <x_{13}, x_{33}>\}$ ค่าความเป็นสมาชิกของแต่ละคู่หาได้จากสมการที่ 5.12 เช่น ค่าความเป็นสมาชิกของ $<x_{11}, x_{31}>$ ทำได้โดยใช้ค่าความเป็นสมาชิกของทุกสมาชิกใน $\boldsymbol{R}$ ที่มี x_{11} และ x_{31} ดังนั้น

$$\left[\boldsymbol{R} \downarrow Y\right](x_{11}, x_{31}) = \max(0.5, 0.6, 0.2) = 0.6$$

ค่าความเป็นสมาชิกของคู่อื่นทำได้เช่นเดียวกัน $\blacksquare$

เนื่องจากวิชานี้เป็นเพียงทฤษฎีฟัซซีเซตพื้นฐานเท่านั้นจึงใช้การหาค่าที่มากที่สุดมาใช้ในกรณีนี้ แต่ในความเป็นจริงเราสามารถใช้การดำเนินการอื่นนอกเหนือจากยูเนียนมาตรฐานได้

การดำเนินการที่เป็นการผกผันกับการฉายคือการขยายแบบไซลินดิก (cylindrical extensions) สมมุติให้คาร์ทีเซียนโพรดักส์ X และ Y เป็นเช่นที่กล่าวข้างต้น และ $\boldsymbol{R}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เป็นซับเซตของ Y ให้ $[\ \boldsymbol{R} \uparrow X - Y\ ]$ เป็นการขยายแบบไซลินดิกของ $\boldsymbol{R}$ ไปยังเซต X_i โดยที่ $i \in N_n$ ที่อยู่ใน X แต่ไม่ได้อยู่ใน Y

$$\left[\boldsymbol{R} \uparrow X - Y\right](\vec{x}) = \boldsymbol{R}(\vec{y}) \qquad (5.13)$$

สำหรับแต่ละ $\vec{x}$ ที่ $\vec{x} \succ \vec{y}$

ตัวอย่างที่ 5.5 จากตัวอย่างที่ 5.3 ต้องการขยาย $\boldsymbol{Q}_1$ ไปยัง D และ $\boldsymbol{Q}_2$ ไปยัง S จะได้

$$ {}^{ED}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{ES}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.6 \end{bmatrix} $$

ถ้าทำอินเตอเซกชันระหว่างการขยายทั้งสองได้

$$ {}^{ED}\boldsymbol{Q}_1 \cap {}^{ES}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.6 \end{bmatrix} \supseteq \boldsymbol{Q} $$

ซึ่งไม่เท่ากับ $\boldsymbol{Q}$ ที่เป็นความสัมพันธ์เดิมแสดงว่าเราไม่สามารถสร้าง $\boldsymbol{Q}$ จากการฉายทั้งสองได้ ■

ตัวอย่างที่ 5.5 ได้พูดถึงการสร้างความสัมพันธ์จากการฉายโดยใช้อินเตอเซกชันของการฉายหลายอันความสัมพันธ์ผลลัพธ์ที่ได้ถูกเรียกว่า การปิดไซลินดิก (cylindric closure) ซึ่งเมื่อการฉายใช้ max ดังนั้น min จึงถูกใช้ในการหาอินเตอเซกชัน

ให้ เซตของการฉายของความสัมพันธ์แบบฟัซซีบน X เป็น $\{\boldsymbol{P}_i \mid i \in I\}$ ดังนั้นการปิดไซลินดิกเป็น

$$ cyl\{\boldsymbol{P}_i\}(\vec{x}) = \min_{i \in I} \left[\boldsymbol{P}_i \uparrow X - Y_i\right](\vec{x}) \tag{5.14} $$

โดยที่ $\vec{x}$ เป็น n ทูเพิลในคาร์ทีเซียนโพรดักส์ X และ $\boldsymbol{P}_i$ เป็นการฉายของความสัมพันธ์แบบฟัซซี บนคาร์ทีเซียนโพรดักส์ Y_i

5.5 ความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน (Fuzzy Equivalence Relations) และความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เข้ากันได้ (Fuzzy Compatibility Relations)

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ที่เท่ากัน จะต้องกล่าวถึงคุณสมบัติทั้งสามที่เคยกล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.4 นั่นคือการสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด ซึ่งคุณสมบัติทั้งสาม สามารถนำมาใช้ในความสัมพันธ์แบบฟัซซีได้

1. การสะท้อน (reflexive) ความสัมพันธ์แบบฟัซซี $\boldsymbol{R}$ จะสะท้อนถ้า $\boldsymbol{R}(x, x) = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ แต่ถ้าเป็นจริงสำหรับบาง x ที่อยู่ใน X เท่านั้นแสดงว่าเป็น irreflexive และถ้าไม่เป็นจริงสำหรับทุก x ที่อยู่ใน X เลยแสดงว่าเป็น antireflexive นอกจากนี้ยังมีการสะท้อนที่เรียกว่า ε-reflexive ซึ่งคือ $\boldsymbol{R}(x, x) \geq \varepsilon$ โดยที่ $0 < \varepsilon < 1$
2. การสมมาตร (symmetry) ความสัมพันธ์แบบฟัซซี $\boldsymbol{R}$ จะสมมาตร ถ้า $\boldsymbol{R}(x, y) = \boldsymbol{R}(y, x)$ สำหรับทุก x และ y ที่อยู่ใน X แต่ถ้าเป็นจริงสำหรับบาง x และ y แสดงว่าเป็น asymmetry

และถ้า $\boldsymbol{R}(x, y) > 0$ และ $\boldsymbol{R}(y, x) > 0$ แสดงว่า $x = y$ สำหรับทุก x และ y ใน X เป็น antisymmetry

3. การถ่ายทอด (transitive) โดยปกติสำหรับความสัมพันธ์แบบฟัซซี การถ่ายทอดมีหลายยิยาม แต่นิยามที่ใช้กันมากเรียกว่า max-min transitive ซึ่งคือถ้า

$$\boldsymbol{R}(x,z) \geq \max_{y \in Y} \min[\boldsymbol{R}(x,y), \boldsymbol{R}(y,z)] \tag{5.15}$$

เป็นจริงสำหรับทุก $\langle x, z\rangle \in X^2$ แสดงว่าเป็น max-min transitive และถ้าเป็นจริงสำหรับบางคู่ แสดงว่าเป็น nontransitive และถ้า $\boldsymbol{R}(x,z) < \max_{y \in Y} \min[\boldsymbol{R}(x,y), \boldsymbol{R}(y,z)]$ เป็นจริงสำหรับทุก $\langle x, z\rangle \in X^2$ แสดงว่าเป็น antitransitive

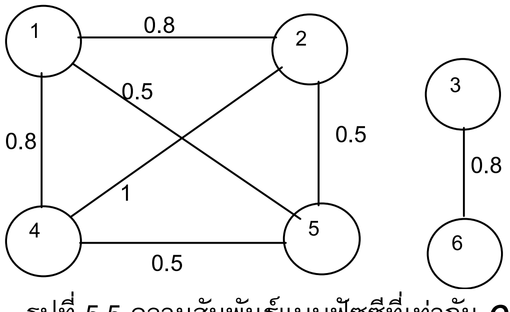
ความสัมพันธ์ทวิภาคแบบฟัซซีใด ๆที่มีการสะท้อน สมมาตร และ ถ่ายทอด (ในนิยามของการถ่ายทอด) ถูกเรียกว่าความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า แต่ละ α-cut ของความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากันใด ๆจะเป็นความสัมพันธ์ที่เท่ากันตามความสัมพันธ์แบบดั้งเดิม

ตัวอย่างที่ 5.6 ให้ความสัมพันธ์แบบฟัซซี $\boldsymbol{Q}$ เป็นความสัมพันธ์ที่แสดงถึงความคิดเห็นที่เหมือนกันของผู้เชี่ยวชาญ 6 คนในเรื่องการเมืองเรื่องหนึ่ง ซึ่งแสดงในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.8 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากเมตริกซ์ของ $\boldsymbol{Q}$ จะเห็นว่าเป็นความสัมพันธ์ที่ สะท้อน สมมาตร และถ่ายทอดตาม max-min transitive เช่นค่าความเป็นสมาชิกในความสัมพันธ์ ของผู้เชี่ยวชาญที่ 1 และ 4 ($\boldsymbol{Q}(1,4)$) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.8 จากเมตริกซ์ แต่ถ้าดูจากการถ่ายทอดจะได้ว่า

$\max(\min(\boldsymbol{Q}(1,2),\boldsymbol{Q}(2,4)),\ \min(\boldsymbol{Q}(1,5),\boldsymbol{Q}(5,4))) = \max(\min(0.8,1),\ \min(0.5,0.5)) = 0.8$ ซึ่งค่านี้เท่ากับค่าที่อยู่ในเมตริกซ์แสดงว่าเป็นไปตาม max-min transitive และคู่อื่นก็เป็นทำนองเดียวกัน รูปที่ 5.5 แสดง กราฟมีทิศทางของ $\boldsymbol{Q}$ เพียงแต่เอาทิศทางและลูปวนกลับ (self loop) ออก



รูปที่ 5.5 ความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน $\boldsymbol{Q}$

■

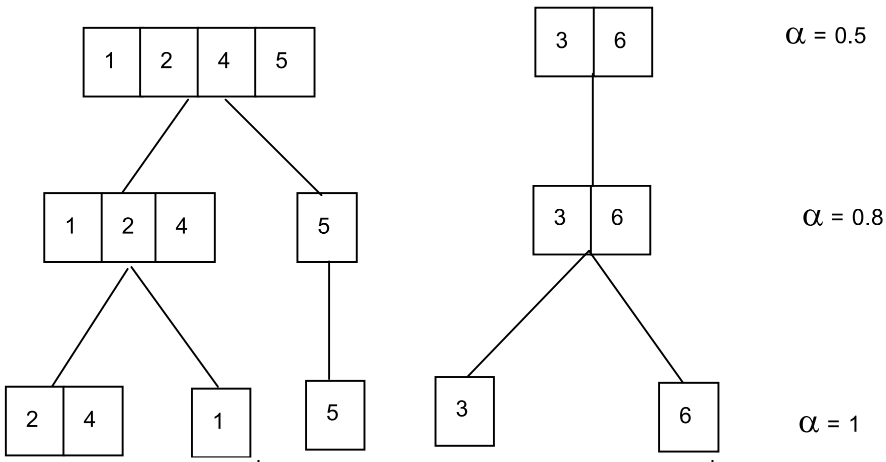
α-cut ของความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน สำหรับค่า $\alpha \in (0,1]$ เป็นความสัมพันธ์ที่เท่ากัน นั่นคือความมีหรือไม่มีของความเท่ากันระหว่างสมาชิกที่ระดับ α แต่ละความสัมพันธ์ที่เท่ากันสร้างพาร์ทิชันของ *X*

ให้ $\pi({}^{\alpha}\boldsymbol{R})$ เป็นพาร์ทิชันตามความสัมพันธ์ที่เท่ากัน ${}^{\alpha}\boldsymbol{R}$ นั่นคือ *x* และ *y* อยู่ในบล็อคเดียวกันก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{R}(x, y) \geq \alpha$ ดังนั้น แต่ละความสัมพันธ์ที่เท่ากันจะเกี่ยวเนื่องกับ

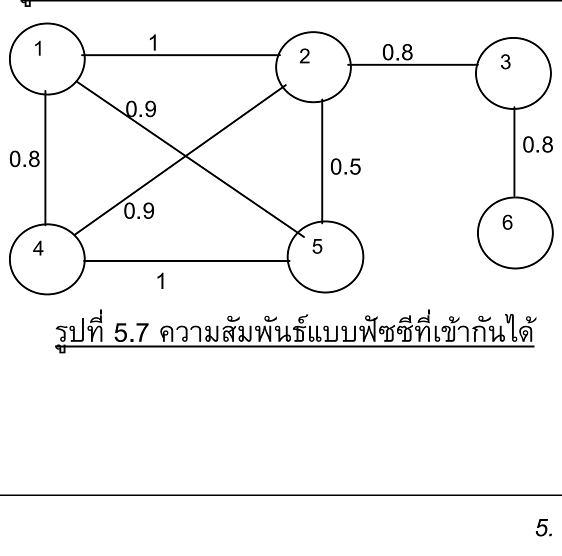
$$\Pi(\boldsymbol{R}) = \{\pi({}^{\alpha}\boldsymbol{R}) \mid \alpha \in (0,1]\} \tag{5.16}$$

ของพาร์ทิชันของ *X* พาร์ทิชัน $\pi({}^{\beta}\boldsymbol{R})$ ถูกแบ่งละเอียด (refinement) เป็น $\pi({}^{\alpha}\boldsymbol{R})$ ได้ก็ต่อเมื่อ $\alpha \geq \beta$ รูปที่ 5.6 แสดงต้นไม้พาร์ทิชัน (partition tree) ของ ***Q*** ในตัวอย่าง 5.6

ความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่มีการสะท้อน และสมมาตร เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เข้ากันได้ (fuzzy compatibility relation) และในความสัมพันธ์นี้ คลาสที่เข้ากันได้ (compatibility class) จะถูกนิยามในรูปของระดับของค่าความเป็นสมาชิก α นั่นคือ α-compatibility class เป็นซับเซต *A* ของ *X* ที่ $\boldsymbol{R}(x, y) \geq \alpha$ สำหรับทุก *x*, *y* ใน *X* และ maximal α-compatibility และ complete α-cover เป็นคำที่ขยายจากนิยามที่ใช้ในความสัมพันธ์ดั้งเดิม คือ maximal compatibility และ complete cover (ครอบครัว (family) ของ maximal compatibility) สมมุติให้ความสัมพันธ์แบบฟัซซี ***R*** แสดงในรูปที่ 5.7 จากรูปสามารถพิสูจน์ได้ว่า เป็นความสัมพันธ์ที่เท่ากันได้ เช่น $\boldsymbol{R}(1,4) = 0.8$ จากรูป และมีค่าจากการเทียบเท่ากับ $\max(\min(\boldsymbol{R}(1,y), \boldsymbol{R}(y,4))) = 0.9$ ทำให้ความสัมพันธ์นี้ไม่ถ่ายทอดแต่สมมาตรและสะท้อน ดังนั้นสามารถหา complete α-cover ของความสัมพันธ์นี้ได้ดังรูปที่ 5.8

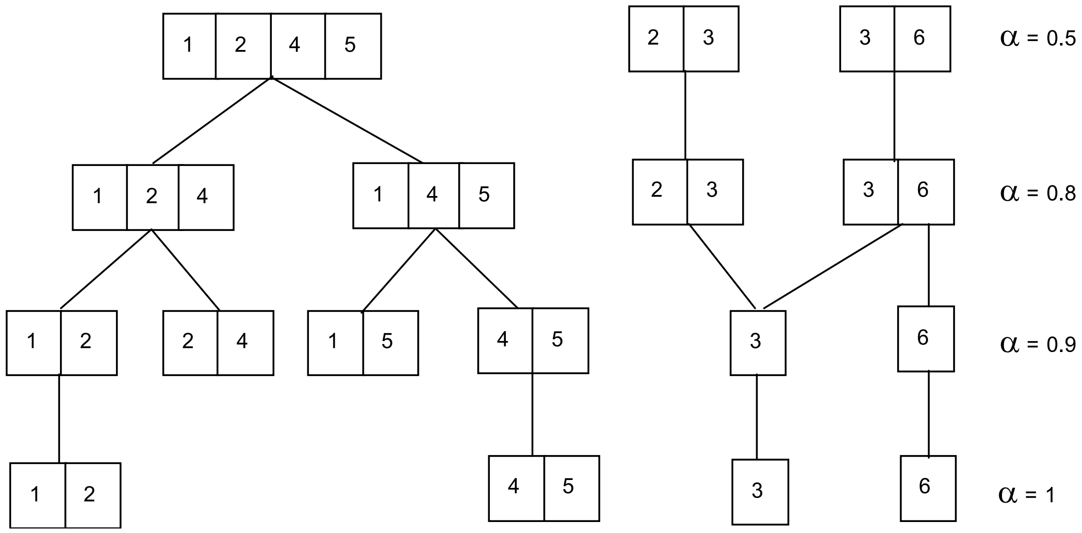


รูปที่ 5.6 ต้นไม้พาร์ทิชันของ ***Q*** จากตัวอย่างที่ 5.6



รูปที่ 5.7 ความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เข้ากันได้

ในการประยุกต์ใช้บางงานความสัมพันธ์แบบฟัซซีควรจะมีการถ่ายทอดแต่เนื่องจากการเก็บข้อมูลที่ผิดพลาด หรือความเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่ไม่คงที่ทำให้เป็นความสัมพันธ์ไม่ถ่ายทอดดังนั้นเราจึงต้องแปลงความสัมพันธ์ฟัซซี ***R*** ให้มีการถ่ายทอดและยังคงมีความใกล้เคียงกับ ***R*** มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ การทำแบบนี้เรียกว่า โครสเชอร์การถ่ายทอด (transitive closure) ของ ***R***



รูปที่ 5.8 complete α-cover ของความสัมพันธ์ในรูปที่ 5.7

ในการทำให้มีโครสเชอร์การถ่ายทอด ค่าความเป็นสมาชิกใน ***R*** บางค่าจะมีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นโครสเชอร์การถ่ายทอด (transitive closure) ของ ***R*** ($\boldsymbol{R}_T$) เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่น้อยที่สุดที่มีการถ่ายทอดและมี ***R*** อยู่ข้างใน หนึ่งในวิธีการที่จะหา $\boldsymbol{R}_T$ เป็นการวนซ้ำของอัลกอริทึมดังรูปที่ 5.9

Do
คำนวณ $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} \cup (\boldsymbol{R} \bullet \boldsymbol{R})$
If $\boldsymbol{R}' \neq \boldsymbol{R}$ ให้ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'$ **Else Stop**
Until Stop

รูปที่ 5.9 อัลกอริทึมของการหา $\boldsymbol{R}_T$

ถ้า ***R*** เป็นความสัมพันธ์บนเซตที่มีสมาชิก *n* ตัว วิธีการในรูปที่ 5.9 จะลู่เข้าหาคำตอบในจำนวนรอบที่ไม่มากกว่า *n*-1 ครั้ง

5.6 ลำดับบางส่วนแบบฟัซซี (Fuzzy Partial Ordering)

ความสัมพันธ์แบบฟัซซี ***R*** บนเซต *X* ที่มีการสะท้อน antisymmetry และถ่ายทอดตามรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งของการถ่ายทอด เป็นลำดับบางส่วนแบบฟัซซี (fuzzy partial ordering) เมื่อลำดับบางส่วนแบบฟัซซีถูกนิยามบนเซต *X* จะมีฟัซซีเซต 2 เซตที่มีความเกี่ยวพันกับสมาชิก *x* ใน *X* ฟัซซีเซตอันแรกคือ โดมิเนตติงคลาส (dominating class) ของ *x* ($\boldsymbol{R}_{\geq[x]}$) ซึ่งคือ

$$\boldsymbol{R}_{\geq[x]}(y) = \boldsymbol{R}(x,y) \tag{5.17}$$

สำหรับ $y \in X$ ซึ่งสมการที่ 5.17 มีความหมายว่า โดมิเนตติงคลาสของ x ประกอบด้วยสมาชิกของ X ที่มีระดับที่ โดมิเนต (dominate) x และฟัซซีเซตอีกอันคือ คลาสที่ถูกโดมิเนต (dominated) โดย x ($\boldsymbol{R}_{\leq[x]}$) โดยที่

$$\boldsymbol{R}_{\leq[x]}(y) = \boldsymbol{R}(y, x) \tag{5.18}$$

สำหรับ $y \in X$ ซึ่งสมการที่ 5.18 มีความหมายว่า คลาสที่ถูกโดมิเนตโดย x ประกอบด้วยสมาชิกของ X ที่มีระดับที่ถูกโดมิเนตด้วย x

สมาชิก $x \in X$ ใดๆ ไม่ถูกโดมิเนตก็ต่อเมื่อ

$$\boldsymbol{R}(x, y) = 0 \tag{5.19}$$

สำหรับทุก $y \in X$ และ $x \neq y$ และ x จะไม่โดมิเนต ก็ต่อเมื่อ

$$\boldsymbol{R}(y, x) = 0 \tag{5.20}$$

สำหรับทุก $y \in X$ และ $y \neq x$

สำหรับเซตแบบดั้งเดิม A ของเซต X ที่มีลำดับบางส่วนแบบฟัซซีถูกนิยามบน ค่าขอบเขตบนแบบฟัซซี (fuzzy upper bound) สำหรับ A เป็นฟัซซีเซต $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A)$ ถูกนิยามเป็น

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A) = \bigcap_{x \in A} \boldsymbol{R}_{\geq[x]} \tag{5.21}$$

โดยที่ $\cap$ คือฟัซซีอินเตอเซกชัน และนิยามนี้จะกลายเป็น ขอบเขตบนแบบดั้งเดิมถ้าลำดับบางส่วนเป็นแบบดั้งเดิม และถ้าค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (least upper bound) ของเซต A มีจริง จะเป็น x ที่อยู่ใน $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A)$ ที่ทำให้

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A)(x) > 0 \text{ และ } \boldsymbol{R}(x, y) > 0$$

สำหรับทุกสมาชิก y ในซัปพอร์ตของ $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A)$ (supp($\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, A)$))

ตัวอย่างที่ 5.7 ให้ความสัมพันธ์แบบฟัซซี $\boldsymbol{R}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\{a, b, c, d, e\} \times \{a,b,c,d,e\}$ และมีค่าเป็น $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.0 & 1.0 & 0.7 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 1.0 & 1.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.9 & 1.0 \end{bmatrix}$ และให้ เซต $A = \{a, b\}$ เป็นซับเซตของ $\{a, b, c, d, e\}$ ดังนั้น โดมิเนตติงคลาส ของ a และ b เป็น

$$\boldsymbol{R}_{\geq[a]} = \frac{1}{a} + \frac{0.7}{b} + \frac{1}{d} + \frac{0.7}{e}$$

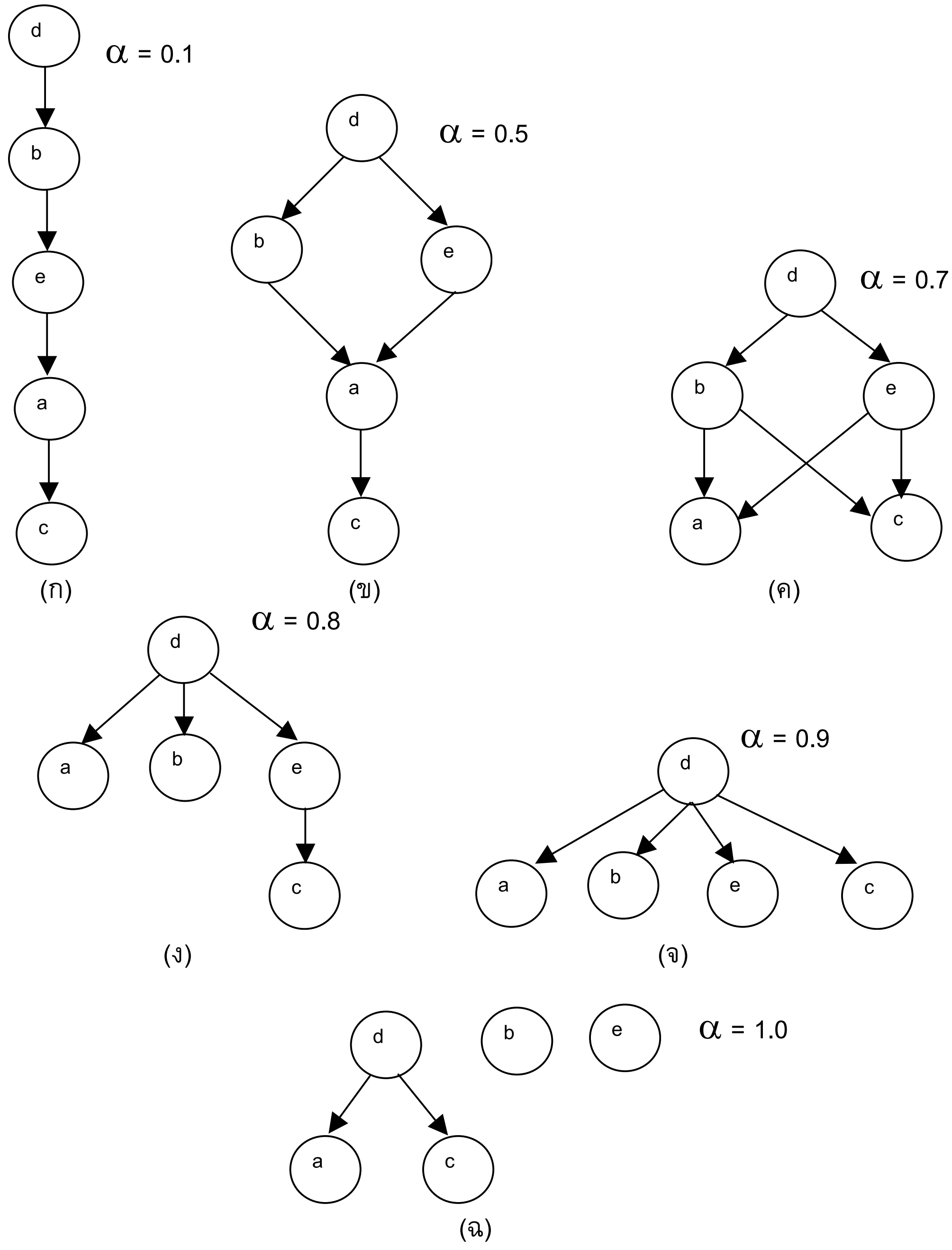
$$\boldsymbol{R}_{\geq[b]} = \frac{1}{b} + \frac{0.9}{d}$$

ค่าขอบเขตบนแบบฟัซซีสำหรับ เซต A เป็น

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}, \{a, b\}) = \bigcap_{x \in A} \boldsymbol{R}_{\geq[x]}$$

$$= \frac{0.7}{b} + \frac{0.9}{d}$$

จากสมการค่าของเขตบนแบบฟัซซีจะได้ว่า b เป็นค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของเซต A เพราะ $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R},A)(b) > 0$ และ $\boldsymbol{R}(b, y) > 0$ สำหรับ y ทุกตัวที่เป็นสมาชิกของ supp($\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R},A)$)



<u>รูปที่ 5.10 ลำดับแบบคริสป์ (crisp ordering) ที่ได้จากความสัมพันธ์แบบฟัซซี ***R***</u>

และจากเมตริกซ์ $\boldsymbol{R}$ จะได้ว่า d ไม่ถูกโดมิเนต เพราะ $\boldsymbol{R}(d, y) = 0$ สำหรับทุก $y \neq d$ และ c จะไม่โดมิเนตเพราะ $\boldsymbol{R}(x, c) = 0$ สำหรับทุก $x \neq c$ รูปที่ 5.10 แสดงลำดับแบบคริสป์ (crisp ordering) ที่ได้จากความสัมพันธ์แบบฟัซซี $\boldsymbol{R}$ จากรูปเราจะเห็นได้ว่าลำดับจะอ่อนแอลงถ้าค่า α เพิ่มขึ้น ■

เลขคณิตเชิงฟัซซี
Fuzzy Arithmetic
6

ในบทนี้กล่าวถึงเลขคณิตเชิงฟัซซี ตั้งแต่ตัวเลขฟัซซีรวมถึงการดำเนินการต่างๆที่เกี่ยวกับตัวเลขฟัซซีเหล่านี้เพื่อที่นักศึกษาจะได้มีความเข้าใจในเรื่องดังกล่าวนี้ดียิ่งขึ้น

6.1 ตัวเลขฟัซซี (Fuzzy Numbers)

แนวคิดของตัวเลขฟัซซี (fuzzy number) เกิดขึ้นเนื่องจากเหตุการณ์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับตัวเลขไม่สามารถบ่งบอกตัวเลขได้อย่างชัดเจน ตัวอย่างเช่นการบอกเวลาให้กับผู้อื่นเรามักจะใช้คำพูดว่าเวลา “ประมาณ 2 โมง” หรือ “ประมาณ 6 นาฬิกา 30 นาที” หรืออย่างเช่นการบอกน้ำหนักของสิ่งของอาจจะบอกว่า “ประมาณ 4 กิโลกรัม” เป็นต้น

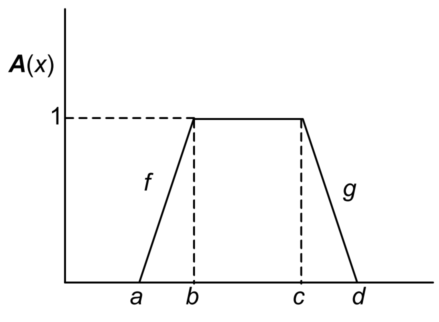
การบอกตัวเลขที่มีคำว่า “ประมาณ” เกี่ยวข้องกับแนวคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยฟัซซีเซต เพราะฟังก์ชันสมาชิกจะรวมเอาตัวเลขที่อยู่โดยรอบเข้าไปด้วยโดยที่ตัวเลขตรงกลางจะเป็นตัวเลขที่มีความเข้ากันได้กับแนวคิดมากที่สุด และตัวเลขโดยรอบจะเป็นตัวเลขที่เข้ากันได้กับแนวคิดน้อยลงไป ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของตัวเลขตรงกลางควรจะมีค่าเป็น 1 และค่าความเป็นสมาชิกของตัวเลขโดยรอบควรจะลดหลั่นลงไปตามอัตราส่วน ดังนั้นตัวเลขฟัซซี $\boldsymbol{A}$ ใดๆควรเป็น

$$\boldsymbol{A} : \Re \rightarrow [0,1] \tag{6.1}$$

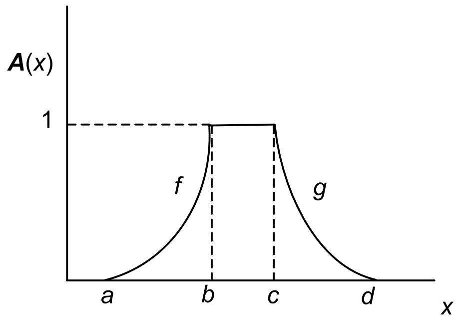
ฟังก์ชันสมาชิกของตัวเลขฟัซซีมีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชันสมาชิกของฟัซซีเซตทั่วไปแต่ไม่ทั้งหมด นั่นคือฟังก์ชันสมาชิกของตัวเลขฟัซซีที่เป็นไปตามแนวคิดที่กล่าวข้างต้นมีลักษณะดังนี้

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{สำหรับ } x \in [a,b] \\ 1 & \text{สำหรับ } x \in [b,c] \\ g(x) & \text{สำหรับ } x \in [c,d] \\ 0 & \text{สำหรับ } x < a \text{ และ } x > d \end{cases} \tag{6.2}$$

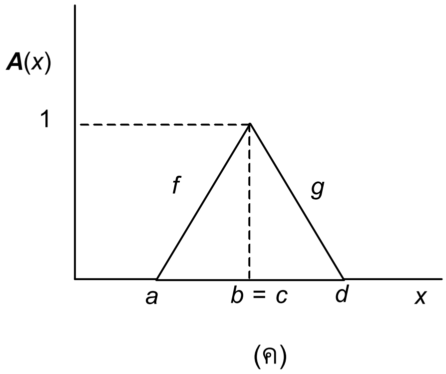
โดยที่ $a \le b \le c \le d$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) ที่เพิ่มค่าจนถึง 1 ที่ b ในขณะที่ g เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) ที่ลดค่าจนเป็น 0 ที่ d รูปที่ 6.1 แสดงฟังก์ชันสมาชิกของตัวเลขฟัซซี 4 แบบที่เป็นไปตามแนวคิดที่กล่าวถึงข้างต้น

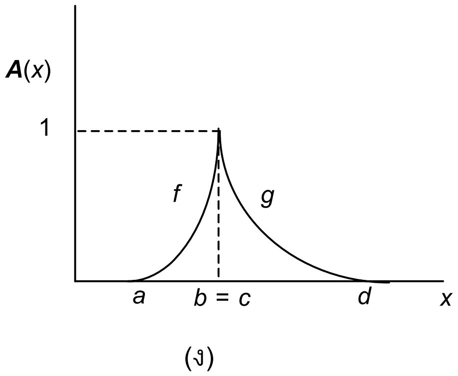


(ก)



(ข)





รูปที่ 6.1 ตัวอย่างของตัวเลขฟัซซี

รูปร่างฟังก์ชันสมาชิกของตัวเลขฟัซซีที่ใช้ในงานโดยทั่วไปจะมีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal) หรือสามเหลี่ยม (triangular) จากที่กล่าวมาทั้งหมดสามารถสรุปได้ว่าคุณสมบัติของตัวเลขฟัซซีมีดังนี้คือ

1. ตัวเลขฟัซซีเป็นนอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต (นั่นคือคอร์ (core) ของฟัซซีเซตไม่ใช่เซตว่าง)
2. α-cut ของตัวเลขฟัซซีสำหรับทุกค่า α เป็นช่วงปิดของเลขจำนวนจริง
3. ซัปพอร์ต (support) ของตัวเลขฟัซซี $\boldsymbol{A}$, ${}^{0+}\boldsymbol{A}$, ต้องมีขอบเขตจำกัด
4. ตัวเลขฟัซซีเป็นคอนเวกซ์ (convex) ฟัซซีเซต

โดยปกติเราใช้หลักการการขยาย (extension principle) ในการทำการคำนวณต่างๆ แต่เนื่องจากการที่จะดิสคริต (discrete) ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) และทำการคำนวณโดยใช้หลักการขยายอาจทำให้คำตอบที่ได้มีรูปร่างที่ผิดปกติและได้คำตอบที่ไม่ถูกต้องนัก และเนื่องจากฟัซซีเซตสามารถถูกแทนด้วย α-cut ได้ และ α-cut เหล่านี้เป็นช่วงปิดของเลขจำนวนจริง ดังนั้นการคำนวณทางคณิตศาสตร์ต่างๆของตัวเลขฟัซซี สามารถทำได้โดยการทำการคำนวณของช่วงปิดและหลังจากนั้นใช้ทฤษฎีการแยก (Decomposition Theorem) ในการประกอบฟัซซีผลลัพธ์ ซึ่งการทำการคำนวณของช่วงเป็นเรื่องของการวิเคราะห์ช่วง (interval analysis) นั่นเอง

6.2 การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของช่วง (Arithmetic Operations on Intervals)

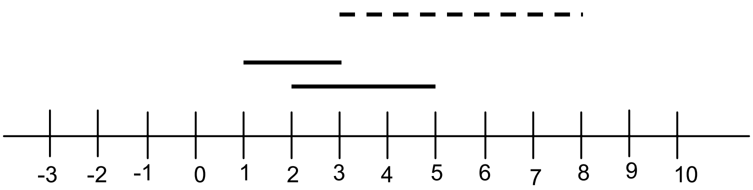
มีการพัฒนาการคำนวณกับตัวเลขที่ไม่ชัดเจนที่อยู่ในรูปของช่วงปิดมาตั้งแต่ช่วงปลายของปีคริสต์ศักราชที่ 1950 สมมุติว่ามีช่วงปิดสองช่วงคือ $[a, b]$ และ $[c, d]$ โดยที่จุดปลาย (endpoint) ของช่วงเหล่านี้เป็นเลขจำนวนจริง a b c และ d ที่ $a \le b$ และ $c \le d$ ดังนั้นการทำการคำนวณ $+$ $-$ $\cdot$ และ $/$ บนช่วง $[a,b]$ และ $[c,d]$ ถูกนิยามให้เป็นเซตจำนวนจริงที่ถูกคำนวณในแต่ละคู่ของเลขจำนวนจริงในคาร์ทีเซียนโพรดักส์ (cartesian product) เพราะเลขจำนวนจริงที่อยู่ในช่วงที่เกี่ยวข้องอาจเป็นตัวเลขที่เป็นคำตอบที่แท้จริง ดังนั้นเราควรทำการคำนวณบนทุกคู่ที่เป็นไปได้ โดยที่แต่ละคู่ประกอบไปด้วยค่าที่มาจากช่วง $[a, b]$ และอีกค่ามาจากช่วง $[c, d]$ นั่นคือ สมมุติให้ $*$ แทนการคำนวณ $+$ $-$ $\cdot$ และ $/$ จะได้

$$[a, b] * [c, d] = \{ f * g \mid a \le f \le b,\ c \le g \le d \} \tag{6.3}$$

แต่ข้อยกเว้นของการคำนวณนี้คือสำหรับการหาร จะไม่สามารถหาคำตอบได้เมื่อ $0 \in [c, d]$ ดังนั้นในที่สุดเราจะได้เซตของคำตอบของทุกคู่ ซึ่งคือคำตอบสุดท้ายของการคำนวณของช่วงนั่นเอง และผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณบนช่วงปิดจะเป็นช่วงปิดเช่นกัน

<u>การบวก (addition) ($+$)</u>

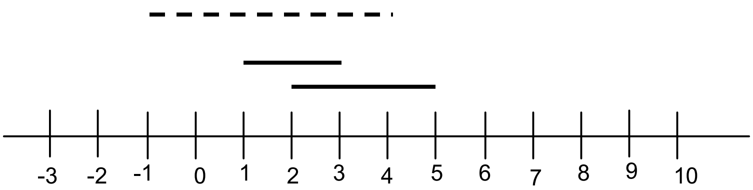
$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ เช่น $[2,5] + [1,3] = [3,8]$



<u>รูปที่ 6.2 การบวกช่วงปิด (เส้นประคือช่วงผลลัพธ์)</u>

<u>การลบ (subtraction) ($-$)</u>

$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$ เช่น $[2,5] - [1,3] = [-1,4]$



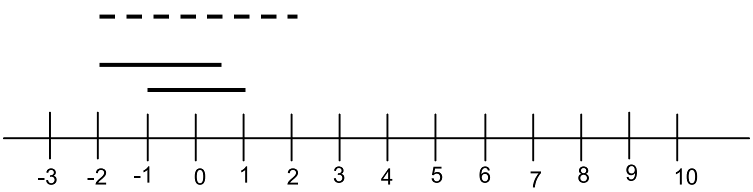
<u>รูปที่ 6.3 การลบช่วงปิด (เส้นประคือช่วงผลลัพธ์)</u>

<u>การคูณ (multiplication) ($\cdot$)</u>

$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$ เช่น

$$[-1,1] \cdot [-2,0.5] = [\min(-1(-2),-1(0.5), 1(-2), 1(0.5)),\max(-1(-2),-1(0.5), 1(-2), 1(0.5))]$$

$$= [-2, 2]$$



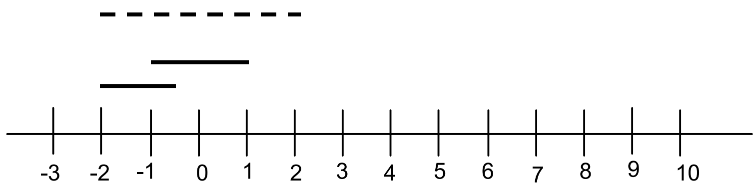
<u>รูปที่ 6.4 การคูณช่วงปิด (เส้นประคือช่วงผลลัพธ์)</u>

<u>การหาร (division) ($/$)</u>

$[a, b] / [c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c]$

$$= [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$$

แต่ทั้งนี้ทั้งนั้น 0 ต้องไม่อยู่ในช่วง $[c, d]$ เช่น $[-1,1] / [-2,-0.5] = [-2, 2]$



รูปที่ 6.5 การหารช่วงปิด (เส้นประคือช่วงผลลัพธ์)

สมมุติให้ $\boldsymbol{I} = [i_1, i_2]$ $\boldsymbol{J} = [j_1, j_2]$ $\boldsymbol{K} = [k_1, k_2]$ $\boldsymbol{0} = [0, 0]$ และ $\boldsymbol{1} = [1, 1]$ การคำนวณของช่วงปิดมีลักษณะสมบัติดังต่อไปนี้

1. $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}$

   $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{I}$ (commutativity)
2. $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K})$

   $(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{K})$ (associativity)
3. $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{0}$

   $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{1}$ (identity)
4. $\boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{K}$ (subdistributivity)
5. $0 \in \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I}$ และ $1 \in \boldsymbol{I} / \boldsymbol{I}$
6. ถ้า $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{E}$ และ $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{F}$ แล้ว

   $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}$

   $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}$

   $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{F}$

   $\boldsymbol{I} / \boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{E} / \boldsymbol{F}$

การคำนวณของช่วงมีข้อเสียเนื่องจากปัญหาของการเกิดหลายครั้ง (multiple occurrence problem) ตัวอย่างของปัญหานี้เช่น $\dfrac{[2,4]\cdot[1,3]}{[1,3]}$ จะเห็นได้ว่าในสมการนี้ช่วง $[1,3]$ เป็นทั้งตัวคูณและตัวหาร ซึ่งโดยปกติคำตอบที่ถูกต้องควรจะเป็น $[2,4]$ แต่ทำการคำนวณตามการวิเคราะห์ช่วงคำตอบที่ได้จะไม่ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 6.1 การคำนวณหา $\dfrac{[2,4]\cdot[1,3]}{[1,3]}$

ถ้าทำตามการวิเคราะห์ช่วงโดยการคูณก่อนและหารทีหลังจะได้

$$\frac{[2,4]\cdot[1,3]}{[1,3]} = \frac{[2,12]}{[1,3]}$$

$$= \left[\frac{2}{3}, 12\right]$$

และถ้าทำการหารก่อนและคูณทีหลังจะได้

$$\frac{[2,4]\cdot[1,3]}{[1,3]} = [2,4]\times\left[\frac{1}{3},3\right]$$
$$= \left[\frac{2}{3},12\right]$$

จะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะทำการคำนวณวิธีใดคำตอบที่ได้ก็เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ■

Dong และ Wong [Dong85, Dong87] ได้เสนอวิธีแก้ปัญหานี้คือให้

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

โดยที่ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ อยู่ใน $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ และเนื่องจากมี $2n$ จุดขอบ (end point) ทำให้การหาค่า y ต้องทำทั้งหมด 2^n การผสม (combination) หรือ การเรียงลำดับ (permutation) ของอาเรย์ n มิติ (n-arry array) นั่นคือ

β_1: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

β_2: $(b_1, a_2, \ldots, a_n)$

$\vdots$

β_{2^n} : $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

จะได้ ช่วงผลลัพธ์

$$[c,d] = \left[\min\left\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f\left(\beta_{2^n}\right)\right\}, \max\left\{f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f\left(\beta_{2^n}\right)\right\}\right] \tag{6.4}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จากตัวอย่างที่ 6.1 ให้ทำการคำนวณโดยใช้วิธีของ Dong และ Wong

เนื่องจากในสมการนี้มีช่วงที่เกี่ยวข้องอยู่ 2 ช่วงคือ $[2,4]$ และ $[1,3]$ ดังนั้นการผสมของจุดขอบ (β_x: (a,b) โดยที่ a มาจาก $[2,4]$ และ b มาจาก $[1,3]$) มีอยู่ทั้งหมด 4 ชุดคือ

β_1: (2,1) และ $f(\beta_1) = 2$

β_2: (2,3) และ $f(\beta_2) = 2$

β_3: (4,1) และ $f(\beta_3) = 4$

β_4: (4,3) และ $f(\beta_4) = 4$

ดังนั้นช่วงผลลัพธ์คือ $[2,4]$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่ถ้าเราคิดว่ามีช่วงที่เกี่ยวข้อง 3 ช่วงคือ $[2,4]$ $[1,3]$ ที่เป็นตัวคูณ และ $[1,3]$ ที่เป็นตัวหาร จะมีการผสม (β_x: (a,b,c) โดยที่ a มาจาก $[2,4]$ b มาจาก $[1,3]$ ที่เป็นตัวคูณ และ c มาจาก $[1,3]$ ที่เป็นตัวหาร) ทั้งหมด 8 ชุดคือ

β_1: (2,1,1) และ $f(\beta_1) = 2$

β_2: (2,1,3) และ $f(\beta_2) = 2/3$

β_3: (2,3,1) และ $f(\beta_3) = 6$

β_4: (2,3,3) และ $f(\beta_4) = 2$

β_5: (4,1,1) และ $f(\beta_5) = 4$

β_6: (4,1,3) และ $f(\beta_6) = 4/3$

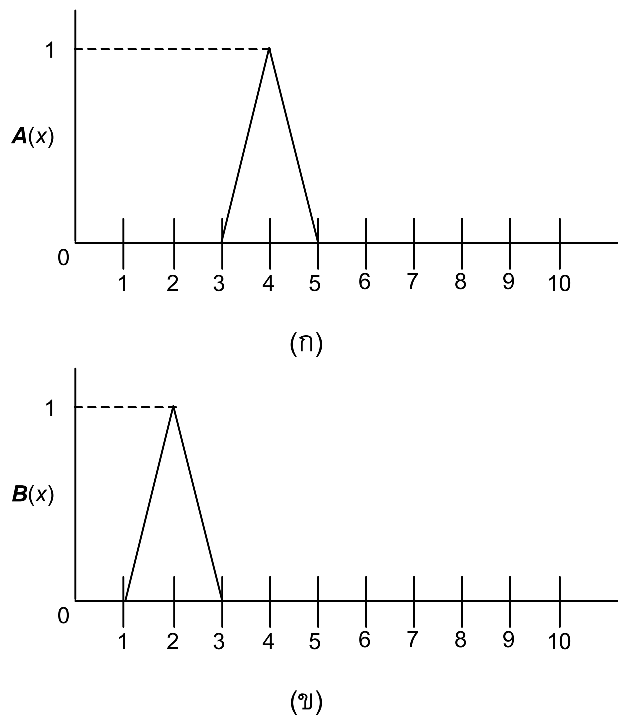
β_7: (4,3,1) และ $f(\beta_7) = 12$

β_8: (4,3,3) และ $f(\beta_8) = 4$

ดังนั้นช่วงผลลัพธ์คือ $\left[\frac{2}{3},12\right]$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้องเช่นกัน ดังนั้นในการทำการผสมจุดขอบจะเป็นการผสมของจุดขอบของช่วงที่เกี่ยวข้อง ซึ่งช่วงเหล่านี้จะถูกนับเพียงแค่ครั้งเดียวเท่านั้น ■

6.3 การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซี (Arithmetic Operation on Fuzzy Number)

จากที่เคยกล่าวในหัวข้อ 6.1 ว่าตัวเลขฟัซซีถูกแทนด้วยช่วงปิดของ α-cut และการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซีสามารถทำโดยการคำนวณของช่วงปิดได้ แต่สิ่งแรกในการคำนวณแบบนี้ คือกรณีที่เป็นการบวกหรือลบของตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมู เราสามารถทำการคำนวณได้โดยใช้ช่วงที่คอร์ และซับพอร์ต เท่านั้น โดยใช้กฎตามการวิเคราะห์ช่วง และผลลัพธ์ของการคำนวณจากคอร์และซับพอร์ต จะเป็นคอร์และซับพอร์ตของตัวเลขฟัซซีผลลัพธ์ และฟังก์ชันสมาชิกของตัวเลขฟัซซีผลลัพธ์จะคงสภาพของสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมูไว้



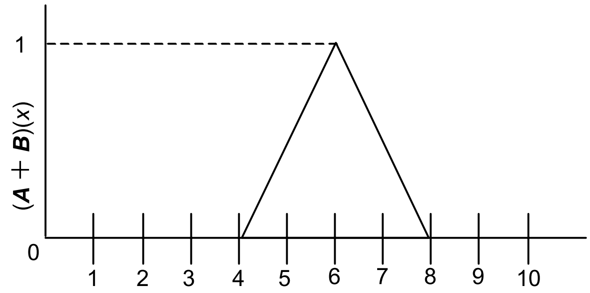
รูปที่ 6.6 ตัวเลขฟัซซี(ก) ***A*** (ประมาณ 4) และ (ข) ***B*** (ประมาณ 2)

ตัวอย่างที่ 6.3 ต้องการคำนวณการบวก และลบตัวเลขฟัซซี ***A*** (ประมาณ 4) และ ***B*** (ประมาณ 2) ดังรูป 6.6

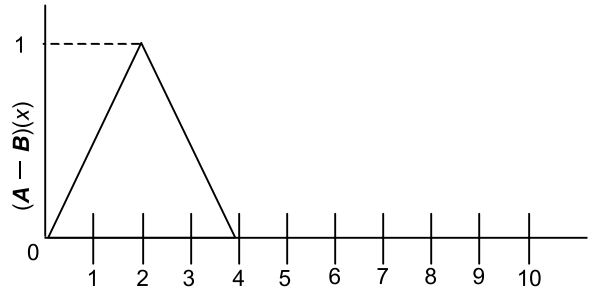
การบวกคอร์จะได้ $4+2=6$ และการบวกซับพอร์ต $[3,5]+[1,3]=[4,8]$

การลบคอร์จะได้ $4-2=2$ และการลบซับพอร์ต $[3,5]-[1,3]=[0,4]$

ตัวเลขฟัซซีผลลัพธ์ของทั้งการบวกและลบแสดงในรูปที่ 6.7



(ก)



(ข)

รูปที่ 6.7 ตัวเลขฟัซซีผลลัพธ์ของ (ก) ***A*** (ประมาณ 4) $+$ ***B*** (ประมาณ 2) (ข) ***A*** (ประมาณ 4) $-$ ***B*** (ประมาณ 2)

■

การคำนวณจากคอร์และซับพอร์ตเพื่อให้ได้ตัวเลขฟัซซี สามารถทำได้ในกรณีที่เป็นตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมู และทำได้เฉพาะ การบวกและการลบเท่านั้น แต่ถ้าเป็นการคูณหรือหาร ถึงเป็นตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมู ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่คงสภาพฟังก์ชันสมาชิกที่เป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมคางหมู

ส่วนการคำนวณของตัวเลขฟัซซีที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นรูปร่างอื่น และการคำนวณที่มี การคูณและหารสามารถทำได้ดังนี้คือ ให้ ***A*** และ ***B*** เป็นตัวเลขฟัซซี และ $*$ เป็นตัวดำเนินการต่างๆ ($+ - \cdot$ และ $/$) ในการคำนวณ และสำหรับแต่ละค่า $\alpha \in [0,1]$ และ α-cut ของ ***A*** $*$ ***B*** ถูกนิยามในรูปของ α-cut ของ ***A*** และ ***B*** โดย

$$^{\alpha}(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}) = {}^{\alpha}\boldsymbol{A} * {}^{\alpha}\boldsymbol{B} \qquad (6.5)$$

แต่ไม่สามารถใช้สมการที่ 6.5 ในการคำนวณการหารที่ $0 \in {}^{\alpha}\boldsymbol{B}$ สำหรับทุกค่า $\alpha \in [0,1]$ ตัวเลขฟัซซีผลลัพธ์คือ

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}^{\alpha}(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B})\alpha \qquad (6.6)$$

ตัวอย่างที่ 6.4 ทำการคำนวณ $+ - \cdot$ และ $/$ ของตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** ที่มีฟังก์ชันสมาชิกดังนี้

$$A(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<-1 \text{ และ } x>3\\ \dfrac{x+1}{2} & \text{สำหรับ } -1\le x\le 1\\ \dfrac{3-x}{2} & \text{สำหรับ } 1\le x\le 3\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<1 \text{ และ } x>5\\ \dfrac{x-1}{2} & \text{สำหรับ } 1\le x\le 3\\ \dfrac{5-x}{2} & \text{สำหรับ } 3\le x\le 5\end{cases}$$

สำหรับทุกค่า $\alpha\in[0,1]$ ${}^{\alpha}A=[{}^{\alpha}a_1,{}^{\alpha}a_2]$ และ ${}^{\alpha}B=[{}^{\alpha}b_1,{}^{\alpha}b_2]$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$A\left({}^{\alpha}a_1\right)=\frac{{}^{\alpha}a_1+1}{2}=\alpha$$

$$A\left({}^{\alpha}a_2\right)=\frac{3-{}^{\alpha}a_2}{2}=\alpha$$

จะได้ว่า ${}^{\alpha}a_1=2\alpha-1$ และ ${}^{\alpha}a_2=3-2\alpha$ ดังนั้น ${}^{\alpha}A=[2\alpha-1,\,3-2\alpha]$ ในทำนองเดียวกัน

$$B\left({}^{\alpha}b_1\right)=\frac{{}^{\alpha}b_1-1}{2}=\alpha$$

$$B\left({}^{\alpha}b_2\right)=\frac{5-{}^{\alpha}b_2}{2}=\alpha$$

จะได้ว่า ${}^{\alpha}b_1=2\alpha+1$ และ ${}^{\alpha}b_2=5-2\alpha$ ดังนั้น ${}^{\alpha}B=[2\alpha+1,\,5-2\alpha]$ ดังนั้น

$${}^{\alpha}(A*B)=[2\alpha-1,\,3-2\alpha]*[2\alpha+1,\,5-2\alpha]$$

ถ้า $*=+$ จะได้

$${}^{\alpha}(A+B)=[4\alpha,\,8-4\alpha]$$

ขอบเขตล่างของช่วงผลลัพธ์จะมีค่าอยู่ในช่วง $[0,4]$ และขอบเขตบนจะอยู่ในช่วง $[4,8]$ นั่นคือ

$$4\alpha=x \qquad \text{เมื่อ } x\in[0,4]$$

$$8-4\alpha=x \qquad \text{เมื่อ } x\in[4,8]$$

$$\text{จะได้} \quad \alpha=x/4=(A+B)(x) \quad \text{เมื่อ } x\in(0,4]$$

$$\text{และ} \quad \alpha=(8-x)/4=(A+B)(x) \quad \text{เมื่อ } x\in[4,8)$$

ดังนั้นฟังก์ชันสมาชิกของ $A+B$ คือ $(A+B)(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<0 \text{ และ } x>8\\ \dfrac{x}{4} & \text{สำหรับ } 0\le x\le 4\\ \dfrac{8-x}{4} & \text{สำหรับ } 4\le x\le 8\end{cases}$

ถ้า $*=-$ จะได้

$$\begin{aligned}{}^{\alpha}(A-B) &= [2\alpha-1,\ 3-2\alpha]-[2\alpha+1,\ 5-2\alpha]\\ &= [4\alpha-6,\ 2-4\alpha]\end{aligned}$$

และทำการหาค่าขอบเขตบนและล่างของ α-cut ของทุกค่า $\alpha \in [0,1]$ ได้ดังเช่นการบวกจะได้ฟังก์ชันสมาชิกของผลลบเป็น

$$(A-B)(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<-6 \text{ และ } x>2\\ \dfrac{x+6}{4} & \text{สำหรับ } -6\le x\le -2\\ \dfrac{2-x}{4} & \text{สำหรับ } -2\le x\le 2\end{cases}$$

ถ้า $*=\cdot$ จะได้

$$\begin{aligned}{}^{\alpha}(A\cdot B) &= [2\alpha-1,\ 3-2\alpha]\cdot[2\alpha+1,\ 5-2\alpha]\\ &= \begin{cases}\left[-4\alpha^2+12\alpha-5, 4\alpha^2-16\alpha+15\right] & \text{เมื่อ } \alpha\in(0,0.5]\\ \left[4\alpha^2-1, 4\alpha^2-16\alpha+15\right] & \text{เมื่อ } \alpha\in(0.5,1]\end{cases}\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันสมาชิกของผลคูณเป็น

$$(A\cdot B)(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<-5 \text{ และ } x>15\\ \dfrac{3-(4-x)^{1/2}}{2} & \text{สำหรับ } -5\le x\le 0\\ \dfrac{(1+x)^{1/2}}{2} & \text{สำหรับ } 0\le x\le 3\\ \dfrac{4-(1+x)^{1/2}}{2} & \text{สำหรับ } 3\le x\le 15\end{cases}$$

ถ้า $*=/$ จะได้

$$
{}^{\alpha}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = \begin{cases} \left[\dfrac{2\alpha-1}{2\alpha+1}, \dfrac{3-2\alpha}{2\alpha+1}\right] & \text{เมื่อ} \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ \left[\dfrac{2\alpha-1}{5-2\alpha}, \dfrac{3-2\alpha}{2\alpha+1}\right] & \text{เมื่อ} \quad \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}
$$

ดังนั้นฟังก์ชันสมาชิกของผลหารเป็น

$$
(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B})(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x < -1 \text{ และ } x > 3 \\ \dfrac{x+1}{2-2x} & \text{สำหรับ } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{5x+1}{2x+2} & \text{สำหรับ } 0 \le x \le 1/3 \\ \dfrac{3-x}{2x+2} & \text{สำหรับ } 1/3 \le x \le 3 \end{cases}
$$

■

โดยปกติเซตของจำนวนจริงมีความสัมพันธ์ลำดับเชิงเส้น (linear ordering) สำหรับทุกคู่ของจำนวนจริง (x และ y) โดยที่ $x \le y$ หรือ $y \le x$ ดังนั้นสำหรับทุกคู่ของ x และ y ใน เส้นจำนวนจริง ($\Re$) ได้ว่า

$$
\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \le y \\ y & \text{ถ้า } y \le x \end{cases} \tag{6.7}
$$

$$
\max(x, y) = \begin{cases} y & \text{ถ้า } x \le y \\ x & \text{ถ้า } y \le x \end{cases} \tag{6.8}
$$

แต่การเรียงลำดับนี้ใช้ได้กับเลขจำนวนจริงเท่านั้น ดังนั้นสิ่งที่จะอธิบายต่อไปนี้เป็นการเรียงลำดับบางส่วนของตัวเลขฟัซซีที่ทำตามวิธีของหลักการการขยาย (extension principle) นั่นคือขยายการหา min และ max ไปที่ตัวเลขฟัซซี ดังนี้คือ

$$
\mathrm{MIN}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})(z) = \sup_{z=\min(x,y)} \min[\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)] \tag{6.9}
$$

$$
\mathrm{MAX}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})(z) = \sup_{z=\max(x,y)} \min[\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)] \tag{6.10}
$$

สำหรับทุกค่า z และสมการที่ 6.9 และ 6.10 ได้ผ่านการพิสูจน์แล้วว่าผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตัวเลขฟัซซีเช่นเดียวกัน

มีข้อน่าสังเกตที่ควรระวัง คือ MIN และ MAX เป็นการหาตัวเลขฟัซซีที่เล็กที่สุด และใหญ่ที่สุดระหว่างตัวเลขฟัซซี 2 ตัวเลข ซึ่งแตกต่างโดยสิ้นเชิงกับการหา min และ max ในกรณีของการทำอินเตอเซกชัน (intersection) และ ยูเนียน (union) ฟัซซีเซต หรือตัวเลขฟัซซี

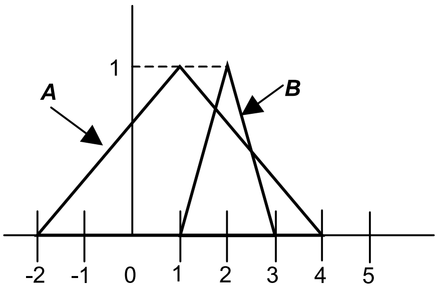
ตัวอย่าง 6.5 ให้ตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** โดยที่ตัวเลขฟัซซีทั้งสองมีฟังก์ชันสมาชิกเป็น

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<-2 \text{ และ } x>4\\ \dfrac{x+2}{3} & \text{สำหรับ } -2\le x\le 1\\ \dfrac{4-x}{3} & \text{สำหรับ } 1\le x\le 4\end{cases}$$

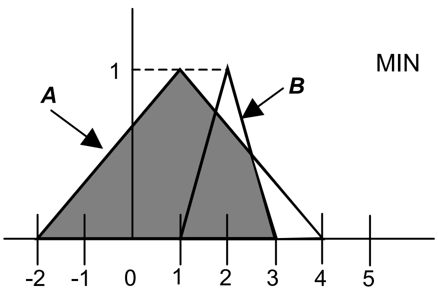
$$\boldsymbol{B}(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<1 \text{ และ } x>3\\ x-1 & \text{สำหรับ } 1\le x\le 2\\ 3-x & \text{สำหรับ } 2\le x\le 3\end{cases}$$

ดังนั้นตัวเลขฟัซซีที่น้อยที่สุดคือ $\text{MIN}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<-2 \text{ และ } x>3\\ \dfrac{x+2}{3} & \text{สำหรับ } -2\le x\le 1\\ \dfrac{4-x}{3} & \text{สำหรับ } 1<x\le 2.5\\ 3-x & \text{สำหรับ } 2.5<x\le 3\end{cases}$ และ

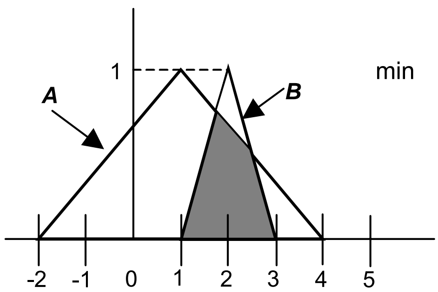
ตัวเลขฟัซซีที่มากที่สุดคือ $\text{MAX}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})(x)=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x<1 \text{ และ } x>4\\ x-1 & \text{สำหรับ } 1\le x\le 2\\ 3-x & \text{สำหรับ } 2<x\le 2.5\\ \dfrac{4-x}{3} & \text{สำหรับ } 2.5<x\le 4\end{cases}$ ฟังก์ชันสมาชิก



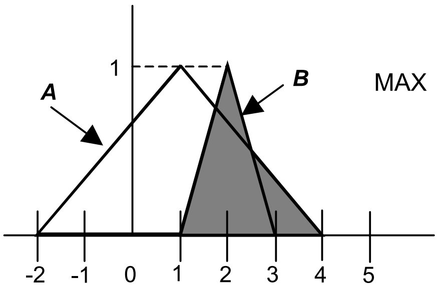
(ก)

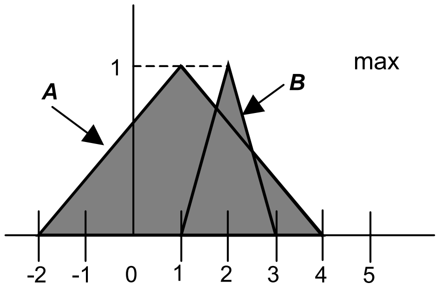


(ข)



(ค)





รูปที่ 6.8 (ก) ตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** (ข) ตัวเลขฟัซซีที่น้อยที่สุด (ค) อินเตอเซกชัน ของ ***A*** และ ***B*** (ง) ตัวเลขฟัซซีที่มากที่สุด (จ) ยูเนียนของ ***A*** และ ***B***

ของตัวเลขฟัซซี ***A B*** ตัวเลขฟัซซีที่น้อยที่สุด และ มากที่สุด รวมทั้งการหา min หรืออินเตอเซกชัน และ max หรือ ยูเนียน แสดงในรูปที่ 6.8 จากรูปจะเห็นได้ถึงความแตกต่างระหว่างการหาตัวเลขฟัซซีที่น้อยที่สุด และ มากที่สุด กับ การหา min หรืออินเตอเซกชัน และ max หรือ ยูเนียน ■

การเรียงลำดับบางส่วน (partial ordering) ($\preceq$) ถูกนิยามดังนี้

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } \mathrm{MIN}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \text{ หรือ} \quad (6.11)$$

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } \mathrm{MAX}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \quad (6.12)$$

สำหรับตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** ใดๆที่อยู่ในฟัซซีพาวเวอร์เซต (power set) ($\tilde{\mathcal{P}}(\Re)$) ของเส้นจำนวนจริง ($\Re$) และยังสามารถนิยามการเรียงลำดับบางส่วนในรูปของ α-cut ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } \min({}^{\alpha}\boldsymbol{A}, {}^{\alpha}\boldsymbol{B}) = {}^{\alpha}\boldsymbol{A} \quad (6.13)$$

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } \max({}^{\alpha}\boldsymbol{A}, {}^{\alpha}\boldsymbol{B}) = {}^{\alpha}\boldsymbol{B} \quad (6.14)$$

หรือสำหรับตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** ใดๆที่อยู่ในฟัซซีพาวเวอร์เซต (power set) ($\tilde{\mathcal{P}}(\Re)$) ของเส้นจำนวนจริง ($\Re$) และ $\alpha \in (0,1]$โดยที่ ${}^{\alpha}\boldsymbol{A}$ และ ${}^{\alpha}\boldsymbol{B}$ เป็นช่วงปิด ให้ ${}^{\alpha}\boldsymbol{A} = [a_1,a_2]$ และ ${}^{\alpha}\boldsymbol{B}=[b_1,b_2]$ แล้ว

$$\min({}^{\alpha}\boldsymbol{A}, {}^{\alpha}\boldsymbol{B}) = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)] \quad (6.15)$$

$$\max({}^{\alpha}\boldsymbol{A}, {}^{\alpha}\boldsymbol{B}) = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)] \quad (6.16)$$

และถ้าการเรียงลำดับบางส่วนของช่วงปิดเป็น

$$[a_1, a_2] \leq [b_1, b_2] \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } a_1 \leq b_1 \text{ และ } a_2 \leq b_2$$

ดังนั้นสำหรับตัวเลขฟัซซี ***A*** และ ***B*** ใดๆที่อยู่ในฟัซซีพาวเวอร์เซต (power set) ($\tilde{\mathcal{P}}(\Re)$) ของเส้นจำนวนจริง ($\Re$) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \text{ ก็ต่อเมื่อ (iff) } {}^{\alpha}\boldsymbol{A} \leq {}^{\alpha}\boldsymbol{B} \quad (6.17)$$

สำหรับทุก $\alpha \in (0,1]$ แต่ตัวเลขฟัซซีในตัวอย่างที่ 6.5 ไม่สามารถเปรียบเทียบได้ตามการเรียงลำดับบางส่วนในหัวข้อนี้ แต่อย่างไรก็ตามตัวแปรภาษา (linguistic variable) สามารถเปรียบเทียบกันได้ เช่น ตัวแปรภาษาของงานงานหนึ่งมีดังนี้ ‘very small’ ‘small’ ‘medium’ ‘large’ ‘very large’ ถ้าต้องการเรียงลำดับบางส่วนจะได้

‘very small’ $\preceq$ ‘small’ $\preceq$ ‘medium’ $\preceq$ ‘large’ $\preceq$ ‘very large’

ถึงแม้ว่าฟัซซีพาวเวอร์เซต (power set) ($\tilde{\mathcal{P}}(\mathfrak{R})$) ของ $\mathfrak{R}$ จะไม่สามารถหาการเรียงลำดับบางส่วนได้ด้วยวิธีนี้แต่มีซับเซตบางเซตที่อยู่ใน $\tilde{\mathcal{P}}(\mathfrak{R})$ สามารถการเรียงลำดับบางส่วน ซึ่งมีใช้ในการประยุกต์ต่างๆมากมาย และนอกเหนือจากการเรียงลำดับวิธีนี้ยังมีการเรียงลำดับตัวเลขฟัซซีแบบอื่นๆที่ไม่ได้กล่าวถึงในบทนี้แต่มีการใช้ในงานทั่วไป

6.4 สมการฟัซซี (Fuzzy Equations)

หนึ่งในทฤษฎีฟัซซีเซตที่เกี่ยวข้องกับตัวเลขฟัซซีและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซี เป็นส่วนหนึ่งของสมการฟัซซี (fuzzy equation) ซึ่งคือสมการที่สัมประสิทธิ์ (coefficient) และตัวไม่รู้ค่า (unknowns) เป็นตัวเลขฟัซซี และสูตร (formula) ถูกสร้างจากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ของตัวเลขฟัซซี

แต่เนื่องจากทฤษฎีในเรื่องยังไม่ถูกพัฒนามากนักและยังขาดทฤษฎีที่ดี ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงลักษณะสมบัติบางอย่างของสมการฟัซซีโดยจะกล่าวถึงสมการอย่างง่าย 2 สมการคือ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ และ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ โดยที่ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็นตัวเลขฟัซซี และ $\boldsymbol{X}$ เป็นตัวไม่รู้ค่าฟัซซี ที่จะทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง

6.4.1 สมการ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

ความยากในการแก้สมการนี้เกิดจากการที่ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ ไม่ใช่คำตอบที่ได้ นั่นคือสมมุติให้ $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2]$ และ $\boldsymbol{B} = [b_1, b_2]$ และจากการวิเคราะห์ของช่วงจะได้ว่า $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = [b_1 - a_2, b_2 - a_1]$ และ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} &= [a_1, a_2] + [b_1 - a_2, b_2 - a_1] \\
&= [a_1 + b_1 - a_2, a_2 + b_2 - a_1] \\
&\neq [b_1, b_2] = \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

ถ้า $a_1 \neq a_2$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง

สมมุติให้ $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2]$ จากสมการจะได้ว่า $[a_1 + x_1, a_2 + x_2] = [b_1, b_2]$ ถ้ามองสมการนี้ให้เป็นสมการของตัวเลขปกติจะได้ว่า

$$a_1 + x_1 = b_1$$

$$a_2 + x_2 = b_2$$

ดังนั้นคำตอบควรจะเป็น

$$x_1 = b_1 - a_1 \tag{6.18}$$

$$x_2 = b_2 - a_2 \tag{6.19}$$

แต่เนื่องจาก $\boldsymbol{X}$ เป็นช่วงดังนั้น $x_1 \leq x_2$ เสมอ นั่นคือสมการ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ (iff) $b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2$ และถ้าสมการที่ไม่เท่ากันนี้เป็นจริงคำตอบคือ $\boldsymbol{X} = [\, b_1 - a_1, b_2 - a_2]$

ตัวอย่างข้างต้นเพื่อแสดงการแก้สมการที่มีตัวเลขฟัซซี $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ที่เป็นช่วงปิด แต่ตัวเลขฟัซซีโดยปกติจะถูกแทนด้วย α-cut ได้ และแต่ละ α-cut เป็นช่วงปิด ดังนั้นคำตอบของสมการฟัซซีคือ

หาคำตอบจากแต่ละ α-cut ที่มีค่า α ไม่เป็น 0 ที่อยู่ใน เซตระดับ (level set) $\wedge_A$ และ $\wedge_B$ นั่นคือ สำหรับ $\alpha \in (0,1]$ ${}^{\alpha}\boldsymbol{A}=[{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$ ${}^{\alpha}\boldsymbol{B}=[{}^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ และ ${}^{\alpha}\boldsymbol{X}=[{}^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$ ดังนั้นสมการ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ (iff)

1. ${}^{\alpha}b_1-{}^{\alpha}a_1 \le {}^{\alpha}b_2-{}^{\alpha}a_2$ สำหรับ ทุกค่าของ $\alpha \in (0,1]$ และ
2. สำหรับ $\alpha \le \beta$ จะได้ว่า ${}^{\alpha}b_1-{}^{\alpha}a_1 \le {}^{\beta}b_1-{}^{\beta}a_1 \le {}^{\beta}b_2-{}^{\beta}a_2 \le {}^{\alpha}b_2-{}^{\alpha}a_2$
   จากคุณสมบัติข้อที่ 1 จะได้ว่าสำหรับสมการ

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{A}+{}^{\alpha}\boldsymbol{X}={}^{\alpha}\boldsymbol{B} \tag{6.20}$$

จะมีคำตอบที่

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{X}=[{}^{\alpha}b_1-{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}b_2-{}^{\alpha}a_2] \tag{6.21}$$

และคุณสมบัติที่ 2 จะได้ว่าคำตอบของสมการของช่วงสำหรับ α และ β จะเป็นช่วงที่เป็นช่วงซ้อนใน (nested interval) นั่นคือ ถ้า $\alpha \le \beta$ แล้ว ${}^{\beta}\boldsymbol{X} \subseteq {}^{\alpha}\boldsymbol{X}$ และถ้า ${}^{\alpha}\boldsymbol{X}$ มีค่าสำหรับทุกค่า $\alpha \in (0,1]$ และคุณสมบัติที่ 2 เป็นจริง จากทฤษฎีการแยก (Decomposition Theorem) ของฟัซซีเซตจะได้ว่า

$$ \boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} {}_{\alpha}\boldsymbol{X} \tag{6.22}$$

ตารางที่ 6.1 α-cut ของ ***A B*** และ ***X*** ที่คำนวณได้จากสมการที่ 6.21

α	${}^{\alpha}\boldsymbol{A}$	${}^{\alpha}\boldsymbol{B}$	${}^{\alpha}\boldsymbol{X}$
1.0	[4,4]	[6,6]	[2,2]
0.9	[3,4]	[5,6]	[2,2]
0.8	[2,4]	[4,6]	[2,2]
0.7	[2,4]	[3,6]	[1,2]
0.6	[1,4]	[2,6]	[1,2]
0.5	[1,5]	[2,7]	[1,2]
0.4	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.3	[1,5]	[2,8]	[1,3]
0.2	[0,5]	[1,9]	[1,4]
0.1	[0,6]	[0,10]	[0,4]

ตัวอย่างที่ 6.6 ให้ทำการแก้สมการ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ โดยที่

$$\boldsymbol{A} = 0.2/[0,1)+0.6/[1,2)+0.8/[2,3)+0.9/[3,4) + 1/4 +0.5/(4,5]+0.1/(5,6]$$

$$\boldsymbol{B} = 0.1/[0,1)+0.2/[1,2)+0.6/[2,3)+0.7/[3,4)+0.8/[4,5)+0.9/[5,6) + 1/6 +0.5/(6,7] +0.4/(7,8] +0.2/(8,9] +0.1/(9,10]$$

สมมุติให้ $\wedge_A$ และ $\wedge_B$ เท่ากับ $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$ ในตารางที่ 6.1 แสดง α-cut ของ ***A*** และ ***B*** สำหรับทุกค่า α ในเซตระดับ รวมทั้ง α-cut ของ ***X*** ที่หาได้จากสมการที่ 6.21

จากตารางจะเห็นได้ว่าคุณสมบัติที่ 2 เป็นจริง ดังนั้น

$$\boldsymbol{X} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_{\alpha}\boldsymbol{X} = 0.1/[0,1) + 0.7/[1,2) + 1/2 + 0.4/(2,3] + 0.2/(3,4] \quad \blacksquare$$

6.4.2 สมการ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

สมการนี้ก็มีความยากในการแก้สมการ เช่นเดียวกับในหัวข้อที่ 6.4.1 และเนื่องจากในการแก้สมการประเภทนี้ มีการใช้การหารในการคำนวณด้วยดังนั้นเราจึงสมมุติว่าตัวเลขฟัซซี $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็นตัวเลขฟัซซีที่อยู่บน $\Re^+$ เท่านั้น และการที่จะพิสูจน์ว่า $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ไม่ใช่คำตอบของสมการ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ ทำได้เช่นเดียวกับในหัวข้อ 6.4.1 (จึงละไว้ในที่นี้)

สมมุติให้สำหรับทุกค่าของ $\alpha \in (0,1]$ ให้ ${}^{\alpha}\boldsymbol{A} = [{}^{\alpha}a_1, {}^{\alpha}a_2]$ ${}^{\alpha}\boldsymbol{B} = [{}^{\alpha}b_1, {}^{\alpha}b_2]$ และ ${}^{\alpha}\boldsymbol{X} = [{}^{\alpha}x_1, {}^{\alpha}x_2]$ จะได้ว่า

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{A} \cdot {}^{\alpha}\boldsymbol{X} = {}^{\alpha}\boldsymbol{B} \tag{6.23}$$

โดยการแก้สมการ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ ทำได้โดยการแก้ สมการที่ 6.23 ของจุดขอบ (end points) ของ α-cut สำหรับทุกค่า $\alpha \in (0,1]$ และสมการนี้จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ (iff)

1. ${}^{\alpha}b_1/{}^{\alpha}a_1 \leq {}^{\alpha}b_2/{}^{\alpha}a_2$ สำหรับ ทุกค่าของ $\alpha \in (0,1]$ และ
2. สำหรับ $\alpha \leq \beta$ จะได้ว่า ${}^{\alpha}b_1/{}^{\alpha}a_1 \leq {}^{\beta}b_1/{}^{\beta}a_1 \leq {}^{\beta}b_2/{}^{\beta}a_2 \leq {}^{\alpha}b_2/{}^{\alpha}a_2$

   และเช่นเดิมคำตอบของสมการจะอยู่ในรูปแบบเช่นเดียวกับสมการที่ 6.22 นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.7 ให้แก้สมการ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ โดยที่

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ} \quad x \leq 3 \text{ และ } x > 5 \\ x - 3 & \text{สำหรับ} \quad 3 < x \leq 4 \\ 5 - x & \text{สำหรับ} \quad 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ} \quad x \leq 12 \text{ และ } x > 32 \\ \dfrac{x - 12}{8} & \text{สำหรับ} \quad 12 < x \leq 20 \\ \dfrac{32 - x}{12} & \text{สำหรับ} \quad 20 < x \leq 32 \end{cases}$$

จะได้ว่า α-cut ของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็น

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{A} = [\alpha + 3, 5 - \alpha]$$

$$ {}^{\alpha}\boldsymbol{B} = [8\alpha + 12, 32 - 12\alpha]$$

และจะเห็นได้ว่า

$$\frac{8\alpha + 12}{\alpha + 3} \leq \frac{32 - 12\alpha}{5 - \alpha}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$^{\alpha}\boldsymbol{X}=\left[\frac{8\alpha+12}{\alpha+3},\frac{32-12\alpha}{5-\alpha}\right]$$

สำหรับทุกค่า $\alpha \in (0,1]$ และสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $\alpha \leq \beta$ แล้ว $^{\beta}\boldsymbol{X} \subseteq {}^{\alpha}\boldsymbol{X}$ สำหรับทุกคู่ของ α และ $\beta \in (0,1]$ ดังนั้นคำตอบของสมการนี้คือ

$$\boldsymbol{X}=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}{}_{\alpha}\boldsymbol{X}=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ} \quad x\leq 4 \text{ และ } x\geq 32/5\\ \dfrac{12-3x}{x-8} & \text{สำหรับ} \quad 4<x\leq 5\\ \dfrac{32-5x}{12-x} & \text{สำหรับ} \quad 5<x\leq 32/5\end{cases}$$ ■

ฟัซซีลอจิก 7
Fuzzy Logic

ในบทนี้จะกล่าวถึงฟัซซีลอจิกที่ถูกนำมาใช้ในการประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ เช่นระบบควบคุม ระบบการตัดสินใจ การรู้จำรูปแบบ และอื่นๆ เป็นต้น

คำว่าฟัซซีลอจิก (fuzzy logic) มีความหมายที่ใช้ในงานต่างๆอยู่ด้วยกัน 2 ความหมายคือ ความหมายอย่างกว้าง (board sense) และความหมายอย่างแคบ (narrow sense) โดยที่ความหมายอย่างกว้างหมายถึงระบบของแนวคิด (concept) หลักการ (principle) และ วิธีการ (method) ที่เอาไว้จัดการกับการหาเหตุผลที่เป็นการประมาณมากกว่าที่จะเจาะจง ในขณะที่ความหมายโดยแคบหมายถึง นัยทั่วไป (generalization) ของลอจิกหลายค่า (multivalue logic) ที่เป็นการศึกษาเกี่ยวกับลอจิกสัญลักษณ์ (symbolic logic) ซึ่งเป็นการศึกษามาตั้งแต่ตอนต้นของศตวรรษนี้ ซึ่งในบทนี้หรือวิชานี้สนใจฟัซซีลอจิกแบบกว้างเท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามจะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานของฟัซซีลอจิกแบบแคบ เพื่อให้นักศึกษาสามารถแยกออกได้ระหว่างฟัซซีลอจิกทั้งสองประเภท

ฟัซซีลอจิกแบบกว้างเป็นการประยุกต์ใช้ทฤษฎีฟัซซีเซตเพื่อการหาเหตุผลโดยประมาณ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องสร้างจุดเชื่อมระหว่าง ระดับของค่าสมาชิกของฟัซซีเซต และ ระดับของค่าความจริงของพจน์แบบฟัซซี (fuzzy proposition)

ให้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ มีค่าความเป็นสมาชิกของ x เป็น $\boldsymbol{A}(x)$ สำหรับ x ที่อยู่ในเซตสากล X และอาจจะแปลเป็นระดับของความจริงของพจน์แบบฟัซซีได้เป็น “x เป็น $\boldsymbol{F}$” โดยที่ x อยู่ในเซตสากล X และ $\boldsymbol{F}$ เป็นคำในภาษาฟัซซี (fuzzy linguistic) เช่น ‘low’ ‘high’ ‘very far’ ‘extremely slow’ เป็นต้น และระดับของค่าความจริงอาจถูกแปลได้ตามระดับของความเป็นสมาชิก $\boldsymbol{A}(x)$ โดยที่ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ เป็นคำในภาษาฟัซซี $\boldsymbol{F}$ นั้นๆ และคำเชื่อมประโยคต่างๆ (negation, conjunction และ disjunction) ถูกนิยามเช่นเดียวกับตัวดำเนินการต่างๆในฟัซซีเซต (คอมพลีเมนต์ (complement), อินเตอเซกชัน (intersection) และ ยูเนียน (union))

7.1 ลอจิกหลายค่า (Multivalued Logics)

จากที่เคยกล่าวไว้แล้วว่า พจน์ทุกพจน์ในลอจิกแบบดั้งเดิมมีค่าความจริงได้แค่ จริง หรือไม่จริงและทำให้การหาเหตุผลจากพจน์เหล่านั้นมีค่าความจริงได้แค่ จริงหรือไม่จริงเช่นกัน แต่ในความเป็นจริงดังที่เคยกล่าวไปแล้วค่าความเป็นจริงเหล่านี้ไม่ได้มีแค่ จริงหรือไม่จริงเท่านั้น ดังนั้น ลอจิกหลายค่า (multivalued logics) จึงถูกสร้างขึ้นมาเพื่อที่จะครอบคลุมถึงความไม่แน่นอนเหล่านั้น และในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเพียงแค่ 2 ประเภทคือ ลอจิก 3 ค่า (3-valued logics) และ ลอจิก n ค่า (n-valued logics)

7.1.1 ลอจิก 3 ค่า (3-valued Logics)

ลอจิกหลายค่าทุกประเภทมีการผ่อนคลาย (relax) ค่าความเป็นจริงโดยการใส่ค่าที่อยู่ตรงกลางค่าสุดขีดทั้งสอง ส่วนในลอจิก 3 ค่า ใส่ค่าตรงกลางเข้าไปเพียงแค่ 1 ค่า โดยที่ค่าความเป็นจริง

ของ จริง ค่ากลาง ไม่จริงคือ 1 1/2 0 นั่นเอง ตารางที่ 7.1 แสดงถึงตัวดำเนินการของ negation (~) ของพจน์ นั่นคือ ค่าความเป็นจริงของ $\sim p = 1 -$ ค่าความเป็นจริงของ p

<u>ตารางที่ 7.1 negation ของ ลอจิก 3 ค่า</u>

p	$\sim p$
0	1
1/2	1/2
1	0

และเนื่องจากมีนิยามเกี่ยวกับลอจิก 3 ค่าอยู่มาก และแต่ละนิยามให้ความหมายของตัวเชื่อมอื่นๆ ต่างกันซึ่งจะขึ้นอยู่กับความเข้าใจของความหมายของตัวเชื่อมนั้นๆ และในที่นี้จะกล่าวถึง 5 นิยามที่เป็นที่รู้จักโดยทั่วไป ซึ่งในตารางที่ 7.2 แสดงค่าความจริงของลอจิก 3 ค่า ทั้ง 5 สำหรับตัวเชื่อม conjunction ($\wedge$) disjunction ($\vee$) implication ($\rightarrow$) และ equivalence ($\leftrightarrow$)

<u>ตารางที่ 7.2 ค่าความจริงของตัวเชื่อมของ ลอจิก 3 ค่า บางลอจิก</u>

a	b	Lukasiewicz				Bochvar				Kleene				Heyting				Riechenbach			
		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	½	0	½	1	½	½	½	½	½	0	½	1	½	0	½	1	0	0	½	1	½
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
½	0	0	½	½	½	½	½	½	½	0	½	½	½	0	½	0	0	0	½	½	½
½	½	½	½	1	1	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	1	1	½	½	1	1
½	1	½	1	1	½	½	½	½	½	½	1	1	½	½	1	1	½	½	1	1	½
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	½	½	1	½	½	½	½	½	½	½	1	½	½	½	1	½	½	½	1	½	½
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

จากตารางจะเห็นว่าทั้ง 5 ลอจิกให้ค่าความเป็นจริงเช่นเดียวกับใน ลอจิกแบบดั้งเดิมในกรณีที่ค่าความจริงของทั้งสองพจน์เป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นแต่ ค่าความจริงในกรณีที่ค่าใดค่าหนึ่งของทั้งสองพจน์เป็น ½ จะแตกต่างกัน เนื่องจากทั้ง 5 ปฏิบัติต่อค่าความจริง ½ ต่างกัน และจากเหตุผลนี้ทำให้กฎของความขัดแย้ง (law of contradiction) กฎนิรมัชฌิม (law of excluded middle) และ ประโยคซ้ำความ (tautology) ไม่เป็นจริงสำหรับลอจิก 3 ค่า ตัวอย่างเช่น ลอจิก 3 ค่าของ Bochvar จะไม่ให้ประโยคซ้ำความ เพราะแต่ละตัวเชื่อมจะมีค่าความจริงเป็น ½ ถ้าพจน์ที่เป็นอินพุตตัวใดตัวหนึ่งมีค่าความจริงเป็น ½

ดังนั้นในลอจิก 3 ค่า ความหมายของประโยคซ้ำความจะถูกขยายไปยัง ประโยคซ้ำความเสมือน (quasi tautology) นั่นคือถ้าประโยคใดใน ลอจิก 3 ค่าไม่ได้มีค่าความจริงเป็น 0 (ไม่จริง) โดยไม่สนใจค่าความจริงของพจน์อินพุตเป็น ประโยคซ้ำความเสมือน และทำนองเดียวกันกับ ประโยคขัดแย้งเสมือน (quasi-contradiction) ซึ่งคือประโยคใดใน ลอจิก 3 ค่าไม่ได้มีค่าความจริงเป็น 1 (จริง) โดยไม่สนใจค่าความจริงของพจน์อินพุต ตารางที่ 7.3 แสดงถึงผลกระทบของ ลอจิก 3 ค่าที่มีต่อประโยคซ้ำความซึ่งในตารางนี้แสดงโดย De Morgan law ที่ใช้ Bochvar Lukasiewicz และ Kleene

จากตารางที่ 7.3 จะเห็นได้ว่า Bochvar และ Kleene ให้ค่าความเป็นจริง ½ ที่ตัวเชื่อมหลักคือ equivalence ดังนั้น De Morgan law ไม่ใช่ประโยคซ้ำความของ ลอจิกนี้ แต่อย่างไรก็ตามทั้งสองมี

ความแตกต่างกันที่แถวที่อินพุตมีค่าความจริงเป็น ½ และในแถวที่ 2 ทำให้เห็นว่า Bochvar ไม่เข้มงวดเท่า Kleene ในกรณีของ conjunction แต่เข้มงวดกว่าในกรณีของ disjunction ในขณะเดียวกัน Lukasiewicz ให้ค่าความจริงที่ตัวเชื่อมหลัก เท่ากับ 1 ตลอด และลอจิกนี้ประเมิณค่า De Morgan law เช่นเดียวกับลอจิก 2 ค่า และ Lukasiewicz ก็เช่นเดียวกับ Kleene ที่เข้มงวดกว่า Bochvar ในกรณีของ conjunction แต่ไม่เข้มงวดเท่าในกรณีของ disjunction

<u>ตารางที่ 7.3 ลอจิก 3 ค่า 3 แบบ ต่อ De Morgan law</u>

p	q	Bochvar			Lukasiewicz			Kleene		
		$\sim(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	½	½	½	½	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
½	0	½	½	½	1	1	1	1	1	1
½	½	½	½	½	½	1	½	½	½	½
½	1	½	½	½	½	1	½	½	½	½
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	½	½	½	½	½	1	½	½	½	½
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0

ลอจิก 3 ค่าไม่ได้มีผลกับการหาค่าความจริง ต่างๆ เท่านั้นแต่ยังมีผลกับการหาเหตุผล (inference) เช่น Modus ponens ซึ่งมีสมการเป็น $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ และเป็นประโยคซ้ำความเสมอในกรณีของลอจิกดั้งเดิม แต่ในกรณีของ ลอจิก 3 ค่าเป็นประโยคซ้ำความเสมือนดังแสดงในตารางที่ 7.4 โดยใช้ Lukasiewicz จากตารางที่ 7.4 เราสามารถกล่าวได้ว่าพจน์ที่อธิบาย Modus ponens ไม่ได้เป็นประโยคซ้ำความ ดังนั้นกฎการหาเหตุผลจึงไม่จำเป็นต้องเป็นจริง (valid)

<u>ตารางที่ 7.4 Lukasiewicz สำหรับการทำ Modus ponens</u>

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	½	1	0	1
0	1	1	0	1
½	0	½	½	½
½	½	1	½	1
½	1	1	½	1
1	0	0	0	1
1	½	½	½	1
1	1	1	1	1

สำหรับคำถามที่ว่าจะให้ค่าความจริงกับตัวเชื่อมโดยใช้ความคิดที่เข้มงวดหรือไม่เข้มงวดอย่างไร คำตอบคือให้ใช้แนวคิดเกี่ยวกับตัวเชื่อมนั้น เช่น การส่อความ (implication) ไม่ควรจะเป็นจริงถ้าตัวเหตุเป็นจริงและตัวผลไม่จริง ดังนั้นในลอจิก 3 ค่า ค่าความจริงควรจะเป็นไปตามแนวคิดหรือ

ความเข้าใจเกี่ยวกับความจริงบางส่วนที่ได้จากการประยุกต์ใช้ และนี้คืออีกเหตุผลหนึ่งว่าทำไม ค่าความจริงของ ลอจิก 3 ค่าแต่ละประเภทถึงแตกต่างกัน

7.1.2 ลอจิก n ค่า (n-valued Logics)

ลอจิกหลายค่าโดยปกติถูกเรียกว่าลอจิก n ค่า โดยที่ n คือจำนวนของค่าความเป็นจริงที่แต่ละพจน์จะมีได้ สำหรับค่าใดๆของ n ค่า ความเป็นจริงของพจน์ p ใดๆจะเป็นเศษส่วนที่อยู่ใน $[0,1]$ ซึ่งจะเป็นค่าที่ได้จาก การแบ่งช่วงให้เป็น n-1 ช่วง และนำค่าขอบเขตมาเป็นค่าความจริง ซึ่งเป็นการหารค่า n ค่า (0,1,2,…,n-1) ด้วย n-1 นั่นคือเซตของค่าความจริงของ ลอจิก n ค่า (T_n) เป็น

$$\begin{aligned} T_n &= \{0/(n-1), 1/(n-1), 2/(n-1), \ldots, (n-2)/(n-1), (n-1)/(n-1)\} \\ &= \{0,\ 1/(n-1),\ 2/(n-1), \ldots,\ (n-2)/(n-1),\ 1\} \end{aligned} \tag{7.1}$$

ดังนั้น ลอจิก 5 ค่าจะมีค่าความจริงเป็น 0, ¼, ½, ¾ และ 1 ซึ่งค่าความจริง ¼ หมายถึงมีความไม่จริงมากในขณะที่ความจริงน้อย ส่วน ¾ หมายถึงมีความเป็นจริงมากในขณะที่ความไม่จริงน้อยนั่นเอง

ค่าความจริงเหล่านี้อาจมีความหมายเป็นระดับของความจริงได้ และลอจิกหลายค่าอาจมองได้เป็นจุดเริ่มของฟัซซีลอจิกได้ Lukasiewicz ได้ขยายลอจิอ 3 ค่าโดยใช้ค่าความจริงใน T_n และนิยามพฤติกรรมของตัวเชื่อมทั้ง 5 โดยใช้

$$\bar{p} = 1 - p \tag{7.2}$$

$$p \wedge q = \min(p, q) \tag{7.3}$$

$$p \vee q = \max(p, q) \tag{7.4}$$

$$p \rightarrow q = \min(1,\ 1 - p + q) \tag{7.5}$$

$$p \leftrightarrow q = 1 - |p - q| \tag{7.6}$$

นิยามเหล่านี้เป็นเช่นเดียวกับนิยามที่ได้กล่าวถึงในบทที่ 2 และถ้าเราคำนวณค่าความจริงของตัวเชื่อมเหล่านี้สำหรับ ลอจิก 2 ค่าจะได้ตารางความจริงแบบดั้งเดิม

เมื่อค่าความจริงไม่จำเป็นต้องเป็นเศษส่วนแต่เป็นเลขจำนวนจริงใดๆที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ จะได้ลอจิกอนันต์ (infinite-valued logic) และลอจิกแบบนี้จะแตกต่างกับค่าความจริงที่เป็นเศษส่วนที่อยู่ในเซต T_n สำหรับ $n \rightarrow \propto$ ดังนั้นลอจิกอนันต์ (infinite-valued logic) ถูกเรียกอีกอย่างว่า ลอจิกต่อเนื่อง (continuous logic) และถ้าใช้สมการที่ 7.2 ถึง 7.6 จะได้ ลอจิกแบบ Lukasiewicz ซึ่งนี้เป็นกรณีหนึ่งของฟัซซีลอจิกแบบแคบ และเป็นกรณีที่พิเศษตรงที่การหาค่าความจริงของตัวเชื่อมต่างๆเป็นไปตามตัวดำเนินการมาตรฐานของของฟัซซีเซต และ ฟัซซีลอจิกมีหลายประเภทซึ่งเป็นไปตามการให้ความหมายของตัวเชื่อม และฟัซซีลอจิกแบบแคบอาจถูกมองเป็นชนิด (class) ของลอจิกต่างๆด้วยค่าความจริงในช่วง $[0,1]$

จากที่เคยกล่าวมาแล้วเรื่องที่เราสนใจที่สุดคือฟัซซีลอจิกแบบกว้างซึ่งเป็นการหาเหตุผลที่พจน์ (proposition) มีความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในภาษาทั่วไป และการหาเหตุผลแบบนี้เรียกว่าการหาเหตุผลโดยประมาณ (approximate reasoning) ซึ่งลอจิกดั้งเดิมไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ตัวอย่างของการหาเหตุผลโดยประมาณคือ

Old coins are usually rare collectibles.

<u>Rare collectibles are expensive.</u>

$\therefore$ Old coins are usually expensive.

จะเห็นได้ว่าพจน์เพรดิเคต (predicate term) ไม่ชัดเจน เช่น old rare usually expensive และลอจิกดั้งเดิมไม่สามารถแก้ปัญหานี้ได้ และเป้าหมายของฟัซซีแบบกว้างคือการแก้ปัญหาการหาเหตุผลที่มีพจน์เป็นฟัซซีและสามารถใช้ในภาษาได้ นิพจน์ภาษา (linguistic expression) อาจจะประกอบไปด้วยพจน์ในภาษาที่เป็นฟัซซี (fuzzy linguistic term) หลายประเภทเช่น

1. เพรดิเคตแบบฟัซซี (fuzzy predicate) เช่น tall, young, small, medium, round
2. ค่าความจริงฟัซซี (fuzzy truth values) เช่น true, false, fairly true, หรือ very true
3. ความน่าจะเป็นฟัซซี (fuzzy probability) เช่น likely, unlikely, very likely หรือ highly unlikely
4. ตัวบ่งปริมาณแบบฟัซซี (fuzzy quantifier) เช่น many, few, most หรือ almost all

---

ตัวอย่างที่ 7.1 ในการหาเหตุผลของ

ประโยคที่ 1	All birds fly
ประโยคที่ 2	<u>Penguin is a bird</u>
ประโยคที่ 3	Thus, penguin flies.

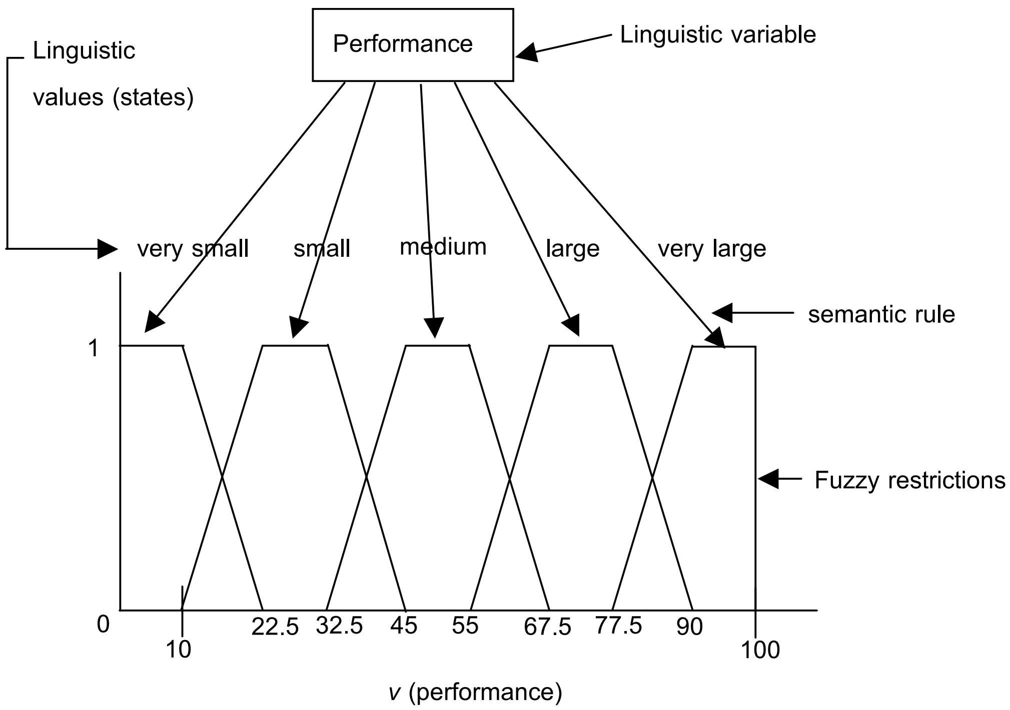
จะเห็นได้ว่าถึงแม้ว่าประโยคที่ 1 และประโยคที่ 2 เป็นจริงแต่ประโยคที่ 3 ไม่เป็นจริงดังนั้นถ้าประโยคที่ 1 เป็น Most birds fly และประโยคที่ 3 อาจจะเป็น It is unlikely that penguin flies. การหาเหตุผลแบบนี้เป็นการหาเหตุผลโดยประมาณ (approximate reasoning) ■

อาจกล่าวได้อีกอย่างว่าการหาเหตุผลโดยประมาณ เกี่ยวข้องกับประโยคที่ไม่จำเป็นต้องเป็นจริงหรือเป็นเท็จ แต่ยังสามารถหาข้อสรุปได้

7.2 ตัวแปรภาษา (Linguistic Variable)

เมื่อฟัซซีเซตถูกนำไปใช้ในการแทนแนวคิดของภาษาเช่น ‘very small’, ‘small’, ‘medium’ และอื่นๆ เราเรียกคำเหล่านี้ว่าค่าของตัวแปรภาษา (linguistic value) หรือพจน์ภาษา (linguistic term) ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรภาษา (linguistic variable) แต่ละตัวแปรภาษาถูกนิยามเป็น ห้าทูเพิล (quintuple) คือ $(x, \boldsymbol{T}(x), U, g, \boldsymbol{m})$ โดยที่ x เป็นชื่อของตัวแปรภาษา $\boldsymbol{T}(x)$ เป็นพจน์ภาษา (linguistic term) ของตัวแปรภาษา x ในเซตสากล U g เป็นกฎวากยสัมพันธ์ (syntactic rule) ที่ใช้ในการสร้างพจน์ภาษา และ $\boldsymbol{m}$ เป็นฟัซซีเซตที่อยู่บนเซตสากล U นั่นคือ $\boldsymbol{m}: \boldsymbol{T} \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(U)$ ตัวอย่างของตัวแปรภาษาแสดงในรูปที่ 7.1 ซึ่งมีตัวแปรภาษาชื่อหรือ x คือ ‘performance’ และ $\boldsymbol{T}(x)$ หรือพจน์ภาษาคือ ‘very small’, ‘small’, ‘medium’, ‘large’ และ ‘very large’ และแต่ละพจน์ภาษาถูกส่งทอดไปที่ฟัซซีเซตทั้ง 5 ในรูปที่ 7.1 โดยที่มีเซตสากลเป็น $[0,100]$

ในหัวข้อ 7.1.2 เรากล่าวถึงลอจิก n ค่าหรือลอจิกต่อเนื่อง ถ้าค่าความจริงไม่ได้เป็นตัวเลขแต่เป็นฟัซซีเซต ค่าความจริงแบบนี้จะมีลักษณะคล้ายกับ ฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 (type-2 fuzzy set) เช่น $\boldsymbol{A} = \text{true}/x_1 + \text{more-or-less-true}/x_2$ ดังนั้นในการหาค่าความจริงของตัวเชื่อม (negation, conjunction, disjunction และ implication) ต่างๆทำได้โดยใช้หลักการการขยาย (extension principle)



รูปที่ 7.1 ตัวอย่างของตัวแปรภาษา

ตัวอย่างที่ 7.2 สมมุติให้

$$\boldsymbol{A} = \{<x, \boldsymbol{A}(x)>\}$$

โดยที่ $\boldsymbol{A}(x) = \{<u_i, \boldsymbol{U}_i(u_i)> \mid x \in X,\ u_i,\ \boldsymbol{U}_i(u_i) \in [0,1]\}$

และ $\boldsymbol{B} = \{<x, \boldsymbol{B}(x)>\}$

โดยที่ $\boldsymbol{B}(x) = \{<v_j, \boldsymbol{V}_j(v_j)> \mid x \in X,\ v_j,\ \boldsymbol{V}_j(v_j) \in [0,1]\}$

ต้องการหายูเนียน ของฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** นั่นคือ

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})(x) = \boldsymbol{A}(x) \cup \boldsymbol{B}(x)$$

แต่เนื่องจากฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** เป็นฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 ดังนั้นจะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}(x) \cup \boldsymbol{B}(x) = \{<w, (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})(\mathrm{w})> \mid w = \max[u_i, v_j],\ u_i, v_j \in [0,1]\}$$

และ
$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})(\mathrm{w}) = \sup_{w = \max\{u_i, v_j\}} \min\{\boldsymbol{U}_i(u_i), \boldsymbol{V}_j(v_j)\}$$

สมมุติให้ที่ค่า *x* เดียวกันค่าความเป็นสมาชิกของทั้งฟัซซีเซต ***A*** และ ***B*** เป็น

$$\boldsymbol{A}(x) = \{<0.8,1>, <0.7,0.5>, <0.6,0.4>\}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \{<1,1>, <0.8,0.5>, <0.7,0.3>\}$$

ทำการหา ยูเนียนที่ค่า *x* นี้ได้โดยใช้ตารางที่ 7.5 และจะได้

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})(x) = \{<0.7,0.3>, <0.8,0.5>, <1,1>\}$$

<u>ตารางที่ 7.5 แสดงการหายูเนียนที่ค่า x</u>

u_i	v_j	w=max(u_i,v_j)	$\boldsymbol{U}_i(u_i)$	$\boldsymbol{V}_j(v_j)$	min$\{\boldsymbol{U}_i(u_i), \boldsymbol{V}_j(v_j)\}$
0.8	1	1	1	1	1
0.8	0.8	0.8	1	0.5	0.5
0.8	0.7	0.8	1	0.3	0.3
0.7	1	1	0.5	1	0.5
0.7	0.8	0.8	0.5	0.5	0.5
0.7	0.7	0.7	0.5	0.3	0.3
0.6	1	1	0.4	1	0.4
0.6	0.8	0.8	0.4	0.5	0.4
0.6	0.7	0.7	0.4	0.3	0.3

■

ถ้าค่าความจริงของพจน์เป็นฟัซซีเซตแบบชนิดที่ 2 การที่จะหาค่าความเป็นจริงของตัวเชื่อมต่างๆ จะต้องใช้หลักการขยายเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 7.2 ซึ่งอาจจะทำให้ได้ฟังก์ชันรูปร่างอื่นที่ไม่ได้อยู่ในพจน์ภาษาเลยก็ได้ทำให้การแปลความหมายของค่าความเป็นจริงของตัวเชื่อมทำได้ยากนั่นเอง ดังนั้นโดยปกติการแปลความหมายอาจทำได้โดยการพจน์ภาษาที่ใกล้เคียงเช่นมี จุดสูงสุด (peak) ใกล้เคียงกันเป็นต้น

7.3 พจน์แบบฟัซซี (Fuzzy Propositions)

ข้อแตกต่างระหว่างพจน์แบบฟัซซี (fuzzy proposition) และพจน์แบบดั้งเดิม (classical proposition) คือค่าความจริง นั่นคือค่าความจริงในพจน์แบบดั้งเดิมเป็นแค่ จริงหรือเท็จ แต่ในพจน์แบบฟัซซีจะมีค่าความจริงเป็นระดับดังเช่นที่เคยกล่าวในหัวข้อที่แล้ว เช่นประโยคที่ว่า “Mount Washington is dangerous mountain is true” ซึ่งคือระดับของความจริงของประโยคนี้เป็นอย่างไร และพจน์แบบฟัซซีมีอยู่ 4 ประเภทคือ

1. พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไขและไม่มีคุณสมบัติ (unconditional และ unqualified proposition)
2. พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติ (unconditional และ qualified proposition)
3. พจน์ที่มีเงื่อนไขและไม่มีคุณสมบัติ (conditional และ unqualified proposition)
4. พจน์ที่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติ (conditional และ qualified proposition)

รายละเอียดของแต่ละประเภทมีดังนี้

7.3.1 พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไขและไม่มีคุณสมบัติ (unconditional และ unqualified proposition)

พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไข (unconditional proposition) คือพจน์ที่ไม่อยู่ในรูปของ if-then และพจน์ที่ไม่มีคุณสมบัติ (unqualified proposition) คือพจน์ที่เป็นจริง สัญลักษณ์ของพจน์แบบฟัซซี p โดยปกติจะเป็นพจน์ที่อยู่ในรูปของ

$$p\text{: } \chi \text{ is } \boldsymbol{A}$$

ซึ่งใช้แทน p: χ is $\boldsymbol{A}$ is true (7.7)

นั่นคือ χ เป็นตัวแปรภาษา เช่น temperature หรือ performance ในรูปที่ 7.1 และ $\boldsymbol{A}$ เป็นลักษณะสมบัติหรือเพรดิเคตของตัวแปรนั้นเช่นประโยค “The temperature 35 degree Celcius is high.”

การที่จะหาระดับความจริงของพจน์แบบฟัซซี p ทำได้โดยหาจากค่า x ของ χ ตัวอย่างเช่น ค่า x ใน χ มีค่าความเป็นสมาชิกใน $\boldsymbol{A}$ ด้วย $\boldsymbol{A}(x)$ และค่าความเป็นสมาชิกนี้สามารถใช้เป็นระดับความเป็นจริง $(\boldsymbol{T}(p_x))$ ของพจน์ได้เช่นกัน

สำหรับ p_x: $\chi = $ x is $\boldsymbol{A}$

นั่นคือ $\boldsymbol{T}(p_x) = \boldsymbol{A}(x)$ (7.8)

สำหรับของแต่ละค่า x ใน χ ความหมายของสมการที่ 7.8 คือค่าความจริงของพจน์ p_x เท่ากับค่าความเป็นสมาชิก $\boldsymbol{A}(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 7.3 สมมุติให้ χ เป็นความชื้น (วัดในหน่วย %) และให้ลักษณะสมบัติเป็น ความชื้นสูง ถูกอธิบายโดยฟังก์ชันสมาชิก $\boldsymbol{H}$ ดังรูปที่ 7.2(ก) และพจน์เป็น

p: χ is $\boldsymbol{H}$

สำหรับค่า $x \in [0,100]$ และค่าความจริงของพจน์ $\boldsymbol{T}(p_x)$ เป็น

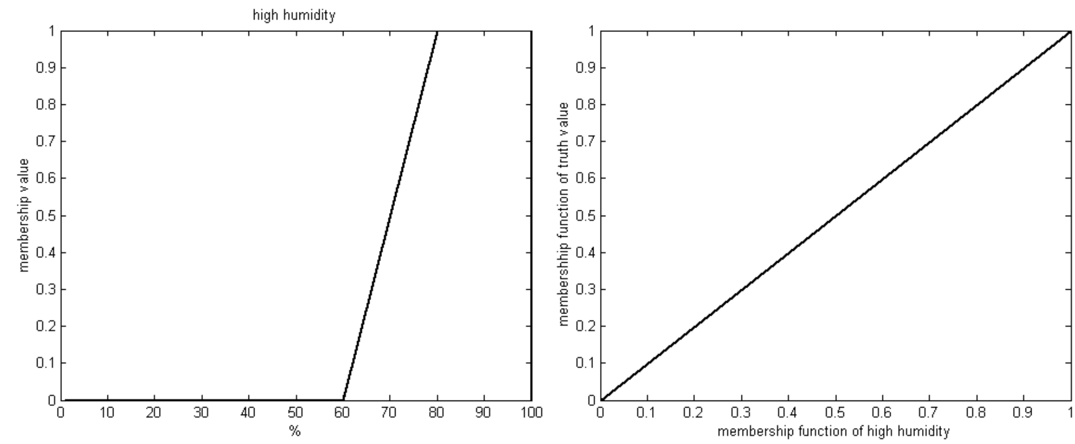
p_x: $\chi = x$ is $\boldsymbol{H}$

ถูกอธิบายด้วยฟังก์ชัน $\boldsymbol{T}$ จาก $[0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ ดังรูป 7.2(ข) ดังนั้นถ้า $x = 65$ แล้ว $\boldsymbol{H}(65) = 0.25$ จะได้ค่าความเป็นจริง

$$\boldsymbol{T}(p_{65}) = \boldsymbol{H}(65) = 0.25$$

นั่นคือจากแนวคิดของ ความชื้นสูง ในรูป 7.2(ก) พจน์

p_{65}: ความชื้นที่ 65% เป็นความชื้นสูงมีค่าความจริงเป็น 0.25



(ก) (ข)

รูปที่ 7.2 (ก) ฟังก์ชันสมาชิกของความชื้นสูง (ข)การส่งทอดค่าของฟังก์ชัน $\boldsymbol{T}$

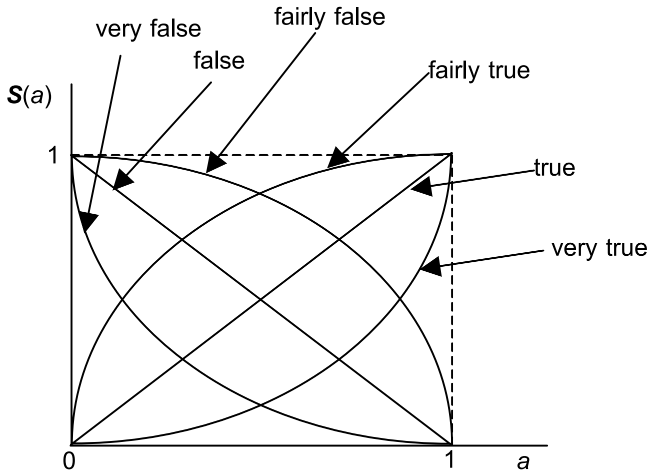
■

7.3.2 พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติ (unconditional และ qualified proposition)

พจน์ที่ไม่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติอยู่ในรูปของ

$$p\text{: '}\chi \text{ is } \boldsymbol{A}\text{' is } \boldsymbol{S} \tag{7.9}$$

โดยที่ p χ และ $\boldsymbol{A}$ มีความหมายดังสมการที่ 7.7 และ $\boldsymbol{S}$ เป็นคุณสมบัติของค่าความจริงซึ่งเป็นฟัซซี (fuzzy truth qualifier) ซึ่งเป็นพจน์ภาษา (linguistic expression) ที่มีการเปลี่ยนแปลงของความจริง ตัวอย่างของคุณสมบัติของค่าความจริง (truth qualifier) แสดงในรูป 7.3 ซึ่งในรูปมี 'very true' 'true' 'fairly true' 'false' 'very false' 'fairly false' ซึ่งแต่ละคุณสมบัติของค่าความจริงเป็นฟังก์ชันที่ส่งทอดจาก $[0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ และ 'true' เป็นคุณสมบัติของค่าความเป็นจริงที่หัวข้อ 7.3.1 ใช้ด้วย



รูปที่ 7.3 ตัวอย่างของคุณสมบัติของค่าความเป็นจริง

ระดับความจริง $\boldsymbol{T_S}(p_x)$ ของแต่ละ $x \in X$ ของพจน์

$$p_x\text{: '}\chi = x \text{ is } \boldsymbol{A}\text{' is } \boldsymbol{S}$$

หาได้จาก

$$\boldsymbol{T_S}(p_x) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}(x)) \tag{7.10}$$

จากตัวอย่างที่ 7.3 ถ้าต้องการค่าความจริงของพจน์

$$p_{65}\text{: 'Humidity of 65\% is high' is } \boldsymbol{S}$$

ซึ่ง high มีฟังก์ชันสมาชิกดังรูป 7.2 (ก) และจะได้ว่า $\boldsymbol{T_S}(p_{65}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{H}(65)) = \boldsymbol{S}(0.25)$

7.3.3 พจน์ที่มีเงื่อนไขและไม่มีคุณสมบัติ (conditional และ unqualified proposition)

พจน์ที่มีเงื่อนไขและไม่มีคุณสมบัติอยู่ในรูปของ

$$p\text{: If } \chi \text{ is } \boldsymbol{A}\text{, then } \Upsilon \text{ is } \boldsymbol{B} \tag{7.11}$$

โดยที่ χ และ Υ เป็นตัวแปรที่มีค่า x และ y ที่มาจากเซต X และ Y และ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็นเพรดิเคตที่เป็นฟัซซีเซต พจน์ในสมการที่ 7.11 เป็นพจน์ที่ไม่มีคุณสมบัติแต่ที่จริงแล้วคุณสมบัติของพจน์นี้เป็นจริงเสมอนั่นคือ

$$p\text{: 'If } \chi \text{ is } \boldsymbol{A}\text{, then } \Upsilon \text{ is } \boldsymbol{B}\text{' is true} \tag{7.12}$$

และเช่นเดียวกับหัวข้อ 7.3.1 และ 7.3.2 χ is $\boldsymbol{A}$ และ Υ is $\boldsymbol{B}$ สามารถแทนได้ด้วย $\boldsymbol{A}(x)$ และ $\boldsymbol{B}(y)$ ซึ่งทำให้สมการที่ 7.12 เป็น

$$p_{x,y}\text{: 'If } \boldsymbol{A}(x)\text{, then } \boldsymbol{B}(y)\text{' is true} \tag{7.13}$$

ตัวอย่างของพจน์ประเภทนี้คือ 'If Tina is young, then John is old' is true เราสามารถเขียนพจน์ประเภทนี้ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่าง 2 องค์ประกอบ (component) หรือ การส่อความแบบฟัซซี (fuzzy implication) ได้เป็น

$$\boldsymbol{A}(x) \rightarrow \boldsymbol{B}(y) \tag{7.14}$$

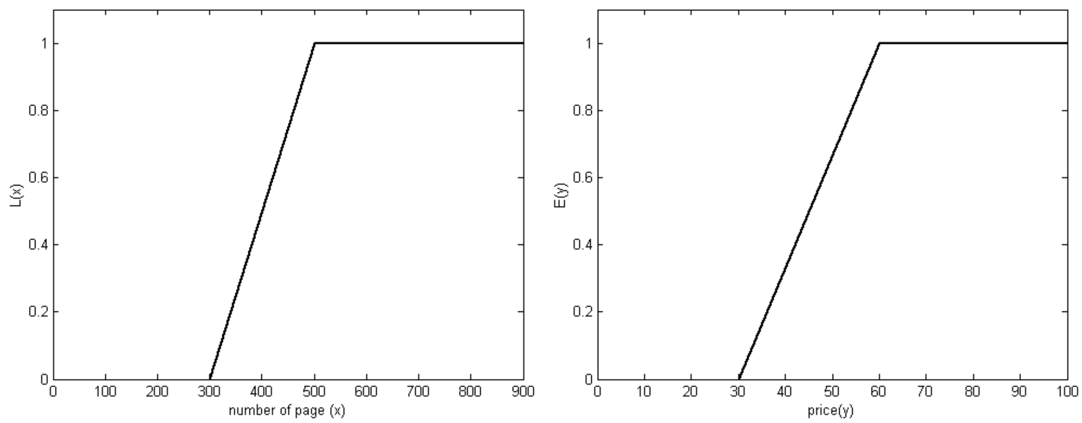
การส่อความแบบฟัซซีที่ใช้กันมากคือการส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz (Lukasiewicz implication) ที่เคยกล่าวถึงในหัวข้อ 7.1.2 นั่นคือสำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $y \in Y$ ใช้การส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz ($\mathcal{I}$) ในการหาค่าความจริงของพจน์ในสมการที่ 7.14 ได้โดย

$$\boldsymbol{T}(p_{x,y}) = \mathcal{I}[\boldsymbol{A}(x),\boldsymbol{B}(y)] = \min[1,\ 1-\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{B}(y)] \tag{7.15}$$

ตัวอย่างที่ 7.4 สมมุติให้พจน์

p: If a textbook is large, then it is expensive.

โดยที่ large textbook และ expensive textbook มีฟังก์ชันสมาชิกดังรูปที่ 7.4 (ก) และ 7.4 (ข)



(ก) (ข)

รูปที่ 7.4 ฟังก์ชันสมาชิกของ (ก) large textbook (ข) expensive textbook

ในการหาค่าความจริง $\boldsymbol{T}(p_{x,y})$ ทำได้โดยในการส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz ซึ่งคือ

$$\boldsymbol{T}(p_{x,y}) = \min[1,\ 1-\boldsymbol{L}(x)+\boldsymbol{E}(y)]$$

สมมุติให้มี textbook เล่มหนึ่งราคา 45 บาทและมีความหนาเป็น 600 หน้า จากรูปที่ 7.4 จะได้ว่า $\boldsymbol{L}(600) = 1$ และ $\boldsymbol{E}(45) = 0.5$ ดังนั้นค่าความจริงของพจน์ที่มีเงื่อนไขของหนังสือเล่มนี้คือ

$$\boldsymbol{T}(p_{600,45}) = \min[1,\ 1-1+0.5] = 0.5$$

และถ้าหนังสือหนา 450 หน้าและมีราคา 42 บาทจะได้ $\boldsymbol{L}(450) = 0.75$ และ $\boldsymbol{E}(42) = 0.4$ ซึ่งจะได้ค่าความจริงเป็น

$$\boldsymbol{T}(p_{450,42}) = \min[1,\ 1-0.75+0.4] = 0.65$$ ■

7.3.4 พจน์ที่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติ (conditional และ qualified proposition)

พจน์ที่มีเงื่อนไขและมีคุณสมบัติอยู่ในรูปของ

$$p: \text{'If } \chi \text{ is } \boldsymbol{A}\text{, then } \mathcal{Y} \text{ is } \boldsymbol{B}\text{' is } \boldsymbol{S} \tag{7.16}$$

โดยที่ ***S*** มีความหมายเหมือนในหัวข้อ 7.3.2 และการคำนวณหาค่าความจริงของพจน์ก็ทำได้โดยใช้วิธีเดียวกับหัวข้ออื่นข้างต้น ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความเป็นจริง $\boldsymbol{T}(p_{x,y})$ หาได้จาก

$$\boldsymbol{T_S}(p_{x,y}) = \boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{T}(p_{x,y})\right] \tag{7.17}$$

ตัวอย่างที่ 7.5 สมมุติให้พจน์

p: If a textbook is large, then it is expensive is very true.

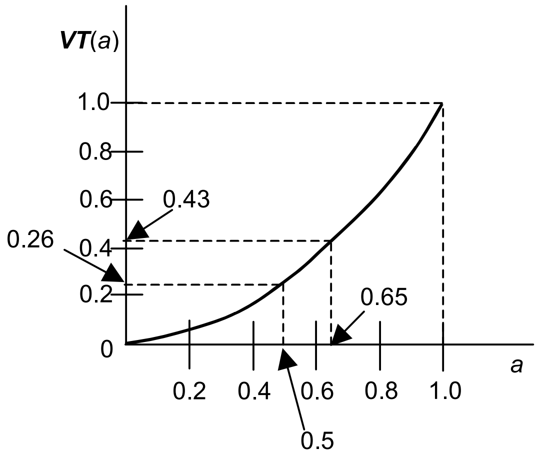
โดยที่ large textbook และ expensive textbook มีฟังก์ชันสมาชิกดังรูปที่ 7.4 (ก) และ 7.4 (ข) และฟังก์ชันสมาชิกของคุณสมบัติของค่าความเป็นจริง very true แสดงในรูปที่ 7.5

ถ้าหนังสือหนา 600 หน้าและมีราคา 45 บาท ค่าความจริงของพจน์นี้เท่ากับ

$$\boldsymbol{T_{VT}}(p_{600,45}) = \boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{T}(p_{600,45})\right] = \boldsymbol{S}[0.5] = 0.26$$

และเช่นเดียวกันถ้าหนังสือหนา 450 หน้าและมีราคา 42 บาท ค่าความจริงของพจน์นี้เท่ากับ

$$\boldsymbol{T_{VT}}(p_{600,45}) = \boldsymbol{S}\left[\boldsymbol{T}(p_{450,42})\right] = \boldsymbol{S}[0.65] = 0.43$$



รูปที่ 7.5 ฟังก์ชันสมาชิกของคุณสมบัติของค่าความเป็นจริง very true

■

7.4 เฮดจ์ภาษา (Linguistic Hedges)

ถ้ามีพจน์ "Tina is young" และพจน์ "Tina is very young" ตัวดัดแปร (modifier) "very" ทำให้พจน์ที่ 2 เน้นไปที่ young มากขึ้น นั่นคือ very ทำหน้าที่เป็นเฮดจ์ หรือที่เราเรียกว่าเฮดจ์ภาษา (linguistic hedges) นั่นเอง ดังนั้นเฮดจ์ภาษาจึงเป็นพจน์ภาษาชนิดพิเศษที่ทำการดัดแปรพจน์ภาษาอื่น เช่น very, more or less, fairly หรือ extreme เป็นต้น

เฮดจ์ภาษาใดๆ เป็นการดำเนินการเอกภาพ (unary operation) ของช่วงปิด $[0,1]$ เช่น สำหรับ เพรดิเคตแบบฟัซซี (fuzzy predicate) ***A*** ที่อยู่บนเซตสากล *X* และ ตัวดัดแปร *h* ซึ่งถูกใช้แทนเฮดจ์ภาษา ***H*** เพรดิเคตแบบฟัซซีที่ถูกดัดแปร ***HA*** มีฟังก์ชันสมาชิกสำหรับ $x \in X$ เป็น

$$\boldsymbol{HA}(x) = h\big(\boldsymbol{A}(x)\big) \tag{7.18}$$

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันในการเน้น (concentration function) เป็น $\boldsymbol{HA}(x) = (\boldsymbol{A}(x))^2$ ซึ่งโดยปกติใช้กับเฮดจ์ภาษา very ส่วนฟังก์ชันที่ทำให้พจน์อ่อน (dilation function) เป็น $\boldsymbol{HA}(x) = (\boldsymbol{A}(x))^{1/2}$ ซึ่งโดยปกติใช้กับเฮดจ์ภาษา more or less หรือ fairly หรือ somewhat และถ้าต้องการใช้ฟังก์ชันที่อยู่ระหว่าง ***A*** และ very ***A*** ที่เรียกว่า plus สามารถใช้ฟังก์ชัน $\boldsymbol{HA}(x) = (\boldsymbol{A}(x))^{1.25}$ ได้และบางครั้งสำหรับเฮดจ์ภาษา slightly สามารถใช้ฟังก์ชัน int[plus ***A*** and not very ***A***] โดยที่ฟังก์ชัน int มีค่าเป็น

$$\boldsymbol{HA}(x) = \begin{cases} 2\boldsymbol{A}(x)^2 & \text{สำหรับ } \boldsymbol{A}(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - 2\big(1 - \boldsymbol{A}(x)\big)^2 & \text{ในกรณีอื่น} \end{cases} \tag{7.19}$$

7.5 การหาเหตุผลโดยประมาณ (Approximate Reasoning)

หนึ่งในเป้าหมายของลอจิกแบบดั้งเดิมคือการหาเหตุผลโดยใช้กฎของการส่อความ เช่น modus ponens และ hypothetical syllogism ที่เป็นรูปแบบของการส่อความ และในหัวข้อนี้เราจะพูดถึง modus ponens เท่านั้น ซึ่งรูปแบบหนึ่งของ modus ponens ที่เป็นประโยคซ้ำความ (tautology) คือ $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$ การส่อความแบบนี้เป็นไปได้เพราะเราคิดว่าข้อตั้ง (premise) p ตัวที่ 2 เป็นตัวเดียวกับ p ตัวที่ 1 และข้อตาม (consequent) q ทั้งสองที่เหมือนกัน แต่ถ้าไม่เหมือนกันก็ไม่สามารถหาคำตอบได้ และอีกปัญหาหนึ่งก็คือกฎนี้สนใจแค่ค่าความเป็นจริง 0(เป็นเท็จ) และ 1(เป็นจริง) เท่านั้น ดังนั้นเราสามารถเลียนแบบการหาเหตุผลแบบนี้ในชีวิตประจำวันด้วยการใช้ การหาเหตุผลโดยประมาณ (approximate reasoning)

การหาเหตุผลโดยประมาณ (approximate reasoning) เป็นการประยุกต์ใช้ทฤษฎีฟัซซีเซตที่สำคัญอันหนึ่ง นั่นคือเลียนแบบการหาเหตุผลของมนุษย์ และสามารถใช้งานได้ในสภาวะที่ไม่แน่นอน ตัวอย่างของการเหตุผลแบบนี้คือ

กฎ:	If a book is large, then it is expensive.
ความจริง:	Book *x* is fairly large
บทสรุป:	Book *x* is fairly expensive (7.20)

ในตัวอย่างนี้ไม่สามารถใช้การหาเหตุผลแบบดั้งเดิมได้เนื่องจากมีแนวคิดที่เป็นแนวคิดแบบฟัซซี เช่น large, fairly large และ expensive และอีกเหตุผลหนึ่งคือข้อตั้งใน modus ponens แบบดั้งเดิมต้องเหมือนกันกับข้อตั้งใน ความจริง ซึ่งในตัวอย่างนี้ไม่เป็นเช่นนั้น

การหาเหตุผลในสมการที่ 7.20 เป็นตัวอย่างอันหนึ่งของนัยทั่วไปของ modus ponens (generalized modus ponens) ในการหาเหตุผลโดยประมาณ ซึ่งโดยปกติมีรูปแบบเป็น

กฎ:	If χ is ***A***, then Υ is ***B***
ความจริง:	χ is ***A***'
บทสรุป:	Υ is ***B***' (7.21)

โดยที่ χ และ Υ เป็นตัวแปรที่อยู่ในเซตสากล *X* และ *Y* และ ***A*** และ ***A***' เป็นฟัซซีเซตที่อาจจะไม่เหมือนกันบน *X* ในขณะที่ ***B*** และ ***B***' เป็นฟัซซีเซตที่อาจจะไม่เหมือนกันบน *Y*

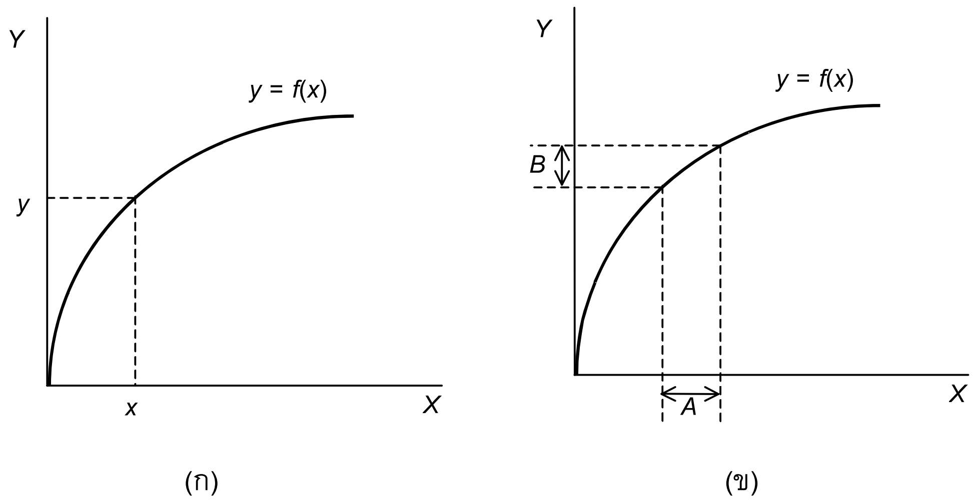
7.5.1 การประกอบของกฎส่อความ (Compositional Rule of Inference)

จากสมการนัยทั่วไปของ modus ponens ในสมการที่ 7.21 ให้ χ และ Υ เป็นตัวแปรที่อยู่ในเซตสากล X และ Y และสำหรับทุก $x \in X$ และ $y \in Y$ มีความสัมพันธ์กันโดยที่ $y = f(x)$ และเช่นเดียวกับตัวแปร $\chi = x$ สามารถหา $\Upsilon = y = f(x)$ ได้ดังรูป 7.6(ก) และถ้า χ อยู่ในเซต A สามารถหา Υ ที่อยู่ในเซต $B = \{ y \in Y \mid y = f(x),\ x \in A \}$ ดังรูป 7.6(ข)

ถ้าตัวแปรเหล่านี้มีความสัมพันธ์บน $X \times Y$ ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าให้ $\chi = u$ และความสัมพันธ์ R สามารถหา $\Upsilon \in B$ ที่ $B = \{ y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in R \}$ ได้ดังรูปที่ 7.7(ก) และเช่นเดียวกันถ้า $\chi \in A$ สามารถหา $\Upsilon \in B$ โดยที่ $B = \{ y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in R,\ x \in A \}$ ได้ดังรูปที่ 7.7(ข) และมีฟังก์ชันลักษณะ (characteristic function) เป็น

$$\mathcal{X}_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left[\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_R(x,y)\right] \tag{7.22}$$

สำหรับทุก $y \in Y$ โดยที่ $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{X}_B$ และ $\mathcal{X}_R$ เป็นฟังก์ชันลักษณะของเซต A, B และ R



รูปที่ 7.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปร (ก) $x \rightarrow y$ โดยที่ $y = f(x)$ (ข) $A \rightarrow B$ โดยที่ $B = \{ y \in Y \mid y = f(x),\ x \in A \}$

ถ้าความสัมพันธ์ ***R*** เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีบน $X \times Y$ โดยที่ ***A*** และ ***A'*** เป็นฟัซซีเซตบน X และ **B** และ ***B'*** เป็นฟัซซีเซตบน Y ดังนั้นถ้ารู้ความสัมพันธ์ ***R*** (ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ***A*** และ ***B***) และ ***A'*** เราสามารถหา ***B'*** ในบทสรุปได้โดยใช้

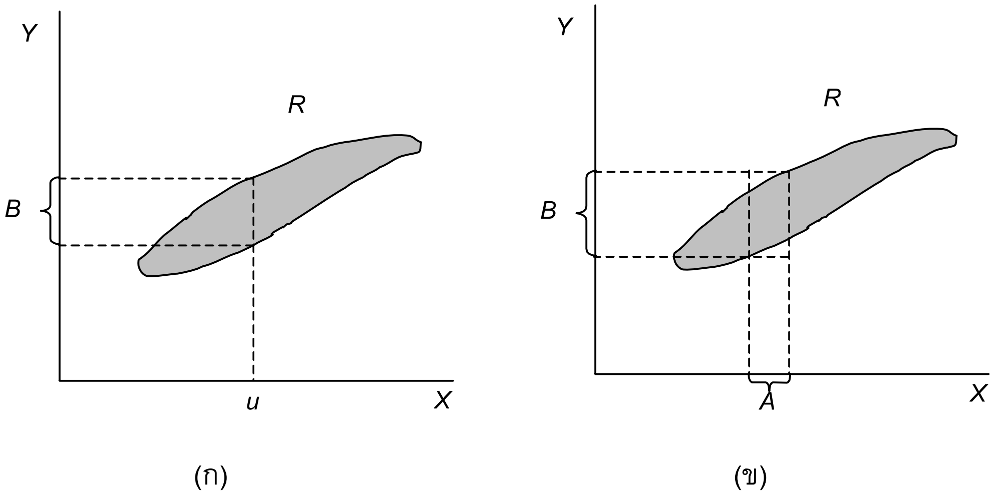
$$\boldsymbol{B}'(y) = \sup_{x \in X} \min\left[\boldsymbol{A}'(x), \boldsymbol{R}(x,y)\right] \tag{7.23}$$

สำหรับทุก $y \in Y$ ซึ่งสมการที่ 7.23 ที่จริงก็คือ

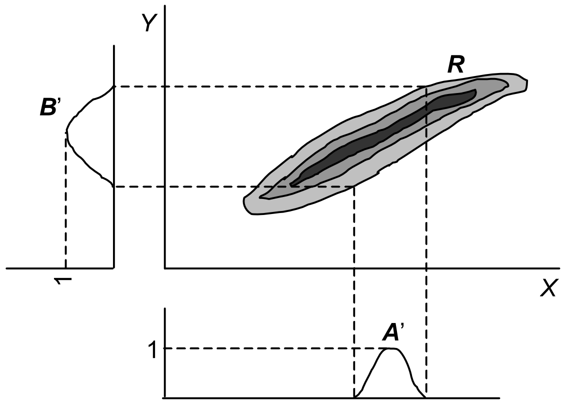
$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R} \tag{7.24}$$

โดยที่ $\bullet$ คือ ตัวดำเนินการของการประกอบ (composition operator) และสมการที่ 7.24 นี้ถูกเรียกว่าการประกอบของกฎการส่อความ (compositional rule of inference) นั่นคือถ้านำการประกอบของกฎการส่อความไปใช้ในการหาบทสรุปได้แสดงว่ากฎนั้นสามารถแทนได้ด้วยความสัมพันธ์ และความหมายของสมการที่ 7.24 คือการฉาย (Projection)ของอินเตอเซกชัน (intersection) ระหว่างการ

ขยายแบบไซลินดิก (cylindric extension)ของ ***A*'** ไปในทิศทาง *Y* และความสัมพันธ์ ***R*** และการประกอบของกฎการส่อความนี้แสดงในรูปที่ 7.8



รูปที่ 7.7 ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปรที่ไม่ใช่ฟังก์ชันและหาฟังก์ชันลักษณะได้จากสมการที่ 7.22 (ก) $\chi = u$ (ข) $\chi \in A$



รูปที่ 7.8 การประกอบของกฎการส่อความ (compositional rule of inference)

ตัวอย่างที่ 7.6 สมมุติให้มี

กฎ: If *x* and *y* are approximately equal.

ความจริง: *x* is little.

บทสรุป: ?

และสมมุติให้ ***A*** เป็นฟัซซีเซต little ที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็น

$$\boldsymbol{A} = \{(1,1), (2,0.6), (3,0.2), (4,0)\}$$

และความสัมพันธ์ของกฎคือ

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

โดยที่สมมุติให้เซตสากล X และ Y เท่ากันจะหาบทสรุปได้จาก

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ตัวดำเนินการของการประกอบเป็น max-min composition นั่นเอง

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของ 2 ของ ***B*** เกิดจากการหา max(min(1,0.5), min(0.6,1), min(0.2, 0.5), min(0.0,0.0)) ซึ่งเท่ากับ 0.6 และค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกตัวอื่นก็หาเช่นเดียวกัน ■

เนื่องจากความสัมพันธ์แบบฟัซซีซ่อนอยู่ในความหมายของพจน์ที่มีเงื่อนไข (conditional proposition) หรือ กฎใน นัยทั่วไปของ modus ponens นั่นคือ

p: If χ is ***A***, then Υ is ***B***

สำหรับทุก $x \in X$ และ $y \in Y$ จะได้

$$\boldsymbol{R}(x,y) = I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) \tag{7.25}$$

โดยที่ I คือการส่อความแบบฟัซซี (fuzzy implication) ซึ่งนอกเหนือการส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz ที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 7.3.3 ยังมีการส่อความแบบฟัซซีแบบอื่นอีกเช่น

1. การส่อความแบบฟัซซีของ Zadeh (1973)

$$I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) = \max((1-\boldsymbol{A}(x)), \min(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)))$$

2. การส่อความแบบฟัซซีของ Kleen-Dienes (1938, 1949)

$$I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) = \max((1-\boldsymbol{A}(x)), \boldsymbol{B}(y))$$

3. การส่อความแบบฟัซซีของ Mamdani (Correlation-min)

$$I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) = \min(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y))$$

4. การส่อความแบบฟัซซี Correlation-product

$$I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) = \boldsymbol{A}(x) \times \boldsymbol{B}(y)$$

5. การส่อความแบบฟัซซีของ Goedel (1976)

$$I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \boldsymbol{A}(x) \le \boldsymbol{B}(y) \\ \boldsymbol{B}(y) & \text{ถ้า } \boldsymbol{A}(x) > \boldsymbol{B}(y) \end{cases}$$

ส่วนการหานัยทั่วไปการส่อความแบบอื่นเช่น นัยทั่วไปของ modus tollens (generalized modus tollens) ซึ่งมีลักษณะเป็น

กฎ:	If χ is ***A***, then Υ is ***B***
ความจริง:	Υ is ***B***'
บทสรุป:	χ is ***A***' (7.26)

หาได้โดยใช้การประกอบของกฎการส่อความดังนี้คือ

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{R}^{T} \tag{7.27}$$

โดยที่ ***R*** หาได้เช่นเดียวกับกรณีของ modus ponens

ตัวอย่างที่ 7.7 ให้เซตสากล $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ และ $Y = \{y_1, y_2\}$ และให้กฎ If χ is ***A***, then $\mathcal{Y}$ is ***B*** มาโดยที่ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A} = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3$ และ $\boldsymbol{B} = 1/y_1 + 0.4/y_2$ และ ความจริง $\mathcal{Y}$ is ***B'*** ให้มาโดยที่ $\boldsymbol{B}' = 0.9/y_1 + 0.7/y_2$ และสมมุติใช้การส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz ต้องการหาบทสรุป χ is ***A'***

ใช้การส่อความแบบฟัซซีของ Lukasiewicz จะได้

$$\boldsymbol{R} = 1/\langle x_1,y_1\rangle + 0.9/\langle x_1,y_2\rangle + 1/\langle x_2,y_1\rangle + 0.4/\langle x_2,y_2\rangle + 1/\langle x_3,y_1\rangle + 0.8/\langle x_3,y_2\rangle$$

ใช้สมการ 7.27 หา ***A'*** จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.4 \\ 1.0 & 0.8 \end{bmatrix}^{T}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.9 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ซึ่งก็คือ $\boldsymbol{A}' = 0.9/x_1 + 0.9/x_2 + 0.9/x_3$ นั่นเอง ■

ส่วนนัยทั่วไปของ hypothetical syllogism (generalized hypothetical syllogism) ซึ่งมีลักษณะเป็น

กฎ 1:	If χ is ***A***, then $\mathcal{Y}$ is ***B***
กฎ 2:	If $\mathcal{Y}$ is ***B***, then $\mathcal{Z}$ is ***C***
บทสรุป:	If χ is ***A***, then $\mathcal{Z}$ is ***C*** (7.28)

โดยที่ χ $\mathcal{Y}$ และ $\mathcal{Z}$ เป็นตัวแปรในเซตสากล *X Y* และ *Z* และ ***A B*** และ ***C*** เป็นฟัซซีเซตบน *X Y* และ *Z* นั่นเอง และเช่นเดียวกับนัยทั่วไปของการส่อความแบบอื่นเราสามารถหาความสัมพันธ์ของกฎได้คือ

$$\boldsymbol{R}_1(x,y) = I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(y))$$

$$\boldsymbol{R}_2(x,y) = I(\boldsymbol{B}(y), \boldsymbol{C}(z))$$

$$\boldsymbol{R}_3(x,y) = I(\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{C}(z))$$

และนัยทั่วไปของ hypothetical syllogism เป็นจริง (hold) เมื่อ

$$\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1 \bullet \boldsymbol{R}_2 \tag{7.29}$$

ตัวอย่างที่ 7.8 ให้เซตสากล X และ Y เป็นเช่นเดียวกับตัวอย่าง 7.6 และเซตสากล $Z = \{z_1, z_2\}$ โดยให้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ มีฟังก์ชันสมาชิกเช่นเดียวกับตัวอย่าง 7.6 และฟัซซีเซต $\boldsymbol{C} = 0.2/z_1 + 1/z_2$ และให้การส่อความแบบฟัซซีของ Goedel ซึ่งจะได้ว่า

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ 1.0 & 0.4 \\ 1.0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 \end{bmatrix}$$

และสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1 \bullet \boldsymbol{R}_2$ ดังนั้นนัยทั่วไปของ hypothetical syllogism เป็นจริง (hold) ■

พจน์ที่มีเงื่อนไขที่อยู่ในรูปแบบของ If χ is $\boldsymbol{A}$, then $\mathcal{Y}$ is $\boldsymbol{B}$ อาจจะมองได้เป็น If χ is $\boldsymbol{A}$, then $\mathcal{Y}$ is $\boldsymbol{B}$ else $\mathcal{V}$ is ***UNKNOWN*** โดยที่ χ $\mathcal{Y}$ และ $\mathcal{V}$ เป็นตัวแปรในเซตสากล X Y และ V และ $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$ และ ***UNKNOWN*** เป็นฟัซซีเซตบน X Y และ V นั่นเองโดยที่ ***UNKNOWN*** เป็นฟัซซีเซตที่สมาชิกทุกตัวในเซตสากลมีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 1 และการหาความสัมพันธ์ของพจน์ที่มีเงื่อนไขแบบนี้ทำได้โดย

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{UNKNOWN} \tag{7.30}$$

โดยที่ใช้การหา minimum แทนการคูณและ หา maximum แทนการบวก และถ้าเป็นพจน์ที่มีเงื่อนไขเป็น If χ is $\boldsymbol{A}$, then $\mathcal{Y}$ is $\boldsymbol{B}$ else $\mathcal{Z}$ is $\boldsymbol{C}$ โดยที่ $\mathcal{Z}$ เป็นตัวแปรในเซตสากล Z และ $\boldsymbol{C}$ เป็นฟัซซีเซตบน Z การหาความสัมพันธ์ของพจน์นี้จะเป็น

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{C} \tag{7.31}$$

เนื่องจาก $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{UNKNOWN}$ ทำให้ $\overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{B} \subseteq \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{UNKNOWN}$ ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าถ้า $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ เป็นคริสป์ สมการที่ 7.30 จะกลายเป็น $\overline{\boldsymbol{A}} \vee \boldsymbol{B}$ ซึ่งเท่ากับการ implication ในลอจิกแบบดั้งเดิม และถ้าอินพุตที่เข้ามาเป็น $\boldsymbol{A}$ สำหรับความสัมพันธ์ตามสมการที่ 7.30 จะได้เอาพุตเป็น

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A} \bullet \left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{UNKNOWN} \right)$$

$$\boldsymbol{B}' = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{UNKNOWN})$$

ซึ่งถ้า $\boldsymbol{A}$ เป็นนอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต จะได้ว่า $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ 1 และ $\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ β (ค่าคงที่ค่าหนึ่ง) ดังนั้น $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} + \beta$ ***UNKNOWN*** และถ้า $\boldsymbol{A}$ เป็นคริสป์เซตจะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ 1 และ $\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ 0 ดังนั้น $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$

เช่นเดียวกันสำหรับสมการที่ 7.31 จะได้ว่า

$$\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{B'} = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{C})$$

ซึ่งถ้า $\boldsymbol{A}$ เป็นนอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต จะได้ว่า $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ 1 และ $\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ β (ค่าคงที่ค่าหนึ่ง) ดังนั้น $\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{B} + \beta \boldsymbol{C}$ และถ้า $\boldsymbol{A}$ เป็นคริสป์เซตจะเห็นได้ว่า $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ 1 และ $\boldsymbol{A} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ 0 ดังนั้น $\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{B}$

แต่ถ้าอินพุตที่เข้ามาเป็น $\overline{\boldsymbol{A}}$ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{B'} = \overline{\boldsymbol{A}} \bullet (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{B'} = (\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) + (\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \overline{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{C})$$

ซึ่งถ้า $\overline{\boldsymbol{A}}$ เป็นนอร์แมล (normal) ฟัซซีเซต จะได้ว่า $\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ β (ค่าคงที่ค่าหนึ่ง) และ $\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ 1 ดังนั้น $\boldsymbol{B'} = \beta \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ และถ้า $\overline{\boldsymbol{A}}$ เป็นคริสป์เซตจะเห็นได้ว่า $\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \overline{\boldsymbol{A}}$ เท่ากับ 1 และ $\overline{\boldsymbol{A}} \bullet \boldsymbol{A}$ เท่ากับ 0 ดังนั้น $\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{C}$

ตัวอย่างที่ 7.9 ให้เซตสากล *X Y* และ *Z* เป็นเซตเดียวกันคือ $\{1,2,3\}$ และฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ = 1/1 + 0.4/2 ฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}$ = 0.4/2 + 1/3 และ ฟัซซีเซต $\boldsymbol{C}$ = 1/1 + 0.6/2

ดังนั้นความสัมพันธ์ของพจน์ If χ is $\boldsymbol{A}$, then Υ is $\boldsymbol{B}$ else $\mathcal{Z}$ is $\boldsymbol{C}$ ได้เป็น

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.4 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.6 \\ 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.0 \\ 1.0 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 1.0 & 0.6 & 0.0 \end{bmatrix}$$

และถ้าต้องการหาความสัมพันธ์ของพจน์ If χ is $\boldsymbol{A}$, then Υ is $\boldsymbol{B}$ โดยใช้ฟัซซีเซต ***UNKNOWN*** จะได้

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.4 \\ 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.6 \\ 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

7.5.2 หน่วยความจำแบบฟัซซีแอสโซซิเอทิฟ (Fuzzy Associative Memories (FAM))

เราสามารถปฏิบัติต่อการหาเหตุผลโดยประมาณเหมือนเป็นระบบฟัซซี (fuzzy system) ที่ส่งทอด (map) ฟัซซีเซตบน X ไปยังฟัซซีเซตบน Y นั่นคือทำให้พจน์ If χ is $\boldsymbol{A}$, then Υ is $\boldsymbol{B}$ เป็นการเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}$ และฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}$ และเนื่องจากในระบบฟัซซีนี้สามารถมีกฎได้มากกว่า 1 กฎนั่นคือ

กฎ 1:	If χ is $\boldsymbol{A}_1$, then Υ is $\boldsymbol{B}_1$
กฎ 2:	If χ is $\boldsymbol{A}_2$, then Υ is $\boldsymbol{B}_2$
	$\vdots$
กฎ n:	If χ is $\boldsymbol{A}_n$, then Υ is $\boldsymbol{B}_n$
ความจริง:	χ is $\boldsymbol{A}'$
บทสรุป:	Υ is $\boldsymbol{B}'$ (7.32)

ดังนั้นระบบฟัซซีจะทำการเก็บความสัมพันธ์ของกฎเหล่านี้ ($\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$), ($\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_2$),..., ($\boldsymbol{A}_n$, $\boldsymbol{B}_n$) ในรูปของ $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$,..., $\boldsymbol{R}_n$ และถ้ามีอินพุต $\boldsymbol{A}'$ เข้ามาในระบบแต่ $\boldsymbol{A}'$ ไม่เหมือน $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$,..., $\boldsymbol{A}_n$ เลย ทุกกฎจะทำงานเหมือนกันแต่ด้วยระดับที่ต่างกัน และเอาพุตที่ได้จะมีฟังก์ชันสมาชิกเป็น

$$\boldsymbol{B}' = w_1\boldsymbol{B}_1' + w_2\boldsymbol{B}_2' + \ldots + w_n\boldsymbol{B}_n' \tag{7.33}$$

โดยที่ w_i สำหรับ $i = 1,\ldots,n$ เป็นน้ำหนักที่เหมาะสม (อาจจะเป็นระดับความน่าเชื่อถือ ระดับความเข้ากันได้ หรือระดับความสำคัญ) และ

$$\boldsymbol{B}_i' = \boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R}_i \tag{7.34}$$

การหาความสัมพันธ์ของกฎ $\boldsymbol{R}_i$ ทำได้ 2 วิธีคือ correlation-min และ correlation-product

สมมุติให้ฟังก์ชันสมาชิกถูกแทนด้วย เวกเตอร์แถว (row vector) เช่น

$$\boldsymbol{A}_i = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_m/x_m$$

จะเขียนได้เป็น $\boldsymbol{A}_i = [a_1, a_2,\ldots, a_m]$

ดังนั้นการหาความสัมพันธ์แบบ correlation-min ระหว่าง $\boldsymbol{A}_i$ และ $\boldsymbol{B}_i = [b_1, b_2,\ldots, b_p]$ ทำได้โดย

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{A}_i^{T} \circ \boldsymbol{B}_i$$

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} a_1 \wedge \boldsymbol{B}_i \\ a_2 \wedge \boldsymbol{B}_i \\ \vdots \\ a_m \wedge \boldsymbol{B}_i \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ
$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} b_1 \wedge \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & b_2 \wedge \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & b_p \wedge \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ 7.35 ความสัมพันธ์ที่ได้จะเห็นว่าในแต่ละแถวจะเป็น ฉบับขริบ (clipped version) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}_i$ และจากสมการ 7.36 จะเห็นว่าในแต่ละคอลัมน์จะเป็น ฉบับขริบ (clipped version) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$ นั่นเอง และมีทฤษฎีที่เกี่ยวกับการหาความสัมพันธ์แบบนี้คือ

ทฤษฎี 7.1 ทฤษฎี correlation-min bidirectional FAM

ถ้า $\boldsymbol{R} = \text{correlation-min}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B})$ แล้ว

1. $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ ก็ต่อเมื่อ (iff) $h(\boldsymbol{A}) \geq h(\boldsymbol{B})$
2. $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ ก็ต่อเมื่อ (iff) $h(\boldsymbol{B}) \geq h(\boldsymbol{A})$
3. $\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{B}$ สำหรับฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}'$ ใดๆ
4. $\boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \subseteq \boldsymbol{A}$ สำหรับฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}'$ ใดๆ

สำหรับการหาความสัมพันธ์แบบ correlation-product ระหว่าง $\boldsymbol{A}_i$ และ $\boldsymbol{B}_i$ ทำได้โดย

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \circ \boldsymbol{B}_i$$

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{B}_i \\ a_2\boldsymbol{B}_i \\ \vdots \\ a_m\boldsymbol{B}_i \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

หรือเท่ากับ
$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & b_2\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & b_p\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

ซึ่งสมการ 7.37 ในแต่ละแถวของความสัมพันธ์ที่ได้เป็น ฉบับสเกล (scaled version) ของ $\boldsymbol{B}_i$ และจากสมการ 7.38 จะเห็นว่าในแต่ละคอลัมน์จะเป็น ฉบับสเกล (scaled version) ของฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$ นั่นเอง และมีทฤษฎีที่เกี่ยวกับการหาความสัมพันธ์แบบนี้คือ

ทฤษฎี 7.2 ทฤษฎี correlation-product bidirectional FAM

ถ้า $\boldsymbol{R} = \text{correlation-product}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B})$ แล้ว

1. $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ ก็ต่อเมื่อ (iff) $h(\boldsymbol{A}) = 1$
2. $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ ก็ต่อเมื่อ (iff) $h(\boldsymbol{B}) = 1$
3. $\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{B}$ สำหรับฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}'$ ใดๆ
4. $\boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \subseteq \boldsymbol{A}$ สำหรับฟัซซีเซต $\boldsymbol{B}'$ ใดๆ

ในการหาบทสรุปในกรณีที่มีกฎมากกว่า 1 กฎ ทำได้โดยใช้ สมการที่ 7.33 ซึ่งโดยทั่วไปค่าน้ำหนักของแต่ละกฎจะเป็นค่าความน่าเชื่อถือของกฎนั้นๆ และโดยมากจะมีค่าเป็น 1 หรือจะทำโดยการรวมความสัมพันธ์ของทุกกฎก่อน คือ

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{j \in \mathrm{N}_n} \boldsymbol{R}_j \qquad (7.39)$$

โดยที่ $\mathrm{N}_n = \{1,2,...,n\}$ ซึ่งความหมายของสมการนี้คืออย่างน้อย 1 กฎเข้าข่าย (fire) และการทำยูเนียนนี้ก็ใช้การทำยูเนียนมาตรฐาน ที่เคยกล่าวแล้วในบทที่ 3 หรืออาจจะใช้

$$\boldsymbol{R} = \bigcap_{j \in \mathrm{N}_n} \boldsymbol{R}_j \qquad (7.40)$$

ซึ่งความหมายของสมการนี้คือทุกกฎต้องเข้าข่าย (fire) และเช่นเดียวกันการทำอินเตอเซกชันนี้จะเป็นการทำอินเตอเซกชันมาตรฐาน นั่นเอง หลังจากนั้นหาบทสรุป โดยที่สมมุติให้ความจริงหรืออินพุตที่เข้ามาเป็น ***A***’ ได้โดย

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}' &= \boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R} \\
&= \boldsymbol{A}' \bullet \bigcup_{j \in \mathrm{N}_n} \boldsymbol{R}_j \\
&= \boldsymbol{A}' \bullet \sup_{j \in \mathrm{N}_n} \boldsymbol{R}_j \\
&= \sup_{j \in \mathrm{N}_n} \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{R}_j\right) \\
&= \sup_{j \in \mathrm{N}_n} \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}} \circ \boldsymbol{B}_j\right) \\
&= \sup_{j \in \mathrm{N}_n} \left(\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_j\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\boldsymbol{B} = \sup\left[\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_1, \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_2, ..., \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_i, ..., \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_n\right] \qquad (7.41)$$

ถ้าค่าความจริงที่เข้ามาเป็นเซตแบบดั้งเดิมหรือรู้ความจริงแน่นอน นั่นคือ

$$\boldsymbol{A}' = 0/x_1 + 0/x_2 + ... + 1/x_i + 0/x_{i+1} + ... + 0/x_m$$

และใช้ correlation-min ดังนั้นสำหรับพจน์ที่ j ในสมการที่ 7.41 จะเป็น

$$\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_j = \min\left(\boldsymbol{A}_i(x_i), \boldsymbol{B}_j\right) \qquad (7.42)$$

และถ้าใช้ correlation-product จะได้

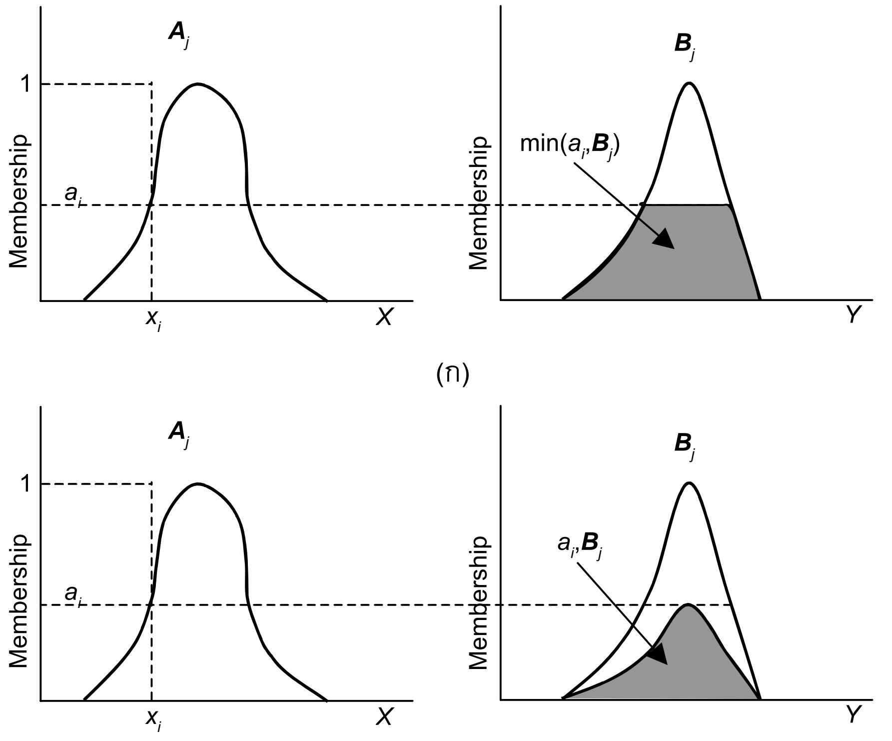
$$\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{A}_i(x_i)\boldsymbol{B}_j \qquad (7.43)$$

สมการที่ 7.42 และ 7.43 แสดงในรูปที่ 7.9(ก) และ 7.9 (ข)

ตัวอย่างที่ 7.10 สมมุติระบบฟัซซีมีกฎ 2 กฎที่แต่ละกฎใช้ correlation-min และการรวมความสัมพันธ์ใช้ยูเนียน ดังรูปที่ 7.10 และให้ความจริงที่เข้ามาเป็นเซตดั้งเดิมเป็น $\boldsymbol{A}' = 0/x_1 + 0/x_2 + ... + 1/x_i + 0/x_{i+1} + ... + 0/x_m$ เมื่อผ่านความจริงนี้เข้าไปในระบบ จะได้ว่า $\left(\boldsymbol{A}' \bullet \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\right) = a_{i1}$ และ $\left(\boldsymbol{A}' \bullet \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\right) = a_{i2}$ และเอาพุตของระบบฟัซซีคือฟัซซีเซต

$$\boldsymbol{B}' = \sup\left[\left(\boldsymbol{A}' \bullet \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_1, \left(\boldsymbol{A}' \bullet \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_2\right]$$

ซึ่งเป็นฟัซซีเซตที่แสดงในรูป 7.10 ■



(ข)

รูปที่ 7.9 รู้ความจริงแน่นอน (ก) ใช้ correlation-min (ข) ใช้ correlation-product

---

ตัวอย่างที่ 7.11 ถ้าความจริงที่เข้ามามีความไม่แน่นอนคือเป็นฟัซซีเซต $\boldsymbol{A}'$ และสมมุติระบบฟัซซีมีกฎ 2 กฎที่แต่ละกฎใช้ correlation-min และการรวมความสัมพันธ์ใช้ยูเนียน จากสมการที่ 7.41 การหา $\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right) \circ \boldsymbol{B}_j$ ทำได้โดยการหา $\left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right)$ ก่อนซึ่ง

$$r_j\left(\boldsymbol{A}'\right) = \left(\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\right) = \sup_{x \in X} \min\left[\boldsymbol{A}'(x), \boldsymbol{A}_j(x)\right] \qquad (7.44)$$

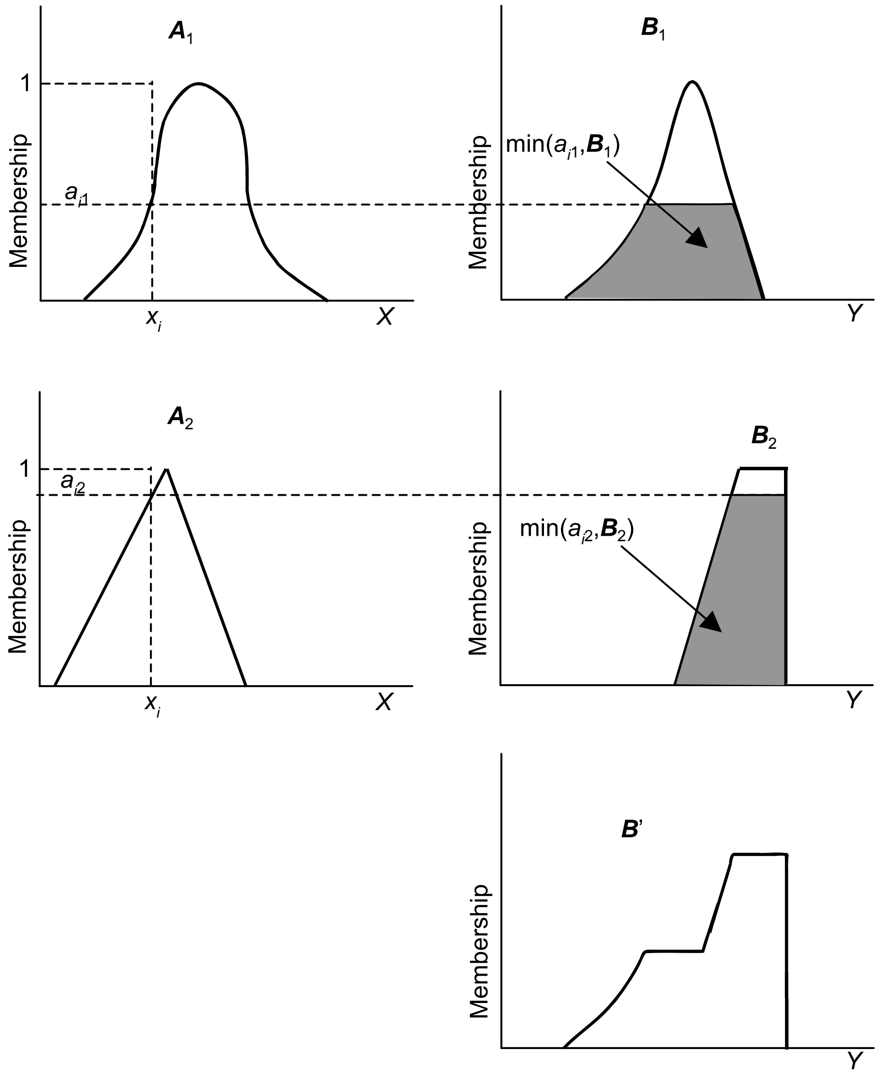
ซึ่ง การหา min $\left[\, \boldsymbol{A}'(x),\, \boldsymbol{A}_j(x)\right]$ ก็การหาอินเตอเซกชันด้วยวิธีมาตรฐาน และการหา supremum ของการอินเตอเซกชัน คือการหา height ของอินเตอเซกชันระหว่าง $\left(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}_j\right)$ ซึ่งคือระดับของความต้องกัน (degree of consistency) นั่นเองและการหาเอาพุตฟัซซีเซต ทำเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 7.9 นั่นเอง ระบบนี้แสดงในรูปที่ 7.11 ■

7.5.3 การแปลงฟัซซีเซตเป็นตัวเลข (Defuzzification)

การทำการหาเหตุผลโดยประมาณไม่ว่าความจริงอินพุตจะเป็นที่รู้แน่นอนหรือไม่แน่นอนเอาพุตที่ได้จะเป็นฟัซซีเซต แต่ในการประยุกต์ใช้ต่างๆเช่นในระบบควบคุมแบบฟัซซี (fuzzy control) จำเป็นที่เอาพุตที่ออกจากระบบต้องเป็นตัวเลขเพื่อนำไปใช้งาน และจะเป็นตัวบอกว่าระบบควรจะทำงานอย่างไร ในกรณีต่างๆตามสภาวะแวดล้อม และในปัจจุบันมีวิธีการแปลงฟัซซีเซตเป็นตัวเลขมากมาย และการเลือกใช้วิธีที่ต่างกันอาจทำให้ได้ตัวเลขที่ต่างกันได้ และในหัวข้อนี้จะพูดถึงการแปลง 2 วิธีเท่านั้น โดยให้ $\boldsymbol{B}'$ เป็นฟัซซีเซตเอาพุตบนเซตสากล Y

1. *max membership*: ให้เลือก *de_y* ที่ $\boldsymbol{B}'(de\_y) \geq \boldsymbol{B}'(de\_y')$ สำหรับทุก $de\_y' \in Y$ เป็นตัวเลขที่ใช้แทนฟัซซีเซต ***B'*** แต่ถ้า *de_y* มีมากกว่า 1 ค่า ให้ใช้ค่า mean ของ *de_y* เหล่านั้นในกรณีที่ฟัซซีเซตที่ได้มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นฟังก์ชันดิสครีต (discrete function) นั่นคือ ให้ $M = \{y \in [y_1, y_2] | \boldsymbol{B}'(y) = h(\boldsymbol{B}')\}$ โดยที่ $h(\boldsymbol{B}')$ เป็น height ของ ***B'*** และค่า *de_y* คือ

$$de\_y = \frac{\sum_{y_k \in M} y_k}{|M|} \tag{7.45}$$



รูปที่ 7.10 ตัวอย่างของระบบฟัซซีที่มี 2 กฎและความจริงอินพุตเป็นสิ่งที่รู้แน่นอน

และแปลงโดยใช้ center ของค่า *de_y* เหล่านั้นถ้าเป็นฟัซซีเซตมีฟังก์ชันสมาชิกเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ค่า *de_y* คือ

$$de\_y = \frac{\inf M + \sup M}{2} \tag{7.46}$$

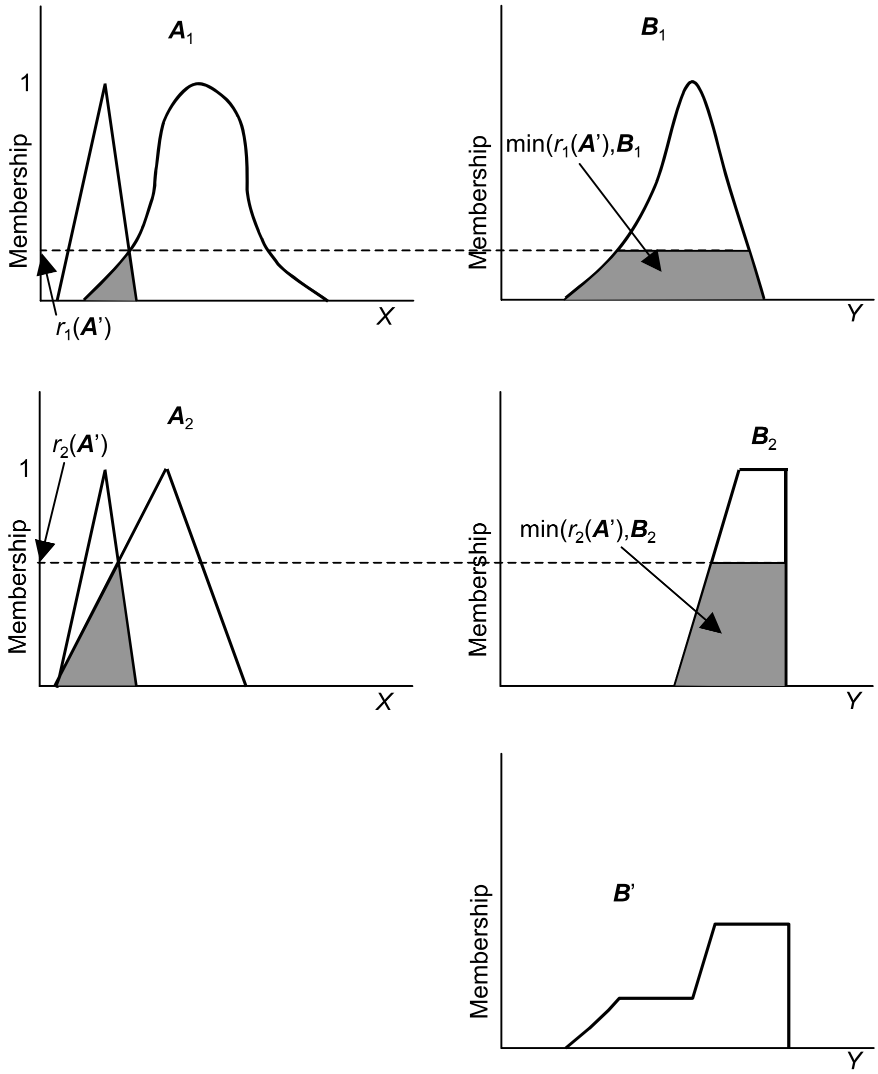
แต่ถ้าฟัซซีเซตที่ได้ไม่คอนเวกซ์ดังรูป 7.12 การหาค่าเฉลี่ยหรือ center ของค่า *de_y* ก็อาจจะไม่ถูกต้องนัก

2. *Center of Area* (*Centroid*): ให้เลือก *de_y* ที่เป็นค่า centroid ของฟัซซีเซตนั้นคือ ถ้าฟัซซีเซต ***B***' ที่มีฟังก์ชันสมาชิกเป็นฟังก์ชันดิสครีต (discrete function) ค่า *de_y* คือ

$$de\_y = \frac{\sum_k \boldsymbol{B}'(y_k)y_k}{\sum_k \boldsymbol{B}'(y_k)} \tag{7.47}$$

ถ้าเป็นฟัซซีเซตมีฟังก์ชันสมาชิกเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ค่า *de_y* คือ

$$de\_y = \frac{\int \boldsymbol{B}'(y)ydy}{\int \boldsymbol{B}'(y)dy} \tag{7.48}$$

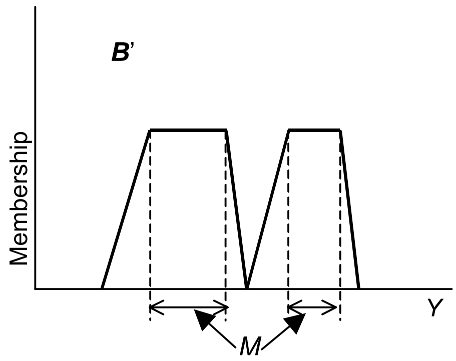


รูปที่ 7.11 ตัวอย่างของระบบฟัซซีที่มี 2 กฎและความจริงอินพุตเป็นสิ่งที่ไม่แน่นอน

และในกรณีนี้ก็เช่นเดียวกันกับการหา max membership นั่นคือถ้าฟัซซีเซตที่ได้ไม่คอนเวกซ์และมีรูปร่างดังรูป 7.12 ค่า *de_y* ที่ได้จะเป็นค่ากึ่งกลางซึ่งมีค่าสมาชิกเป็น 0 ทำให้เป็นคำตอบที่ผิดจากที่ควรจะเป็นมากนั่นเอง และอีกปัญหาหนึ่งก็คือเสียเวลาในการคำนวณมากเพราะใช้ข้อมูลทุกอย่างที่มีจากฟัซซีเซต ในการลด computational expensive สามารถใช้ ฐานนิยม (mode) ของ $\boldsymbol{B}_j\left(y^0_{\boldsymbol{B}_j}\right)$ ใน

แต่ละกฎมาช่วยได้นั่นคือให้ $\mathrm{N}_n = \{1,2,...,n\}$ และ c_j สำหรับ $1 \leq j \leq n$ เป็น ระดับของความต้องกัน นั่นคือ a_{ij} ในกรณีของความจริงที่รู้แน่นอน หรือ $r_j(\boldsymbol{A}')$ ในกรณีของความจริงที่ไม่รู้แน่นอนดังนั้นค่า *de_y* คือ

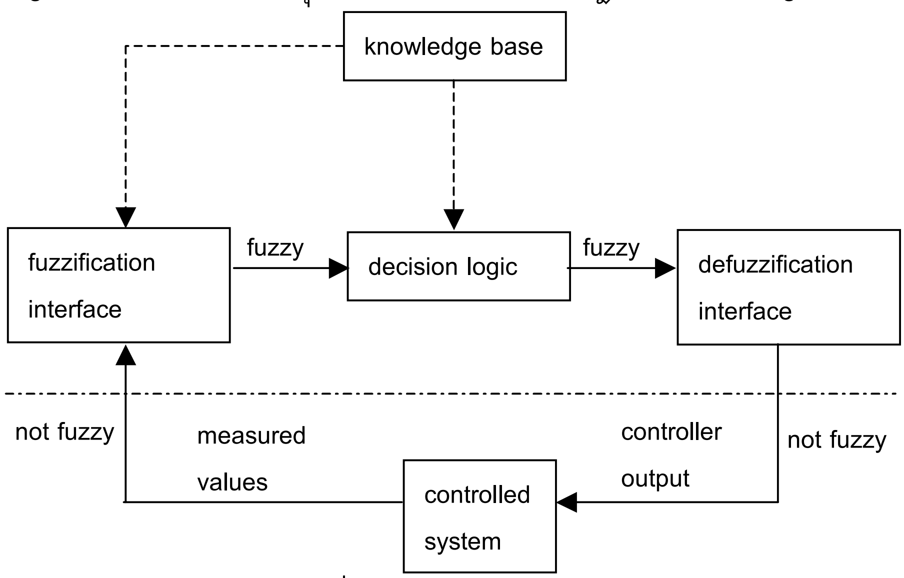
$$de\_y = \frac{\sum_{j \in \mathrm{N}_n} c_j y^0_{\boldsymbol{B}_j}}{\sum_{j \in \mathrm{N}_n} c_j} \tag{7.49}$$



รูปที่ 7.12 ตัวอย่างของฟัซซีเซตเอาพุตของระบบฟัซซีที่ไม่คอนเวกซ์

7.5.4 ระบบฟัซซีที่มีหลายอินพุต (Fuzzy System with Multiple Inputs)

หนึ่งในการประยุกต์ใช้ระบบฟัซซีที่ใช้กันมากในปัจจุบัน คือระบบควบคุมฟัซซี (fuzzy controller) แสดงในรูปที่ 7.13 ซึ่งระบบนี้ประกอบด้วย ส่วนที่เป็น fuzzification interface ซึ่งเป็นส่วนที่รับค่าอินพุตและถ้าเป็นอินพุตที่รู้แน่นอนเช่นอุณหภูมิ 30 องศา และในส่วนนี้จะแปลงอินพุตให้เป็นฟัซซีเซต ส่วนที่ 2 คือ knowledge base เป็นส่วนที่เก็บข้อมูลทุกอย่างรวมทั้งกฎต่างๆ ส่วนที่ 3 คือ decision logic เป็นส่วนในการหาเหตุผลโดยการประมาณตามกฎที่มีใน knowledge base และส่วนสุด



รูปที่ 7.13 ระบบควบคุมฟัซซี

ท้ายคือ defuzzification interface เป็นส่วนที่จะแปลงฟัซซีเอาพุตให้เป็นตัวเลขเพื่อนำไปใช้ในการควบคุมนั่นเอง และโดยมากระบบนี้จะเป็นระบบที่มีอินพุตมากกว่า 1 พจน์แรก (antecedent) ในกฎต่าง ๆหรือเรียกอีกอย่างว่ามีอินพุตมากกว่า 1 อินพุตนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 7.12 ระบบควบคุมฟัซซีที่ใช้ในการควบคุมเสถียรภาพของลูกตุ้มกลับหัว (inverted pendulum) แสดงในรูปที่ 7.14 ซึ่งสิ่งที่ระบบนี้ต้องทำคือพยายามทำให้ลูกตุ้มอยู่ตรงกลางนั่นคือทำให้ลูกตุ้มตีกลับในทิศทางตรงข้ามโดยการให้กระแสไฟฟ้ากับมอเตอร์ และถ้าการหมุนกลับเกินไปในทิศตรงข้ามก็ต้องให้กระแสไฟฟ้าในทิศตรงข้าม อีกเพื่อให้ลูกตุ้มตีกลับอีกครั้ง

ลูกตุ้มเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำมุมกับเส้นกึ่งกลางเป็นมุม θ ด้วยความเร็ว $\Delta\theta$ ซึ่งทั้งมุมและความเร็วน่าจะเป็นอินพุตให้กับระบบควบคุมฟัซซี และระบบฟัซซีจะให้เอาพุตคือกระแสไฟฟ้า v และให้อินพุตทั้งสอง และเอาพุตมีค่าตัวแปรภาษาเป็น negative large (NL) negative medium (NM) negative small (NS) zero (ZE) positive small (PS) positive medium (PM) และ positive large (PL) โดยที่ negative หมายถึงลูกตุ้มเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา หรือให้กระแสไฟฟ้าในทิศไปทางซ้าย ในขณะที่เคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกาหรือให้กระแสไฟฟ้าในทิศไปทางขวาถ้าเป็น positive ดังนั้นกฎที่ j จะมีลักษณะเป็น

กฎ j: If θ is $\boldsymbol{A}_j$, และ $\Delta\theta$ is $\boldsymbol{B}_j$ then v is $\boldsymbol{C}_j$

เช่น

If θ is NL และ $\Delta\theta$ is NL, then v is PL

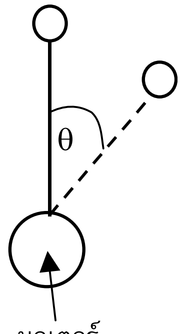
หรือ If θ is ZE และ $\Delta\theta$ is ZE, then v is ZE

ซึ่งโดยปกติเราสามารถเขียนกฎเหล่านี้ให้อยู่ในลักษณะทูเพิลได้เช่น $(\theta, \Delta\theta; v)$ ซึ่งในตัวอย่างของกฎทั้งสองเขียนได้เป็น (NL,NL;PL) สำหรับกฎแรก และ (ZE,ZE;ZE) และเราสามารถเขียนกฎโดยใช้เมตริกซ์ได้เช่น สมมุติให้มี 13 กฎ จะได้เมตริกซ์เป็น

$\Delta\theta$ \ θ	**NL**	**NM**	**NS**	**ZE**	**PS**	**PM**	**PL**
NL				PL			
NM				PM			
NS				PS			
ZE	PL	PM	PS	ZE	NS	NM	NL
PS				NS			
PM				NM			
PL				NL			

โดยที่ค่าที่อยู่ในเมตริกซ์คือค่าเอาพุตนั่นเอง เช่นกฎ (NL,ZE;PL) คือกฎที่อยู่ที่คอลัมภ์ที่ 1 แถวที่ 4 นั่นเอง จะเห็นได้ว่าในระบบนี้มีกฎที่เป็นไปได้ทั้งหมด 343 กฎคือแต่ละกฎให้ค่าตัวแปรภาษาของอินพุต 2 อินพุตและ 1 เอาพุตโดยที่แต่ละอินพุตมี 7 ตัวแปรภาษาและเอาพุตมี 7 ตัวแปรภาษาเช่นกัน

ซึ่งจะได้ 7 × 7 × 7 แต่ในการใช้งานจริงบางกฎอาจจะไม่ถูกใช้เลยดังนั้นกฎที่ใช้งานจริงจึงมีน้อยกว่า 343 กฎ ■



รูปที่ 7.14 ลูกตุ้มกลับหัว

ให้ระบบมีกฎ 1 กฎและถูกเขียนเป็น $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C})$ โดยที่พจน์ภาษา (linguistic term) ของอินพุตที่ 1 และของอินพุตที่ 2 เป็น $\boldsymbol{A} = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_m/x_m$ และ $\boldsymbol{B} = b_1/y_1 + b_2/y_2 + \ldots + b_m/y_m$ ให้การหาบทสรุปสามารถทำได้โดยที่ให้แยกออกเป็น 2 ส่วนคือ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ และ $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ ดังนั้นเราสามารถความสัมพันธ์ของแต่ละส่วนได้เป็น

$$\boldsymbol{M}_{AC} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \circ \boldsymbol{C} \text{ และ } \boldsymbol{M}_{BC} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \circ \boldsymbol{C} \tag{7.50}$$

สมมุติให้ความจริงอินพุตเป็น $\boldsymbol{A}' = \mathrm{I}_x^i = 0/x_1 + 0/x_2 + \ldots + 1/x_i + 0/x_{i+1} + \ldots + 0/x_m$ และอินพุตที่ 2 เป็น $\boldsymbol{B}' = \mathrm{I}_y^j = 0/y_1 + 0/y_2 + \ldots + 1/y_j + 0/j_{i+1} + \ldots + 0/y_m$ ดังนั้นสำหรับแต่ละอินพุตเราสามารถหา $\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{M}_{AC}$ และ $\boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{M}_{BC}$ และนำเอาพุตทั้งสองรวมเข้าด้วยกันเป็น

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = \boldsymbol{C}' = [\, \boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{M}_{AC}] \cap [\, \boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{M}_{BC}] \tag{7.51}$$

สมมุติว่าระบบนี้ใช้ correlation-minในการหาความสัมพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}' \bullet \boldsymbol{M}_{AC} &= \mathrm{I}_x^i \bullet \boldsymbol{M}_{AC} \\ &= \mathrm{I}_x^i \bullet \begin{bmatrix} a_1 \wedge \boldsymbol{C} \\ a_2 \wedge \boldsymbol{C} \\ \vdots \\ a_m \wedge \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \\ &= a_i \wedge \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}' \bullet \boldsymbol{M}_{BC} &= \mathrm{I}_y^j \bullet \boldsymbol{M}_{BC} \\ &= \mathrm{I}_y^j \bullet \begin{bmatrix} b_1 \wedge \boldsymbol{C} \\ b_2 \wedge \boldsymbol{C} \\ \vdots \\ b_m \wedge \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \\ &= b_j \wedge \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

ดังนั้นฟัซซีเอาพุตจะเป็น

$$\begin{aligned} C' &= (a_i \wedge C) \cap (b_j \wedge C) \\ &= (\min (a_i, b_j)) \wedge C \end{aligned} \tag{7.52}$$

ซึ่งค่า a_i เป็นระดับที่สอดคล้องกัน (degree of satisfaction) ของ x ใน พจน์ภาษา $\boldsymbol{A}$ ทำนองเดียวกันค่า b_j เป็นระดับที่สอดคล้องกัน ของ y ใน พจน์ภาษา $\boldsymbol{B}$.ในทำนองเดียวกันถ้าในการหาความสัมพันธ์ใช้ correlation-product จะได้

$$\begin{aligned} C' &= (a_i C) \cap (b_j C) \\ &= (\min (a_i, b_j))C \end{aligned} \tag{7.53}$$

7.6 วิธีการในระบบควบคุมฟัซซี (Approached to Fuzzy Control)

วิธีการที่ใช้กันมากที่สุดในระบบควบคุมฟัซซี มีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี คือ Mamdani model และ Takagi-Sugeno model ทั้งสองวิธีการเน้นไปที่ลักษณะ (specification) ของฟังก์ชันควบคุม (control function) และสิ่งที่เป็นฟัซซีของทั้งสองวิธีคือ ตัวแบบ (model) และวิธีการ (method) เท่านั้นส่วนฟังก์ชันควบคุม (control function) จะเป็นคริสป์ (crisp) เสมอ

7.6.1 วิธีการของ Mamdani (The Mamdani model)

ระบบมีมากกว่า 1 อินพุต (X_1, X_2,... X_n) และแต่ละอินพุตถูกนิยามตัวแปรภาษา (linguistic variable) (x_1, x_2,... x_n) และพจน์ภาษา (linguistic term) $\boldsymbol{T}(x_i)$ ของตัวแปรภาษา x_i ในเซตสากล X_i สำหรับ $1 \leq i \leq n$ ไว้แล้ว ในขณะเดียวกันเอาพุต Y ก็ถูกนิยามตัวแปรภาษา (linguistic variable) y และพจน์ภาษา (linguistic term) $\boldsymbol{T}(y)$ ของตัวแปรภาษา y ในเซตสากล Y ไว้แล้วเช่นกัน และกฎมีลักษณะดังนี้

If ξ_1 is $\boldsymbol{A}^{(1)}$, และ ξ_2 is $\boldsymbol{A}^{(2)}$ และ ... และ ξ_n is $\boldsymbol{A}^{(n)}$ then η is $\boldsymbol{B}$

โดยที่ $\boldsymbol{A}^{(1)}$, $\boldsymbol{A}^{(2)}$ และ ... และ $\boldsymbol{A}^{(n)}$ เป็นพจน์ภาษาใน $\boldsymbol{T}(x_i)$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$ และ $\boldsymbol{B}$ พจน์ภาษาใน $\boldsymbol{T}(y)$ นั่นเองและถ้ามีกฎมากกว่า 1 กฎและให้

$\boldsymbol{T}(x_1)$ ประกอบด้วย $\boldsymbol{A}_1^{(1)}$, $\boldsymbol{A}_2^{(1)}$,... ,$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N1}}^{(1)}$

$\boldsymbol{T}(x_2)$ ประกอบด้วย $\boldsymbol{A}_1^{(2)}$, $\boldsymbol{A}_2^{(2)}$,... ,$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N2}}^{(2)}$

$\vdots$

$\boldsymbol{T}(x_n)$ ประกอบด้วย $\boldsymbol{A}_1^{(n)}$, $\boldsymbol{A}_2^{(n)}$,... ,$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}n}^{(n)}$ (7.54)

และ $\boldsymbol{T}(y)$ ประกอบด้วย $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$,... ,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{N0}}$ (7.55)

จะเขียนกฎได้ว่า

กฎ j: If ξ_1 is $\boldsymbol{A}_{i1,j}^{(1)}$, และ ξ_2 is $\boldsymbol{A}_{i2,j}^{(2)}$ และ ... และ ξ_n is $\boldsymbol{A}_{in,j}^{(n)}$ then η is $\boldsymbol{B}_{i,j}$(7.56)

โดยที่ $i1 \in \{1,2,...,\mathrm{N1}\}$, $i2 \in \{1,2,...,\mathrm{N2}\}$,..., $in \in \{1,2,...,\mathrm{N}n\}$ และ $i \in \{1,2,...,\mathrm{N0}\}$ นั่นเอง จากตัวอย่าง 7.11 สามารถบอกได้ว่ามีกฎที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ N1×N2×...×Nn×N0 แต่ในการใช้งานจริงมีเพียงบางกฎเท่านั้นที่นำไปใช้ได้จริง

ในการหาเหตุผล จะเริ่มจากการหาระดับความเข้ากันได้ของแต่ละอินพุต (x_i โดยที่ $i \in \{1,2,...,n\}$) กับพจน์ภาษาในกฎนั้น และเนื่องจากลักษณะของข้อตั้ง (premise) ของกฎต้องการให้ทุกอินพุตเป็นไปตามพจน์ภาษา ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของแต่ละอินพุตในแต่ละพจน์ภาษาจะถูกรวมกันในลักษณะของตัวเชื่อม conjunction นั่นคือ ที่กฎ j

$$\alpha_j = \min\{ \boldsymbol{A}_{i1,j}^{(1)}(x_1), \boldsymbol{A}_{i2,j}^{(2)}(x_2),..., \boldsymbol{A}_{in,j}^{(n)}(x_n)\} \qquad (7.57)$$

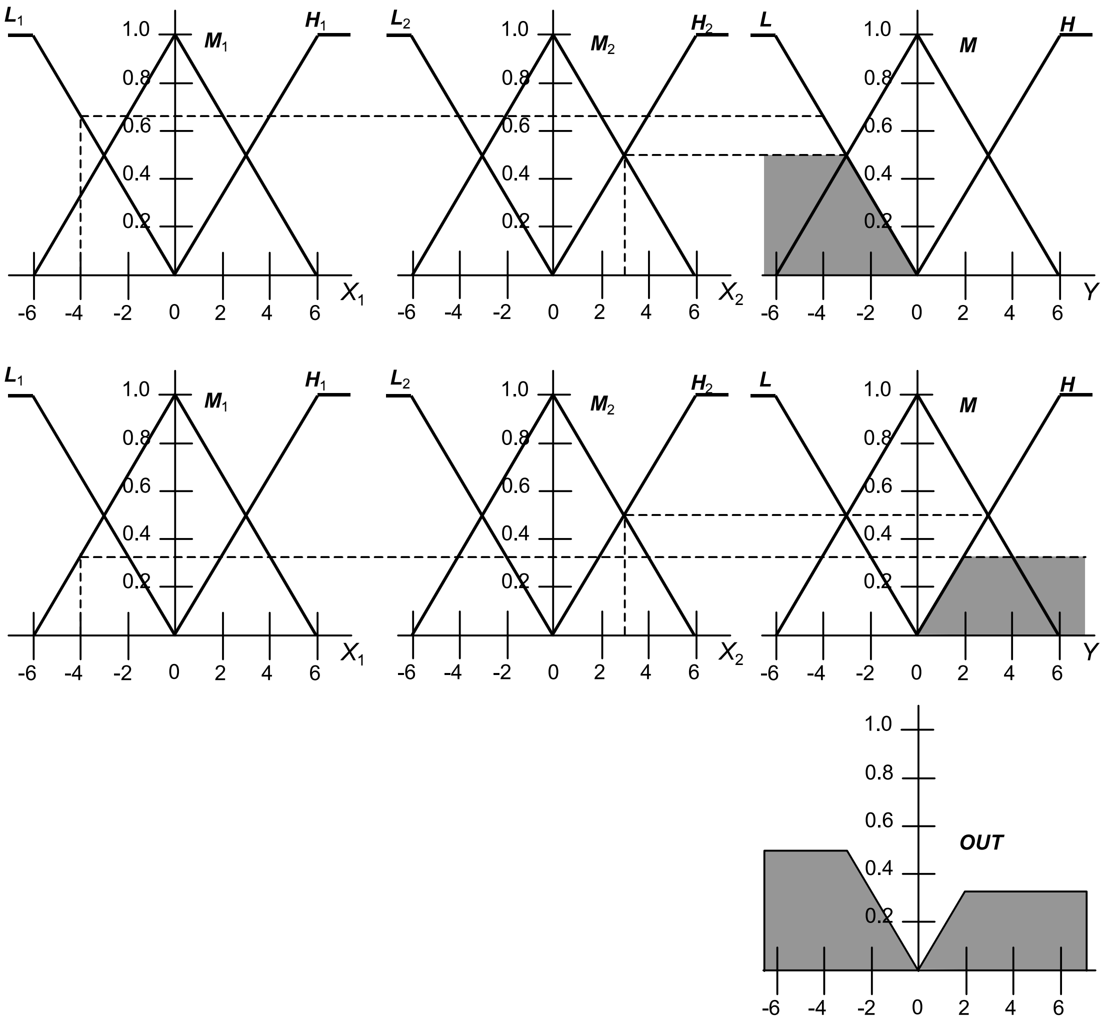
และเอาพุตของกฎ j เป็นฟัซซีเซตที่เกิดจากการตัด (cut off) พจน์ภาษา $\boldsymbol{B}_{i,j}$ ด้วย α_j หรืออาจจะพูดได้ว่า

$$\boldsymbol{OUT}_{x_1,x_2,...,x_n}^{(j)}(y) = \min\left[\boldsymbol{A}_{i1,j}^{(1)}(x_1), \boldsymbol{A}_{i2,j}^{(2)}(x_2),..., \boldsymbol{A}_{in,j}^{(n)}(x_n), \boldsymbol{B}_{i,j}(y)\right] \qquad (7.58)$$

และเมื่อได้เอาพุตของแต่ละกฎแล้ว ฟัซซีเอาพุตจากทุกกฎจะถูกรวมกันโดยการหายูเนียน (ซึ่งเป็นการหายูเนียนมาตรฐานซึ่งจะได้ฟัซซีเอาพุตรวม (***OUT***) สมมุติให้มีกฎทั้งหมด k กฎ

$$\boldsymbol{OUT}_{x_1,x_2,...,x_n}(y) = \max_{j\in\{1,2,...,k\}} \min\left[\boldsymbol{A}_{i1,j}^{(1)}(x_1), \boldsymbol{A}_{i2,j}^{(2)}(x_2),..., \boldsymbol{A}_{in,j}^{(n)}(x_n), \boldsymbol{B}_{i,j}(y)\right] \qquad (7.59)$$

เอาพุตที่ออกไปที่ controlled system จะเป็นค่าที่ได้จากการแปลงฟัซซีเอาพุตรวมเป็นตัวเลขโดย defuzzification interface



รูปที่ 7.15 ระบบควบคุมฟัซซีโดยใช้วิธี Mamdani

ตัวอย่างที่ 7.13 สมมุติให้ระบบมีกฎ 2 กฎ โดยที่แต่ละกฎจะมีอินพุต 2 อินพุต และแต่ละอินพุตในแต่ละกฎมีพจน์ภาษาดังรูปที่ 7.15 โดยที่มีกฎดังนี้คือ

กฎ 1: If x_1 is $\boldsymbol{L}_1$ และ x_2 is $\boldsymbol{H}_2$, then y is $\boldsymbol{L}$

กฎ 2: If x_1 is $\boldsymbol{M}_1$ และ x_2 is $\boldsymbol{M}_2$, then y is $\boldsymbol{H}$

และสมมุติให้อินพุตที่เข้ามาที่ fuzzification interface มีค่าเป็น –4 และ 3 จะเห็นได้ว่า

$$\alpha_1 = \min\big(\boldsymbol{L}_1(-4), \boldsymbol{H}_2(3)\big) = \min(0.67, 0.5) = 0.5$$

และ

$$\alpha_2 = \min\big(\boldsymbol{M}_1(-4), \boldsymbol{M}_2(3)\big) = \min(0.33, 0.5) = 0.5$$

ฟัซซีเอาพุตของกฎที่ 1 และ 2 และฟัซซีเอาพุตรวม (***OUT***) แสดงในรูปที่ 7.14 เช่นกัน สมมุติว่าในส่วนของ (defuzzification interface) ใช้วิธีการแปลงโดยใช้ centroid จะได้ค่า output เท่ากับ 1.2

■

7.6.2 วิธีการของ Takagi-Sugeno (The Takagi-Sugeno model)

ให้นิยามต่างๆเกี่ยวกับตัวแปรภาษาของอินพุต หรือ ข้อตั้งของกฎเป็นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 7.6.1 แต่ในวิธีนี้ไม่มีตัวแปรภาษาของเอาพุต หรือบทสรุปเนื่องจากแต่ละกฎจะอยู่ในรูปของ

$$\text{กฎ } j\text{: If } \xi_1 \text{ is } \boldsymbol{A}_{i1,j}^{(1)}, \text{ และ } \xi_2 \text{ is } \boldsymbol{A}_{i2,j}^{(2)} \text{ และ ... และ } \xi_n \text{ is } \boldsymbol{A}_{in,j}^{(n)}$$

$$\text{then } \eta_j = f_j(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \tag{7.60}$$

สำหรับ $1 \le j \le k$ โดยที่ f_j เป็นฟังก์ชันที่ส่งทอด (map) จาก $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ ไปยัง Y ซึ่งโดยปกติแล้วฟังก์ชัน f_j เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือ สมมุติให้ a_i^j เป็นค่าคงที่ ที่ใช้ในกฎ j และค่าเหล่านี้จะแตกต่างกันในแต่ละกฎที่แตกต่าง จะได้

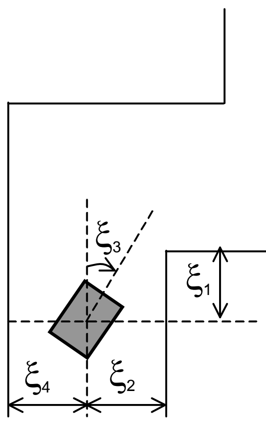
$$f_j(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1^j x_1 + a_2^j x_2 + ... + a_n^j x_n + a_0^j \tag{7.61}$$

ในการหาเหตุผลของแต่ละกฎ j คือการหาระดับความเข้ากันได้ของแต่ละอินพุต (x_i โดยที่ $i \in \{1,2,...,n\}$) กับพจน์ภาษาในกฎนั้น และเนื่องจากลักษณะของข้อตั้ง (premise) ของกฎต้องการให้ทุกอินพุตเป็นไปตามพจน์ภาษา เช่นเดียวกับกรณีของ Mamdani ดังนั้นค่าความเป็นสมาชิกของแต่ละอินพุตในแต่ละพจน์ภาษาจะถูกรวมกันในลักษณะของตัวเชื่อม conjunction เป็น α_j สำหรับกฎที่ j โดยใช้สมการที่ 7.57 และเมื่อคำนวณหา f_j สำหรับทุกกฎแล้วนำค่าที่ได้มารวมกันโดย

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(x_1, x_2, ... x_n)}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j} \tag{7.62}$$

ดังนั้นค่าเอาพุตที่ได้จะเป็นตัวเลข ไม่ใช่ฟัซซีเซต ซึ่งไม่จำเป็นต้องใช้ defuzzification interface ในกรณีนี้เลย

ตัวอย่างที่ 7.14 ต้องการสร้างระบบที่ควบคุมรถให้ผ่านทางโค้งในขณะที่มีความเร็วคงที่ โดยให้อินพุตมีค่า ξ_1 เป็นระยะของรถจนถึงขอบทางโค้ง ξ_2 เป็นระยะของรถจนถึงไหล่ทางข้างขวา ξ_3 เป็นมุมของรถ และ ξ_4 เป็นระยะของรถถึงไหล่ทางข้างซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 7.16



รูปที่ 7.16 อินพุตของระบบควบคุมฟัซซีของการควบคุมรถผ่านทางโค้ง

ตารางที่ 7.6 กฎและค่าคงที่ที่ใช้ในระบบควบคุมฟัซซี

กฎ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
1	—	—	outwards	small	3.000	0.000	0.000	-0.045	-0.004
2	—	—	forward	small	3.000	0.000	0.000	-0.030	-0.090
3	small	small	outwards	—	3.000	-0.041	0.004	0.000	0.000
4	small	small	forward	—	0.303	-0.026	0.061	-0.050	0.000
5	small	small	inwards	—	0.000	-0.025	0.070	-0.075	0.000
6	small	big	outwards	—	3.000	-0.066	0.000	-0.034	0.000
7	small	big	forward	—	2.990	-0.017	0.000	-0.021	0.000
8	small	big	inwards	—	1.500	0.025	0.000	-0.050	0.000
9	medium	small	outwards	—	3.000	-0.017	0.005	-0.036	0.000
10	medium	small	forward	—	0.053	-0.038	0.080	-0.034	0.000
11	medium	small	inwards	—	-1.220	-0.016	0.047	-0.018	0.000
12	medium	big	outwards	—	3.000	-0.027	0.000	-0.044	0.000
13	medium	big	forward	—	7.000	-0.049	0.000	-0.041	0.000
14	medium	big	inwards	—	4.000	-0.025	0.000	-0.100	0.000
15	big	small	outwards	—	0.370	0.000	0.000	-0.007	0.000
16	big	small	forward	—	-0.900	0.000	0.034	-0.030	0.000
17	big	small	inwards	—	-1.500	0.000	0.005	-0.100	0.000
18	big	big	outwards	—	1.000	0.000	0.000	-0.013	0.000
19	big	big	forward	—	0.000	0.000	0.000	-0.006	0.000
20	big	big	inwards	—	0.000	0.000	0.000	-0.010	0.000

ให้ η ความเร็วของการหมุน (rotation speed) พวงมาลัยและให้เซตสากล $X_1 = [0,\ 150]$ เซนติมิเตอร์ $X_2 = [0,\ 150]$ เซนติมิเตอร์ $X_3 = [-90,\ 90]$ องศา และ $X_4 = [0,\ 150]$ เซนติมิเตอร์ และให้กฎที่ j สำหรับ $1 \le j \le 20$ มีลักษณะดังนี้

กฎ j: If ξ_1 is $\boldsymbol{A}_{j1,j}^{(1)}$, และ ξ_2 is $\boldsymbol{A}_{j2,j}^{(2)}$ และ ξ_3 is $\boldsymbol{A}_{j3,j}^{(3)}$ และ ξ_4 is $\boldsymbol{A}_{j4,j}^{(4)}$

then $\eta = p_0 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 + p_4\xi_4$

โดยที่ $\boldsymbol{A}_{j1,j}^{(1)} \in \{\text{small, medium, big}\}$ $\boldsymbol{A}_{j2,j}^{(2)} \in \{\text{small, big}\}$ $\boldsymbol{A}_{j3,j}^{(3)} \in \{\text{outwards, forward, inwards}\}$ และ $\boldsymbol{A}_{j4,j}^{(4)} \in \{\text{small}\}$ ซึ่งฟัซซีเซตหรือพจน์ภาษาเหล่านี้ถูกกำหนดไว้แล้ว กฎและค่าคงที่ที่ใช้ในการคำนวณแต่ละกฎแสดงในตารางที่ 7.6

สมมุติให้รถกำลังเข้าทางโค้งและวัดอินพุตทั้ง 4 ค่า ได้ $\xi_1 = 10$ เซนติมิเตอร์ $\xi_2 = 30$ เซนติมิเตอร์ $\xi_3 = 0$ องศา (นั่นคือไปตรง) และ $\xi_4 = 50$ เซนติมิเตอร์ เมื่อผ่านค่าเหล่านี้เข้าไปในระบบจะมีแค่กฎที่ 4 และ 7 เท่านั้นที่ค่า α มากกว่า 0 นั่นคือในกฎที่ 4 จากการอ่านค่าความเป็นสมาชิกของ ξ_1 ใน small เท่ากับ 0.8 ξ_2 ใน small เท่ากับ 0.25 ξ_3 ใน forward เท่ากับ 1 ทำให้ได้ $\alpha_4 = 0.25$ และ

$$\eta_4 = 0.303 - 0.026(10) + 0.061(30) - 0.050(0) + 0.000(50) = 1.873$$

และในกฎที่ 7 จากการอ่านค่าความเป็นสมาชิกของ ξ_1 ใน small เท่ากับ 0.8 ξ_2 ใน big เท่ากับ 0.167 ξ_3 ใน forward เท่ากับ 0 ทำให้ได้ $\alpha_4 = 0.167$ และ

$$\eta_7 = 2.990 - 0.017(10) + 0.000(30) - 0.021(0) + 0.000(50) = 2.820$$

และจะได้ค่าเอาพุตรวมเท่ากับ

$$\eta = \frac{0.25(1.873) + 0.167(2.820)}{0.25 + 0.167} = 2.252$$

■

ในการทำระบบควบคุมฟัซซีไม่ว่าจะใช้วิธี Mamdani หรือ Takagi-Sugeno ก็ยังมีคำถามที่ยังคงไม่มีคำตอบนั่นคือ

1. จะแบ่งเซตสากลของทั้งอินพุตและเอาพุตอย่างไร
2. ฟังก์ชันสมาชิกของพจน์ภาษาที่ใช้ควรจะเป็นอย่างไร
3. กฎควรจะมีเท่าไร ระบบถึงจะทำงานได้ดี

การประยุกต์ใช้ฟัซซี
Fuzzy Applications

8

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ฟัซซีเซตในงานต่างๆ แต่หนึ่งในการประยุกต์ใช้ที่ได้กล่าวไปแล้ว คือระบบควบคุมฟัซซีเช่นในตัวอย่างที่ 7.12 ถึง 7.14 นั่นเอง

8.1 การประยุกต์ใช้ฟัซซีในการตัดสินใจส่วนบุคคล (Individual Decision Making)

Bellman และ Zadeh [Bellman70] ได้เสนอตัวแบบฟัซซี (fuzzy model) สำหรับการตัดสินใจที่มีเป้าหมาย (goal) และข้อจำกัด (constraint) เป็นฟัซซีเซต การตัดสินใจแบบนี้จะประกอบไปด้วย

1. เซต A ซึ่งเป็นเซตของการกระทำ
2. เซตของเป้าหมาย $\boldsymbol{G}_i$ ($i \in \mathrm{N}_n$) ซึ่งเป็นฟัซซีเซตบน A
3. เซตของข้อจำกัด $\boldsymbol{C}_j$ ($j \in \mathrm{N}_m$) ซึ่งเป็นฟัซซีเซตบน A

โดยปกติแล้วฟัซซีเซต $\boldsymbol{G}_i$ และ $\boldsymbol{C}_j$ ไม่ได้อยู่บนเซต A โดยตรง แต่โดยอ้อมโดยผ่านฟังก์ชันบางฟังก์ชัน นั่นคือให้ $\boldsymbol{G}_i'$ และ $\boldsymbol{C}_j'$ เป็นฟัซซีเซตบนเซตสากล X_i และ Y_j ที่ $i \in \mathrm{N}_n$ และ $j \in \mathrm{N}_m$ และให้ฟัซซีเซตเหล่านี้ถูกสร้างโดยคนที่ต้องตัดสินใจ ดังนั้นแต่ละ $i \in \mathrm{N}_n$ และ $j \in \mathrm{N}_m$ เราสามารถอธิบายการกระทำในเซต A ในรูปของเซต X_i และ Y_j ได้โดย

$$g_i: A \to X_i$$

$$c_j: A \to Y_j$$

และค่าความเป็นสมาชิกของ $\boldsymbol{G}_i$ และ $\boldsymbol{C}_j$ จะเป็น

$$\boldsymbol{G}_i(a) = \boldsymbol{G}_i'(g_i(a)) \tag{8.1}$$

และ

$$\boldsymbol{C}_j(a) = \boldsymbol{C}_j'(c_j(a)) \tag{8.2}$$

สำหรับทุก $a \in A$

ดังนั้นการตัดสินใจจากเซต A $\boldsymbol{G}_i$ ($i \in \mathrm{N}_n$) และ $\boldsymbol{C}_j$ ($j \in \mathrm{N}_m$) ที่เรียกว่าการตัดสินใจฟัซซี (fuzzy decision) ($\boldsymbol{D}$) ทำได้โดย

$$\boldsymbol{D}(a) = \min\left[\inf_{i \in \mathrm{N}_n} \boldsymbol{G}_i(a), \inf_{j \in \mathrm{N}_m} \boldsymbol{C}_j(a)\right] \tag{8.3}$$

สำหรับทุก $a \in A$ ซึ่งการตัดสินใจแบบนี้คือการทำอินเตอเซกชันมาตรฐานนั่นเอง และเมื่อต้องทำการแปลง $\boldsymbol{D}$ ให้เป็นตัวเลขก็ทำได้โดยการเลือกการกระทำ a ที่มีค่าความเป็นสมาชิกใน $\boldsymbol{D}$ ที่มากที่สุดนั่นเอง แต่เนื่องจากวิธีการนี้ไม่สนใจทางเลือกอื่น ดังนั้นวิธีการนี้อาจจะใช้ไม่ได้ในงานบางงาน

ตัวอย่างที่ 8.1 สมมุติให้คนคนหนึ่งต้องทำการตัดสินใจในการเลือกงาน 4 งานคือ a_1, a_2, a_3, และ a_4 โดยมีเป้าหมายคือได้เงินเดือนสูง โดยที่มีข้อจำกัดคืองานต้องเป็นงานที่น่าสนใจและอยู่ไม่ไกลนัก

ดังนั้น $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ และ ฟัซซีเซตของเป้าหมายคือ ***G*** เป็นฟัซซีเซตที่ใช้แทน เงินเดือนสูง และ $\boldsymbol{C}_1$ และ $\boldsymbol{C}_2$ เป็นฟัซซีเซตที่ใช้แทน งานน่าสนใจ และ อยู่ไม่ไกล ให้ฟัซซีเซต ***G'*** เป็นฟัซซีเซตที่อยู่บน $\Re^+$ ดังรูปที่ 8.1(ก) และเราต้องการให้ฟัซซีเซต ***G*** อยู่บนเซต *A* ดังนั้นต้องใช้ $g{:}A \rightarrow \Re^+$ ได้เป็น

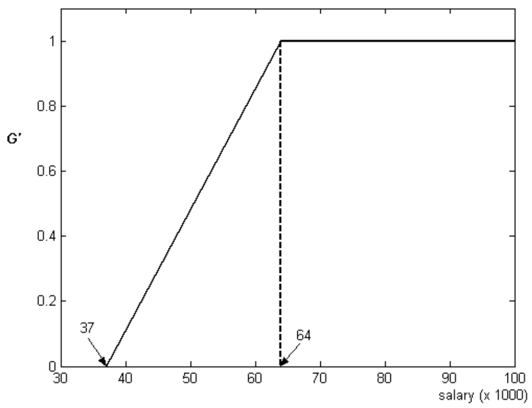
$$g(a_1) = 40{,}000 \text{ บาท}$$
$$g(a_2) = 45{,}000 \text{ บาท}$$
$$g(a_3) = 50{,}000 \text{ บาท}$$
$$g(a_4) = 60{,}000 \text{ บาท}$$

จากรูป 8.1 (ก) และฟังก์ชัน *g* จะได้ฟัซซีเซต ***G*** เป็น

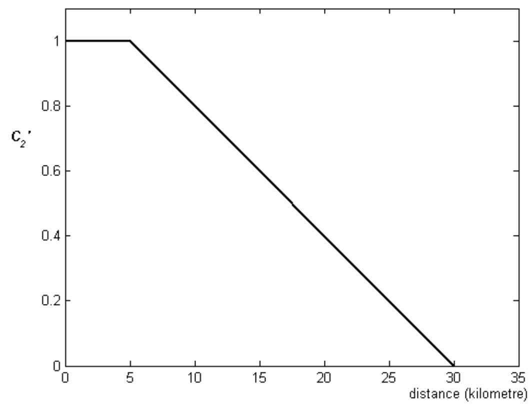
$$\boldsymbol{G} = 0.11/a_1 + 0.30/a_2 + 0.48/a_3 + 0.80/a_4$$

และสมมุติให้บุคคลนั้นใส่ค่าความเป็นสมาชิกของความเป็นงานที่น่าสนใจ ดังนั้น

$$\boldsymbol{C}_1 = 0.40/a_1 + 0.60/a_2 + 0.20/a_3 + 0.20/a_4$$



(ก)



(ข)

<u>รูปที่ 8.1 (ก) ฟัซซีเซตของเงินเดือนสูง (ข) ฟัซซีเซตของอยู่ไม่ไกล</u>

และฟัซซีเซต ***C***$_2$' เป็นฟัซซีเซตของอยู่ไม่ไกลที่อยู่บน $\Re^+$ ดังรูปที่ 8.1(ข) และให้ฟังก์ชัน $c_2{:}A \rightarrow \Re^+$ เป็น

$$c_2(a_1) = 27 \text{ กิโลเมตร}$$
$$c_2(a_2) = 7.5 \text{ กิโลเมตร}$$
$$c_2(a_3) = 12 \text{ กิโลเมตร}$$
$$c_2(a_4) = 2.5 \text{ กิโลเมตร}$$

จากรูป 8.1 (ข) และฟังก์ชัน c_2 จะได้ฟัซซีเซต $\boldsymbol{C}_2$ เป็น

$$\boldsymbol{C}_2 = 0.10/a_1 + 0.90/a_2 + 0.70/a_3 + 1.00/a_4$$

จากสมการที่ 8.3 จะได้

$$\boldsymbol{D} = 0.10/a_1 + 0.30/a_2 + 0.20/a_3 + 0.20/a_4$$

ดังนั้นงานที่จะถูกเลือกคืองาน a_2 เพราะเป็นงานที่มีค่าความเป็นสมาชิกในการตัดสินใจมากที่สุดนั่นเอง

■

การอินเตอเซกชันโดยวิธีมาตรฐานในกระบวนการนี้ ไม่อนุญาติให้มีการตอบโต้ (interaction) หรือการแลกเปลี่ยนกันระหว่าง เป้าหมาย (goal) และข้อจำกัด (constraint) ซึ่งเป็นข้อเสียในการใช้งานปกติ ดังนั้นโดยมากในการตัดสินใจแบบนี้จะใช้การอินเตอเซกชันแบบอื่น หรือการหาค่าเฉลี่ย มาช่วยในการแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างเป้าหมายและข้อจำกัดได้

8.2 การประยุกต์ใช้ฟัซซีในการตัดสินใจหลายคน (Multiperson Decision Making)

เมื่อการตัดสินใจเป็นการตัดสินใจจากหลายคนจะมีสิ่งที่แตกต่างจากการตัดสินใจส่วนบุคคล คือ อย่างแรกเป้าหมายของแต่ละคนจะต่างกันนั่นคือแต่ละคนจะเรียงลำดับความสำคัญต่างกัน และอย่างที่สองคือแต่ละคนจะมีข้อมูลที่แตกต่างกัน

Blin [Blin74, Blin73] ได้เสนอตัวแบบฟัซซี (fuzzy model) สำหรับการตัดสินใจเป็นกลุ่มคือให้แต่ละคนในกลุ่มของ n คนมี การจัดลำดับตามความพอใจ (preference ordering) ที่สะท้อน (reflexive) antisymmetry และส่งทอด (transitive) $\mathbf{P}_k$ โดยที่ $k \in \mathbb{N}_n$ ซึ่ง $\mathbf{P}_k$ เป็นลำดับทุกส่วน (totally ordering) หรือบางส่วน (partial ordering) ของเซตสากล X และ 'social choice' ฟังก์ชันซึ่งส่งทอดความพอใจของแต่ละบุคคลไปยังความพอใจของทั้งกลุ่ม โดยให้ ความพอใจทางสังคม (social preference) $\boldsymbol{S}$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคแบบฟัซซี (binary fuzzy relation) ที่เป็น

$$\boldsymbol{S}: X \times X \to [0,1] \tag{8.4}$$

ที่ค่าความเป็นสมาชิก $\boldsymbol{S}(x_i,\ x_j)$ หมายถึงระดับความพอใจใน x_i ต่อ x_j ซึ่งสามารถคำนวณได้จากจำนวนของบุคคลที่เลือก x_i ก่อน x_j $(N(x_i, x_j))$ หารด้วยจำนวนคนทั้งหมด n

$$\boldsymbol{s}(x_i, x_j) = \frac{N(x_i, x_j)}{n} \tag{8.5}$$

หรือใช้วิธีการรวมแบบอื่นในการรวมความพึงพอใจ และเมื่อ $\boldsymbol{S}$ ถูกนิยาม เราสามารถใช้ α-cut ของ $\boldsymbol{S}$ ซึ่งค่า α เป็นค่าที่บอกถึงระดับการตกลง (level of agreement) ระหว่างคนในกลุ่ม ในการหาการตัดสินใจรวมได้คือ การ maximize ระดับการตกลงสุดท้ายซึ่งประกอบไปด้วยการอินเตอเซกชันของคลาสของลำดับทุกส่วนแบบคริสป์ ที่เข้ากันได้ (compatible) กับแต่ละคู่ใน α-cut ของ $\boldsymbol{S}$ สำหรับค่า α ที่เพิ่มขึ้นทีละน้อยจนกระทั่งได้ลำดับทุกส่วนแบบคริสป์เพียง 1 ลำดับ และในกระบวนการนี้ถ้ามีคู่ $<x_i,x_j>$ ใดที่จะทำให้เป็น intransitivity จะถูกเอาออก และค่า α ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้เกิดเหตุการณ์นี้คือระดับการตกลงกันที่มากที่สุดของกลุ่มนี้ และลำดับทุกส่วนแบบคริสป์ นั้นจะเป็นผลการตัดสินใจของกลุ่ม นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 8.2 สมมุติให้มีคนในกลุ่ม 8 คนโดยที่ทั้ง 8 คนต้องให้การจัดลำดับตามความพอใจของเซต $X = \{w, x, y, z\}$ และให้การจัดลำดับตามความพอใจของแต่ละคนเป็น

$$\mathbf{P}_1 = < w, x, y, z >$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_5 = < z, y, x, w >$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_7 = < x, w, y, z >$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_8 = < w, z, x, y >$$

$$\mathbf{P}_6 = \langle z, w, x, y \rangle$$

ใช้สมการที่ 8.5 คำนวณหา ***S*** ซึ่งจะได้

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.000 & 0.500 & 0.750 & 0.625 \\ 0.500 & 0.000 & 0.750 & 0.375 \\ 0.250 & 0.250 & 0.000 & 0.375 \\ 0.375 & 0.625 & 0.625 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \begin{matrix} w & \quad x & \quad y & \quad z \end{matrix} \end{array}$$

ดังนั้นจะได้

${}^{1}\boldsymbol{S} = \varnothing$

${}^{0.75}\boldsymbol{S} = \{\langle w,y\rangle, \langle x,y\rangle\}$

${}^{0.625}\boldsymbol{S} = \{\langle w,z\rangle, \langle z,x\rangle, \langle z,y\rangle, \langle w,y\rangle, \langle x,y\rangle\}$

${}^{0.5}\boldsymbol{S} = \{\langle x,w\rangle, \langle w,x\rangle, \langle w,z\rangle, \langle z,x\rangle, \langle z,y\rangle, \langle w,y\rangle, \langle x,y\rangle\}$

${}^{0.375}\boldsymbol{S} = \{\langle z,w\rangle, \langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle, \langle x,w\rangle, \langle w,x\rangle, \langle w,z\rangle, \langle z,x\rangle, \langle z,y\rangle, \langle w,y\rangle, \langle x,y\rangle\}$

${}^{0.25}\boldsymbol{S} = \{\langle y,w\rangle, \langle y,x\rangle, \langle z,w\rangle, \langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle, \langle x,w\rangle, \langle w,x\rangle, \langle w,z\rangle, \langle z,x\rangle, \langle z,y\rangle, \langle w,y\rangle, \langle x,y\rangle\}$

เมื่อเราได้ α-cut ของ ***S*** เราสามารถใช้กระบวนการข้างต้นได้คือ ลำดับทุกส่วนบน $X \times X$ ที่เข้ากันได้กับ ${}^{1}\boldsymbol{S}$ คือทุกลำดับ และลำดับทุกส่วนบน $X \times X$ ที่เข้ากันได้กับ ${}^{0.75}\boldsymbol{S}$ คือ ${}^{0.75}O$ ซึ่ง

${}^{0.75}O = \{\langle z,w,x,y\rangle, \langle w,x,y,z\rangle, \langle w,z,x,y\rangle, \langle w,x,z,y\rangle, \langle z,x,w,y\rangle, \langle x,w,y,z\rangle, \langle x,z,w,y\rangle, \langle x,w,z,y\rangle\}$

และ ${}^{1}O \cap {}^{0.75}O = {}^{0.75}O$ และเช่นเดียวกันลำดับทุกส่วนที่เข้ากันได้กับ ${}^{0.625}\boldsymbol{S}$ คือ ${}^{0.625}O = \{\langle w,z,x,y\rangle\}$ และ ${}^{1}O \cap {}^{0.75}O \cap {}^{0.625}O = \{\langle w,z,x,y\rangle\}$ ดังนั้นค่า 0.625 เป็นระดับการตกลงกันที่ใหญ่ที่สุดของกลุ่มและการตัดสินใจของกลุ่มคือ ลำดับทุกส่วน $\langle w,z,x,y\rangle$ นั่นเอง

■

จากที่กล่าวข้างต้นและในตัวอย่าง 8.2 แสดงให้เห็นว่าแต่ละบุคคลต้องสามารถเรียงลำดับทั้งหมดได้ ซึ่งในการใช้งานบางอย่างเป็นไปได้ยากดังนั้น Shimura [Shimura73] เสนอต้นแบบที่เรียงลำดับเป็นคู่ ซึ่งในวิธีนี้ใช้ระดับความน่าสนใจ (attractiveness grade) $f(x_i,x_j)$ ซึ่งเป็นความน่าสนใจของ x_i ต่อ x_j ที่แต่ละคนให้ และค่านี้จะทำกับทุกคู่ในเซตสากล X และค่าเหล่านี้จะถูกแปลงเป็นระดับความพอใจ $\boldsymbol{F}(x_i,x_j)$ โดย

$$\boldsymbol{F}(x_i, x_j) = \frac{f(x_i, x_j)}{\max[f(x_i, x_j), f(x_j, x_i)]} \tag{8.6ก}$$

หรือ

$$\boldsymbol{F}(x_i,x_j) = \min[1, f(x_i,x_j)/ f(x_j,x_i)] \tag{8.6ข}$$

สำหรับทุกคู่ $\langle x_i,x_j\rangle \in X^2$ ซึ่งค่า $\boldsymbol{F}(x_i,x_j)$ เท่ากับ 1 เมื่อ x_i มีความน่าสนใจอย่างน้อยเท่ากับ x_j และ $\boldsymbol{F}$ อาจถูกมองเป็นฟังก์ชันสมาชิกของความสัมพันธ์ทวิภาคบน X ดังนั้นแต่ละคู่ $\langle x_i,x_j\rangle$ มีคุณสมบัติ

$$\max\left[\, \boldsymbol{F}(x_i,x_j),\ \boldsymbol{F}(x_j,x_i)\right] = 1 \tag{8.7}$$

ซึ่งมีความหมายว่าสำหรับแต่ละคู่ อย่างน้อยทางเลือกหนึ่งมีความน่าสนใจเท่ากับอีกทางเลือกหนึ่ง และสำหรับแต่ละ $x_i \in X$ เราสามารถหาระดับความพอใจรวม $p(x_i)$ ของแต่ละบุคคลได้เป็น

$$p(x_i) = \min_{x_j \in X} \boldsymbol{F}(x_i, x_j) \tag{8.8}$$

หลังจากที่ได้ลำดับจากแต่ละบุคคลก็ทำการรวมกันโดยใช้วิธีที่กล่าวข้างต้น (ตัวอย่างที่ 8.2)

ตัวอย่างที่ 8.3 ให้คนกลุ่มหนึ่งเลือกรถยนต์จาก Acclaim Accord Camry Cutlass และสมมุติให้ตารางที่ 8.1 แสดงระดับความน่าสนใจ

ตารางที่ 8.1 ค่าระดับความน่าสนใจ

$f(x_i,x_j)$	ความน่าสนใจของ x_i ที่เกี่ยวเนื่องกับ x_j
1	Little attractive
3	Moderately attractive
5	Strongly attractive
7	Very strongly attractive
9	Extremely attractive
2, 4, 6, 8	Intermediate value ระหว่าง ค่า

ตารางที่ 8.2 ตัวอย่างของระดับความน่าสนใจจากคนคนหนึ่ง

$f(x_i,x_j)$	Acclaim	Accord	Camry	Cutlass	Sable
Acclaim	1	3	1	2	2
Accord	7	1	1	7	6
Camry	9	3	1	7	8
Cutlass	3	2	3	1	3
Sable	8	4	5	7	1

ตารางที่ 8.3 ระดับความน่าพอใจ และระดับความพอใจรวมจากคนที่ให้คะแนนในตาราง 8.2

$f(x_i,x_j)$	Acclaim	Accord	Camry	Cutlass	Sable	$p(x_i)$
Acclaim	1	0.43	0.11	0.67	0.25	0.11
Accord	1	1	0.33	1	1	0.33
Camry	1	1	1	1	1	1
Cutlass	1	0.29	0.43	1	0.43	0.29
Sable	1	0.66	0.625	1	1	0.63

ตัวอย่างของการให้คะแนนของคนคนหนึ่งแสดงในตารางที่ 8.2 ดังนั้นระดับความพอใจ $\boldsymbol{F}(x_i,x_j)$ และระดับความพอใจรวม $p(x_i)$ ของบุคคลนี้โดยใช้สมการที่ 8.6 และ 8.8 แสดงในตารางที่ 8.3

จากตารางจะเห็นว่าคนนี้การเรียงลำดับของคนนี้เป็น Camry Sable Accord Cutlass และ Acclaim และทำเช่นเดียวกันกับคนอื่นในกลุ่มหลังจากนั้นทำการรวมผลการตัดสินใจของทุกคนดังตัวอย่างที่ 8.2 นั่นเอง

■

8.3 การประยุกต์ใช้ฟัซซีในการตัดสินใจที่มีหลายเกณฑ์ (Multicriteria Decision Making)

ในการตัดสินใจแบบนี้ ตัวเลือกแต่ละตัวจะถูกให้คะแนนตามเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ ดังนั้นสิ่งที่ต้องการคือการเรียงลำดับโดยรวม และโดยปกติเกณฑ์จะมีจำกัดและตัวเลือกมีจำกัดเช่นกัน นั่นคือ $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ เป็นเซตของตัวเลือกและ $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$ เป็นเซตของเกณฑ์ และข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการตัดสินใจแบบนี้สามารถเขียนเป็นเมตริกซ์เป็น

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{array} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n$$

ค่าที่อยู่ในเมตริกซ์นี้มีค่าอยู่ในช่วง [0,1] และแต่ละ r_{ij} เป็นระดับที่ตัวเลือก x_j เป็นไปตามเกณฑ์ c_i สำหรับ $i \in \mathrm{N}_m$ และ $j \in \mathrm{N}_n$ ดังนั้น เมตริกซ์ $\boldsymbol{R}$ เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีของ $C \times X$

ถ้าในการใช้งานบางอย่างความสัมพันธ์นี้ไม่ได้มีค่าอยู่ในช่วง [0,1] แต่เป็นค่าจำนวนจริงอื่น $(\boldsymbol{R}' = [r_{ij}'])$ สามารถแปลงเมตริกซ์ให้เป็น $\boldsymbol{R}$ ได้โดย

$$r_{ij} = \frac{r_{ij}' - \min\limits_{j \in \mathrm{N}_n} r_{ij}'}{\max\limits_{j \in \mathrm{N}_n} r_{ij}' - \min\limits_{j \in \mathrm{N}_n} r_{ij}'} \tag{8.9}$$

สำหรับ $i \in \mathrm{N}_m$ และ $j \in \mathrm{N}_n$

สำหรับตัวเลือก $x_j \in X$ สามารถหาผลรวมของคะแนนจากเกณฑ์เหล่านี้ได้โดยอาจจะใช้ weighted average คือ

$$r_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_i r_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} w_i} \tag{8.10}$$

สำหรับทุกตัวเลือกโดยที่ $w_1, w_2,\ldots,w_m$ เป็นน้ำหนักที่บ่งบอกถึงความสำคัญของเกณฑ์ $c_1, c_2,\ldots,c_m$ หรือในบางงานอาจรวมกันโดยใช้ตัวดำเนินการการรวม (aggregation operator) คือ

$$r_j = h(r_{1j}, r_{2j}, \ldots r_{mj}) \tag{8.11}$$

ซึ่งตัวดำเนินการการรวมอาจเป็นการยูเนียน อินเตอเซกชัน หรือตัวดำเนินการแบบอื่น หรือจะใช้ weighted aggregation คือ

$$r_j = h\left(r_{1j}^{w_1}, r_{2j}^{w_2}, \ldots, r_{mj}^{w_m}\right) \tag{8.12}$$

โดยที่ w_1, w_2,...,w_m เป็นน้ำหนักที่บ่งบอกถึงความสำคัญของเกณฑ์ c_1, c_2,...,c_m เช่นเดียวกับสมการที่ 8.10 ก็ได้

8.4 การประยุกต์ใช้ฟัซซีในการจัดกลุ่มผู้ป่วยโดยใช้อัตราการเต้นของหัวใจ

ตัวอย่างนี้ยกมาจากบทความทางวิชาการของ Acharya และพวก [Acharya03] ซึ่งในงานนี้เป็นงานที่ใช้ เพอร์เซปตรอนหลายชั้น (multilayer perceptron) และความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน (fuzzy equivalence relation) ในการจัดกลุ่มผู้ป่วยที่เป็น Ischemic/dilated cardiomyopathy, Complete heart block, Sick sinus syndrome หรือ atrial fibrillation หรือ ectopics และ ผู้ป่วยที่เป็นปกติ โดยใช้สัญญาณของอัตราการเต้นของหัวใจซึ่งนักวิจัยใช้ ค่าเฉลี่ยของอัตราการเต้น (average heart rate) Ener1 ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างพลังงานในช่วงความถี่ 33.3 ถึง 100 เฮิรตซ์และพลังงานในช่วงความถี่ 0 ถึง 33.3 เฮิรตซ์ Ener2 ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างพลังงานในช่วงความถี่ 66.7 ถึง 100 เฮิรตซ์และพลังงานในช่วงความถี่ 0 ถึง 66.7 เฮิรตซ์ และ Correlation dimension factor ซึ่งคำนวณจากแนววิถี (trajectory) ใน phase space ของแต่ละคลาส เป็นลักษณะ (feature) หรืออินพุตให้กับเพอร์เซปตรอนหลายชั้น และความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน แต่เราจะยกมาเฉพาะในส่วนของความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เท่ากัน เท่านั้น

วิธีการนี้ทำได้โดยให้ training data set มีทั้งหมด p ตัวอย่างและนำ testing data set ที่มีทั้งหมด m ตัวอย่าง มาเพิ่มใน data set จากนั้นสร้างความสัมพันธ์แบบฟัซซีโดยที่

$$\boldsymbol{R}(x_i,x_j) = 1 - \delta\left(\sum_{l=1}^{n}\left|x_{il} - x_{jl}\right|^q\right)^{1/q} \tag{8.13}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนมิติ (dimension) q เป็นตัวแปรของฟังก์ชันระยะ (distance function parameter) และ δ เป็นตัวประกอบของการทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalization factor) ซึ่งเป็นการทำให้ $\boldsymbol{R}(x_i,x_j)$ มีค่าอยู่ในช่วง [0,1] นั่นเอง

```
R' = R
Do
        IF (a,b) และ (b,c) ใน R ให้หาว่ามี (a,c) ใน R หรือไม่
                IF ไม่มี (a,c)
                        ให้เพิ่ม (a,c) ใน R
                End IF
        End IF
Until Stable
```

<u>รูปที่ 8.2 อัลกอริทึมในการสร้างโครสเชอร์การถ่ายทอดของ [Acharya03]</u>

ความสัมพันธ์แบบฟัซซี (***R***) ที่ได้ จะมีคุณสมบัติของ การสะท้อน (reflexive) และ สมมาตร (symmetry) เนื่องจากนี้เป็นคุณสมบัติของระยะ (distance) อยู่แล้ว ดังนั้นความสัมพันธ์นี้เป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีที่เข้ากันได้ (fuzzy compatibility relation) แต่สำหรับการถ่ายทอด (transitive)

ต้องสร้างโครสเชอร์การถ่ายทอด (transitive closure) ของ $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}$) ซึ่งในบทความนี้นักวิจัยสร้าง $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}$ โดยใช้อัลกอริทึมดังรูปที่ 8.2 หลังจากได้ $\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}$ ให้หาว่า testing data x_j แต่ละตัวอย่างมีค่า $\boldsymbol{R}(x_i,x_j)$ สำหรับ $1 \le i \le p$ ที่มากที่สุดที่ i ตัวใด และให้ x_j อยู่ในคลาสเดียวกับ คลาสของ x_i

ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้งานที่กล่าวในบทนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น ซึ่งงานบางอย่างก็มีการนำฟัซซีเซตไปใช้ประโยชน์ในการทำ การรู้จำรูปแบบ (pattern recognition) การประมวลผลภาพดิจิตอล (digital image processing) การรวมตัวของตัวรับรู้ (sensor fusion) และอื่นๆ

บรรณานุกรม

[Acharya03] Acharya, U. R., Baht, P. S., Iyengar, S. S., Rao A., and Dua S., “Classification of heart rate data using artificial neural network and fuzzy equivalence relation”, *Pattern Recognition*, 36, 2003, pp. 61-68.

[Bellman70] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., ”Decision making in a fuzzy environment”, *Management Science*, 17(4), 1970, pp. 141-164.

[Bezdek99] Bezdek, J. C., Keller, J. and Krishnapuram, R. and Pal, N, R, *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Blin74] Blin, J. M., “Fuzzy relations in group decision theory”, *J. of Cybernetics*, 4(2), 1974, pp. 12-22.

[Blin73] Blin J. M. and Whinston, A. B., “Fuzzy sets and social choice”, *J. of Cybernetics*, 3(4), pp. 28-36.

[Dong85] Dong, W.M., Shah, H.C. and Wong, F.S., “Fuzzy computations in risk and decision analysis”, *Civ. Engng Syst.*, 2, 1985, pp.201-208.

[Dong87] Dong, W.M. and Wong, F.S., “Fuzzy Weighted Averages and Implementation of The Extension Principle”, *Fuzzy Sets and Systems*, 21, 1987, pp.183-199.

[Klir95] Klir, G. J. and Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, New Jersey, Prentice hall, 1995.

[Klir97] Klir G. J., St.Clair, U. and Yuan, B. *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications*, New Jersey, Prentice hall, 1997.

[Kosko92] Kosko, B., *Neural Networks and Fuzzy Systems:A Dynamic Systems Approach to Machine Intelligence*, Prentice Hall, 1991

[Krishnapuram03] Krishnapuram, R., “An Introduction to Fuzzy Systems”, Tutorial at Faculty of Engineering, Chiang Mai University, Chiang Mai, 2003.

[Kruse95] Kruse, R., Gebhardt, J. and Klawonn, F., *Foundations of Fuzzy Systems*, England, John Wiley & Son Ltd., 1995.

[Moore66] Moore, R. E., *Interval Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1966.

[Shimura73] Shimura, M., “Fuzzy Sets concept in rank-ordering objects” *J. or Math. Analysis and Applications*, 43(3), 1973, pp.717-733.

[Zadeh95] Zadeh, L.A., “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8(3), 1965, pp. 338-353.