Příklad 28. *Řešte metodou střelby Blasiovu rovnici mezní vrstvy*

$$y''' + yy'' + \lambda\left(1 - y'^2\right) = 0, \quad kde \quad x \in (0, 10), \quad \lambda \in \langle 0, 0.5\rangle$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(10) = 1$$

Nejprve musíme diferenciální rovnici třetího řádu rozložit na tři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. To provedeme substitucemi:

$$y = z^{(0)}(x), \quad y' = z^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}z^{(0)}}{\mathrm{d}x}, \quad y'' = z^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{d}z^{(1)}}{\mathrm{d}x}, \quad y''' = z^{(3)}(x) = \frac{\mathrm{d}z^{(2)}}{\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

Dosazením 1 do původní rovnice pak získáváme soustavu differenciálních rovnic prvního řádu pro funkce $z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}$*:*

$$\begin{aligned}
z^{(0)}(x) &= y \\
z^{(1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}z^{(0)}}{\mathrm{d}x} \\
z^{(2)}(x) &= \frac{\mathrm{d}z^{(1)}}{\mathrm{d}x} \\
z^{(3)}(x) &= \frac{\mathrm{d}z^{(2)}}{\mathrm{d}x} \quad = -\lambda\left(1 - {z^{(1)}}^2\right) - z^{(2)}z^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Počáteční podmínky se převedou na $z^{(0)}(0) = 0$ *a* $z^{(1)}(0) = 0$ *a koncová podmínka na* $z^{(1)}(10) = 1$.

Tuto soustavu budeme vnímat jako vektorovou funkci od x*, a definujeme* $\vec{f}(x)$ *jako její* $\boldsymbol{\nabla}_x$ *konkrétně*

$$\vec{Z}(x) = \begin{pmatrix} z^{(0)}(x) \\ z^{(1)}(x) \\ z^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}\left(x, \vec{Z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}z^{(0)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x,\vec{Z}} \\ \frac{\mathrm{d}z^{(1)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x,\vec{Z}} \\ \frac{\mathrm{d}z^{(2)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x,\vec{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{(1)}(x, \vec{Z}) \\ z^{(2)}(x, \vec{Z}) \\ z^{(3)}(x, \vec{Z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ -\lambda\left(1 - {z^{(1)}}^2\right) - z^{(2)}z^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Numerické řešení budeme provádět jednosměrnou metodou střelby z bodu $x_0 = \vec{0}$ *a řešení diferenciálních rovnic s pokusnými počátečními podmínkami Rundge-Kutta metodou čtvrtého řádu tedy:*

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n, \vec{Z}(x_n)\right) \\
\vec{k}_2 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{Z}(x_n) + \frac{\vec{k}_1}{2}\right) \\
\vec{k}_3 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{Z}(x_n) + \frac{\vec{k}_2}{2}\right) \\
\vec{k}_4 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n + h, \vec{Z}(x_n) + \vec{k}_3\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

kde finální tvar odhadu $\vec{Z}(x_{n+1})$ *je*

$$\vec{Z}(x_{n+1}) = \vec{Z}(x_n) + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4\right). \tag{5}$$

Pro dopředný chod potřebujeme čtyři parametry v počátečním bodě a ty vezmeme jako

$$\vec{Z}(0) = \begin{pmatrix} z^{(0)}(0) \\ z^{(1)}(0) \\ z^{(2)}(0) \end{pmatrix}, \quad \textit{přičemž} \quad z^{(0)}(0) = z^{(1)}(0) = 0, \tag{6}$$

tedy s našimi počátečními podmínkami hledáme v prostoru počátečních parametrů

$$\vec{Z}(0) \in \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_\lambda. \tag{7}$$

Koncový bod potom musí splňovat podmínku $z^{(1)}(10) = 1$*, tedy koncové řešení je z prostoru*

$$\vec{Z}(10) \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_\lambda. \tag{8}$$

K minimalizaci chyby splnění koncové podmínky, tedy hledání kořene funkce od $\vec{Z}$

$$B_2(x, \vec{Z}_0)\Big|_{x=10} = B_2(x, z_0^{(2)})\Big|_{x=0} = z^{(2)}(x) - 1\Big|_{x=10} = 0 \tag{9}$$

použijeme Newtonovou-Raphsonovou metodou. Přičemž pro vyhodnocení $z^{(2)}(10) - 1$ musíme vždy najít hodnotu $z^{(2)}(10)$ střelbou s proměnným počátečním parametrem $z_0^{(2)}$.

Protože máme prostor počátečních parametrů pouze jednodimenzionální, budeme k tomu potřebovat pouze parciální derivaci

$$\frac{\partial B_2}{\partial z_0^{(2)}} \approx \frac{B_2(z_0^{(2)} + \Delta z_0^{(2)}) - B_2(z_0^{(2)})}{\Delta z_0^{(2)}}. \tag{10}$$