

Příklad 28. Řešte metodou střelby Blasiovu rovnici mezní vrstvy

$$y''' + yy'' + \lambda(1 - y'^2) = 0, \quad \text{kde} \quad x \in (0, 10), \quad \lambda \in \langle 0, 0.5 \rangle$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(10) = 1$$

Nejprve musíme diferenciální rovnici třetího řádu rozložit na tři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. To provedeme substitucemi:

$$y = z^{(0)}(x), \quad y' = z^{(1)}(x) = \frac{dz^{(0)}}{dx}, \quad y'' = z^{(2)}(x) = \frac{dz^{(1)}}{dx}, \quad y''' = z^{(3)}(x) = \frac{dz^{(2)}}{dx} \quad (1)$$

Dosazením 1 do původní rovnice pak získáváme soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} z^{(0)}(x) &= y \\ z^{(1)}(x) &= \frac{dz^{(0)}}{dx} \\ z^{(2)}(x) &= \frac{dz^{(1)}}{dx} \\ z^{(3)}(x) &= \frac{dz^{(2)}}{dx} = -\lambda(1 - z^{(1)2}) - z^{(2)}z^{(0)} \end{aligned} \quad (2)$$

Počáteční podmínky se převedou na $z^{(0)}(0) = 0$ a $z^{(1)}(0) = 0$ a koncová podmínka na $z^{(1)}(10) = 1$.

Tuto soustavu budeme vnímat jako vektorovou funkci od x , a definujeme $\vec{f}(x)$ jako její derivace konkrétně

$$\vec{Z}(x) = \begin{pmatrix} z^{(0)}(x) \\ z^{(1)}(x) \\ z^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x, \vec{Z}) = \begin{pmatrix} \frac{dz^{(0)}}{dx} \Big|_{x, \vec{Z}} \\ \frac{dz^{(1)}}{dx} \Big|_{x, \vec{Z}} \\ \frac{dz^{(2)}}{dx} \Big|_{x, \vec{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{(1)}(x, \vec{Z}) \\ z^{(2)}(x, \vec{Z}) \\ -\lambda(1 - z^{(1)2}) - z^{(2)}z^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Numerické řešení budeme provádět jednosměrnou metodou střelby z bodu $x_0 = \vec{0}$ a řešení diferenciálních rovnic s pokusnými parametry Rundge-Kutta metodou čtvrtého řádu tedy:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= h \cdot \vec{f}(x_n, \vec{Z}(x_n)) \\ \vec{k}_2 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{Z}(x_n) + \frac{\vec{k}_1}{2}\right) \\ \vec{k}_3 &= h \cdot \vec{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \vec{Z}(x_n) + \frac{\vec{k}_2}{2}\right) \\ \vec{k}_4 &= h \cdot \vec{f}(x_n + h, \vec{Z}(x_n) + \vec{k}_3) \end{aligned} \quad (4)$$

kde finální tvar odhadu $\vec{Z}(x_{n+1})$ je

$$\vec{Z}(x_{n+1}) = \vec{Z}(x_n) + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \quad (5)$$

Pro dopředný chod potřebujeme čtyři parametry v počátečním bodě a ty vezmeme jako

$$\vec{Z}(0) = \begin{pmatrix} z^{(0)}(0) \\ z^{(1)}(0) \\ z^{(2)}(0) \end{pmatrix} \quad (6)$$

tedy s našimi počátečními podmínkami hledáme v parametrickém prostoru

$$\vec{Z}(0) \in \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_\lambda \quad (7)$$

Koncový bod potom musí splňovat podmínku

$$\vec{Z}(10) \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_\lambda \quad (8)$$