Contents

1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

1.1 Algebra

1.1.1 Wartość Bezwzględna

Dla liczby x, wartość bezwzględna oznacza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wartości bezwzględne posiadają również własne własności:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a| = |b| \iff a = b \wedge a = -b$$

Dla 2 liczb możemy wyznaczyć odległość pomiędzy nimi na osi liczbowej. Odległość jest zawsze liczbą dodatnią. Aby obliczyć odległość pomiędzy a i b możemy skorzystać z następójących wzorów:

$$|a - b|$$

$$|b - a|$$

Aby obliczyć punkt równoległy od punktu a i b można wykorzystać następujący wzór:

$$p = \frac{a+b}{2}$$

1.1.2 Równania z wartością bezwzględną

Równanie z wartością bezwględną takie jak np. $|x - 2| = 5$ można rozwiązać na 3 sposoby:

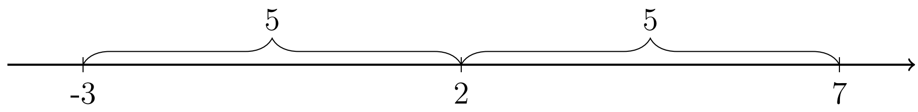
- Sposób algebraiczny jest jednym z najczęściej używanych sposobów do obliczania wartości bezwzględnej

$$|x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$x = 7 \vee x = -3$$

- Sposób geometryczny opiera się na graficznym przedstawieniu równania



- Istnieje również sposób funkcyjny, który polega na narysowaniu funkcji po obu stronach równania i sprawdzeniu, dla jakich wartości zmiennych wyniki są równe. Ze względu na to, że ten sposób jest bardziej żmudny, a dwa wcześniejsze podejścia są bardziej efektywne, nie zostanie on przedstawiony graficznie w tym miejscu.

Warto również pamiętać aby nie liczyć równań których wynik równania z wartością bezwględną jest liczba ujemna np.

$$|x-2| \neq -5$$

1.1.3 Równania z zagnieżdzoną wartością bezwględną

Jest też typ równań który posiada wartość bezwględną w wartości bezwzględnej, wtedy takie równanie trzeba rozbić na 2 mniejsze opuszczając przy tym wartość bezwględną, np. $||x+2|-6| = 1$

$$||x+2|-6| = 1$$

Trzeba rozdzielić w tym momencie to równanie na 2 mniejsze, usuwając pierwszą wartość bezwględną.

$$\begin{array}{rcl} |x+2|-6=1 & \vee & |x+2|-6=-1 \\ |x+2|=7 & \vee & |x+2|=5 \\ x+2=7 \vee x+2=-7 & \vee & x+2=5 \vee x+2=-5 \end{array}$$

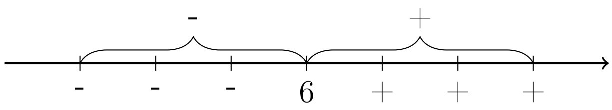
$$x \in \{-9, -7, 3, 5\}$$

1.1.4 Równania z wartością bezwględną i x

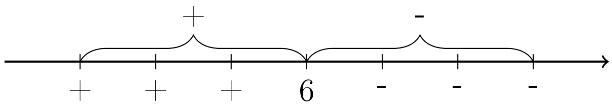
Jeśli mamy równanie np. $|x-6| = 3x+2$ musimy rozpatrzyć 2 przypadki:

$$x \in (-\infty, 6) \quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty)$$

Skąd to wiemy? Jeżeli nie mamy pewności tworzymy oś liczbową i zaznaczamy dla niej x który spełnia równanie: $x - y = 0$. Wybieramy losową liczbe dodatnią np. 20. Jeśli liczba będzie większa liczby wieksze idą w prawą strone, a na odwrót w lewo.



Drugi przypadek aby lepiej zwizualizować: $|6 - x| = 3x + 2$. Biorąc w tym momencie "przykładowe" 20 otrzymujemy liczbe mniejszą od początkowej.



Ważna uwaga, jeżeli napoczątku zamienimy kolejność aby po lewej stronie stał x (nie $-x$ bo wtedy jest to coś innego) zawsze otrzymamy opcje nr. 1. Na przykład:

$$|6 - x| = |x - 6|$$

Po tym jak ustaliliśmy przedziały równania, możemy obliczyć te 2 równania. Dla równania pierwotnego $|x - 6| = 3x + 2$. Dla przedziału liczb mniejszych mnożymy przez -1, a dla większych zostawiamy.

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 6) \quad &\cup \quad x \in \langle 6, +\infty) \\ -x + 6 = 3x + 2 \quad &\vee \quad x - 6 = 3x + 2 \\ -4x = -4 \quad &\vee \quad -2x = 8 \\ x = 1 \quad &\vee \quad x = -4 \notin \langle 6, +\infty) \end{aligned}$$

1.1.5 Nierówności z wartością bezwzględną

- Sposób algebraiczny dla równania $|x + 2| \leq 7$. Dla znaków $<$ i $\leq$ rozdzielone równanie będzie koniunkcją $\wedge$ (i), natomiast dla $>$ i $\geq$ równania będą alternatywą $\vee$ (lub).

$$|x + 2| \leq 7$$

$$x + 2 \leq 7 \wedge x + 2 \geq -7$$

$$x \leq 5 \wedge x \geq -9$$

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

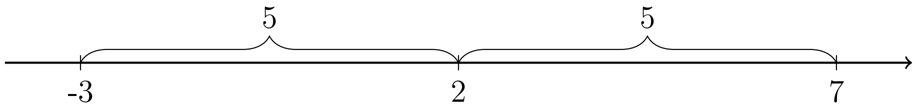
$$|x - 7| > 2$$

$$x - 7 > 2 \vee x - 7 < -2$$

$$x > 9 \vee x < 5$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$$

- Sposób geometryczny dla równania $|x+2| \leq 7$



Ten sposób polega na analizie graficznego przedstawienia wartości bezwzględnej. Analizując grafike można zauważyć, że przedział to:

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

Przykładowe nierówności dla poszczególnych wyników:

$$|x| \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| < 0 \quad x \in \varnothing$$

$$|x-y| \leq 0 \quad x \in \{y\}$$

1.1.6 Nierówności z zagnieżdzoną wartością bezwzględną

Nierówności z zagnieszczoną wartością bezwzględną np.

$$||x+2|-4| < 10$$

działają na tej samej zasadzie co zwykłe nierówności tylko, że rozbite na jeszcze drugą część. Dalej trzeba pamiętąc o znakach $\wedge$ i $\vee$, czyli koniunkcji i alternatywie oraz o zamianie znaków (np. z $>$ do $<$) oraz zmiane liczby na przeciwną.

1.2 Trygonometria

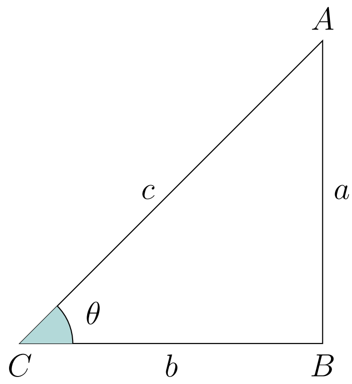
W $\triangle$ prostokątnym dany jest kąt θ. Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$$

2 Rachunek różniczkowo-całkowy

3 Algebra liniowa

3.1 Wektory

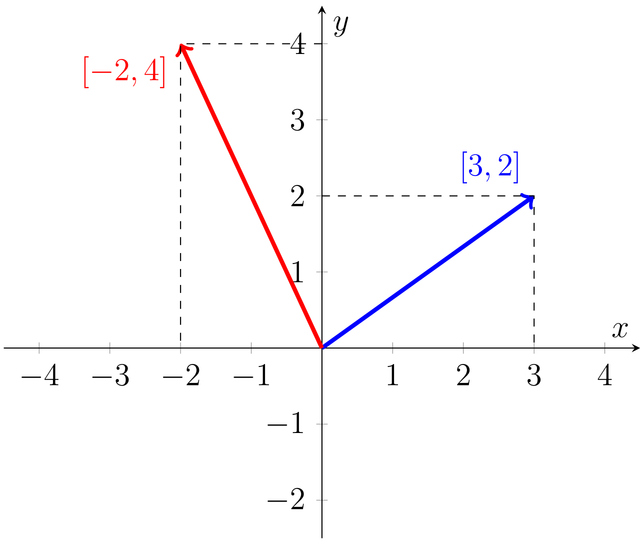
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, to współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \iff u_x = w_x \wedge u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora $[3, 2]$ i $[-2, 4]$ w układzie współrzędnych:



Długość wektora $\overrightarrow{w}$ oraz $\overrightarrow{AB}$ można zapisać następująco:

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

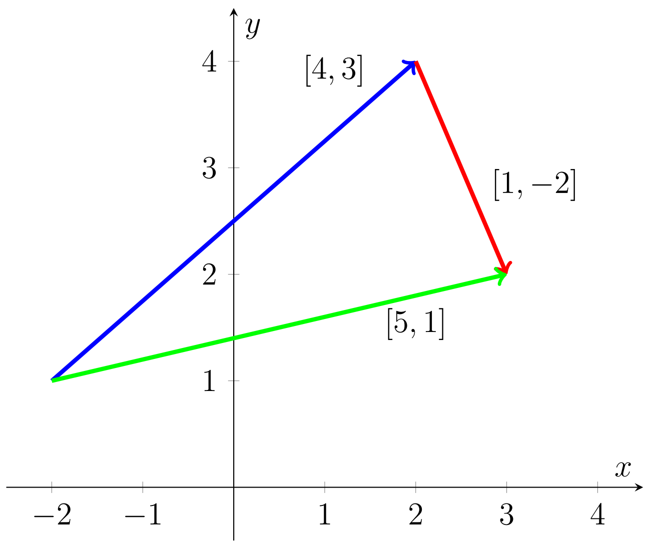
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \, (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

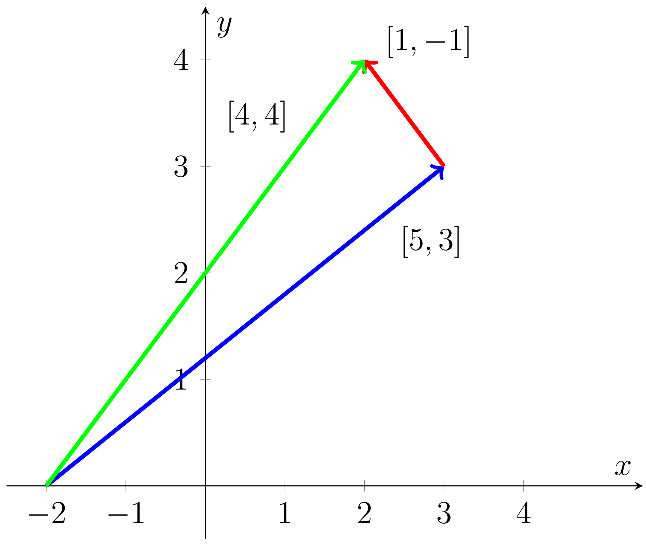
- $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ to długości wektora $\overrightarrow{AB}$

Sumą, różnicą, iloczynem $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, wyraża się wzorem:

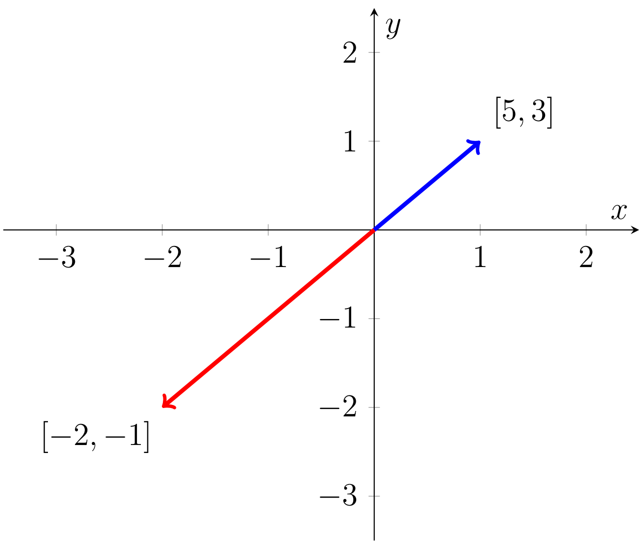
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \overrightarrow{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w}$ jest wektorem zerowym, czyli:

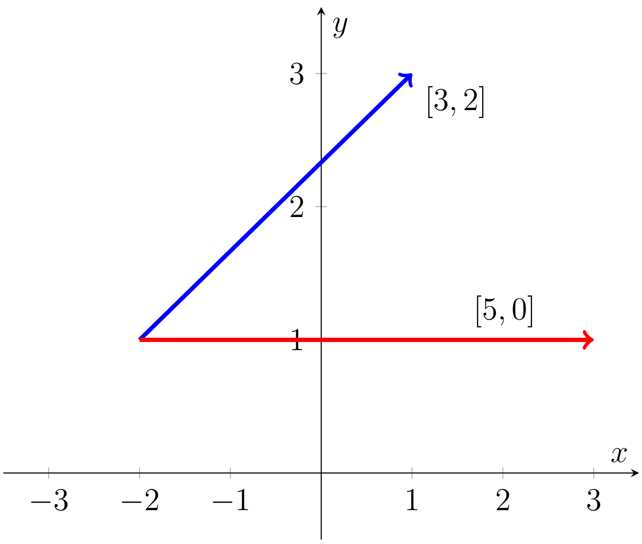
$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2]$ to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów $|\overrightarrow{u}|$ i $|\overrightarrow{w}|$ oraz kąt θ między nimi:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\theta$$



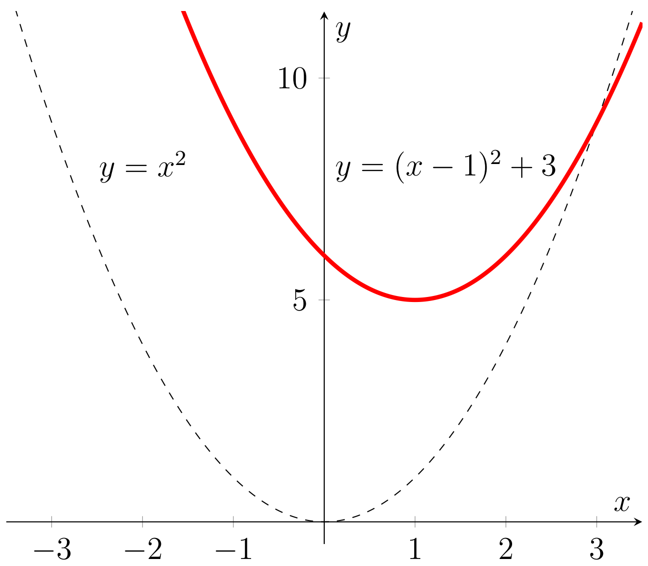
3.2 Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\overrightarrow{u} = [1, 5]$$

$$\overrightarrow{w} = [-2, -4]$$

Wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostke w prawą stronę i 5 jednostki do góry, natomiast wektor $\overrightarrow{w} = [-2, -4]$ oznacza przesunięcie o jednostek 2 do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$.



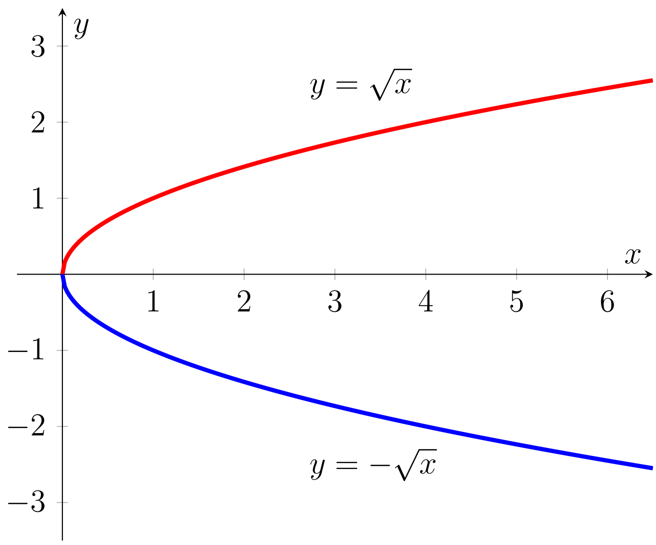
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor $\overrightarrow{v} = [p, q]$ to:

$$g(x) = f\,(x - p) + q$$

3.3 Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OY, otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(-x)$$