

Contents

1	Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego	2
1.1	Algebra	2
1.1.1	Wartość Bezwzględna	2
1.1.2	Równania z wartością bezwzględną	2
1.1.3	Równania z zagnieżdżoną wartością bezwzględną	3
1.1.4	Równania z wartością bezwzględną i x	3
1.1.5	Nierówności z wartością bezwzględną	4
1.1.6	Nierówności z zagnieżdżoną wartością bezwzględną	5
1.2	Funkcja Kwadratowa	5
1.3	Trygonometria	7
2	Rachunek różniczkowo-całkowy	8
3	Algebra liniowa	8
3.1	Wektory	8
3.2	Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY	11
3.3	Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY	12

1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

1.1 Algebra

1.1.1 Wartość Bezwzględna

Dla liczby x , wartość bezwzględna oznacza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wartości bezwzględne posiadają również własne własności:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a| = |b| \iff a = b \wedge a = -b$$

Dla 2 liczb możemy wyznaczyć odległość pomiędzy nimi na osi liczbowej. Odległość jest zawsze liczbą dodatnią. Aby obliczyć odległość pomiędzy a i b możemy skorzystać z następujących wzorów:

$$|a - b|$$

$$|b - a|$$

Aby obliczyć punkt równoległy od punktu a i b można wykorzystać następujący wzór:

$$p = \frac{a + b}{2}$$

1.1.2 Równania z wartością bezwzględną

Równanie z wartością bezwzględną takie jak np. $|x - 2| = 5$ można rozwiązać na 3 sposoby:

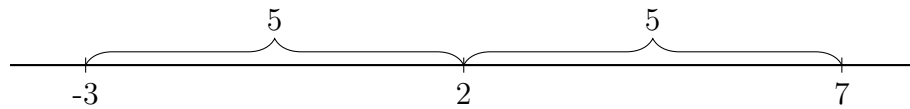
- Sposób algebraiczny jest jednym z najczęściej używanych sposobów do obliczania wartości bezwzględnej

$$|x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$x = 7 \vee x = -3$$

- Sposób geometryczny opiera się na graficznym przedstawieniu równania



- Istnieje również sposób funkcyjny, który polega na narysowaniu funkcji po obu stronach równania i sprawdzeniu, dla jakich wartości zmiennych wyniki są równe. Ze względu na to, że ten sposób jest bardziej żmudny, a dwa wcześniejsze podejścia są bardziej efektywne, nie zostanie on przedstawiony graficznie w tym miejscu.

Warto również pamiętać aby nie liczyć równań których wynik równania z wartością bezwzględną jest liczba ujemna np.

$$|x - 2| \neq -5$$

1.1.3 Równania z zagnieżdżoną wartością bezwzględną

Jest też typ równań który posiada wartość bezwzględną w wartości bezwzględnej, wtedy takie równanie trzeba rozbić na 2 mniejsze opuszczając przy tym wartość bezwzględną, np. $||x + 2| - 6| = 1$

$$||x + 2| - 6| = 1$$

Trzeba rozdzielić w tym momencie to równanie na 2 mniejsze, usuwając pierwszą wartość bezwzględną.

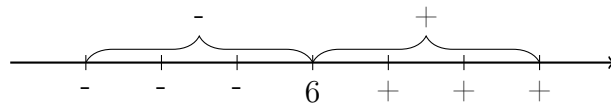
$$\begin{aligned} |x + 2| - 6 = 1 & \quad \vee \quad |x + 2| - 6 = -1 \\ |x + 2| = 7 & \quad \vee \quad |x + 2| = 5 \\ x + 2 = 7 \vee x + 2 = -7 & \quad \vee \quad x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5 \\ x \in \{-9, -7, 3, 5\} \end{aligned}$$

1.1.4 Równania z wartością bezwzględną i x

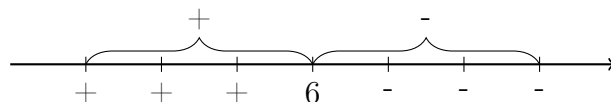
Jeśli mamy równanie np. $|x - 6| = 3x + 2$ musimy rozpatrzeć 2 przypadki:

$$x \in (-\infty, 6) \quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty)$$

Skąd to wiemy? Jeżeli nie mamy pewności tworzymy oś liczbową i zaznaczamy dla niej x który spełnia równanie: $x - y = 0$. Wybieramy losową liczbę dodatnią np. 20. Jeśli liczba będzie większa liczby większe idą w prawą stronę, a na odwrót w lewo.



Drugi przypadek aby lepiej zwizualizować: $|6 - x| = 3x + 2$. Biorąc w tym momencie "przykładowe" 20 otrzymujemy liczbę mniejszą od początkowej.



Ważna uwaga, jeżeli na początku zamienimy kolejność aby po lewej stronie stał x (nie $-x$ bo wtedy jest to coś innego) zawsze otrzymamy opcję nr. 1. Na przykład:

$$|6 - x| = |x - 6|$$

Po tym jak ustaliliśmy przedziały równania, możemy obliczyć te 2 równania. Dla równania pierwotnego $|x - 6| = 3x + 2$. Dla przedziału liczb mniejszych mnożymy przez -1 , a dla większych zostawiamy.

$$\begin{array}{rcl} x \in (-\infty, 6) & \cup & x \in (6, +\infty) \\ -x + 6 = 3x + 2 & \vee & x - 6 = 3x + 2 \\ -4x = -4 & \vee & -2x = 8 \\ x = 1 & \vee & x = -4 \notin (6, +\infty) \end{array}$$

1.1.5 Nierówności z wartością bezwzględną

- Sposób algebraiczny dla równania $|x + 2| \leq 7$. Dla znaków $<$ i \leq rozdzielone równanie będzie koniunkcją \wedge (i), natomiast dla $>$ i \geq równania będą alternatywą \vee (lub).

$$|x + 2| \leq 7$$

$$x + 2 \leq 7 \wedge x + 2 \geq -7$$

$$x \leq 5 \wedge x \geq -9$$

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

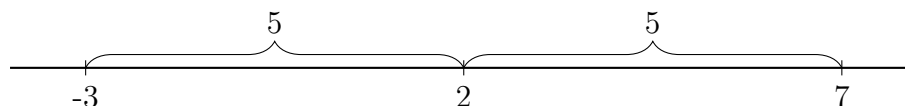
$$|x - 7| > 2$$

$$x - 7 > 2 \vee x - 7 < -2$$

$$x > 9 \vee x < 5$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$$

- Sposób geometryczny dla równania $|x + 2| \leq 7$



Ten sposób polega na analizie graficznego przedstawienia wartości bezwzględnej. Analizując grafike można zauważyć, że przedział to:

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

Przykładowe nierówności dla poszczególnych wyników:

$$|x| \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| < 0 \quad x \in \emptyset$$

$$|x - y| \leq 0 \quad x \in \{y\}$$

1.1.6 Nierówności z zagnieżdżoną wartością bezwzględną

Nierówności z zagnieżdżoną wartością bezwzględną np.

$$||x + 2| - 4| < 10$$

działają na tej samej zasadzie co zwykle nierówności tylko, że rozbite na jeszcze drugą część. Dalej trzeba pamiętać o znakach \wedge i \vee , czyli koniunkcji i alternatywie oraz o zamianie znaków (np. z $>$ do $<$) oraz zmianie liczby na przeciwną.

1.2 Funkcja Kwadratowa

Postać kanoniczna

Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej to taka która ma wzór:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

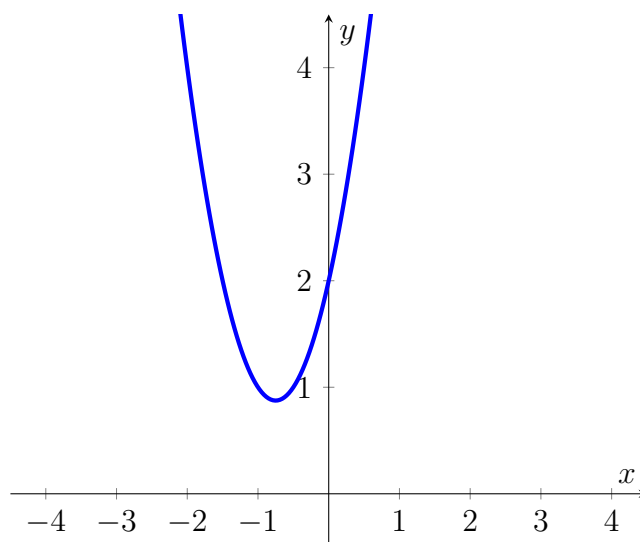
gdzie: $a \neq 0$ oraz $[p, q]$ to przesunięcie równoległe wykresu.

Postać ogólna

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej to taka która ma wzór:

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie: $a \neq 0$ oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$. Przykładowa funkcja kwadratowa została przedstawiona poniżej, wzór jej to: $y = 2x^2 + 3x + 2$



Podstawowy opis i własności funkcji

Wyróżnik Δ (delta) trójmianu kwadratowego: $ax^2 + bx + c$ to:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dzięki wyróżnikowi (Δ) można wyznaczyć miejsca zerowe. Ilość miejsc zerowych zależy od delty. Jeżeli $\Delta > 0$ to funkcja posiada 2 miejsca zerowe:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeżeli $\Delta = 0$ to funkcja posiada jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Dla $\Delta < 0$ funkcja nie przyjmuje miejsc zerowych (Brak rozwiązania).

Parabola funkcji kwadratowej posiada wierzchołek w punkcie $W = (p, q)$, gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} \quad \vee \quad q = f(p)$$

Ramiona paraboli skierowane są:

W górę dla: $a > 0$

W dół dla: $a < 0$

Oś symetrii paraboli to: $x = p$

Punkt przecięcia z OY, posiada współrzędne $(0, c)$

Postać iloczynowa

Funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej istnieje jeżeli $\Delta \geq 0$ i posiada wzór:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

gdzie: x_1 i x_2 to miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

1.3 Trygonometria

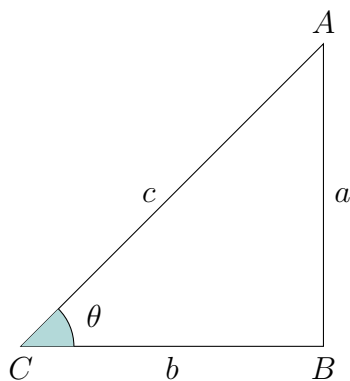
W \triangle prostokątnym dany jest kąt θ . Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg} \theta$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg} \theta$$

2 Rachunek różniczkowo-całkowy

3 Algebra liniowa

3.1 Wektory

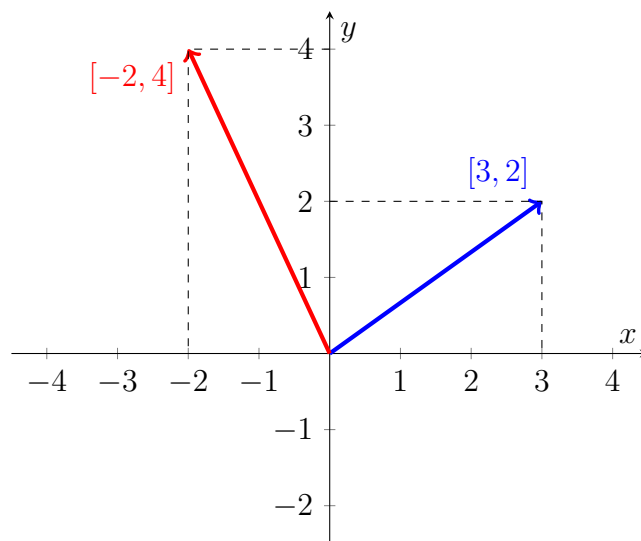
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem \overrightarrow{AB} . Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, to współrzędne wektora \overrightarrow{AB} określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$.

$$\vec{u} = \vec{w} \iff u_x = w_x \wedge u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora $[3, 2]$ i $[-2, 4]$ w układzie współrzędnych:



Długość wektora \vec{w} oraz \overrightarrow{AB} można zapisać następująco:

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

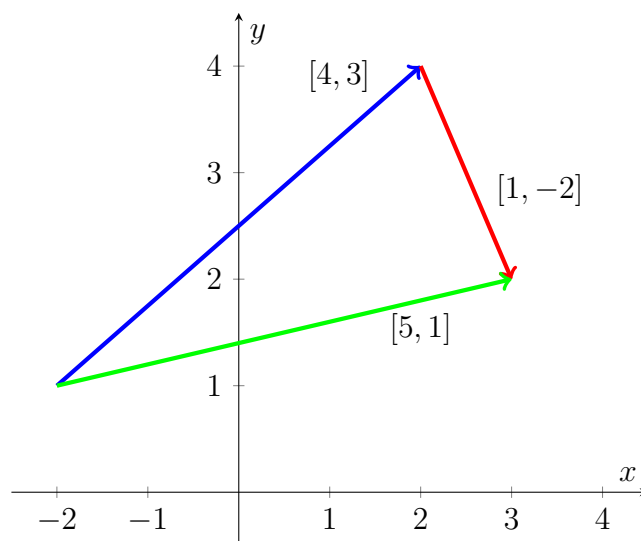
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

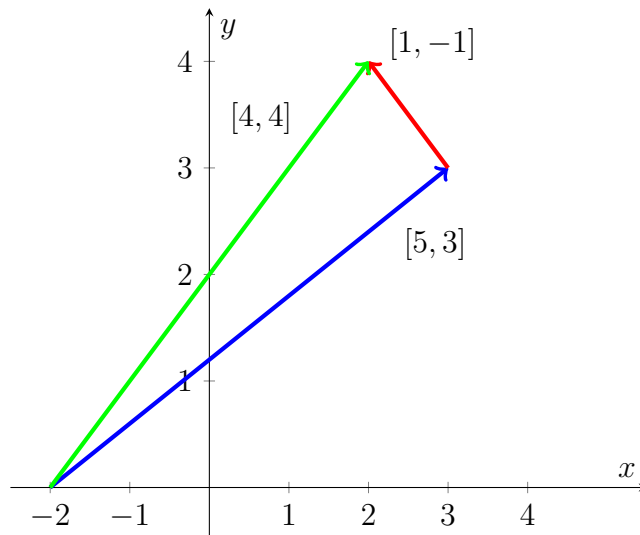
- $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ to długości wektora \overrightarrow{AB}

Sumą, różnicą, iloczynem $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{w} = [w_x, w_y]$, wyraża się wzorem:

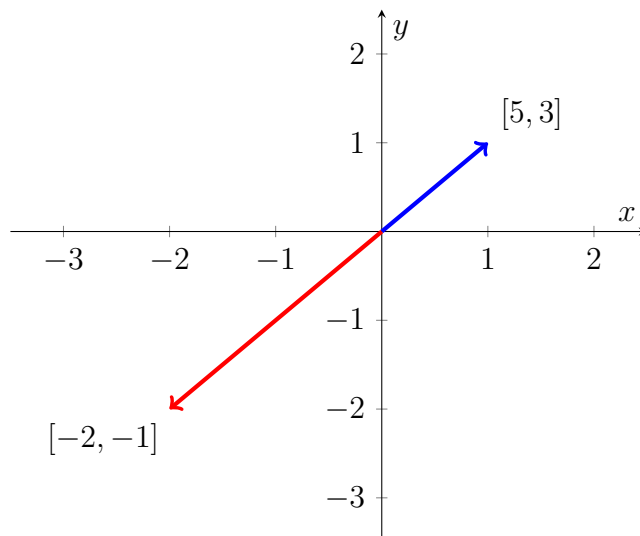
$$\vec{u} + \vec{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\vec{u} - \vec{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \vec{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{w} = [w_x, w_y]$, są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów \vec{u} i \vec{w} jest wektorem zerowym, czyli:

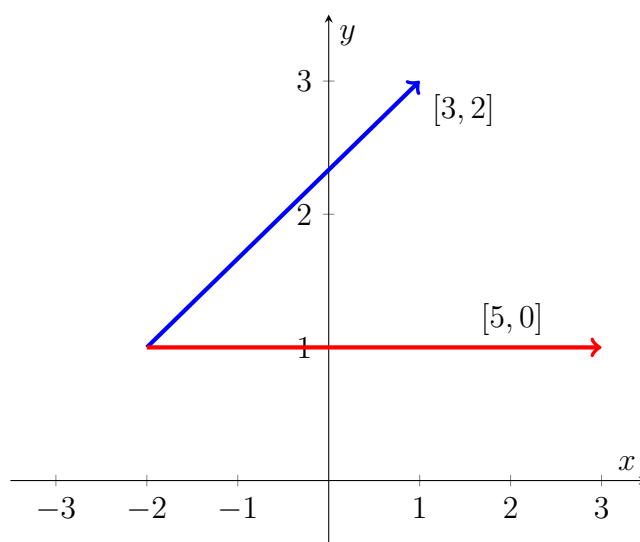
$$\vec{u} = -\vec{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2]$ to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów $|\vec{u}|$ i $|\vec{w}|$ oraz kąt θ między nimi:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \theta$$



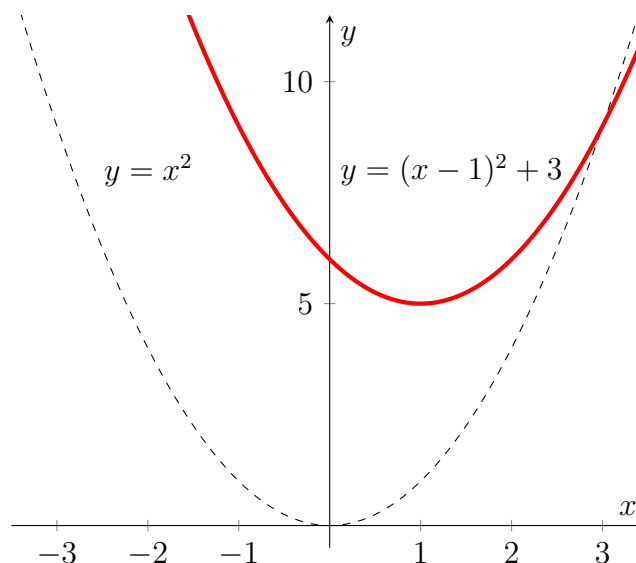
3.2 Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\vec{u} = [1, 5]$$

$$\vec{w} = [-2, -4]$$

Wektor $\vec{u} = [1, 5]$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostkę w prawą stronę i 5 jednostki do góry, natomiast wektor $\vec{w} = [-2, -4]$ oznacza przesunięcie o jednostek 2 do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor $\vec{u} = [1, 5]$.



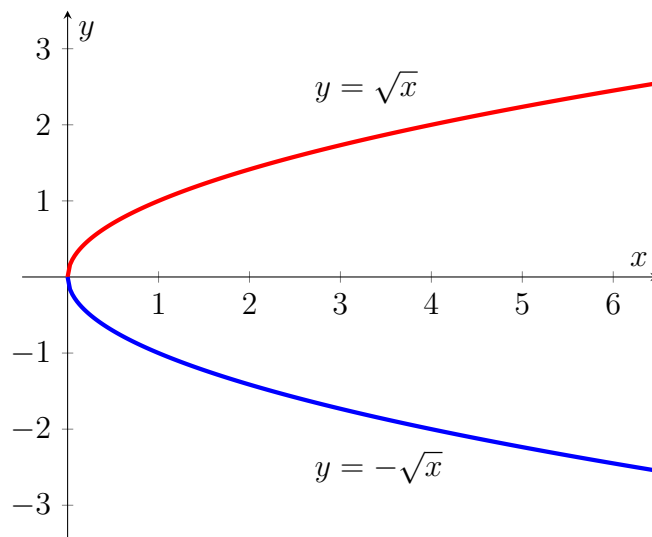
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor $\vec{v} = [p, q]$ to:

$$g(x) = f(x - p) + q$$

3.3 Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi OX , otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi OY , otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(-x)$$

