Contents

1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

1.1 Algebra

1.1.1 Wartość Bezwzględna

Dla liczby x, wartość bezwzględna oznacza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Dla 2 liczb możemy wyznaczyć odległość pomiędzy nimi na osi liczbowej. Odległość jest zawsze liczbą dodatnią. Aby obliczyć odległość pomiędzy a i b możemy skorzystać z następójących wzorów:

$$|a - b|$$

$$|b - a|$$

Aby obliczyć punkt równoległy od punktu a i b można wykorzystać następujący wzór:

$$p = \frac{a + b}{2}$$

1.1.2 Równania z wartością bezwzględną

Równanie z wartością bezwględną takie jak np. $|x - 2| = 5$ można rozwiązać na 3 sposoby:

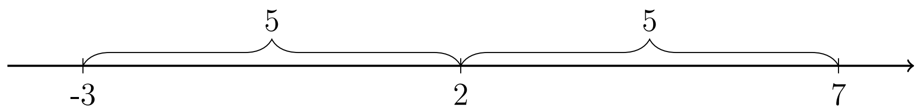
- Sposób algebraiczny jest jednym z najczęściej używanych sposobów do obliczania wartości bezwzględnej

$$|x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$x = 7 \vee x = -3$$

- Sposób geometryczny opiera się na graficznym przedstawieniu równania



- Istnieje również sposób funkcyjny, który polega na narysowaniu funkcji po obu stronach równania i sprawdzeniu, dla jakich wartości zmiennych wyniki są równe. Ze względu na to, że ten sposób jest bardziej żmudny, a dwa wcześniejsze podejścia są bardziej efektywne, nie zostanie on przedstawiony graficznie w tym miejscu.

Warto również pamiętać aby nie liczyć równań których wynik równania z wartością bezwględną jest liczba ujemna np.

$$|x - 2| \neq -5$$

1.1.3 Nierówności z wartością bezwzględną

- Sposób algebraiczny.

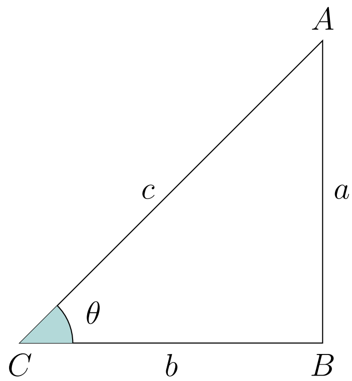
$$|x + 2| \leq 7$$
$$x + 2 \leq 7 \land x + 2 \geq -7$$
$$x \leq 5 \land x \geq -9$$
$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

$$|x - 7| > 2$$
$$x - 7 > 2 \lor x - 7 < -2$$
$$x > 9 \lor x < 5$$
$$x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$$

1.2 Trygonometira

W $\triangle$ prostokątnym dany jest kąt θ. Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$
$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$$

2 Rachunek różniczkowo-całkowy

3 Algebra liniowa

3.1 Wektory

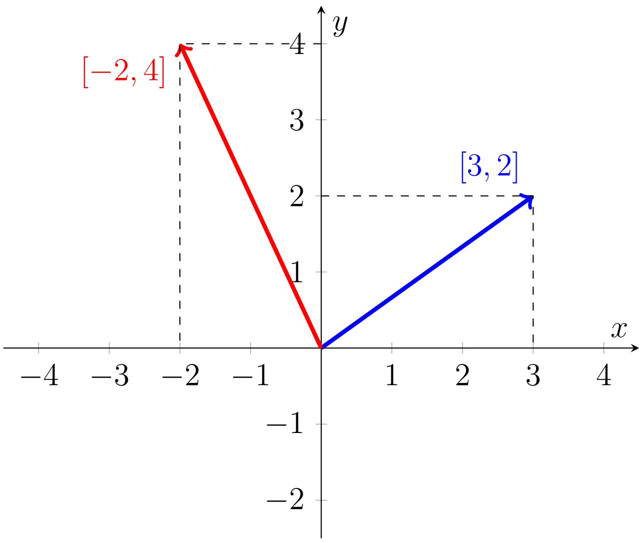
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, to współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \iff u_x = w_x \land u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora $[3, 2]$ i $[-2, 4]$ w układzie współrzędnych:



Długość wektora $\overrightarrow{w}$ oraz $\overrightarrow{AB}$ można zapisać następująco:

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

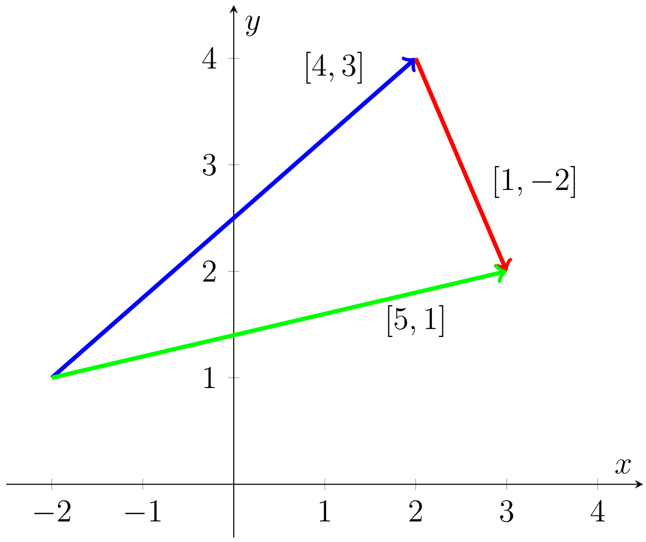
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \, (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

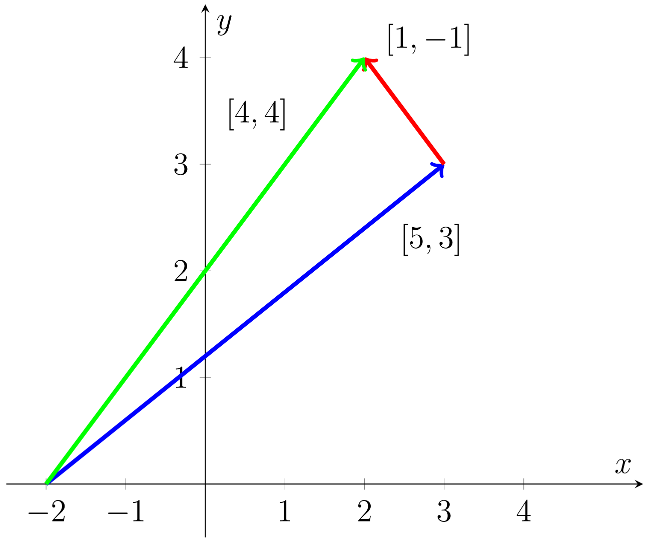
- $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ to długości wektora $\overrightarrow{AB}$

Sumą, różnicą, iloczynem $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, wyraża się wzorem:

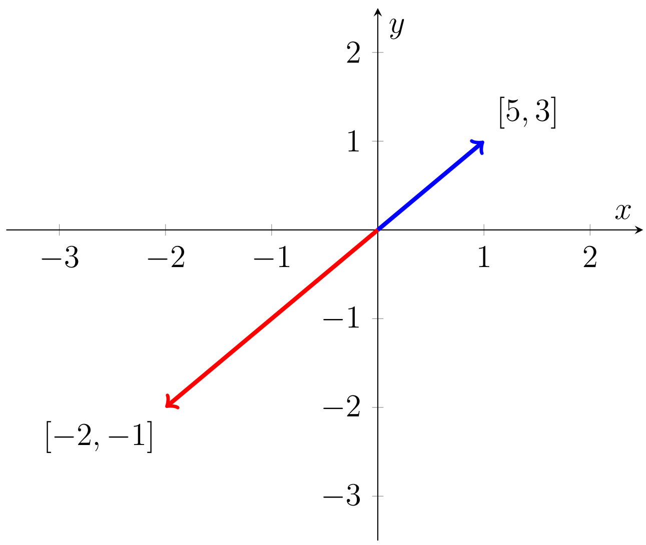
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \overrightarrow{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w}$ jest wektorem zerowym, czyli:

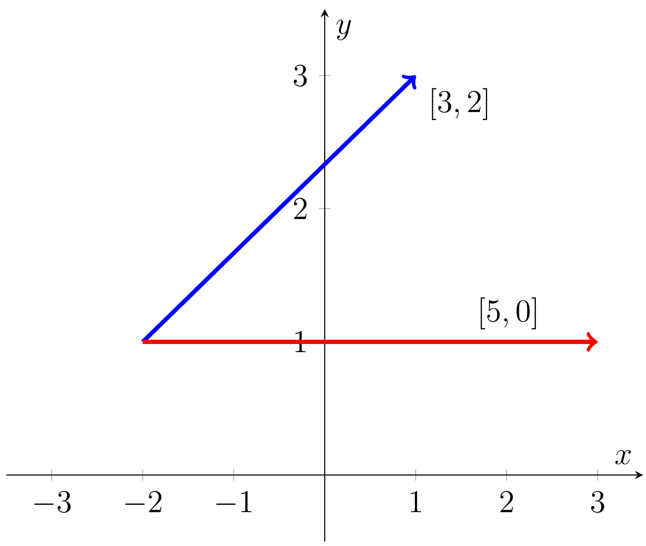
$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2]$ to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów $|\overrightarrow{u}|$ i $|\overrightarrow{w}|$ oraz kąt θ między nimi:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\theta$$



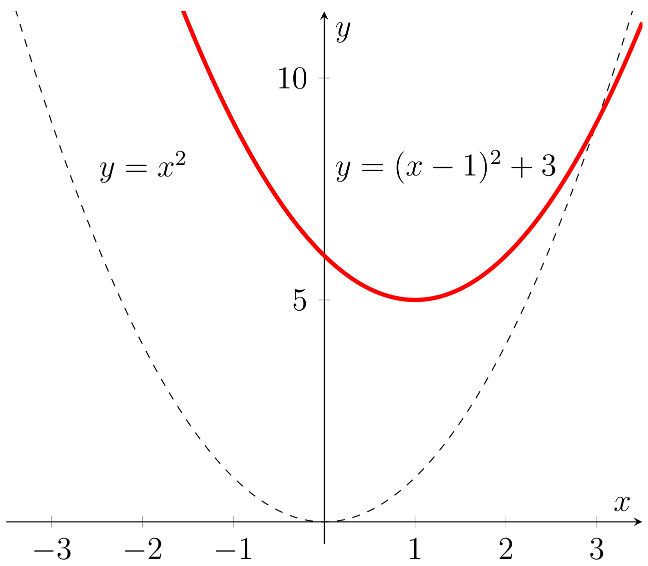
3.2 Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\overrightarrow{u} = [1, 5]$$

$$\overrightarrow{w} = [-2, -4]$$

Wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostke w prawą stronę i 5 jednostki do góry, natomiast wektor $\overrightarrow{w} = [-2, -4]$ oznacza przesunięcie o jednostek 2 do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$.



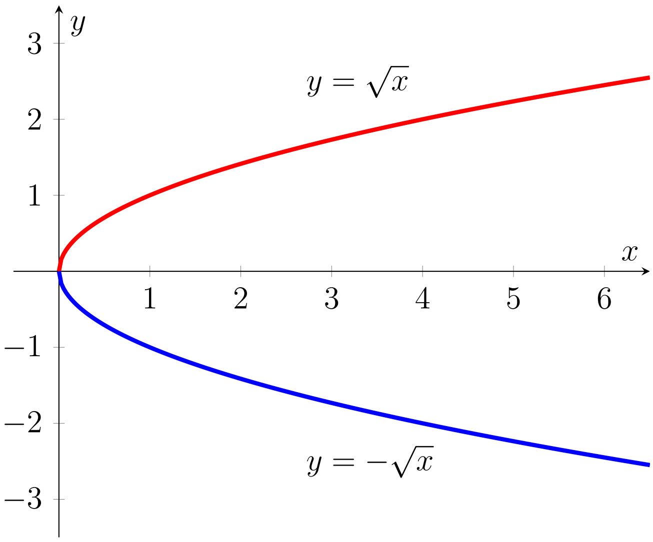
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor $\overrightarrow{v} = [p, q]$ to:

$$g(x) = f\,(x - p) + q$$

3.3 Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OY, otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(-x)$$