Contents

1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

1.1 Algebra

1.2 Trygonometira

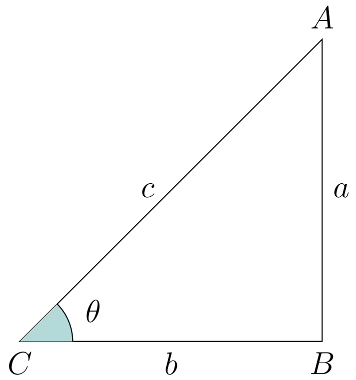
W $\triangle$ prostokątnym dany jest kąt θ. Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$$

2 Rachunek różniczkowo-całkowy

3 Algebra liniowa

3.1 Wektory

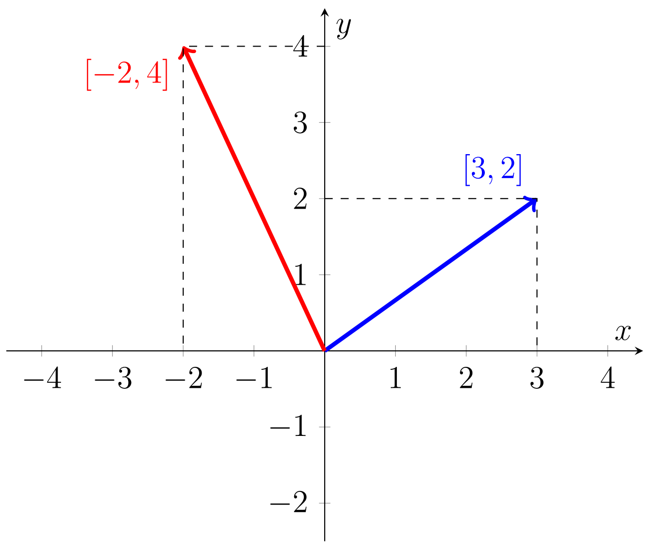
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, to współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \iff u_x = w_x \wedge u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora $[3, 2]$ i $[-2, 4]$ w układzie współrzędnych:



Długość wektora $\overrightarrow{w}$ oraz $\overrightarrow{AB}$ można zapisać następująco:

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

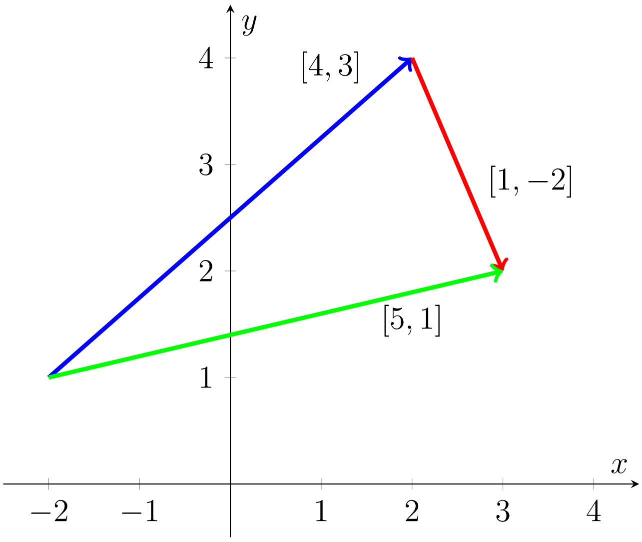
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \, (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

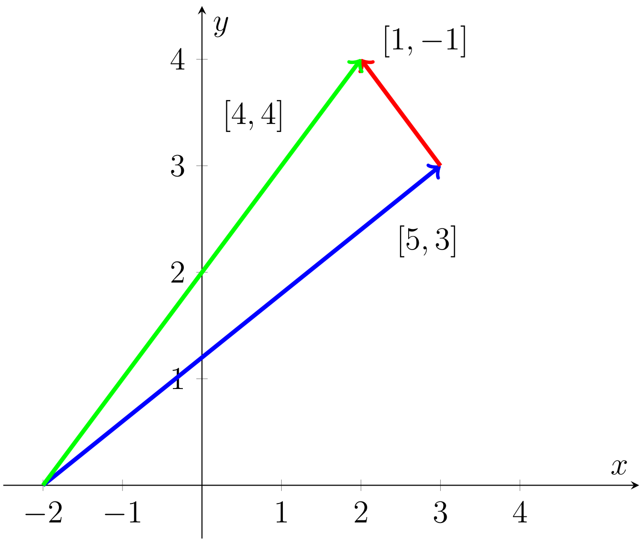
- $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ to długości wektora $\overrightarrow{AB}$

Sumą, różnicą, iloczynem $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, wyraża się wzorem:

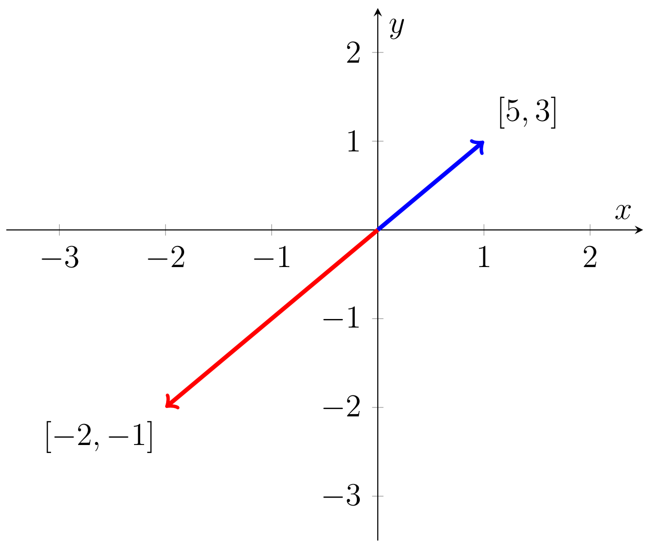
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \overrightarrow{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w}$ jest wektorem zerowym, czyli:

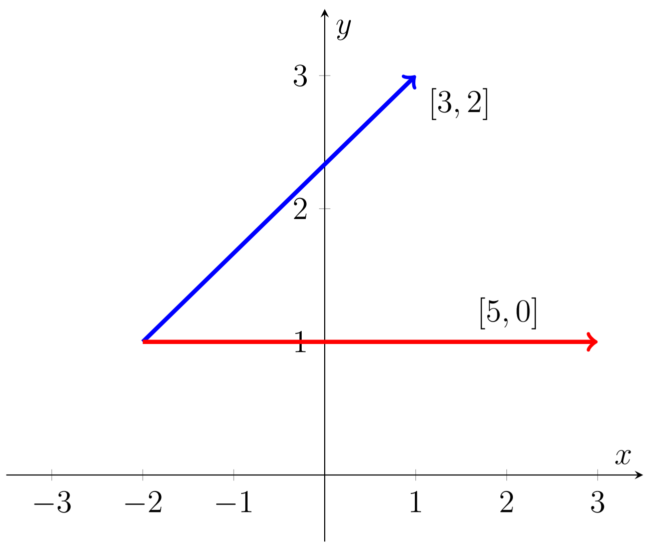
$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2]$ to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów $|\overrightarrow{u}|$ i $|\overrightarrow{w}|$ oraz kąt θ między nimi:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\theta$$



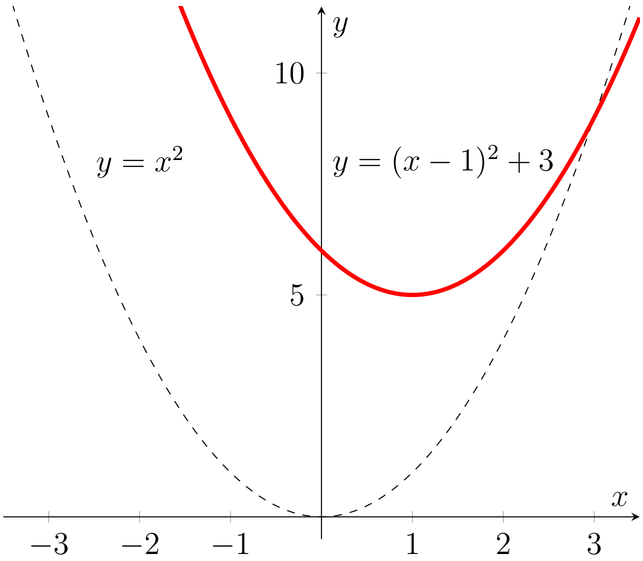
3.2 Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\overrightarrow{u} = [1,5]$$

$$\overrightarrow{w} = [-2,-4]$$

Wektor $\overrightarrow{u} = [1,5]$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostke w prawą stronę i 5 jednostki do góry, natomiast wektor $\overrightarrow{w} = [-2,-4]$ oznacza przesunięcie o jednostek 2 do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor $\overrightarrow{u} = [1,5]$.



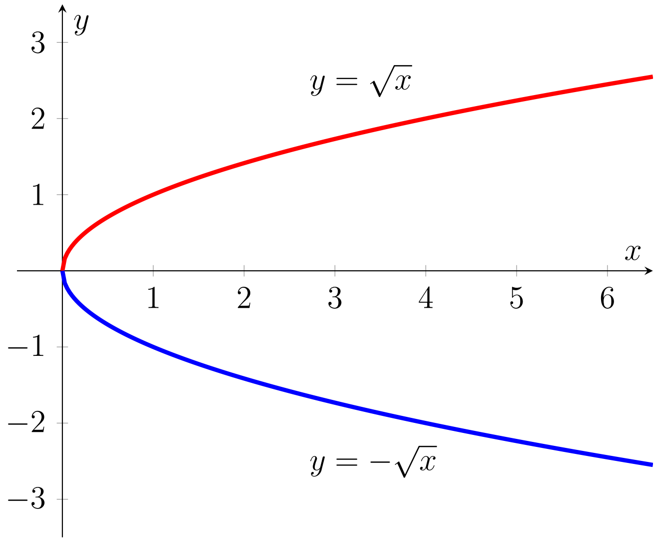
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor $\overrightarrow{v} = [p,q]$ to:

$$g(x) = f\left(x-p\right)+q$$

3.3 Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OY, otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(-x)$$