Contents

1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

1.1 Algebra

1.1.1 Wartość Bezwzględna

Dla liczby x, wartość bezwzględna oznacza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wartości bezwzględne posiadają również własne własności:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a| = |b| \iff a = b \wedge a = -b$$

Dla 2 liczb możemy wyznaczyć odległość pomiędzy nimi na osi liczbowej. Odległość jest zawsze liczbą dodatnią. Aby obliczyć odległość pomiędzy a i b możemy skorzystać z następójących wzorów:

$$|a - b|$$

$$|b - a|$$

Aby obliczyć punkt równoległy od punktu a i b można wykorzystać następujący wzór:

$$p = \frac{a + b}{2}$$

Równania z wartością bezwzględną

Równanie z wartością bezwględną takie jak np. $|x - 2| = 5$ można rozwiązać na 3 sposoby:

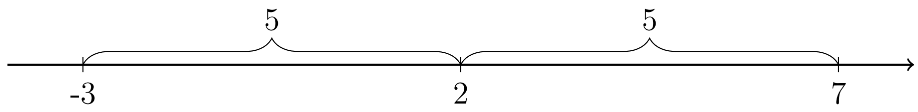
- Sposób algebraiczny jest jednym z najczęściej używanych sposobów do obliczania wartości bezwzględnej

$$|x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$x = 7 \vee x = -3$$

- Sposób geometryczny opiera się na graficznym przedstawieniu równania



- Istnieje również sposób funkcyjny, który polega na narysowaniu funkcji po obu stronach równania i sprawdzeniu, dla jakich wartości zmiennych wyniki są równe. Ze względu na to, że ten sposób jest bardziej żmudny, a dwa wcześniejsze podejścia są bardziej efektywne, nie zostanie on przedstawiony graficznie w tym miejscu.

Warto również pamiętać aby nie liczyć równań których wynik równania z wartością bezwględną jest liczba ujemna np.

$$|x-2| \neq -5$$

Równania z zagnieżdzoną wartością bezwględną

Jest też typ równań który posiada wartość bezwględną w wartości bezwzględnej, wtedy takie równanie trzeba rozbić na 2 mniejsze opuszczając przy tym wartość bezwględną, np. $||x+2|-6| = 1$

$$||x+2|-6| = 1$$

Trzeba rozdzielić w tym momencie to równanie na 2 mniejsze, usuwając pierwszą wartość bezwględną.

$$\begin{aligned} |x+2|-6 = 1 \quad &\vee \quad |x+2|-6 = -1 \\ |x+2| = 7 \quad &\vee \quad |x+2| = 5 \\ x+2 = 7 \vee x+2 = -7 \quad &\vee \quad x+2 = 5 \vee x+2 = -5 \end{aligned}$$

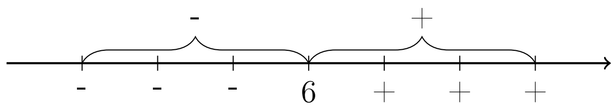
$$x \in \{-9, -7, 3, 5\}$$

Równania z wartością bezwględną i x

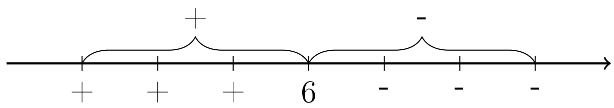
Jeśli mamy równanie np. $|x-6| = 3x+2$ musimy rozpatrzyć 2 przypadki:

$$x \in (-\infty, 6) \quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty)$$

Skąd to wiemy? Jeżeli nie mamy pewności tworzymy oś liczbową i zaznaczamy dla niej x który spełnia równanie: $x - y = 0$. Wybieramy losową liczbe dodatnią np. 20. Jeśli liczba będzie większa liczby wieksze idą w prawą strone, a na odwrót w lewo.



Drugi przypadek aby lepiej zwizualizować: $|6-x| = 3x+2$. Biorąc w tym momencie "przykładowe" 20 otrzymujemy liczbe mniejszą od początkowej.



Ważna uwaga, jeżeli napoczątku zamienimy kolejność aby po lewej stronie stał x (nie $-x$ bo wtedy jest to coś innego) zawsze otrzymamy opcje nr. 1. Na przykład:

$$|6-x| = |x-6|$$

Po tym jak ustaliliśmy przedziały równania, możemy obliczyć te 2 równania. Dla równania pierwotnego $|x-6| = 3x+2$. Dla przedziału liczb mniejszych mnożymy przez -1, a dla większych zostawiamy.

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 6) &\quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty) \\ -x+6 = 3x+2 &\quad \vee \quad x-6 = 3x+2 \\ -4x = -4 &\quad \vee \quad -2x = 8 \\ x = 1 &\quad \vee \quad x = -4 \notin \langle 6, +\infty) \end{aligned}$$

Nierówności z wartością bezwzględną

- Sposób algebraiczny dla równania $|x+2| \leq 7$. Dla znaków $<$ i $\leq$ rozdzielone równanie będzie koniunkcją $\wedge$ (i), natomiast dla $>$ i $\geq$ równania będą alternatywą $\vee$ (lub).

$$|x+2| \leq 7$$

$$x+2 \leq 7 \wedge x+2 \geq -7$$

$$x \leq 5 \wedge x \geq -9$$

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

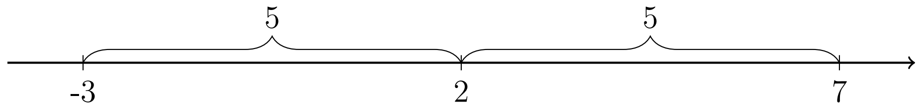
$$|x-7| > 2$$

$$x-7 > 2 \vee x-7 < -2$$

$$x > 9 \vee x < 5$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$$

- Sposób geometryczny dla równania $|x + 2| \leq 7$



Ten sposób polega na analizie graficznego przedstawienia wartości bezwzględnej. Analizując grafike można zauważyć, że przedział to:

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

Przykładowe nierówności dla poszczególnych wyników:

$$|x| \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| < 0 \quad x \in \varnothing$$

$$|x - y| \leq 0 \quad x \in \{y\}$$

Nierówności z zagnieżdzoną wartością bezwzględną

Nierówności z zagnieszczoną wartością bezwzględną np.

$$||x + 2| - 4| < 10$$

działają na tej samej zasadzie co zwykłe nierówności tylko, że rozbite na jeszcze drugą część. Dalej trzeba pamiętać o znakach $\wedge$ i $\vee$, czyli koniunkcji i alternatywie oraz o zamianie znaków (np. z $>$ do $<$) oraz zmiane liczby na przeciwną.

1.1.2 Funkcja Kwadratowa

Postać kanoniczna

Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej to taka która ma wzór:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

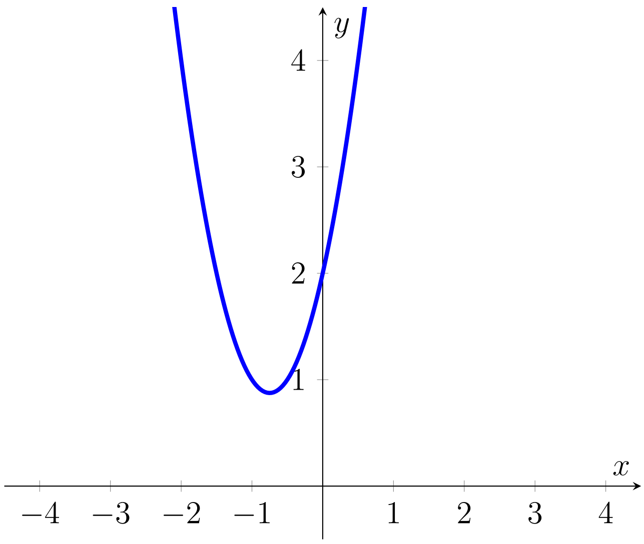
gdzie: $a \neq 0$ oraz $[p, q]$ to przesunięcie równoległe wykresu.

Postać ogólna

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej to taka która ma wzór:

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie: $a \neq 0$ oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$. Przykładowa funkcja kwadratowa została przedstawiona poniżej, wzór jej to: $y = 2x^2 + 3x + 2$



Podstawowy opis i własności funkcji

Wyróżnik Δ (delta) trójmianu kwadratowego: $ax^2 + bx + c$ to:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dzięki wyróznikowi (Δ) można wyznaczyć miejsca zerowe. Ilośc miejsc zerowych zależy od delty. Jeżeli $\Delta > 0$ to funkcja posiada 2 miejsca zerowe:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeżeli $\Delta = 0$ to funkcja posiada jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Dla $\Delta < 0$ funkcja nie przyjmuje miejsc zerowych (Brak rozwiązania).
Parabola funkcji kwadratowej posiada wierzchołek w punkcie $W = (p, q)$, gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} \quad \vee \quad q = f(p)$$

Ramiona paraboli skierowane są:

$$\text{W góre dla: } a > 0$$

$$\text{W dół dla: } a < 0$$

Oś symetri paraboli to: $x = p$
Punkt przecięcia z OY, posiada współrzędne $(0, c)$

Postać iloczynowa

Funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej istnieje jeżeli $\Delta \geq 0$ i posiada wzór:

$$y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

gdzie: x_1 i x_2 to miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

1.2 Trygonometria

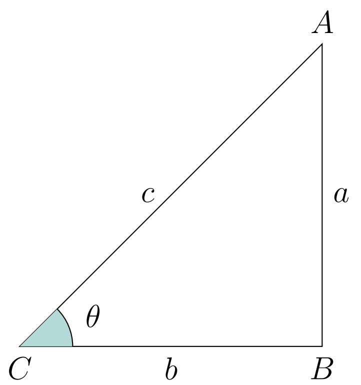
W $\triangle$ prostokątnym dany jest kąt θ. Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg}\theta$$

2 Rachunek różniczkowo-całkowy

3 Algebra liniowa

3.1 Wektory

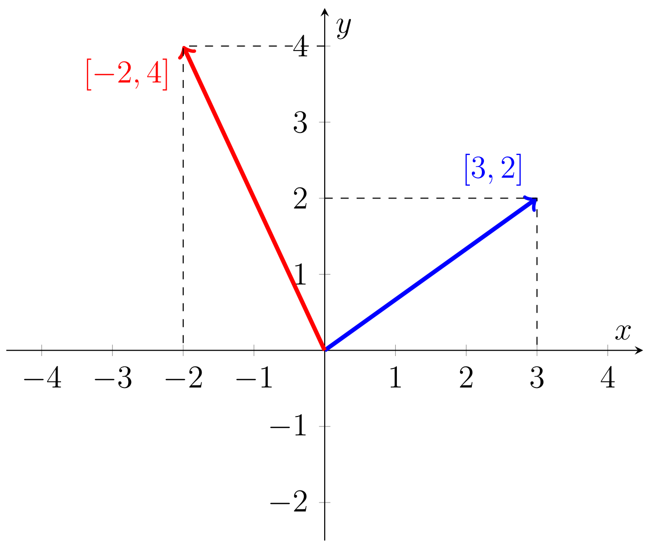
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$, to współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \iff u_x = w_x \land u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora $[3, 2]$ i $[-2, 4]$ w układzie współrzędnych:



Długość wektora $\overrightarrow{w}$ oraz $\overrightarrow{AB}$ można zapisać następująco:

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

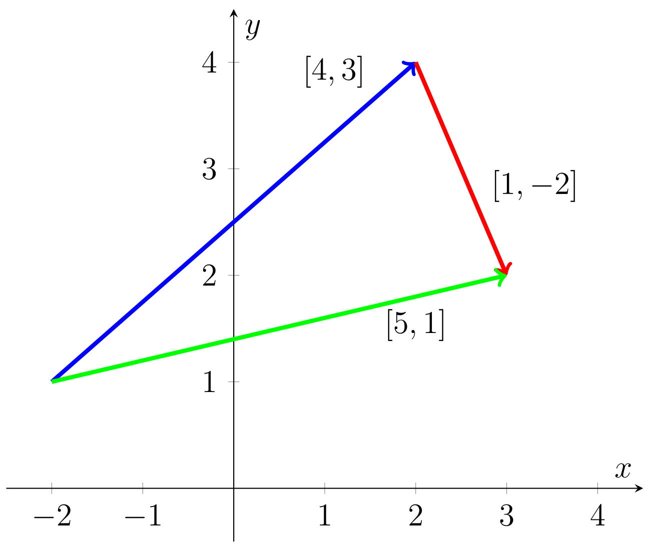
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \, (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

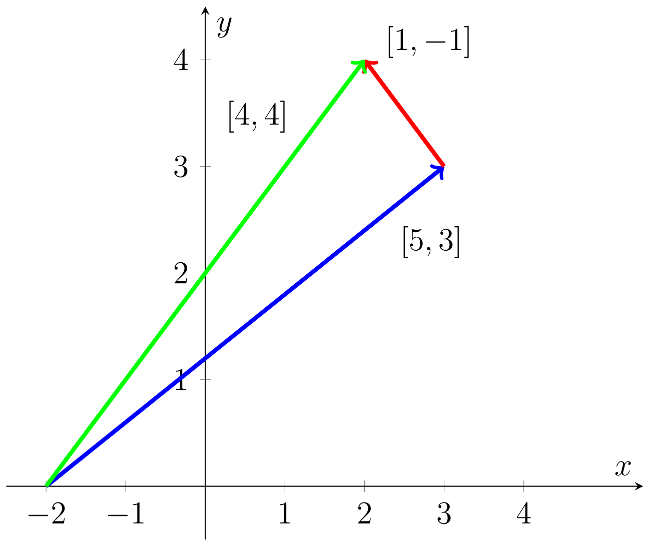
- $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ to długości wektora $\overrightarrow{AB}$

Sumą, różnicą, iloczynem $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, wyraża się wzorem:

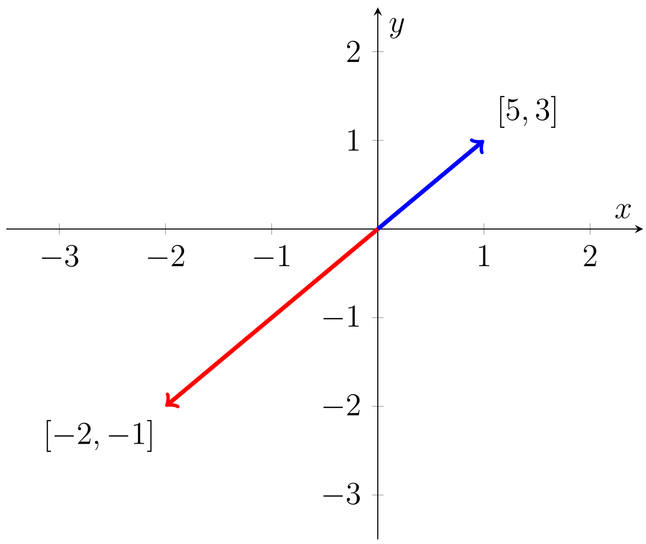
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \overrightarrow{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ i $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y]$, są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{w}$ jest wektorem zerowym, czyli:

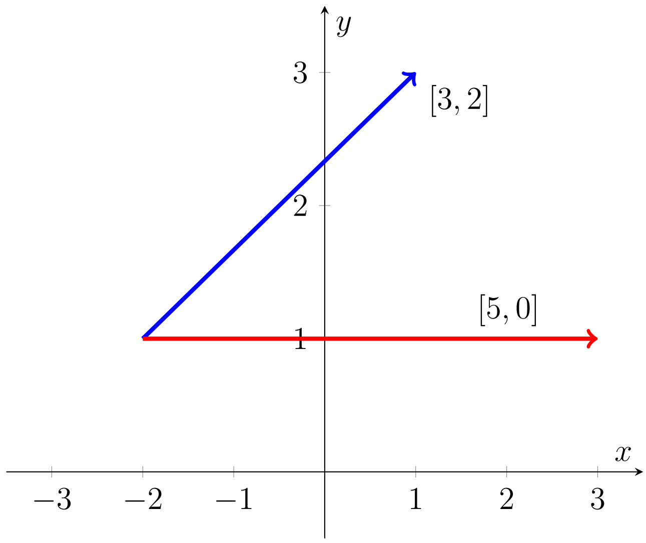
$$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2]$ to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów $|\overrightarrow{u}|$ i $|\overrightarrow{w}|$ oraz kąt θ między nimi:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos\theta$$



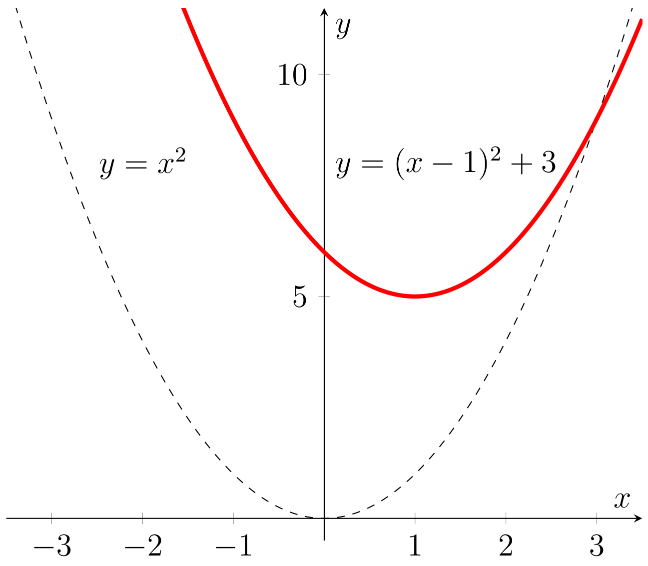
Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\overrightarrow{u} = [1, 5]$$

$$\overrightarrow{w} = [-2, -4]$$

Wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostke w prawą stronę i 5 jednostki do góry, natomiast wektor $\overrightarrow{w} = [-2, -4]$ oznacza przesunięcie o jednostek 2 do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor $\overrightarrow{u} = [1, 5]$.



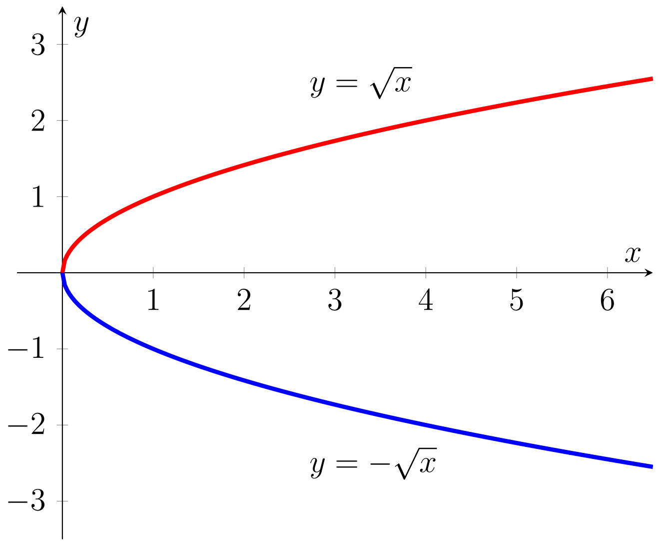
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor $\overrightarrow{v} = [p, q]$ to:

$$g(x) = f\,(x - p) + q$$

Przekształcenie symetralne względem osi OX i OY

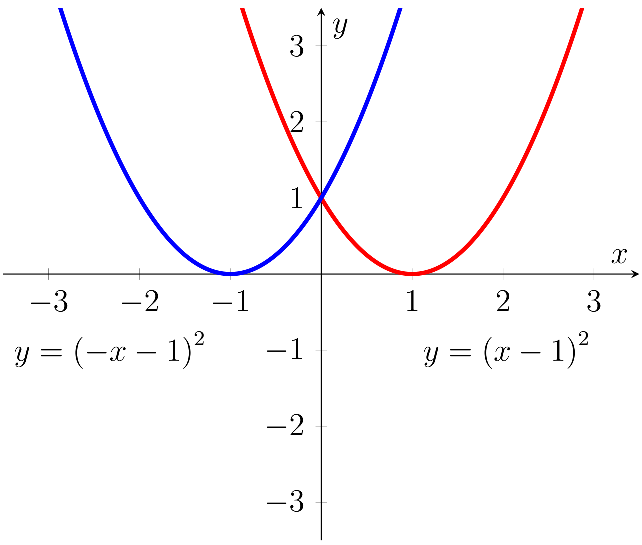
Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijem symetrycznie względem osi OY, otrzymamy wykres funkcji

$$y = f(-x)$$



4 Logika i Dowody matematyczne

Symbole i ich znaczenie

W logice matematycznej występuje duża ilość symboli matematycznych, a to one i ich znaczenie:

Symbol	**Znaczenie**
$\neg, \sim$	negacja
$\wedge$	i
$\vee$	lub
$\therefore$	zatem
$\Leftrightarrow$	równoważność

A	$\neg$ **A**
T	F
F	T

A	**B**	**A** $\vee$ **B**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	**B**	**A** $\wedge$ **B**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	**B**	**A** $\Leftrightarrow$ **B**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Prawa rachunku - wzory i definicja

Prawa De Morgana

$$\neg(P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$$

$$\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$$

Prawo asocjacyjne

$$P \land (Q \land R) \Leftrightarrow (P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land Q \land R$$

$$P \lor (Q \lor R) \Leftrightarrow (P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor Q \lor R$$

Prawo idempotentności

$$P \land P \Leftrightarrow P$$

$$P \lor P \Leftrightarrow P$$

Prawo rozdzielności

$$P \land (Q \lor R) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (P \land R)$$

$$P \lor (Q \land R) \Leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)$$

Prawa absorpcji

$$P \lor (P \land Q) \Leftrightarrow P$$

$$P \land (P \lor Q) \Leftrightarrow P$$

Prawo podwójnej negacji

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

Dowody Matematyczne

Przypuszczenie 1. Załóżmy, że $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ i do tego nie jest liczbą pierwszą. Wtedy $2^n - 1$ nie jest liczbą pierwszą.

Udowodnienie przypuszczenia 1. Ponieważ n nie jest liczbą pierwszą, istnieją liczby całkowite dodatnie a i b takie, że $a < n, b < n$, i $n = ab$. Niech $x = 2^b - 1$ i $y = 1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b}$. Więc

$$\begin{aligned}
xy &= \left(2^b - 1\right) \cdot \left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b}\right) \\
&= 2^b \cdot \left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b}\right) - \left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b}\right) \\
&= \left(2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \cdots + 2^{ab}\right) - \left(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b}\right) \\
&= 2^{ab} - 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Ponieważ $b < n$, możemy stwierdzić, że $x = 2^b - 1 < 2^n - 1$. Dodatkowo, ponieważ $ab = n > a$, wynik stąd, że $b > 1$. Zatem, $x = 2^b - 1 > 2^1 - 1 = 1$, czyli $y < xy = 2^n - 1$. Zatem, udowodniliśmy, że $2^n - 1$ można zapisać jak iloczyn dwóch liczb dodatnich całkowitych x i y, obie liczby są mniejsze niż $2^n - 1$, czyli $2^n - 1$ nie jest liczbą pierwszą. $\square$