

# Contents

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego</b>	<b>2</b>
1.1	Algebra . . . . .	2
1.1.1	Wartość Bezwzględna . . . . .	2
1.1.2	Przesunięcie równoległe i symetralne funkcji wzdłuż osi OX i OY . . . . .	5
1.1.3	Funkcja Kwadratowa . . . . .	6
1.2	Trygonometria . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Rachunek różniczkowo-całkowy</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Algebra liniowa</b>	<b>11</b>
3.1	Wektory . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Logika i Dowody matematyczne</b>	<b>14</b>

# 1 Wprowadzenie do Rachunku Różniczkowego

## 1.1 Algebra

### 1.1.1 Wartość Bezwzględna

Dla liczby  $x$ , wartość bezwzględna oznacza:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq 0, \\ -x & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wartości bezwzględne posiadają również własne własności:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a| = |b| \iff a = b \wedge a = -b$$

Obliczanie odległości dla dwóch liczb na osi liczbowej:

$$|a - b|$$

$$|b - a|$$

Obliczanie punkty równoległego dla punktów  $a$  i  $b$ :

$$p = \frac{a + b}{2}$$

### Równania z wartością bezwzględną

Równanie z wartością bezwzględną takie jak np.  $|x - 2| = 5$  można rozwiązać na 3 sposoby:

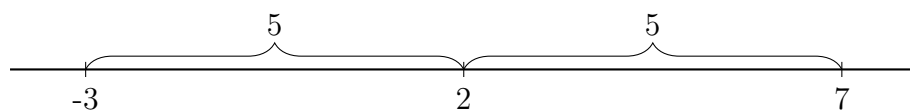
- Sposób algebraiczny:

$$|x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \vee x - 2 = -5$$

$$x = 7 \vee x = -3$$

- Sposób geometryczny:



Warto pamiętać aby **nie liczyć** równań z wartością bezwzględną gdzie wynik jest ujemny, np.

$$|x - 2| \neq -5$$

### Równania z zagnieżdżoną wartością bezwzględną

Równanie trzeba rozbić na 2 mniejsze opuszczając przy tym wartość bezwzględną, np.

$$||x + 2| - 6| = 1$$

$$|x + 2| - 6 = 1 \quad \vee \quad |x + 2| - 6 = -1$$

$$|x + 2| = 7 \quad \vee \quad |x + 2| = 5$$

$$x + 2 = 7 \vee x + 2 = -7 \quad \vee \quad x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5$$

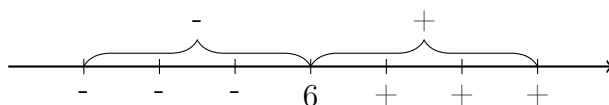
$$x \in \{-9, -7, 3, 5\}$$

### Równania z wartością bezwzględną i x

Dla przykładowego równania  $|x - 6| = 3x + 2$  trzeba rozpatrzyć 2 przypadki:

$$x \in (-\infty, 6) \quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty)$$

Użyteczna jest oś liczbowa aby wyznaczyć 2 przypadki.



Dla przedziału liczb mniejszych wartość bezwzględną mnożymy przez  $-1$ , a dla większych zostawiamy.

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 6) \quad \cup \quad x \in \langle 6, +\infty) \\ -x + 6 = 3x + 2 \quad \vee \quad x - 6 = 3x + 2 \\ -4x = -4 \quad \vee \quad -2x = 8 \\ x = 1 \quad \vee \quad x = -4 \notin \langle 6, +\infty) \end{aligned}$$

### Nierówności z wartością bezwzględną

- Sposób algebraiczny dla równania  $|x + 2| \leq 7$ . Dla znaków  $<$  i  $\leq$  rozdzielone równanie będzie koniunkcją  $\wedge$  (i), natomiast dla  $>$  i  $\geq$  równania będą alternatywą  $\vee$  (lub).

$$|x + 2| \leq 7$$

$$x + 2 \leq 7 \wedge x + 2 \geq -7$$

$$x \leq 5 \wedge x \geq -9$$

$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

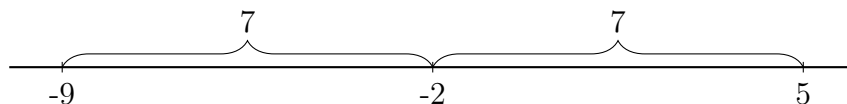
$$|x - 7| > 2$$

$$x - 7 > 2 \vee x - 7 < -2$$

$$x > 9 \vee x < 5$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$$

- Sposób geometryczny dla równania  $|x + 2| \leq 7$



$$x \in \langle -9, 5 \rangle$$

Przykładowe nierówności dla poszczególnych wyników:

$$|x| \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|x| < 0 \quad x \in \emptyset$$

$$|x - y| \leq 0 \quad x \in \{y\}$$

### Nierówności z zagnieżdżoną wartością bezwzględną

Nierówności z zagnieżdżoną wartością bezwzględną np.

$$||x + 2| - 4| < 10$$

działają na tej samej zasadzie co zwykłe nierówności tylko, że rozbite na jeszcze drugą część. Dalej trzeba pamiętać o znakach  $\wedge$  i  $\vee$ , oraz zamiane liczby na przeciwną.

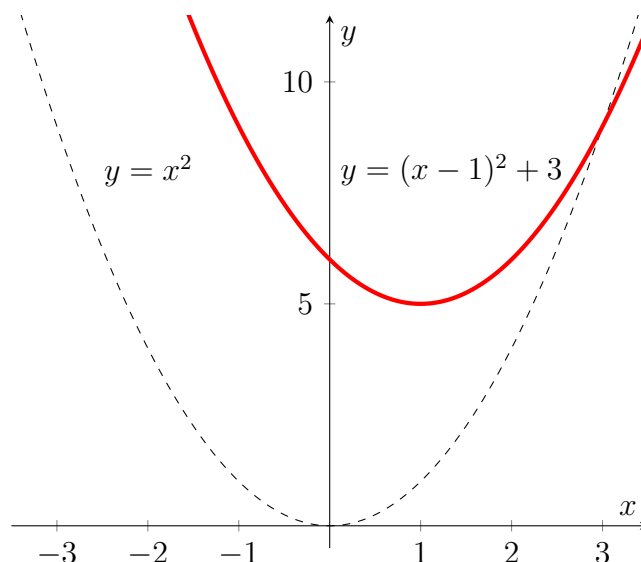
### 1.1.2 Przesunięcie równoległe i symetralne funkcji wzdłuż osi OX i OY

#### Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX i OY

Przesunięcie wykresu funkcji najłatwiej jest zapisywać w postaci wektora przesunięcia:

$$\vec{u} = [1, 5]$$
$$\vec{w} = [-2, -4]$$

Wektor  $\vec{u} = [1, 5]$  oznacza przesunięcie wykresu funkcji o 1 jednostkę w prawą stronę i 5 jednostek do góry, natomiast wektor  $\vec{w} = [-2, -4]$  oznacza przesunięcie o 2 jednostki do lewej i 4 jednostki w dół. Na wykresie poniżej zostało przedstawione przesunięcie funkcji o wektor  $\vec{u} = [1, 5]$ .



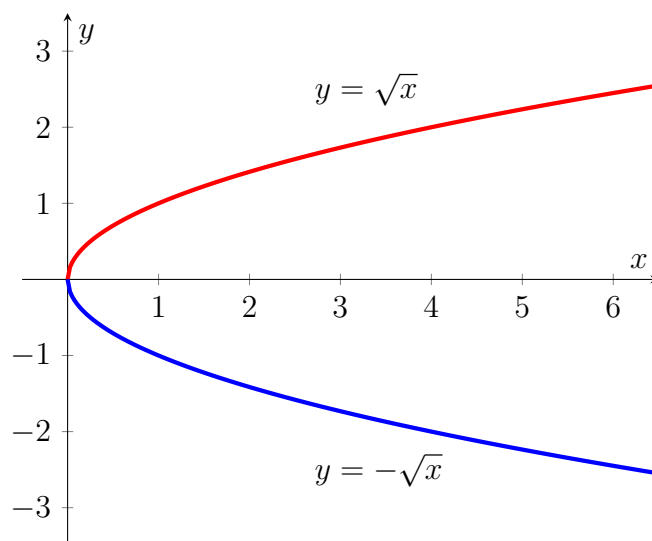
Ogólny wzór przesunięcia funkcji o wektor  $\vec{v} = [p, q]$  to:

$$g(x) = f(x - p) + q$$

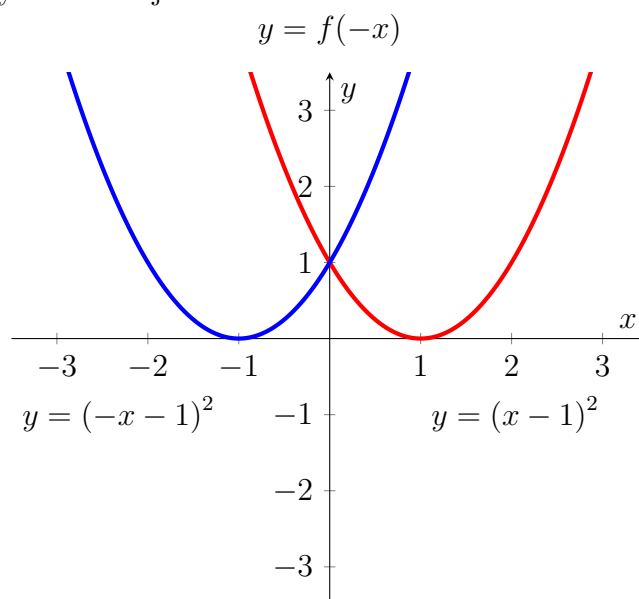
#### przekształcenie symetralne względem osi ox i oy

Jeżeli wykres funkcji  $y = f(x)$  odbijemy symetrycznie względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji

$$y = -f(x)$$



Jeżeli wykres funkcji  $y = f(x)$  odbijem symetrycznie względem osi  $OY$ , otrzymamy wykres funkcji



### 1.1.3 Funkcja Kwadratowa

#### Postać kanoniczna

Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej to taka która ma wzór:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

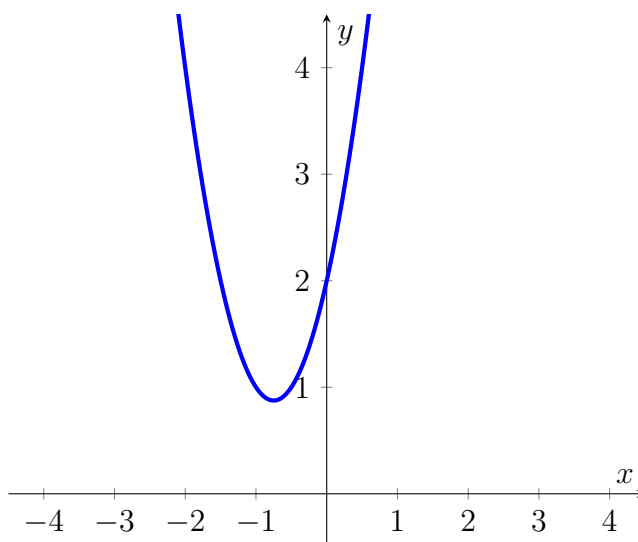
gdzie:  $a \neq 0$  oraz  $[p, q]$  to przesunięcie równoległe wykresu.

## Postać ogólna

Funkcja kwadratowa w postaci ogólnej to taka która ma wzór:

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie:  $a \neq 0$  oraz  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Przykładowa funkcja kwadratowa została przedstawiona poniżej, wzór jej to:  $y = 2x^2 + 3x + 2$



## Podstawowy opis i własności funkcji

Wyróżnik  $\Delta$  (delta) trójkianu kwadratowego:  $ax^2 + bx + c$  to:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dzięki wyróżnikowi ( $\Delta$ ) można wyznaczyć miejsca zerowe. Ilość miejsc zerowych zależy od delty. Jeżeli  $\Delta > 0$  to funkcja posiada 2 miejsca zerowe:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_0 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Natomiast jeżeli  $\Delta = 0$  to funkcja posiada jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Dla  $\Delta < 0$  funkcja nie przyjmuje miejsc zerowych (Brak rozwiązania).

Parabola funkcji kwadratowej posiada wierzchołek w punkcie  $W = (p, q)$ , gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a} \quad \vee \quad q = f(p)$$

Ramiona paraboli skierowane są:

W górę dla:  $a > 0$

W dół dla:  $a < 0$

Oś symetrii paraboli to:  $x = p$

Punkt przecięcia z OY, posiada współrzędne  $(0, c)$

### Postać iloczynowa

Funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej istnieje jeżeli  $\Delta \geq 0$  i posiada wzór:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

gdzie:  $x_1$  i  $x_2$  to miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

### Równania kwadratowe

Równania kwadratowe polegają na obliczeniu miejsc zerowych dla funkcji kwadratowej o postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdzie:  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Najczęstszy schemat w równaniu kwadratowym to **wzór skróconego mnożenia** i tworzenie nowych zmiennych (np.  $a = x^2, a \geq 0$ ) na potrzeby obliczenia równania.

### Nierówności kwadratowe

Nierówność kwadratowa to taka o postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

gdzie:  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Znak nierówności to  $<, >, \leq, \geq$

Rozwiązując nierówność kwadratową powinno się:

- Wyznaczyć miejsca zerowe dla  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Naszkicować wykres funkcji  $f(x)$
- Odczytać z wykresu funkcji rozwiązanie nierówności



## Funkcje kwadratowe z wartością bezwzględną

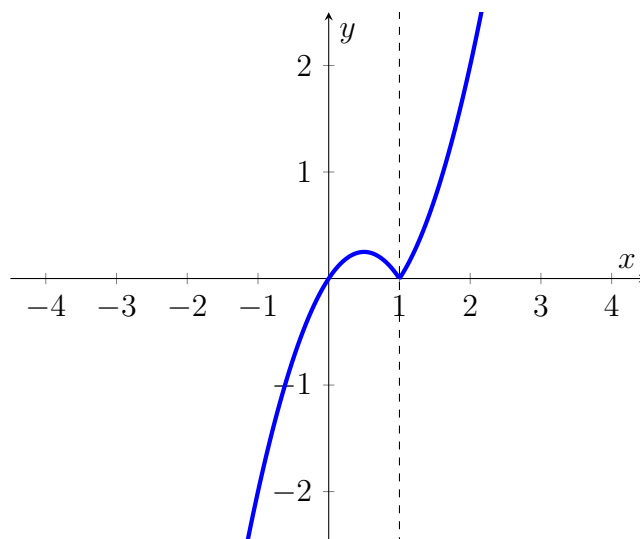
Aby narysować wykres funkcji, należy rozważyć dwa przypadki:

$$|x - y| = \begin{cases} -(x - y) & \text{dla } x < y \\ x - y & \text{dla } x \geq y \end{cases}$$

lub zapis w postaci przedziałów:

$$x \in (-\infty, y) \vee x \in \langle y, +\infty \rangle$$

Wykres tej funkcji będzie składał się z 2 części, kończące się i rozpoczynające się w punkcie  $y$ . Najłatwiej wyznaczyć wierzchołek  $(p, q)$  i naszkicować funkcję. Przykład dla funkcji  $f(x) = x|x - 1|$



## Wzory Viete'a

Jeżeli funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ma 2 miejsca zerowe  $x_1, x_2$  ( $\Delta \geq 0$ ), to zachodzą wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Dzięki wzorom Viete'a można określić jakie znaki mają miejsca zerowe (Różne, dodatnie lub ujemne). Schematem najczęściej pojawiającym się w wzorach Viete'a to wzory skróconego mnożenia do pewnego stopnia.

## 1.2 Trygonometria

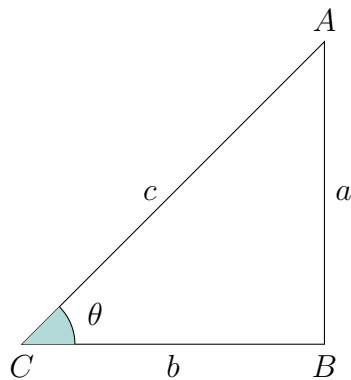
W  $\triangle$  prostokątnym dany jest kąt  $\theta$ . Wyraża się 4 funkcje trygonometryczne:

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{a}$$



Funkcje trygonometryczne również posiadają tożsamości trygonometryczne takie jak np.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \theta = 1$$

Funkcje trygonometryczne można konwertować na inne funkcje:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg} \theta$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{tg} \theta$$

## 2 Rachunek różniczkowo-całkowy

## 3 Algebra liniowa

### 3.1 Wektory

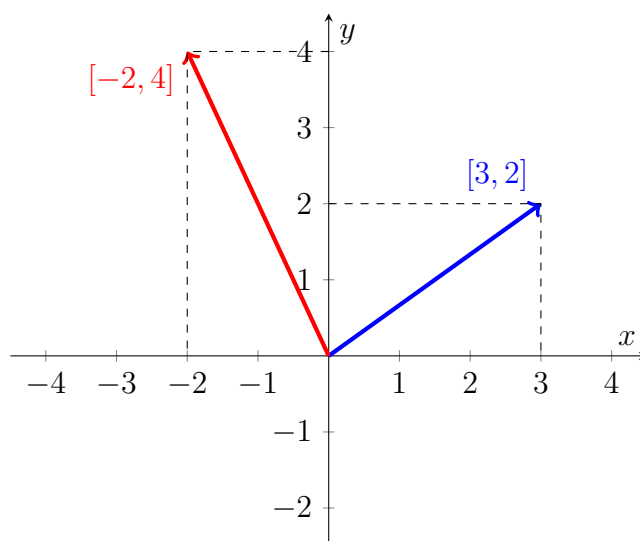
Wektor to uporządkowana para liczb. Jeśli wektor ma początek to jest to, wektor zaczepiony który jest oznaczany symbolem  $\overrightarrow{AB}$ . Jeżeli dane są punkty  $A = (x_1, y_1)$  oraz  $B = (x_2, y_2)$ , to współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$  określa wzór:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Jeśli natomiast wektor nie ma początku to jest to wektor swobodny który jest oznaczany symbolem  $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ .

$$\vec{u} = \vec{w} \iff u_x = w_x \wedge u_y = w_y$$

Na rysunku poniżej został przedstawiony wygląd wektora  $[3, 2]$  i  $[-2, 4]$  w układzie współrzędnych:



Długość wektora  $\vec{w}$  oraz  $\overrightarrow{AB}$  można zapisać następująco:

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

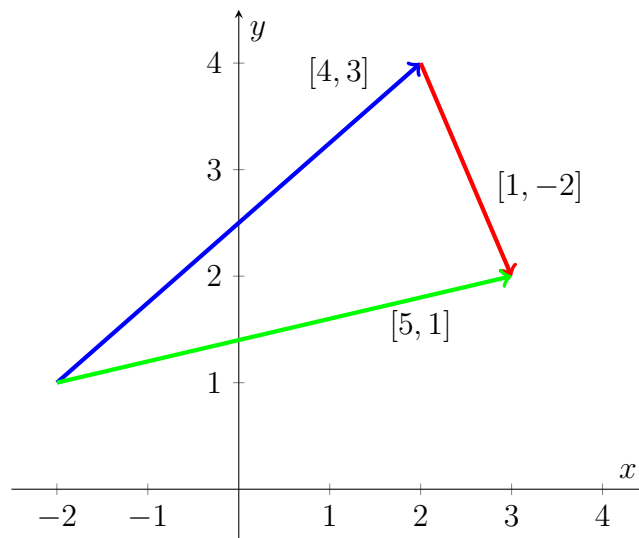
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

gdzie:

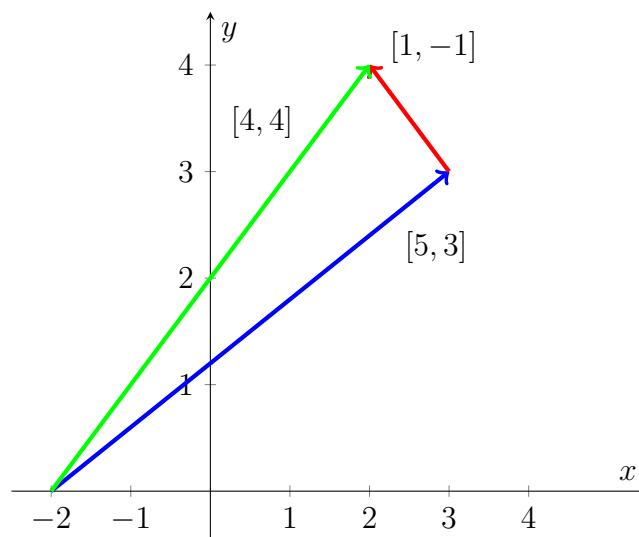
- $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$  to długości wektora  $\overrightarrow{AB}$

Sumą, różnicą, iloczynem  $\vec{u} = [u_x, u_y]$  i  $\vec{w} = [w_x, w_y]$ , wyraża się wzorem:

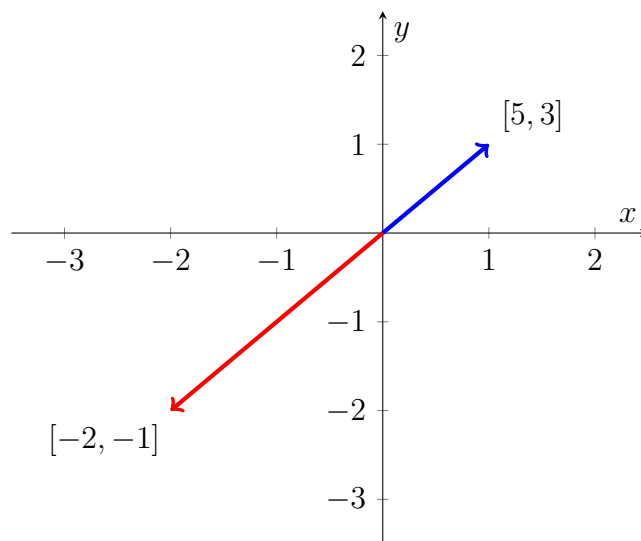
$$\vec{u} + \vec{w} = [u_x + w_x, u_y + w_y]$$



$$\vec{u} - \vec{w} = [u_x - w_x, u_y - w_y]$$



$$a \cdot \vec{w} = [a \cdot w_x, a \cdot w_y], \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$



Wektory  $\vec{u} = [u_x, u_y]$  i  $\vec{w} = [w_x, w_y]$ , są przeciwne wtedy, gdy suma wektorów  $\vec{u}$  i  $\vec{w}$  jest wektorem zerowym, czyli:

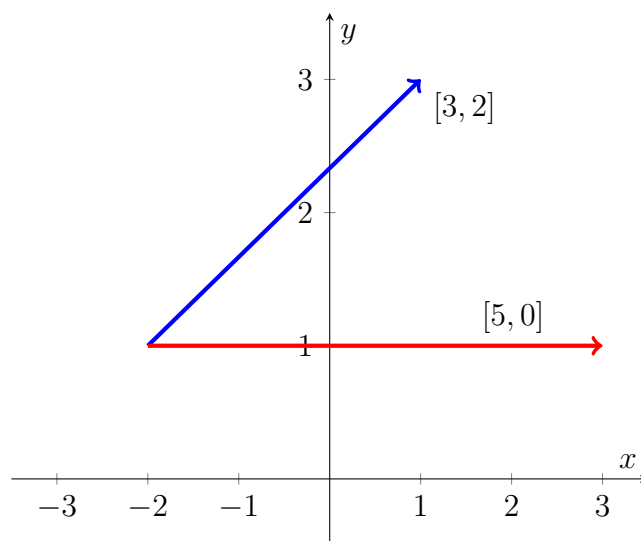
$$\vec{u} = -\vec{w} \iff u_x + w_x = 0 \wedge u_y + w_y = 0$$

Iloczyn skalarny wektorów  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  i  $\vec{w} = [w_1, w_2]$  to liczba, którą można uzyskać dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów można również wyliczyć znając długości wektorów  $|\vec{u}|$  i  $|\vec{w}|$  oraz kąt  $\theta$  między nimi:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \theta$$



## 4 Logika i Dowody matematyczne

### Symbole i ich znaczenie

W logice matematycznej występuje duża ilość symboli matematycznych, a to one i ich znaczenie:

Symbol	Znaczenie
$\neg p, \sim p$	negacja p
$p \wedge q$	p i q
$p \vee q$	p lub q
$p \Rightarrow q$	jeżeli p to q
$p \Leftrightarrow q$	p tylko wtedy i tylko wtedy, gdy
$\therefore$	zatem
$\forall$	dla każdego
$\exists$	istnieje takie

Negacja to zaprzeczenie wyrażania o formie: **negacja z  $P$**

<b>P</b>	<b><math>\neg P</math></b>
F	T
T	F

Alternatywa (lub) to wyrażenie o formie:  **$P$  lub  $Q$** .

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b><math>P \vee Q</math></b>
F	F	F
T	F	T
F	T	T
T	T	T

Koniunkcja (i) to wyrażenie o formie:  **$P$  i  $Q$** .

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b><math>P \wedge Q</math></b>
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Implikacja to wyrażenia o formie: **Jeżeli  $P$  to  $Q$** .

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b><math>P \Rightarrow Q</math></b>
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Równoważność to wyrażenia o formie:  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $Q$ .

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

**Prawa rachunku - wzory i definicja**

**Prawa De Morgana**

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

**Prawo asocjacyjne**

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$$

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

**Prawo idempotentności**

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

**Prawo rozdzielności**

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

**Prawa absorpcji**

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$$

**Prawo podwójnej negacji**

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

## Dowody Matematyczne

**Przypuszczenie 1.** Załóżmy, że  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$  i do tego nie jest liczbą pierwszą. Wtedy  $2^n - 1$  nie jest liczbą pierwszą.

**Udowodnienie przypuszczenia 1.** Ponieważ  $n$  nie jest liczbą pierwszą, istnieją liczby całkowite dodatnie  $a$  i  $b$  takie, że  $a < n, b < n$  i  $n = ab$ . Niech  $x = 2^b - 1$  i  $y = 1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-1)b}$ . Więc

$$\begin{aligned} xy &= (2^b - 1) \cdot (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-1)b}) \\ &= 2^b \cdot (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-1)b}) - (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-1)b}) \\ &= (2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \dots + 2^{ab}) - (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-1)b}) \\ &= 2^{ab} - 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Ponieważ  $b < n$ , możemy stwierdzić, że  $x = 2^b - 1 < 2^n - 1$ . Dodatkowo, ponieważ  $ab = n > a$ , wynika stąd, że  $b > 1$ . Zatem,  $x = 2^b - 1 > 2^1 - 1 = 1$ , czyli  $y < xy = 2^n - 1$ . Zatem, udowodniliśmy, że  $2^n - 1$  można zapisać jako iloczyn dwóch liczb dodatnich całkowitych  $x$  i  $y$ , obie liczby są mniejsze niż  $2^n - 1$ , czyli  $2^n - 1$  nie jest liczbą pierwszą.  $\square$