Teoria Grafów

Spis treści

1 Wprowadzenie i sformułowanie wyniku

W 1960 roku Linnik pokazał, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $p = x^2 + y^2 + 1$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi. Dokładniej, udowodnił on asymptotyczny wzór:

$$\sum_{p \le X} r(p-1) = \pi \prod_{p>2} \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \frac{X}{\log X} + \mathcal{O}\left(\frac{X(\log\log X)^7}{(\log X)^{1+\theta_0}}\right)$$

gdzie $r(k)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $k = x^2 + y^2$ w liczbach całkowitych, $\chi_4(k)$ to niegłówna (niepryncypalna) funkcja Dirichleta modulo 4, a

$$\theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e \log 2 = 0{,}0289\ldots \tag{1}$$

Theorem 1.1. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Definition 1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.

Lemma 1. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Proposition 1. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Corollary 1. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Remark 1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.

Example 1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą.

Dowód. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie, wtedy f jest funkcją ciągłą. □

Dowód. Niech a i b to wartości stałe oraz niech d będzie najmniejszą wartością sumy $ax + by$, więc:

$$d = ak + bl. \tag{2}$$

Aby udowodnić, że $d = \gcd(a, b)$ trzeba wykazać, że d jest wspólnym dzielnikiem liczb a oraz b i jest on jednocześnie największym takim dzielnikiem.

Część 1.

Pokażemy, że d jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Wiemy, że istnieją liczby q oraz r takie, że (Twierdzenie 2.):

$$a = dq + r.$$

gdzie, $0 \leq r < d$. Zmieniając zapis:

$$\begin{aligned} r &= a - dq \\ &= a - (ak + bl)q \\ &= a(1 - kq) + b(-lq) \end{aligned}$$

Jako, że $1 - kq$ oraz $-lq$ to liczby całkowite, przedstawiliśmy r jako $ax + by$. Ale jako, że d to najmniejsza wartość wyrażenia $ax + by$ i $0 \leq r < d$, to $r = 0$.

Część 2. Pokażemy, że d to największy wspólny dzielnik liczb a i b. Niech d' to inny wspólny dzielnik liczb a i b, więc $d' \mid a$ oraz $d' \mid b$.

$$d'n = a \quad \text{i} \quad d'm = b$$

gdzie n, m to liczby całkowite.

Podstawiając pod (1.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d &= ak + bl \\ &= d'nk + d'ml \\ &= d'(nk + ml) \end{aligned}$$

Zauważamy, że $d' = \frac{d}{nk+ml}$, otrzymując $d' \leq d$, co kończy dowód. $\square$