Tarea 4: Denavit-Hartenberg

Luis Enrique Ruiz-Fernández

Abril 2021

1 Matriz Denavit-Hartenberg

En esta sección de la tarea mostraremos que la matriz DH

$$DH = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha & a\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha & a\sin\theta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Lo que buscamos con esta transformación es obtener la relación de una articulación con la siguiente, esto se lleva a cabo mediante 4 transformaciones homogéneas por cada eslabón. Estas transformaciones son rotaciones y traslaciones, la rotación sobre el eje Z tendrá el ángulo θ, junto con su traslación a lo largo de Z que nombraremos d; también tenemos la rotación sobre el eje X ene l cual su ángulo sera α, y la distancia o longitud del eslabón en el eje X es a.

Por lo que podemos intuir que las transformaciones son para cada parámetro respectivamente, lo que nos llevaría al producto de 4 matrices

$$DH = R_Z T_Z T_X R_X, \tag{2}$$

donde R_z, y R_X son las matrices de transformación homogénea de rotación sobre los ejes Z y X; T_Z, y T_X son las transformaciones del desplazamiento sobre los ejes.

Ahora iniciamos el desarrollo de la Ecuación 2:

$$DH = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

empezando con las primeras dos matrices de izquierda a derecha

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

tomamos el producto y los multiplicamos por la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & a\cos\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & a\sin\theta\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

y por ultimo, lo multiplicamos por la matriz de transformación de rotación sobre el eje X,

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & a\cos\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & a\sin\theta\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\cos\alpha\sin\theta & \sin\alpha\sin\theta & a\cos\theta\\ \sin\theta & \cos\alpha\cos\theta & -\sin\alpha\cos\theta & a\sin\theta\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

por lo tanto la matriz Denavit-Hartenberg queda:

$$DH = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\cos\alpha\sin\theta & \sin\alpha\sin\theta & a\cos\theta\\ \sin\theta & \cos\alpha\cos\theta & -\sin\alpha\cos\theta & a\sin\theta\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Podemos observar como la relación que existe entre articulaciones es que se menciono en la Ecuación 1, esta transformación homogénea es entre eslabones, la cual nos da toda la información de longitud del eslabón, torcedura, desplazamiento y ángulo de articulación. Si queremos ver la posición final del robot con respecto al origen, serian una secuencia de transformaciones por eslabones de sus matrices DH.

2 Simulación Denavit-Hartenberg

En esta sección hablaremos de una simulación con interfaz, en la cual podremos interactuar con los ángulos de los grados de libertad de un robot manipulador. La interfaz se realizo con un código realizado en Python.

Sabemos que el método Denavit-Hartenberg busca busca determinar la posición y orientación del extremo de un manipulador con respecto a las coordenadas del origen o de referencia. Tomando la simulación como herramienta visual, obtendremos la matriz Denavit-Hartenberg junto con su tabla de parámetros de lo que interactuemos con la simulación.

Para la simulación que se muestra en la Figura 1, tenemos un brazo con 4 articulaciones, tomando la base que también tiene un ángulo de rotación, también podemos observar que podemos modificar los ángulo de torcían de cada articulación con una barra.

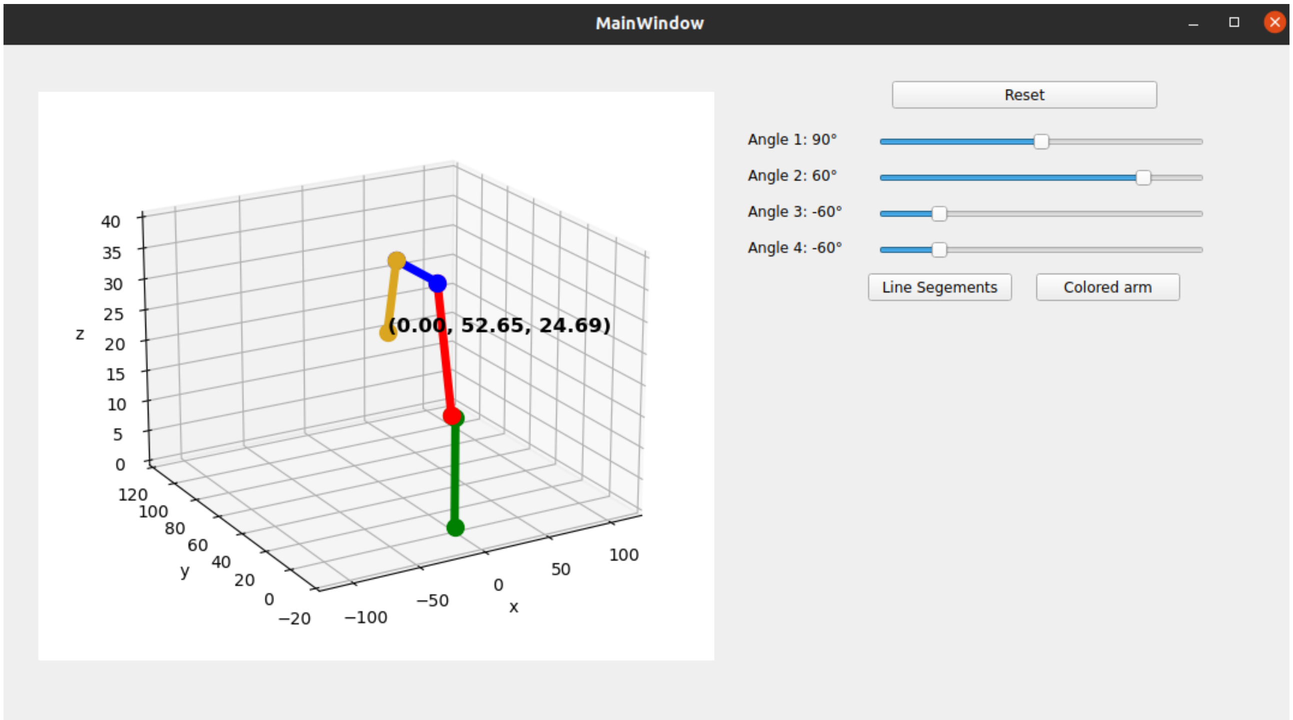

Figure 1: Ventana de simulación DH.

Ahora lo importante aquí también es obtener la matriz DH, para saber la posición al final del brazo, como coordenadas tal como se muestra en la Figura 1.

En la simulación obtenemos las matrices DH del caso que se observa en la Figura 1, en la Figura 2 podemos observar el resultado en terminal.

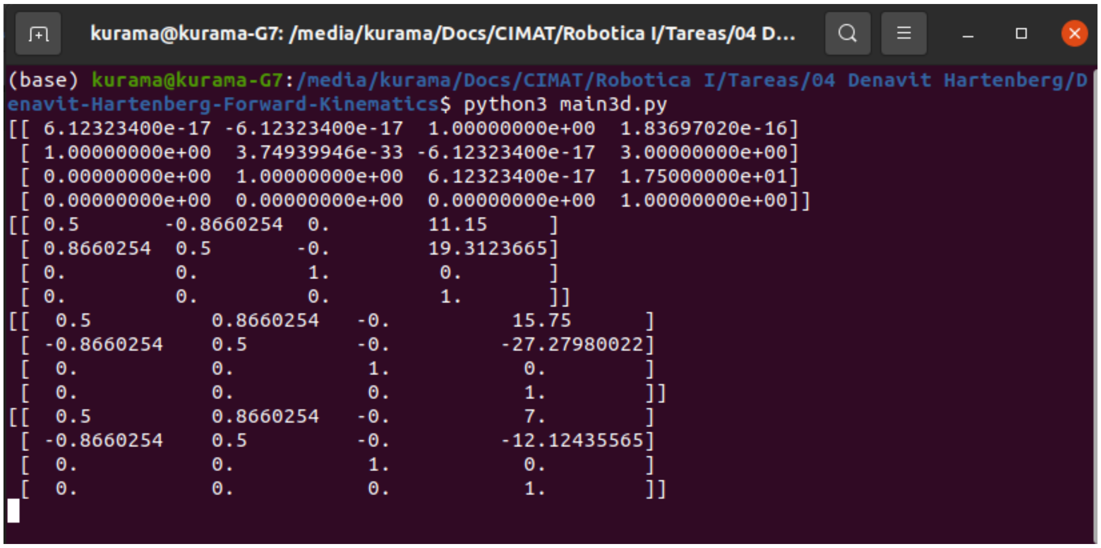

Figure 2: Ventana de simulación DH.

Estas matriz son las DH matrices entre la articulación 0-1, 1-2, 2-3, y 3-4.

Por ultimo daremos la tabla de parámetros de la simulación de brazo. Para esto antes veremos el diagrama que nos muestra en la Figura 3, en la cual se observa un poco mas detallado los ángulos y las traslaciones del sistema.

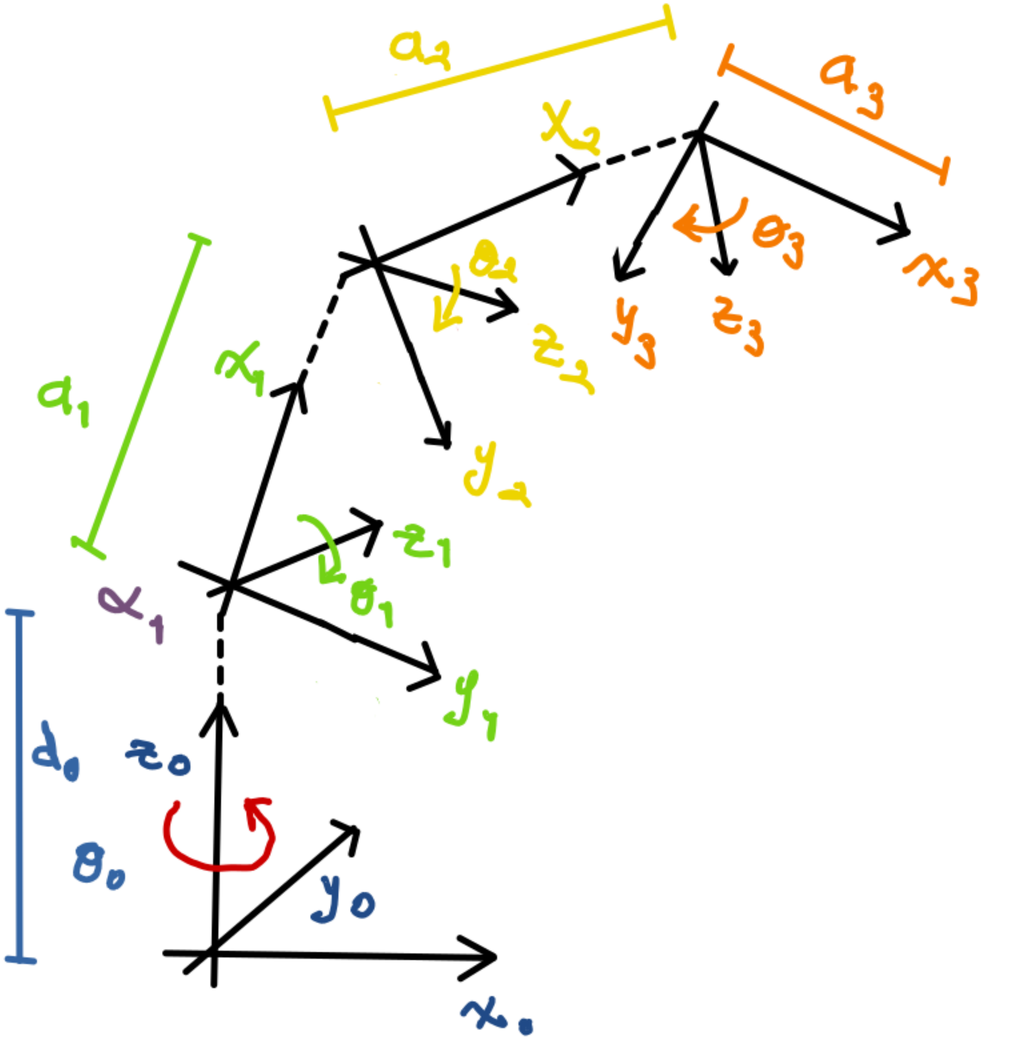

Figure 3: Diagrama de sistema para DH.

Donde d_0 es la distancia sobre el eje Z, a_i son las distancias sobre los ejes X, α_0 es el ángulo de rotación del eje X, y θ_i son los ángulos de rotación sobre el eje Z.

Para finalizar en la Figura 4 podemos observar la tabla de parámetros resultante del sistema para simulación.

Links	Tras X (a_i)	Rot X (α_i)	Tras Z (d_i)	Rot Z (θ_i)
0-1	0	$\pi/2$	d_0	θ_0
1-2	a_1	0	0	θ_1
2-3	a_2	0	0	θ_2
3-4	a_3	0	0	θ_3

Figure 4: Tabla de parámetros DH.

2.1 Two links arm

En este ultimo eje ricio, fue una tarea sobre multiplicar dos matrices DH de dos eslabones con sus articulaciones de un brazo en un plano 2D como se ve en la Figura 5, donde no hay eje Z, y comprobar el resultado de

$$DH = \begin{bmatrix} c12 & -s12 & 0 & a_1c1 + a_2c12 \\ s12 & c12 & 0 & a_1s1 + a_2s12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

donde $c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s12 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $c1 = \cos\theta_1$, y $s1 = \sin\theta_1$.

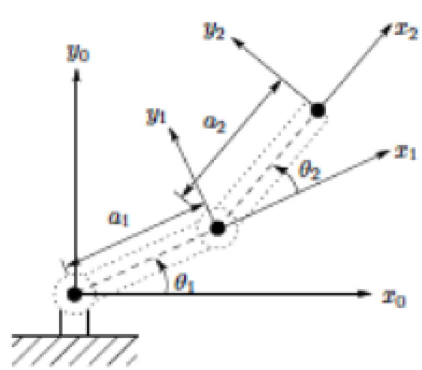

Figure 5: Dos articulaciones de un brazo en 2D.

Para esto tenemos las matrices que relación los eslabones 0-1 y 1-2, por lo que la relación del eslabón 0-2 estaría dada por:

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & a_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que si hacemos el producto de estas dos matrices tenemos

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_2\sin\theta_1 & 0 & a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - a_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1\sin\theta_2 - a_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A continuación, podemos simplificar las expresiones gracias a las propiedades de las funciones trigonométricas, la que utilizaremos son

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2, \end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando estas propiedades vamos a tener

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_1\cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_1\sin\theta_1 + a_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que en efecto obtenemos la matriz que se observa en 5.