Tarea 6 - Shooting Algorithm

Luis Enrique Ruiz-Fernandez

November 2021

Para esta tarea se implementara el algoritmo "shooting" para un juego de persecución-evasión, en donde las coordenadas y la dinámica del evasor se expresa como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{x} = v_e \cos(\alpha) \tag{1}$$
$$\dot{y} = v_e \sin(\alpha), \tag{2}$$

donde v_e es la velocidad del evasor. Y para el perseguidor que se busca mantener a una distancia fija L, tenemos:

$$x_p = x + L\cos(\theta) \tag{3}$$
$$y_p = y + L\sin(\theta). \tag{4}$$

Para las solución de este problema es conveniente que x sea la variable independiente en lugar de tiempo, donde x y y son las coordenadas del evasor en un plano 2D. El evasor busca moverse del punto $x = 0$, al punto x_e. Partiendo que x es la variable independiente, tendrá un crecimiento constante, por lo que se tendrá un sistema modificado dada por $\zeta = (y, \theta)$ y el sistema de ecuaciones esta dado por:

$$\frac{d}{dx}\zeta = f(\zeta, \alpha), \tag{5}$$

para este sistema modificado, α sera el control que minimice el Hamiltoniano.

Con respecto a la variable independiente x, las ecuaciones de evolución de estados queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \tan(\alpha) = f_1(\zeta, \alpha) \tag{6}$$
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{\rho\sin(\alpha-\theta) + \sqrt{1-\rho^2\cos(\alpha-\theta)^2}}{L\rho\cos\alpha} = f_2(\zeta, \alpha). \tag{7}$$

Para minimizar el ángulo que el perseguidor puede cambiar la orientación de la varilla, que lo conecta con el evasor (L), se utiliza la siguiente función de costo:

$$J = \int_0^{x_e} \frac{d\theta}{dx} dx = \int_0^{x_e} f_2(\zeta, \alpha) dx, \tag{8}$$

donde esta sujeto a

$$\begin{aligned} &\theta(0) = \theta \\ &y(0) = y(x_e) = 0. \end{aligned}$$

Para resolver este problema de optimización se utilizara el principio mínimo de Pontryagin (PMP). El hamiltoniano para este problema queda:

$$H = \lambda_1 \tan(\alpha) + (1 + \lambda_2) \frac{-\rho \sin(\alpha - \theta) + \sqrt{1 - \rho^2 \cos(\alpha - \theta)^2}}{L\rho \cos(\alpha)}. \tag{9}$$

Para las ecuaciones adjuntas tenemos:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial}{\partial y} H = 0 \tag{10}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial}{\partial \theta} H = -(1 + \lambda_2) \frac{\cos(\alpha - \theta)}{L \cos(\alpha)} \left(1 - \frac{\rho \sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{1 - \rho^2 \cos(\alpha - \theta)^2}} \right). \tag{11}$$

Con todo lo anterior podemos implementar el algoritmo que se muestra en la Figura 1.

Algorithm OptimalEvasion (θ, x_e)

1. Choose initial values for the Lagrange multipliers.
2. Let $j \leftarrow 0$, $\theta(0) \leftarrow \theta$, $y(0) \leftarrow 0$, $x(0) \leftarrow 0$.
3. Choose $\alpha(j)$ that minimizes the Hamiltonian,
$$\alpha(j) = \arg\min \mathcal{H}(\zeta(j), \alpha, x(j))$$
4. Integrate the state equations to determine $\zeta(j+1)$
$$\begin{aligned} y(j+1) &\leftarrow y(j) + f_1(\zeta(j), \alpha(j))\Delta x \\ \theta(j+1) &\leftarrow \theta(j) + f_2(\zeta(j), \alpha(j))\Delta x \end{aligned}$$
5. Integrate the adjoint equation for λ_2 to to determine $\lambda_2(j+1)$.
6. $x(j+1) \leftarrow x(j) + \Delta x$.
7. If $y(j)$ and $y(j+1)$ have different sign, then the system has crossed the x axis.
   If $\mid x(j+1) - x_e \mid < \epsilon$, then the optimal trajectory is given by $\alpha(0), \ldots \alpha(j)$.
8. If $y(j)$ and $y(j+1)$ have different sign but $\mid x(j+1) - x_e \mid > \epsilon$, then we have missed the boundary condition. In this case, adjust the initial values for λ and go to step 2.
9. If $y(j)$ and $y(j+1)$ have the same sign, then we have not crossed the x-axis, and we continue to iterate forward: $j \leftarrow j+1$, go to step 3.

Figure 1: Algoritmo para encontrar trayectoria óptima, evasor.

Como apoyo para realizar la tarea se utilizo el articulo [1], en el cual también obtuvimos los parámetros para hacer la simulación y verificar que el resultado fuera el mismo.

Para el primer caso, los parámetros son:

$$\begin{aligned} x_e &= 1 \\ \theta_0 &= \pi \\ \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 0.41. \end{aligned}$$

El resultado de esta simulación se puede ver en la Figura 2, que podemos observar que es similar a la del articulo [1].

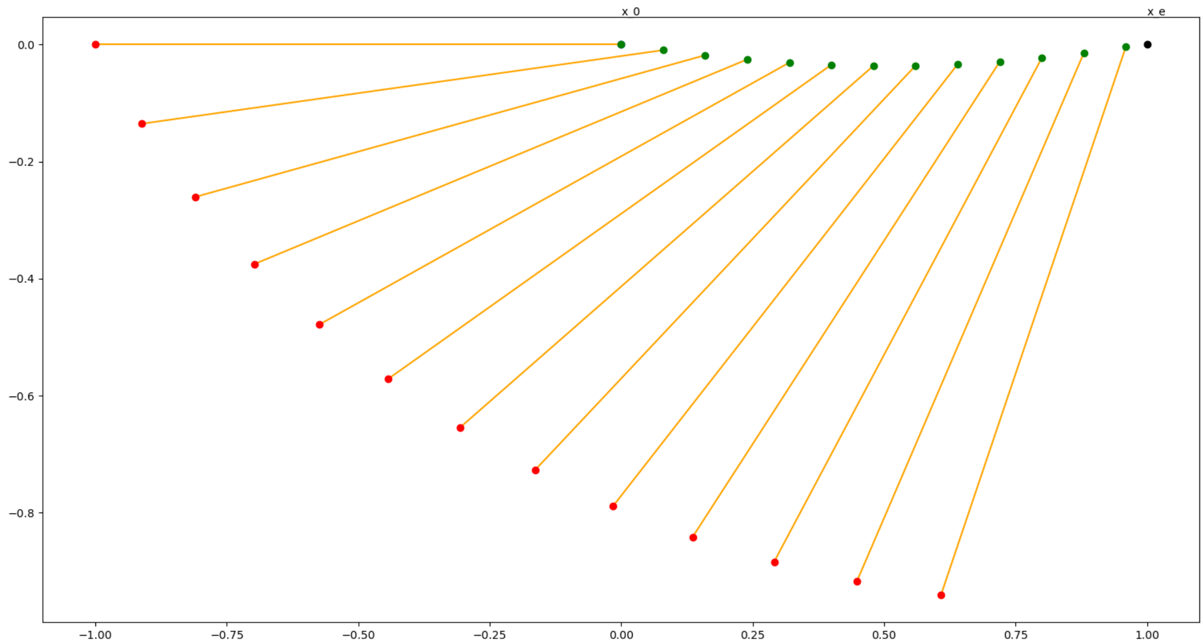

Figure 2: Resultado de simulación de los primeros parámetros.

Y por ultimo los parámetros para la segunda simulación:

$$x_e = 0.5$$
$$\theta_0 = \frac{\pi}{6}$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 0.608,$$

que al igual que en caso anterior se puede observar en la Figura 3, que el resultado es similar al articulo.

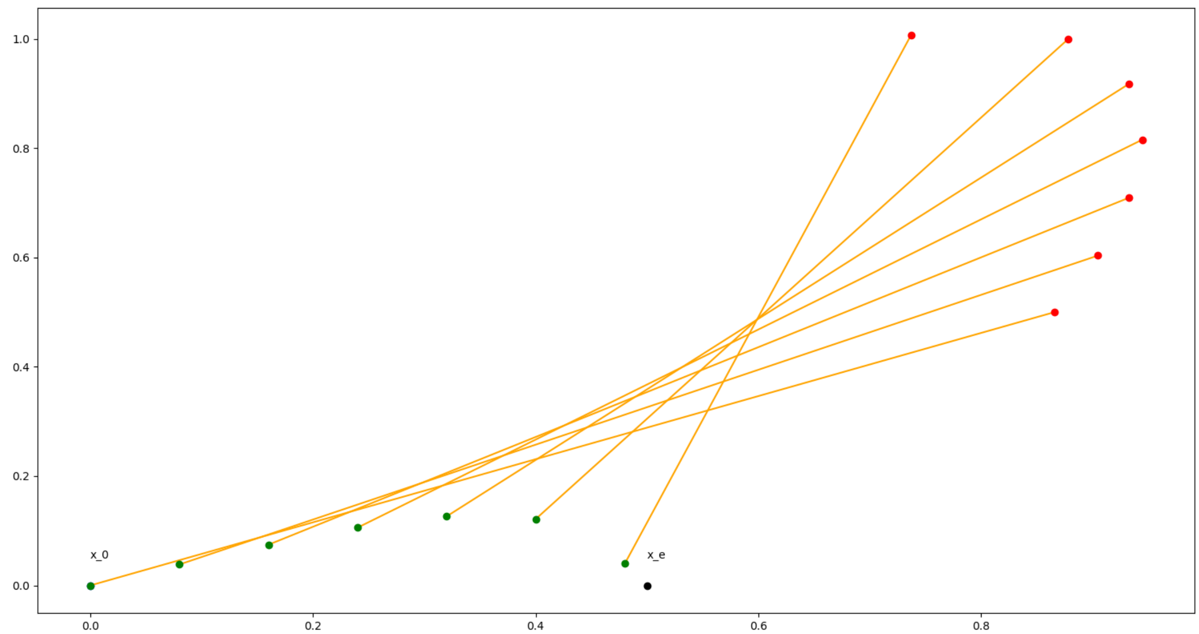

Figure 3: Resultado de simulación de los segundos parámetros.

Referencias

[1] Rafael Murrieta-Cid et al. "Surveillance Strategies for a Pursuer with Finite Sensor Range". In: *The International Journal of Robotics Research* 26.3 (2007), pp. 233–253. DOI: `10.1177/0278364907077083`. eprint: `https://doi.org/10.1177/0278364907077083`. URL: `https://doi.org/10.1177/0278364907077083`.