# 从物种增长的Malthus模型到混沌

5121209117 徐小博

5122409009 王力功

1. **实验目的**

本实验涉及函数的迭代、不动点和有关的作图。实验通过对一个简单的一维二次函数映射，即Logistic映射的讨论，介绍了用数值迭代、蛛网迭代和密度分布等方法来研究混沌；说明了混沌的倍周期分叉、便利性和某些普适结构；进而说明计算机和数学的结合在科学研究中的重要性。

1. **问题的提出**

“混沌”这个名词出现在生活的各个领域，不仅出现在数学、物理和生物等自然科学中，而且出现在金融、经济和管理等社会科学中；甚至出现在文学和艺术的范畴：从宇宙的形成到龙卷风的产生、从东南亚金融危机爆发到“侏罗纪公园”中的恐龙出现。“混沌”很难用一两句话描述清楚，但是往往可以通过一些并不复杂的例子进行考察，一个著名的例子是Logistic映射。

Logistic映射源于生物数学中的物种增长模型。物种的生长与衰亡是自然界最基本的现象，对物种群体数量的研究已经有相当长久的历史。我们将从简单的离散数学模型开始，进而讨论由此引起的复杂而有趣的现象。

1. **问题的讨论和分析**
2. 对Logistic映射，取依次属于区间。然后取值在3.6附近和接近4；任给一个初始值，用数值迭代方法求序列来考察其趋向；进而在周期3窗口取值为3.83到3.84之间，考察由出发所得的趋向，再通过适当增加的值，得到分叉到周期6的情况；能否再得到分叉到周期12的情况？对于上述结果可以在平面上作图考考察，不过注意n应该取得足够大，才能有足够多的点（数百个或更多）看出变化趋势。

【问题的解答】

倍周期分叉在不同值下的情况如下：

* + 1. 时：

由于，因此对于任意必定有

* + 1. 时：

(0, 1)中间任何一个初始值的轨道将逐渐趋向某一个数值。例如：时，任取，那么迭代的值将越来越接近0.3333……，即有

也就是说，数列的值（生物种群的数量）将逐渐稳定在一个数附近。

事实上，由方程即可以解出的两个不动点

* + 1. 时：

原来在数 附近振动的，突然开始绕着两个数值振动。确切的说，将有

* + 1. 时：

上面两个周期点和，又变得不稳定，从(0, 1)中任意的点（除了）出发的轨道将逐渐沿着四个数值、、、振动。例如当时，轨道中的 将分别趋于下列4个数值之一：

0．44399166……，0.84746800……，0.44596765……，0.85242774……

对确定的，可以用数值方法求出它们。当初值为这四个值之一时，轨道将沿着

周而复始地循环。这是周期4轨道。

进一步的计算表明，当再逐步增大，原有的周期4点又将失稳，并且又产生稳定的周期为8的点，这个周期不断加倍的过程将重复无限次，会依次出现周期16点，周期32点…这一分叉过程称为**倍周期（period-doubling）**分叉。相应的分叉值构成一个单调增加的数列。

当时（k=1,2,…），映射f有稳定的周期2k点，而周期2k-1点不稳定，并且极限

是有限的。

表1给出了一些的值（精确到10-10），除了用数值方法，这些相当精确的分叉值是很难得到的。

表1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| K |  | K |  |
| 1 | 3 | 7 | 3.5698912594 |
| 2 | 3.4494897428 | 8 | 3.569934018374 |
| 3 | 3.5440903506 | 9 | 3.569943176048 |
| 4 | 3.5644075061 | 10 | 3.569945137342 |
| 5 | 3.5687594196 |  |  |
| 6 | 3.5696916098 |  | 3.569945557391 |

在混沌发生前，我们先在题目给定的四个区间内分别取了四个值，验证了确实是二分叉、四分叉、八分叉、十六分叉。

当时，Logistic映射进入混沌（Chaos）区域。

在混沌发生后，大约3.84左右附近，又回到了明显的3周期情况。为了得到6周期的情况，我们用Mathematica软件，采用二分法，逐渐缩小了α的取值范围。以同样的方法，我们得到了12分叉的α值。具体作图过程如下所示：

从而观测出了α的分叉临界值点。得到不同α后，我们画出分叉结构图如下：

从图中可以看出：

1. 当依次属于区间时，确实为二分叉、四分叉、八分叉、十六分叉。
2. 当时，Logistic映射进入混沌（Chaos）区域。
3. 当时，由产生的轨道{xn}将收敛到稳定的周期3轨道。
4. 当时，得到分叉到周期6的情况。
5. 当时，得到分叉到周期12的情况。
6. 当（接近4）时，Logistic映射重新进入混沌（Chaos）区域。

在取α依次属于区间(c\_k,c\_(k+1) ),k=1,2,3,4。然后取值在3.6附近和接近4；任给一个初始值x\_0，用数值迭代方法求序列{x\_n}来考察其趋向；进而在周期3窗口取α值为3.83到3.84之间，考察由x\_0出发所得{x\_n}的趋向，再通过适当增加α的值，得到分叉到周期6的情况；能否再得到分叉到周期12的情况？对于上述结果可以在n-x\_n平面上作图考考察，不过注意n应该取得足够大，才能有足够多的点（数百个或更多）看出变化趋势。

数值方法就是在 平面取适当稠密的 ，然后如上述那样迭代地得到稳定的周期点（其实至少在，稳定周期点是有解析表达式的），从而就可以画出Logistic映射的分叉结构图。

增长率为r（出生率与死亡率之差），那么人口增长数与原人口数成正比，从而

即

其中，这是一个线性映射

的迭代，易得

方法

1. 选择一个二阶（四阶）可逆整数方阵A，称为Hill2（Hill4）密码的加密矩阵，它是这个加密体制的密钥（是加密的关键，仅由通信双方掌握）。
2. 分工情况

王力功：分析问题，数学建模，编程实现及作图

徐小博：组织文章结构，整理数据及编写，结果分析