

Решение краевой задачи методом конечных разностей

Курдюкова Марина

Задание: Найти решение краевой задачи для ОДУ второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы как:

$$p(x) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$q(x) = \ln(x^2 + 4)$$

$$f(x) = 2 - x$$

И граничные условия в общем виде:

$$y'(a) = \alpha * y(a) + A$$

$$y'(b) = \beta * y(b) + B$$

Где заданы $\alpha = 1, \beta = 1, a = 1, b = 1, A, B = 0$

В результате решения должны быть получены значения α_i, β_i, y_i

Расчетные формулы:

1. Пусть $h = \frac{b-a}{n}$. Вводится сетка $x_i = a - \frac{h}{2} + ih$. Считаем на промежутке $x = [0, 1]$
2. В узлах считаем значения p_i, q_i, f_i
3. Производные заменяем конечно разностными аппроксимациями:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

4. После преобразований, т.е. приведя подобные члены и используя граничные условия, в итоге уравнение сводится к системе:

$$-b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0$$

$$a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k$$

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n$$

Где:

$$a_k = 1 - \frac{h}{2}p_k; b_k = 2 - h^2q_k; c_k = 1 + \frac{h}{2}p_k; d_k = h^2f_k$$

Из граничного условия получаем:

$$c_0 = 1 - \alpha \frac{h}{2}, a_n = -1 - \beta \frac{h}{2}; b_0 = \alpha \frac{h}{2} + 1, b_n = \beta \frac{h}{2} - 1$$

5. Теперь нужно найти начальные коэффициенты: $\alpha_0 = \frac{c_0}{b_0}, \beta_0 = -\frac{d_0}{b_0}$
Далее найдем значения α_k, β_k через формулы:

$$\alpha_k = \frac{c_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}$$

$$\beta_k = \frac{a_k \beta_{k-1} - d_k}{b_k - a_k \alpha_{k-1}}$$

При этом: $\alpha_n = 0, y_n = \beta_n$

6. И уже после нахождения значений α_i, β_i, y_n , в обратном порядке вычисляем значения $y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i$

Код программы:

```
#!/usr/bin/env python

import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plot

a=0
b=1
n=80 #Подставляем разные значения
h=(b-a)/n
alpha1=1
alpha2=0
betha1=1
betha2=0

x=np.zeros(n+2)
y=np.zeros(n+2)
p=np.zeros(n+2)
q=np.zeros(n+2)
f=np.zeros(n+2)

for k in range(0,n+2):
    x[k]=a-h/2+k*h
    p[k]=1+math.sin(math.pi*x[k]/2)
    q[k]=math.log(x[k]*x[k]+4)
    f[k]=2-x[k]

A=np.zeros(n+2)
B=np.zeros(n+2)
C=np.zeros(n+2)
D=np.zeros(n+2)

A[0]=0
B[0]=alpha1*h/2+1
C[0]=1-alpha1*h/2
D[0]=alpha2*h

for k in range(1,n+1):
    A[k]=1-p[k]*h/2
    B[k]=2-q[k]*h**2
    C[k]=1+p[k]*h/2
    D[k]=f[k]*h**2

B[n+1]=betha1*h/2-1
A[n+1]=-1-betha1*h/2
C[n+1]=0
D[n+1]=betha2*h

alpha=np.zeros(n+2)
beta=np.zeros(n+2)

alpha[0]=C[0]/B[0]
beta[0]=-D[0]/B[0]
```

```

for i in range(1,n+2):
    alpha[i]=C[i]/(B[i]-A[i]*alpha[i-1])
    beta[i]=(A[i]*beta[i-1]-D[i])/(B[i]-A[i]*alpha[i-1])

y=np.zeros(n+2)
y[n+1]=beta[n+1]

for i in range(n,-1,-1):
    y[i]=alpha[i]*y[i+1]+beta[i]

print('  alpha  ', '      beta      ', '      y')
for i in range(0,n+2):
    print("{0:.8f}".format(alpha[i]),'      ', "{0:.8f}".format(beta[i]),
          '      ', "{0:.8f}".format(y[i]))

plot.plot(x,y)
plot.xlabel('x')
plot.ylabel('y')
plot.title('Решение краевой задачи')
plot.savefig('sol.png')

```

Результаты: Полученные значения при разбиении промежутка на 5 узлов:

alpha	beta	y
0.81818182	-0.00000000	-0.00172078
0.91379979	-0.06224998	-0.00210317
0.98509966	-0.10423702	0.06582055
1.04045543	-0.13014919	0.17262982
1.08472686	-0.14370994	0.29100623
1.12238477	-0.14900437	0.40076096
0.00000000	0.48981895	0.48981895

15 узлов:

alpha	beta	y
0.93548387	-0.00000000	-0.00547475
0.94859593	-0.00801044	-0.00585232
0.96002012	-0.01492525	0.00227507
0.97010418	-0.02089911	0.01791662
0.97909256	-0.02604410	0.04001191
0.98716323	-0.03044664	0.06746656
0.99445069	-0.03417797	0.09918644
1.00106085	-0.03730056	0.13410862
1.00708092	-0.03987213	0.17122753
1.01258609	-0.04194791	0.20961539
1.01764401	-0.04358189	0.24843646
1.02231790	-0.04482722	0.28695530
1.02666862	-0.04573625	0.32453948
1.03075618	-0.04636024	0.36065749
1.03464075	-0.04674897	0.39487295
1.03838356	-0.04695035	0.42683600
0.00000000	0.45627296	0.45627296

На 45 узлов:

alpha	beta	y
0.97802198	-0.00000000	-0.00600697
0.97961452	-0.00095139	-0.00614196
0.98112563	-0.00185371	-0.00529858
0.98256244	-0.00271012	-0.00351114
0.98393113	-0.00352340	-0.00081524
0.98523717	-0.00429600	0.00275239
0.98648535	-0.00503008	0.00715401
0.98767990	-0.00572757	0.01235101
0.98882460	-0.00639020	0.01830409
0.98992282	-0.00701953	0.02497338
0.99097754	-0.00761699	0.03231860
0.99199149	-0.00818387	0.04029919
0.99296708	-0.00872137	0.04887447
0.99390654	-0.00923060	0.05800377
0.99481188	-0.00971260	0.06764657
0.99568491	-0.01016834	0.07776261
0.99652734	-0.01059876	0.08831203
0.99734071	-0.01100472	0.09925547
0.99812645	-0.01138708	0.11055418
0.99888592	-0.01174665	0.12217016
0.99962035	-0.01208422	0.13406617
1.00033093	-0.01240055	0.14620589
1.00101876	-0.01269639	0.15855397
1.00168489	-0.01297248	0.17107608
1.00233033	-0.01322954	0.18373898
1.00295604	-0.01346828	0.19651059
1.00356294	-0.01368941	0.20936000
1.00415191	-0.01389360	0.22225751
1.00472384	-0.01408156	0.23517469
1.00527955	-0.01425396	0.24808435
1.00581986	-0.01441148	0.26096056
1.00634559	-0.01455477	0.27377868
1.00685752	-0.01468451	0.28651535
1.00735643	-0.01480135	0.29914844
1.00784309	-0.01490593	0.31165711
1.00831827	-0.01499889	0.32402170
1.00878272	-0.01508088	0.33622380
1.00923719	-0.01515251	0.34824613
1.00968244	-0.01521440	0.36007258
1.01011922	-0.01526717	0.37168813
1.01054827	-0.01531142	0.38307885
1.01097034	-0.01534773	0.39423180
1.01138620	-0.01537669	0.40513506
1.01179659	-0.01539887	0.41577762
1.01220229	-0.01541483	0.42614937
1.01260404	-0.01542513	0.43624107
0.00000000	0.44604424	0.44604424

И на 135:

alpha	beta	y
0.99261993	-0.00000000	-0.00609738
0.99280267	-0.00010834	-0.00614271
0.99298209	-0.00021473	-0.00607812

0.99315830	-0.00031921	-0.00590482
0.99333139	-0.00042183	-0.00562409
0.99350146	-0.00052263	-0.00523718
0.99366861	-0.00062165	-0.00474539
0.99383291	-0.00071893	-0.00415002
0.99399447	-0.00081450	-0.00345238
0.99415334	-0.00090841	-0.00265382
0.99430962	-0.00100069	-0.00175567
0.99446337	-0.00109137	-0.00075931
0.99461466	-0.00118048	0.00033391
0.99476357	-0.00126805	0.00152258
0.99491015	-0.00135411	0.00280532
0.99505447	-0.00143870	0.00418071
0.99519658	-0.00152183	0.00564734
0.99533655	-0.00160353	0.00720376
0.99547443	-0.00168383	0.00884856
0.99561027	-0.00176275	0.01058027
0.99574411	-0.00184032	0.01239744
0.99587602	-0.00191655	0.01429861
0.99600603	-0.00199147	0.01628231
0.99613419	-0.00206510	0.01834706
0.99626055	-0.00213746	0.02049137
0.99638514	-0.00220857	0.02271377
0.99650801	-0.00227844	0.02501275
0.99662919	-0.00234710	0.02738683
0.99674871	-0.00241457	0.02983450
0.99686663	-0.00248085	0.03235426
0.99698297	-0.00254598	0.03494461
0.99709776	-0.00260995	0.03760404
0.99721104	-0.00267280	0.04033104
0.99732284	-0.00273453	0.04312411
0.99743318	-0.00279516	0.04598174
0.99754211	-0.00285471	0.04890243
0.99764963	-0.00291318	0.05188466
0.99775580	-0.00297060	0.05492694
0.99786062	-0.00302697	0.05802777
0.99796413	-0.00308231	0.06118564
0.99806634	-0.00313664	0.06439906
0.99816729	-0.00318996	0.06766654
0.99826700	-0.00324229	0.07098659
0.99836550	-0.00329363	0.07435774
0.99846279	-0.00334401	0.07777851
0.99855891	-0.00339344	0.08124741
0.99865387	-0.00344192	0.08476300
0.99874770	-0.00348946	0.08832382
0.99884041	-0.00353609	0.09192840
0.99893203	-0.00358180	0.09557532
0.99902257	-0.00362661	0.09926313
0.99911206	-0.00367054	0.10299041
0.99920050	-0.00371358	0.10675574
0.99928793	-0.00375576	0.11055772
0.99937434	-0.00379708	0.11439494
0.99945977	-0.00383755	0.11826601
0.99954422	-0.00387719	0.12216957

0.99962772	-0.00391600	0.12610423
0.99971028	-0.00395398	0.13006865
0.99979191	-0.00399117	0.13406147
0.99987263	-0.00402755	0.13808137
0.99995245	-0.00406315	0.14212703
1.00003139	-0.00409796	0.14619712
1.00010946	-0.00413201	0.15029037
1.00018668	-0.00416529	0.15440547
1.00026306	-0.00419783	0.15854117
1.00033861	-0.00422962	0.16269620
1.00041335	-0.00426069	0.16686932
1.00048729	-0.00429102	0.17105930
1.00056043	-0.00432065	0.17526492
1.00063281	-0.00434957	0.17948498
1.00070442	-0.00437779	0.18371829
1.00077527	-0.00440533	0.18796367
1.00084539	-0.00443218	0.19221998
1.00091478	-0.00445837	0.19648605
1.00098346	-0.00448390	0.20076077
1.00105143	-0.00450877	0.20504302
1.00111870	-0.00453301	0.20933170
1.00118530	-0.00455660	0.21362572
1.00125122	-0.00457958	0.21792402
1.00131649	-0.00460193	0.22222554
1.00138110	-0.00462368	0.22652925
1.00144508	-0.00464482	0.23083412
1.00150843	-0.00466537	0.23513915
1.00157117	-0.00468535	0.23944334
1.00163329	-0.00470474	0.24374572
1.00169483	-0.00472357	0.24804533
1.00175577	-0.00474184	0.25234122
1.00181614	-0.00475956	0.25663248
1.00187595	-0.00477674	0.26091817
1.00193520	-0.00479339	0.26519742
1.00199391	-0.00480951	0.26946933
1.00205208	-0.00482512	0.27373305
1.00210972	-0.00484022	0.27798772
1.00216685	-0.00485482	0.28223250
1.00222348	-0.00486892	0.28646659
1.00227961	-0.00488254	0.29068917
1.00233525	-0.00489569	0.29489945
1.00239042	-0.00490837	0.29909668
1.00244512	-0.00492059	0.30328008
1.00249936	-0.00493235	0.30744892
1.00255316	-0.00494368	0.31160246
1.00260651	-0.00495456	0.31574001
1.00265944	-0.00496502	0.31986085
1.00271195	-0.00497506	0.32396431
1.00276405	-0.00498469	0.32804972
1.00281575	-0.00499391	0.33211643
1.00286705	-0.00500274	0.33616379
1.00291798	-0.00501118	0.34019118
1.00296853	-0.00501923	0.34419800
1.00301872	-0.00502692	0.34818363

1.00306856	-0.00503423	0.35214751
1.00311805	-0.00504119	0.35608907
1.00316721	-0.00504780	0.36000773
1.00321604	-0.00505406	0.36390298
1.00326456	-0.00505999	0.36777426
1.00331277	-0.00506559	0.37162108
1.00336068	-0.00507087	0.37544291
1.00340830	-0.00507584	0.37923928
1.00345564	-0.00508050	0.38300971
1.00350271	-0.00508486	0.38675373
1.00354952	-0.00508893	0.39047088
1.00359608	-0.00509271	0.39416072
1.00364240	-0.00509622	0.39782283
1.00368848	-0.00509945	0.40145678
1.00373434	-0.00510242	0.40506216
1.00377999	-0.00510514	0.40863859
1.00382543	-0.00510761	0.41218567
1.00387068	-0.00510983	0.41570304
1.00391574	-0.00511182	0.41919032
1.00396062	-0.00511358	0.42264717
1.00400533	-0.00511512	0.42607324
1.00404989	-0.00511645	0.42946820
1.00409430	-0.00511757	0.43283173
1.00413857	-0.00511848	0.43616351
1.00418271	-0.00511920	0.43946324
0.00000000	0.44273063	0.44273063

Значения y_i для $x = 0.5$ для разных n

у	х	п
0.17262982	0.50000000	5
0.17122753	0.50000000	15
0.17107608	0.50000000	45
0.17105930	0.50000000	135

Ниже представлен график решения

