ДЗ 2, Самокиш

March 4, 2020

Дано

Система диффуров из двух уравнений:

$$\begin{cases} y'(x) = ..., \\ z'(x) = ..., \end{cases} \tag{1}$$

для которых поставлено условие задачи Коши. Но есть один нюанс: система жёсткая. Одно уравнение считаем линейным, а другое – нет.

Методы

У нас есть 9 ~~стульев~~ методов интегрирования таких систем. Методы для вас назначает лично Самокиш. Выглядят они следующим образом:

1. Простейший неявный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1});$$

2. Метод средних прямоугольников I

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + hf\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\Big),$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}});$$

3. Метод средних прямоугольников II

$$y_{n+1} = y_n + hf\Big(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\Big);$$

4. Метод трапеции

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_{n+1})\Big);$$

5. Весовая формула I

$$y_{n+1} = y_n + hf\big(y_n + \theta h, y_n + \theta(y_{n+1} - y_n)\big);$$

6. Весовая формула II

$$y_{n+1} = y_n + h\big(\theta f(x_n, y_n) + (1-\theta) f(x_{n+1}, y_{n+1})\big);$$

Note: Если $\theta \leqslant \frac{1}{2}$, то весовые формулы A-устойчивы. Параметр θ можно выбирать как хочется.

7. Метод диагональный двухэтапный (последний выписанный метод Рунге-Кутты II порядка, с гаммами, где $\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$)

$$k_1 = f(x_n + \gamma h, y_n + h\gamma k_1),$$

$$k_2 = f\big(x_n + (1-\gamma)h, y_n + h(1-2\gamma)k_1 + h\gamma k_2\big),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

8. Метод Рунге-Кутты, основанный на квадратурной формуле с третями

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}f(x_n, y_n) + \frac{3}{4}hf\Big(x + \frac{2}{3}h, \frac{y_n + 2y_{n+1}}{3}\Big);$$

9. Формула дифференцирования назад

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Так как одно из уравнений нашей системы (1) линейно (будем считать, что линейно уравнение с y, но может быть и наоборот), из него можно явно найти y_{n+1}, которое в свою очередь можно подставить во второе уравнение. Тем самым получится *одно уравнение с одной неизвестной* z_{n+1}.

Его можем решить методом итерации. Для этого нужно все линейные выражения с z_{n+1} перенести в левую часть, а всё остальное – в правую. После чего разрешаем уравнение относительно z_{n+1}, и получаем формулу, которая выражает z_{n+1} через нелинейность. Применяем к ней метод простой итерации (он легко гуглится + нам часто доводилось использовать его при решении уравнения Кеплера). Метод простой итерации в нашем случае должен сходиться с точностью $10^{-5} \div 10^{-7}$.

Всю область интегрирования (отрезок [0, 1]) разбиваем на два отрезка: $[0, d]$; $[d, 1]$. На первом отрезке одна из функций быстро изменяется, там должен быть маленький шаг. На втором отрезке – наоборот, большой шаг.

Число d (граница погранслоя) определяется как $d = \frac{C}{A}$ $\forall A$, где C – это какая-то константа, большая 1, но не сильно (Самокиш сказал брать числа $\sim$ 5, 7, 10). Далее выбираем какое-то число n. Отрезок $[0, d]$ делим на n частей, получаем маленький шаг. Отрезок $[d, 1]$ тоже делим на n частей, но там шаг будет уже большой.

Варьировать в данной задаче будем числа A и n. Должны получить устойчивость метода. Выводить требуется таблицу значений. Можно и график нарисовать.