

## 5. Метод сеток для решения уравнения параболического типа

### 5.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (4)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $Lu$  может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Требуется найти в  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, T]$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3), (4).

### 5.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений.

#### Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных частей. Обозначим  $h = 1/N$ ,  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, N}$ .

Разобьём отрезок  $[0, T]$  на  $M$  равных частей. Обозначим  $\tau = T/M$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $k = \overline{0, M}$ .

Построим сетку узлов (рис. 1)  $\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$ .

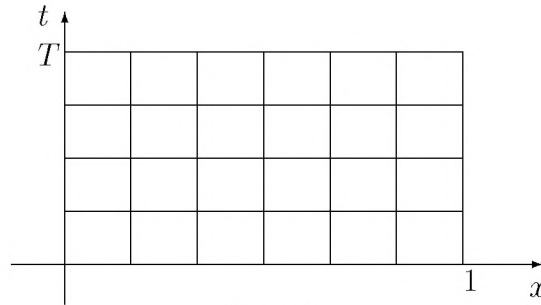


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки  $\overline{\omega_{h\tau}}$ . Обозначим  $u_i^k$  — значение в узле  $(x_i, t_k)$  сеточной функции  $u^k = \{u_i^k\}$ , определенной на слое  $k$  сеточной области  $\overline{\omega_{h\tau}}$ .

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор  $L$  разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k, \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k. \end{cases}$$

Здесь  $L_h u_i^k$  — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный  $Lu$  в точке  $(x_i, t_k)$  со вторым порядком аппроксимации,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе  $L$  достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

### 5.3. Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле  $(x_i, t_{k-1})$

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Каждое уравнение в (5) содержит решения лишь в четырех точках  $u_{i-1}^{k-1}$ ,  $u_i^{k-1}$ ,  $u_{i+1}^{k-1}$ ,  $u_i^k$ , причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

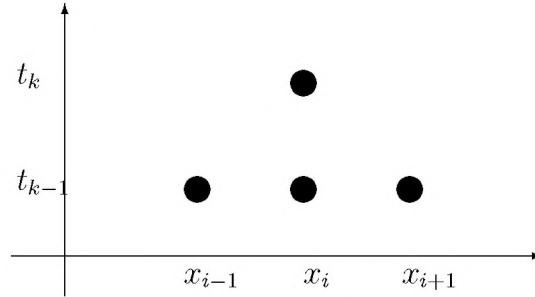


Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (6)$$

Граничные условия (3), (4) аппроксимируем с порядком  $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_k) u_0^k - \alpha_2(t_k) \frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k), \quad (7)$$

$$\beta_1(t_k) u_N^k + \beta_2(t_k) \frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k), \quad (8)$$

$k = \overline{1, M}$ .

Схема (5)-(8) аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(\tau + h^2)$ .

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (5)-(8), причём, вычислив решение при  $k=0$  из (6), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (5), в граничных из (7), (8).

Очевидна простота реализации явной разностной схемы, но следует иметь в виду её условную устойчивость.

Обозначим

$$A = \begin{cases} \max\{a(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\} & \text{в случае а),} \\ \max\{p(x) \mid 0 \leq x \leq 1\} & \text{в случае б).} \end{cases}$$

Пусть  $\nu = \frac{\tau}{h^2}$ , тогда условие устойчивости примет вид  $A\nu \leq \frac{1}{2}$ .

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (9)$$

но оно может быть использовано и при  $b(x, t) \neq 0$ ,  $c(x, t) \neq 0$ , принимающих “небольшие” значения.

## Порядок вычисления решения

- 1) Из (6) находим  $u_i^0$ ,  $i = \overline{0, N}$ .
- 2) Из (5) находим  $u_i^k = u_i^{k-1} + \tau(L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}))$ ,  $i = \overline{1, N-1}$  при  $k = 1$ .
- 3) Из (7) находим  $u_0^k$  при  $k = 1$ .
- 4) Из (8) находим  $u_N^k$  при  $k = 1$ .

Тем самым, решение при  $k = 1$  найдено, увеличиваем  $k$  на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока  $k \leq M$ .

## 5.4. Схема с весами

Пусть  $\sigma$  — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (3), (4) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k), \quad (12)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta(t_k). \quad (13)$$

Рассмотрим различные значения параметра  $\sigma$ .

1)  $\sigma = 0, \overline{t_k} = t_{k-1}$ .

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(\tau + h^2)$ , если  $\alpha_2(t) = 0$  и  $\beta_2(t) = 0$ . Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет  $O(\tau + h)$ . Порядок действий указан выше в п. 5.3.

2) Если  $\sigma \neq 0$ , то схема (10)-(13) называется неявной двуслойной схемой. Если  $\sigma \neq 1$ , то каждое уравнение в (10) содержит значения решения в шести точках  $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k$ , причем в следующей конфигурации:

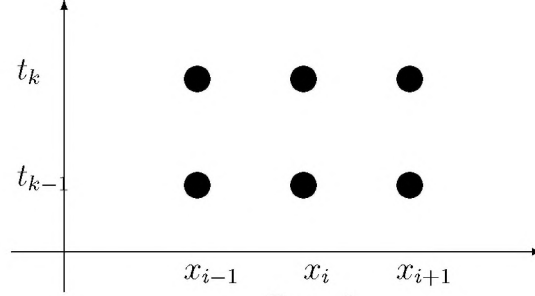


Рис. 3

Так как к моменту определения решения на  $k$ -ом слое решение на предыдущем  $(k-1)$ -ом слое уже известно, систему (10) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k, \quad (14)$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1 - \sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \overline{t_k}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Граничные условия (12), (13) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом  $k$ -ом слое в данном случае приходится решать систему  $(N+1)$  порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_i u_{i-1}^k - B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k &= G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k, \end{aligned} \quad (16)$$

$k = \overline{1, M}$ .

Для решения системы используется метод прогонки, рассмотренный в 1.4.

### Порядок вычисления решения

1) Из (11) находим  $u_i^0, i = \overline{0, N}$ .

---

<sup>1</sup>Коэффициенты  $A, B, C$  в линейной системе (16) могут зависеть от номера слоя  $k$ , но для краткости верхний индекс  $k$  здесь и далее опущен.



2) Из (16) находим  $u_i^k$ ,  $i = \overline{0, N}$  при  $k = 1$ .

Тем самым, решение при  $k = 1$  найдено, увеличиваем  $k$  на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока  $k \leq M$ .

Рекомендуемые значения  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 1/2$ .

При  $\sigma = 1$ ,  $\overline{t_k} = t_k$  получаем разностную схему с опережением или чисто неявную схему с четырехточечным шаблоном (рис. 4).

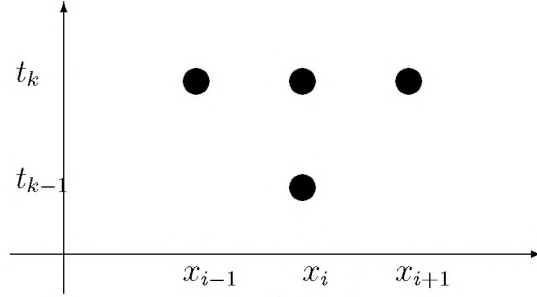


Рис. 4

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(\tau + h^2)$ , если  $\alpha_2(t) = 0$  и  $\beta_2(t) = 0$ . Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации —  $O(\tau + h)$ .

При  $\sigma = 1/2$ ,  $\overline{t_k} = t_k - \tau/2$  получаем разностную схему Кранка-Никольсона с шести-точечным шаблоном (рис. 5).

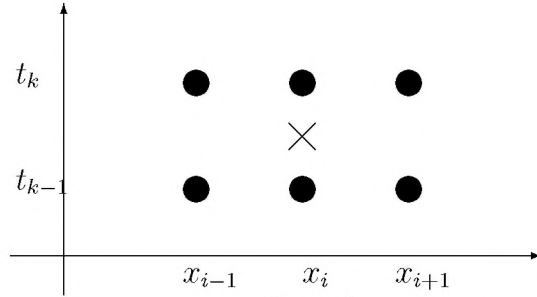


Рис. 5

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(\tau^2 + h^2)$ , если  $\alpha_2(t) = 0$  и  $\beta_2(t) = 0$ . Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет  $O(\tau^2 + h)$ .

Второй порядок аппроксимации по времени достигается за счет того, что аппроксимация уравнения (1) выполняется в точке  $(x_i, t_k - \tau/2)$ , отмеченной на рисунке крестиком.

*Замечание.* Пусть в уравнении (1)

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а граничные условия (3), (4) имеют вид

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + \Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}, \quad (17)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (18)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_N^k = \beta(t_k), \quad k = \overline{1, M}, \quad (19)$$

где свободный член

$$\Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}) = f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} L_h f_i^{k-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{k-\frac{1}{2}} + f_{i+1}^{k-\frac{1}{2}}), \quad t_{k-\frac{1}{2}} = t_k - \frac{\tau}{2}. \quad (20)$$

Пусть  $C_n^m(\overline{D})$  — класс функций, имеющих  $n$  производных по  $x$  и  $m$  производных по  $t$ , непрерывных в  $\overline{D} = [0, 1] \times [0, T]$ .

Тогда, если  $u \in C_6^3$ , разностная схема (17)-(19) при  $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$  аппроксимирует исходную задачу с порядком  $O(h^4 + \tau^2)$  ([7, гл. V, §1. п. 3]) и называется схемой повышенного порядка точности.

*Упражнение.* Какие предположения необходимо сделать о гладкости точного решения  $u(x, t)$  и функции  $p(x)$  для обеспечения объявленных порядков аппроксимации в рассматриваемых разностных схемах?

## 5.5. Задание

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left( \alpha_1(t)u - \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \\ \left( \beta_1(t)u + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} &= \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \end{aligned}$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка  $O(h^2 + \tau)$  с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком  $O(h^2)$ ;
- схему с весами при  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 1/2$  с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком  $O(h)$ .

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий:

- 1) Алгоритм решения задачи.

- 2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 3) Тестирование алгоритма, например, на решениях  $u(x, t) = x^3 + t^3$ ,  $u(x, t) = x^3 * t^3$ ,  $\sin(2t + 1) * \cos(2x)$ ,  $\sin(2t + 1) + \cos(2x)$ , на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 4) Таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по  $t$  и  $x$ , с которыми строится решение, следующего вида ( $N = 5, 10, 20$ )<sup>2</sup>:

Таблица 1

$x/t$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.02						
0.04						
0.06						
0.08						
0.1						

- 5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

$h$	$\tau$	$\ J_{ex} - u^{(h, \tau)}\ $	$\ u^{(h, \tau)} - u^{(2h, \tau_1)}\ $
0.2			
0.1			
0.05			

Здесь  $\tau$ ,  $\tau_1$  выбираются из условия устойчивости явной схемы.

$J_{ex}$  — точное решение.

$$\|V\| = \max |V_{ik}|, \quad i = \overline{0, 5}, \quad k = \overline{0, 5}.$$

Неявная схема

Таблица 3

$h$	$\tau$	$\ J_{ex} - u^{(h, \tau)}\ $	$\ u^{(h, \tau)} - u^{(2h, \tau)}\ $
0.2			
0.1			
0.05			

Здесь  $\tau = 0.1/M$ ,  $M = 10, 100$  (предусмотреть возможность менять  $M$ ).

Проанализировать результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении В.

<sup>2</sup>В качестве  $M$  следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном  $N$ .

## 5.6. Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

### Вариант 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - xu + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$



#### Вариант 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

#### Вариант 5

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

#### Вариант 6

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

#### Вариант 7

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 8

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 9

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(0, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 10

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 11

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

**Вариант 12**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

**Вариант 13**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

**Вариант 14**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

**Вариант 15**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 16

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cos x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 17

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

### Вариант 18

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

## 6. Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа

### 6.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \psi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (4)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (5)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $Lu$  может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Требуется найти в  $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), (3) и граничным условиям (4), (5).

### 6.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных частей. Обозначим  $h = 1/N$ ,  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, N}$ .  
Разобьём отрезок  $[0, T]$  на  $M$  равных частей. Обозначим  $\tau = T/M$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $k = \overline{0, M}$ .  
Построим сетку узлов (рис. 1)  $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$ .

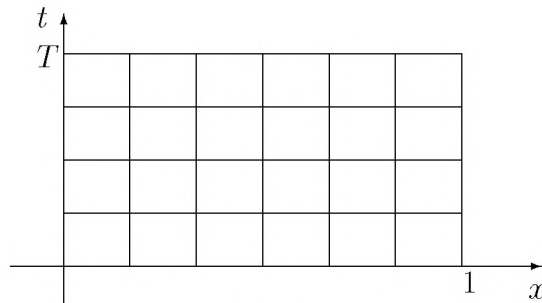


Рис. 1