

# NAVIGACE VZDUCHOLODI

ONDREJ KUREŠ, MAREK MIKLOŠ, LADISLAV TRNKA

ABSTRAKT. V tomto textu se pokusíme odpovědět na otázku, kudy má letět vzducholoď ve stacionárním větrném poli, aby do cíle doletěla v nejkratším možném čase. Teoreticky odvozené závěry pak budeme aplikovat na jednoduché rychlostní pole větru, kde trajektorie z různých bodů a časy letu numericky dořešíme.

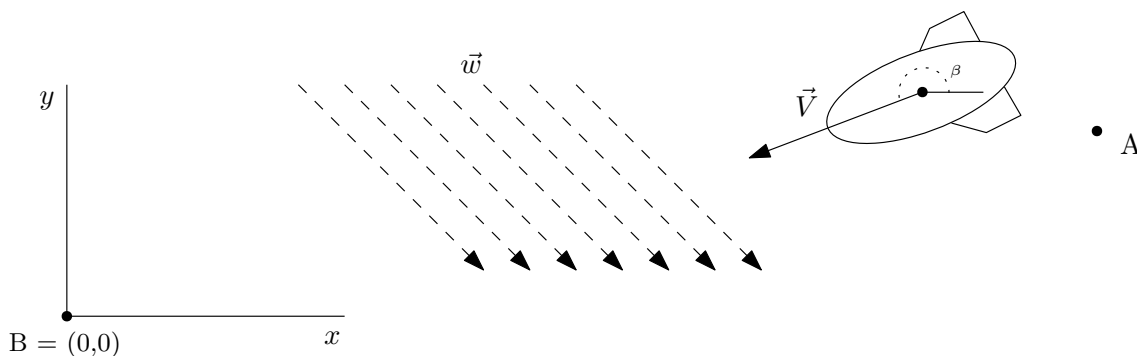
## OBSAH

1. Úvod	1	5.1. Osa X	6
2. Variační počet	2	5.2. Osa Y	6
3. Řešení	3	5.3. Kvadranty	6
4. Jednoduché veterné pole	3	Reference	6
5. Numerické řešení	5		

## 1. ÚVOD

Vzducholoď se pohybuje ve větrném poli  $\mathbf{w}$  a má za cíl překonat vzdálenost z bodu A do bodu B. V tomto textu se budeme zabývat otázkou jak zvolit její trasu, aby dorazila do cíle v nejkratším možném čase. Točení kormidla vzducholodi budeme charakterizovat jejím směrem letu tedy funkcí  $\beta(t)$ . Můžeme se ptát, jak točit kormidlem tak, aby vzducholoď dorazila do cíle co nejdříve.

Trajektorii vzducholodi budeme popisovat v kartézských souřadnicích a to v rovině  $(x, y)$ , zanedbáme popis výšky. Vzducholoď se v bezvětří pohybuje rychlostí  $\mathbf{V}$ . Pro zjednodušení výpočtů uvažujme konstantní rychlost  $\mathbf{V}$ , stacionární pole  $\mathbf{w}$ , cílový bod B jako počátek souřadnic (lze vždy zajistit vhodnou transformací). Dále zanedbáváme zpoždění reakce vzducholodě na stočení kormidla.



OBRÁZEK 1. Nastínění uvažované situace.

Pro okamžitou rychlost vzducholodi platí:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V \cos \beta(t) + u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \beta(t) + v(x, y),\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde  $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$  je hledaná trajektorie,  $\beta \in (0, 2\pi)$  je směr letu a  $\mathbf{w} = [u \ v]^T$  je dané pole větru. Dále známe:

$$\mathbf{x}(t_A) = A,\tag{1.2a}$$

$$\mathbf{x}(t_B) = B = [0 \ 0]^T,\tag{1.2b}$$

kde  $t_A$  je čas startu vzducholodi a  $t_B$  je čas příletu<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Při příletu vzducholoď nebude mít nulovou rychlost.

## 2. VARIÁČNÍ POČET

Náš zájem se proto soustředí na minimalizaci funkcionálu:

$$I(\beta, t_B) =_{\text{def}} \int_{t_A}^{t_B} dt = t_B - t_A, \quad (2.1)$$

při splnění soustavy rovnic (1.1), které kompaktněji přepíšeme jako:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta). \quad (2.2)$$

Chceme tedy minimalizovat cestovní čas a přípustné trajektorie musí splňovat (2.2). Při hledání extremály využijme koncept vázaných extrémů a Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda$ . Proto studujme funkcionál:

$$J(\beta, t_B) =_{\text{def}} \int_{t=t_A}^{t_B} \left( 1 - \lambda \bullet \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta) \right) \right) dt, \quad (2.3)$$

kde funkce  $\lambda$  bude upřesněna později. Nyní hledejme Gâteauxovu derivaci  $J(\beta, t_B)$ :

$$\begin{aligned} DJ(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] &=_{\text{def}} \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\beta_{\text{ext}} + \varepsilon\alpha, t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau) \right|_{\varepsilon=0} \\ &=_{\text{def}} \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau} \left( 1 - \lambda \bullet \left( \frac{d\mathbf{x}_\varepsilon}{dt} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon, \beta) \right) \right) dt \right]_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

při variaci:

$$\beta = \beta_{\text{ext}} + \varepsilon\alpha, \quad (2.5a)$$

$$t_B = t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau, \quad (2.5b)$$

kde  $\mathbf{x}_\varepsilon$  je korespondující trajektorie k  $\beta$  a  $t_B$ . Přičemž stále platí:

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t_A) = \mathbf{x}_{\text{ext}}(t_A) = A, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau) = \mathbf{x}_{\text{ext}}(t_{B,\text{ext}}) = B = \mathbf{0}. \quad (2.6b)$$

Nejdříve upravme (2.4) pomocí integrace per partes na člen  $\lambda \bullet \frac{d\mathbf{x}_\varepsilon}{dt}$ , některé členy budou dle předchozího nulové a dostáváme:

$$\begin{aligned} DJ(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] &= \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left( 1 + \frac{d\lambda}{dt} \bullet \mathbf{x}_\varepsilon + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon, \beta) \right) dt \right]_{\varepsilon=0} + \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t=t_{B,\text{ext}}}^{t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau} \left( 1 + \frac{d\lambda}{dt} \bullet \mathbf{x}_\varepsilon + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon, \beta) \right) dt \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left( 1 + \frac{d\lambda}{dt} \bullet \mathbf{x}_\varepsilon + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon, \beta) \right) dt \right]_{\varepsilon=0} + [1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]_{t=t_{B,\text{ext}}} \tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podle (Průša and Tůma, 2021) použijeme geniální trik:  $\mathbf{x}_\varepsilon \approx \mathbf{x}_{\text{ext}} + \varepsilon\mathbf{y} + \dots$ , kde zanedbáme členy vyššího řádu a kde  $\mathbf{y}$  je funkce času. Tím dále můžeme upravit první člen v poslední rovnosti (2.7):

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left( 1 + \frac{d\lambda}{dt} \bullet \mathbf{x}_\varepsilon + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon, \beta) \right) dt \right]_{\varepsilon=0} = \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left( \left[ \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}}^\top \lambda \right) \bullet \mathbf{y} + \lambda \bullet \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}} \alpha \, dt. \quad (2.8)$$

Nyní můžeme přistoupit k vybrání  $\lambda$  takové, aby bylo splněno:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}}^\top \lambda. \quad (2.9)$$

Po dosazení dostáváme výsledný vztah pro Gâteauxovu derivaci:

$$DJ(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] = \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \lambda \bullet \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \beta} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}} \alpha \, dt + [1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]_{t=t_{B,\text{ext}}} \tau = 0, \quad (2.10)$$

což musí platit pro libovolné  $\alpha$  a  $\tau$ . Tímto dostáváme:

$$\lambda \bullet \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0, \quad (2.11a)$$

$$[1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]_{t=t_{B,\text{ext}}} = 0. \quad (2.11b)$$

Pokusme se vypočítat časovou derivaci funkce  $1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})$ , kam dosadíme z rovnic (2.2), (2.11a) a (2.9):

$$\frac{d}{dt} (1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})) = 0, \quad (2.12)$$

potom funkce  $1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})$  se musí rovnat konstantě po celý časový interval letu, ale z rovnice (2.11b) vyplývá, že je rovna nule pro  $t \in (t_A, t_B)$ . Získáváme systém lineárních algebraických rovnic pro  $\lambda$ :

$$1 + \lambda \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0, \quad (2.13a)$$

$$\lambda \bullet \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0. \quad (2.13b)$$

Řešením této soustavy pro naší pravou stranu (1.1) můžeme získat explicitní vzorec pro  $\lambda$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix} = \frac{1}{V + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \cos \beta_{\text{ext}} + v(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \sin \beta_{\text{ext}}} \begin{bmatrix} \cos \beta_{\text{ext}} \\ \sin \beta_{\text{ext}} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Odkud lze odvodit Zermelova navigační rovnice<sup>2</sup> s použitím rovnice (2.9) a užitím skalárního součinu obou stran rovnice s vektorem  $[-\sin \beta_{\text{ext}} \quad \cos \beta_{\text{ext}}]^\top$ . Na otázku jak se vyvíjí optimální směr letu vzducholodě  $\beta_{\text{ext}}$ , nám právě odpovídá Zermelova navigační rovnice:

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \sin^2 \beta_{\text{ext}} + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \right) \sin \beta_{\text{ext}} \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{\partial u}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \cos^2 \beta_{\text{ext}}. \quad (2.15)$$

Tímto jsme odvodili všechny evoluční rovnice našeho problému.

### 3. ŘEŠENÍ

Máme zadané rychlostní pole větru  $\mathbf{w}$ , známe počáteční bod A a koncový bod B letu:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Optimální trajektorii  $\mathbf{x}_{\text{ext}}$  a nejkratší možný čas letu  $t_B - t_A$  hledáme řešením diferenciálních rovnic:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \quad (3.4a)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}} + v(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \quad (3.4b)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \sin^2 \beta_{\text{ext}} + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \right) \sin \beta_{\text{ext}} \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{\partial u}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) \cos^2 \beta_{\text{ext}}, \quad (3.4c)$$

pro neznámé  $\mathbf{x}_{\text{ext}} = [x_{\text{ext}} \quad y_{\text{ext}}]^\top$  a  $\beta_{\text{ext}}$  při splnění podmínek:

$$\mathbf{x}_{\text{ext}}(t_A) = A, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x}_{\text{ext}}(t_B; \beta_{\text{ext},0}) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

kde  $\beta_{\text{ext}}(t_A) = \beta_{\text{ext},0}$  je počáteční natočení vzducholodě. Neboli abychom mohli řešit soustavu diferenciálních rovnic (3.4), potřebujeme navíc kromě znalosti (1.2) ještě přidat další počáteční podmínku  $\beta_{\text{ext},0}$ , pro kterou platí pouze rovnost (3.6).

Jak si ukážeme v další sekci, pro vhodně zadané rychlostní pole větru lze napsat soustavu rovnic mezi  $\mathbf{x}_{\text{ext}}(t_A)$  a  $\beta_{\text{ext},0}$ .

### 4. JEDNODUCHÉ VETERNÉ POLE

Najjednodušší případ veterného poľa, by sme mohli uvažovať bezvetrie. V takom prípade bude pole charakterizované funkciami:  $u(x, y) = 0$ ,  $v(x, y) = 0$ . Potom:

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = 0, \quad (4.1)$$

z toho:

$$\beta_{\text{ext}} = \beta_{\text{ext},0}, \quad (4.2)$$

čo znamená, že vzducholod' bude natočená priamo na cieľ.

Uvažujme teraz prípad lineárnej závislosti veterného poľa na polohe. V tomto prípade bude pole charakterizované funkciami:

$$u = -\frac{V}{h}y, \quad (4.3)$$

$$v = 0. \quad (4.4)$$

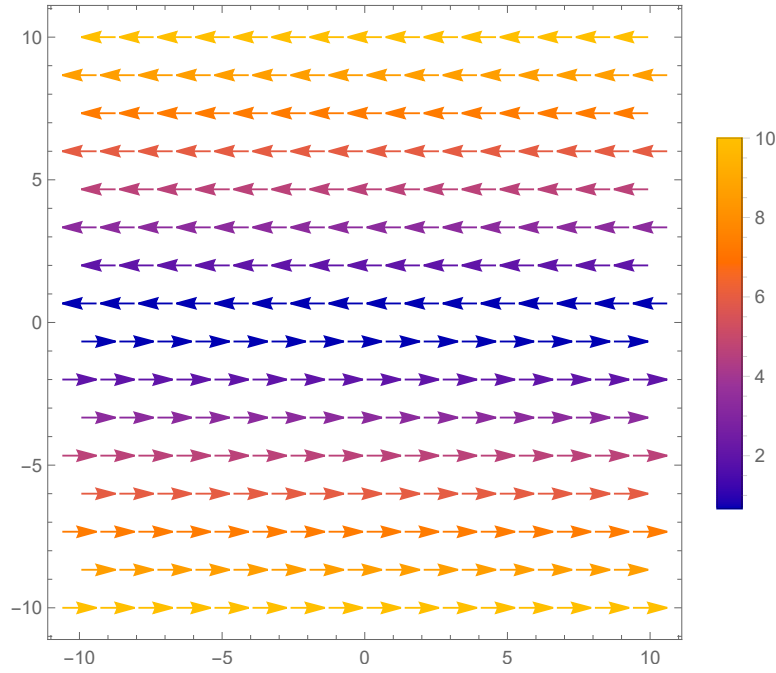
Pre tento špeciálny prípad veterného poľa sa systém diferenciálnych rovíc zjednoduší na:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y, \quad (4.5a)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (4.5b)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}. \quad (4.5c)$$

<sup>2</sup>Ernst Zermelo - přednáška v Praze 1931



OBRÁZEK 2. Rychlostní pole větru.

Poslednú rovnici vieme vyriešiť separáciou premenných:

$$\tan \beta_{\text{ext}} - \tan \beta_{\text{ext},B} = \frac{V}{h}(t - t_B), \quad (4.6)$$

kde sme použili značenie  $\beta_{\text{ext},B} =_{\text{def}} \beta_{\text{ext}}|_{t=t_{B,\text{ext}}}$ . Nakoľko je funkcia  $\beta_{\text{ext}}$  rastúca funkcia času, môžeme zmeniť premenné a prepísať rovnicu 4.5b ako  $\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} \frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}$ , z čoho dostávame:

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \frac{\sin \beta_{\text{ext}}}{\cos^2 \beta_{\text{ext}}}. \quad (4.7)$$

Z toho jednoducho:

$$y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = h \left( \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \right). \quad (4.8)$$

Potrebuje  $y_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext},B}) = 0$ . Nakoniec môžeme uskutočniť rovnakú zmenu premenných v 4.5a, čo dáva:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{d\beta_{\text{ext}}} = h \left( \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos^3 \beta_{\text{ext}}} + \frac{1}{\cos^2 \beta_{\text{ext}} \cos \beta_{\text{ext},B}} \right). \quad (4.9)$$

Riešenie v tvare:

$$x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext}}) = \frac{1}{2} h (-\operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext},B} + \operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext}} - \sec \beta_{\text{ext},B} \tan \beta_{\text{ext},B} + 2 \sec \beta_{\text{ext},B} \tan \beta_{\text{ext}} - \sec \beta_{\text{ext}} \tan \beta_{\text{ext}}), \quad (4.10)$$

potrebujeme aby platilo  $x_{\text{ext}}(\beta_{\text{ext},end}) = 0$ . Teraz môžeme použiť rovnice 4.10 a 4.8. Počiatočné podmienky musia vyhovovať 1.2a, teda dostávame systém rovníc:

$$\mathbf{x}(t_A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} h (-\operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext},B} + \operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \tan \beta_{\text{ext},B} + \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \tan \beta_{\text{ext}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} \tan \beta_{\text{ext}}) \\ h \left( \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Nakoľko poznáme  $\mathbf{x}(t_A)$ , dostávame teda z 4.11 sústavu dvoch nelineárnych algebraických rovníc pre dve neznáme  $\beta_{\text{ext},end}$  a  $\beta_{\text{ext}}$ . Akonáhle nájdeme tieto dve hodnoty, môžeme z rovnice 4.6 vyjadriť konečný čas.

Konečne môžeme konštatovať, že pre výpočet úlohy navigácie lode, potrebujeme pre dané  $V$ ,  $h$  a  $\mathbf{x}(t_A) = [x(t_A) \ y(t_A)]^T$ , vyriešiť systém nelineárnych algebraických rovníc:

$$\begin{bmatrix} x(t_A) \\ y(t_A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} h (-\operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext},B} + \operatorname{arctanh} \sin \beta_{\text{ext}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \tan \beta_{\text{ext},B} + \frac{2}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \tan \beta_{\text{ext}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} \tan \beta_{\text{ext}}) \\ h \left( \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext}}} - \frac{1}{\cos \beta_{\text{ext},B}} \right) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

a dostaneme hodnoty  $\beta_{\text{ext}}$  a  $\beta_{\text{ext},B}$ . Z rovnice

$$\tan \beta_{\text{ext},A} - \tan \beta_{\text{ext},B} = \frac{V}{h}(t_A - t_B), \quad (4.13)$$

nájdeme konečný čas  $t_B$ . Optimálna trajektória je daná ako riešenie systému diferenciálnych rovníc prvého stupňa:

$$\frac{dx_{\text{ext}}}{dt} = V \cos \beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h} y_{\text{ext}}, \quad (4.14a)$$

$$\frac{dy_{\text{ext}}}{dt} = V \sin \beta_{\text{ext}}, \quad (4.14b)$$

$$\frac{d\beta_{\text{ext}}}{dt} = \frac{V}{h} \cos^2 \beta_{\text{ext}}, \quad (4.14c)$$

ktoré sa riešia v časovom intervale  $t \in (t_A, t_B)$ , s ohľadom na počiatočné podmienky:

$$x_{\text{ext}}|_{t=t_A} = x_A, \quad (4.15a)$$

$$y_{\text{ext}}|_{t=t_A} = y_A, \quad (4.15b)$$

$$\beta_{\text{ext}}|_{t=t_A} = \beta_{\text{ext},A}. \quad (4.15c)$$

Problém 4.12 až 4.15 sa dá vyriešiť numerickými metódami.

## 5. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Jak jsme už naznačili, naše jednoduché větrné pole se dá vyřešit numericky<sup>3</sup>. Rozhodli jsme se pracovat s následujícími hodnotami<sup>4</sup>:

```
1 V = 10;
2 h1 = 1;
3 h2 = 10;
4 h3 = 0.1;
5 x1 = "in. condition X";
6 x2 = "in. condition Y"
```

### VÝPIS KÓDU 1. Hodnoty

Pro rychlost vzducholodě  $V$  jsme si brali jen jednu hodnotu. Při našich výpočtech se ukázalo, že různé hodnoty  $V$  nemají vliv na trajektorii, takže ani na startovní úhel  $\beta_{\text{ext},A}$ . Ovlivněna je jen doba letu.

Nazveme x-ovou část vektoru (4.12)  $X1$  a y-ovou část stejného vektoru  $X2$ . Za  $x(t_A)$  dáme  $x1$  a za  $y(t_A)$  dáme  $x2$ . Získáme dvě rovnice:  $X1 = x1$  a  $X2 = x2$ . V těchto rovnicích se nachází hodnota  $h$ , za kterou postupně dosazujeme hodnoty " $h1 - h3$ ". Pojdme vyřešit tuto soustavu nelineárních algebraických rovnic.

Pro numerické řešení použijeme metodu *FindRoot*.

```
1 res = FindRoot[{X1 == x1, X2 == x2}, {{B1, "0-2π"}, {B2, "0-2π"}}]
```

### VÝPIS KÓDU 2. Metoda řešení

Metoda *FindRoot* byla jediná, která v našich výpočtech fungovala. Bohužel je v tomto případě ne až tak praktická, kvůli dlouhému hledání nejvhodnějších parametrů  $B1$  a  $B2$ .

Řešení (4.12) můžeme pak použijeme k výpočtu času, za který se dostane vzducholod' z bodu A do bodu B.

```
1 beta_ext,A = B1 /. res;
2 beta_ext,B = B2 /. res;
3 time = -(h/V) (Tan[beta_ext,A] - Tan[beta_ext,B])
```

### VÝPIS KÓDU 3. Výpočet času

Nakonec si vykreslíme trajektorie.

```
1 rce = {x'[t] == V*Cos[beta[t]] - (V/"h1-h3")y[t];
2 y'[t] == V*Sin[beta[t]];
3 beta'[t] == (V/"h1-h3")(Cos[beta[t]])^2};
4
5 sol = NDSolve[Join[rce, {x[0] == x1, y[0] == x2, beta[0] == beta_ext,A}, {x, y, beta},{t, 0, 3600}];
6
7 ParametricPlot[Table[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, time}, AxesLabel -> {x, y}, PlotRange -> All]
```

### VÝPIS KÓDU 4. Vykreslení trajektorie

<sup>3</sup>Veškeré výpočty jsou provedeny v programu Wolfram Mathematica, verze 12.2.

<sup>4</sup>Naše hodnoty mají následující jednotky:  $V$  a " $h1 - h3$ " -  $\text{km h}^{-1}$ ,  $x1$  a  $x2$  - km.

### 5.1. Osa X.

Začneme s případem - start z osy  $x$ . Startujeme tak, že vplujeme do větrného pole z bezvětří a pomalu/rychle se necháme unášet k našemu cíli. Tento případ je nejintuitivnější. Zhruba si dokážeme představit trajektorii, podél které se vzducholoď pohybuje.

Pro lepší představu se můžeme podívat na obrázky (3), (4) a (5), kde vykresluje trajektorie pro různé hodnoty  $h$ . Pro porovnání těchto trajektorií se můžeme kouknout na obrázek (6). V tabulce (7a) máme délku doby letu v hodinách a v tabulce (7b) máme startovní úhel v radiánech.

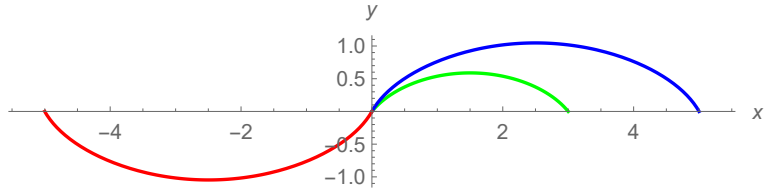
### 5.2. Osa Y.

Koukneme se na start z osy  $y$ . Tento případ začíná být už zajímavější. Pro velká  $h$  a malá  $y$  je trajektorie podobná trajektorii, která začíná z osy  $x$ . Na obrázku (8a) lze pozorovat, že čím je  $y$  dále od počátku, tak se trajektorie protahuje. Toto samé platí, když hodnotu  $h$  snižujeme, což lze pozorovat na obrázku (8b). V tabulkách (8c) a (8d) máme časy a startovní úhly pro různé pozice. Když porovnáme časy, které jsem získali při studování startů z osy  $x$  a osy  $y$ , můžeme si všimnout, že jsme zpravidla rychleji v cíli, když startujeme z osy  $x$ .

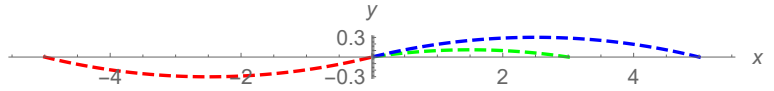
### 5.3. Kvadranty.

Zamíříme k obecnějšímu případu - start z kvadrantů. Vybrali jsme jen tři různé počáteční podmínky ze dvou kvadrantů (1. a 2.). Proč jen ze dvou kvadrantů? Jak jsme mohli vypořádat ze startů z os  $x$  a  $y$ , tak trajektorie jsou středově souměrná podle počátku (pokud je i jejich počáteční startovní bod středově souměrný podle počátku)<sup>5</sup>, takže není nutné studovat chování v 3. a 4. kvadrantu.

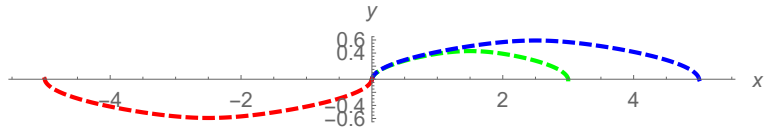
Na obrázku (9a) můžeme pozorovat, jak se mění tvary trajektorií v závislosti na počátečních podmínkách. Na obrázku (9b) lze vidět, že když zvětšíme  $h$ , tak trajektorie budou mít tendenci mířit přímo do cíle. V tabulkách (9d) a (9e) uvádíme zase dobu letu a startovní úhel.



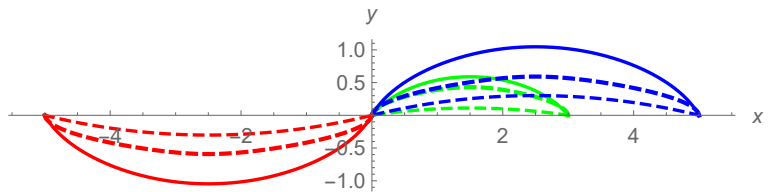
OBRÁZEK 3. Trajektorie, start osa  $x$ ,  $h = 1$



OBRÁZEK 4. Trajektorie, start osa  $x$ ,  $h = 10$



OBRÁZEK 5. Trajektorie, start osa  $x$ ,  $h = 0.1$



OBRÁZEK 6. Trajektorie, start osa  $x$

Start [X,Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
3 0	0.2469546	0.2988911	0.1042143
5 0	0.3572301	0.494992	0.1369385
-5 0	0.3572301	0.494992	0.1369385

(A) Doba letu v hodinách

Start [X,Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
3 0	2.251524	2.993245	1.760403
5 0	2.08118	2.898972	1.715822
-5 0	5.222773	6.040565	4.857415

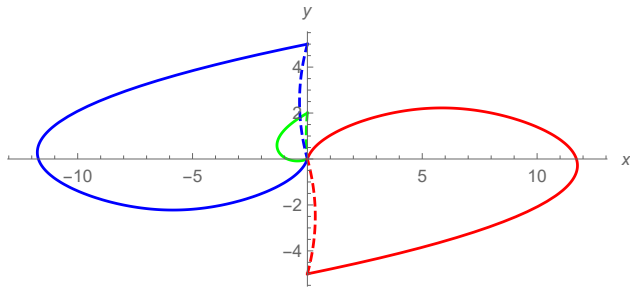
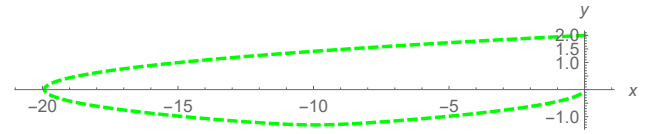
(B) Startovní úhel  $\beta_{\text{ext}}(t_A)$  v radiánech

OBRÁZEK 7. Osa  $x$

### REFERENCE

Průša, V. and K. Tůma. How to navigate zeppelin. 2021.

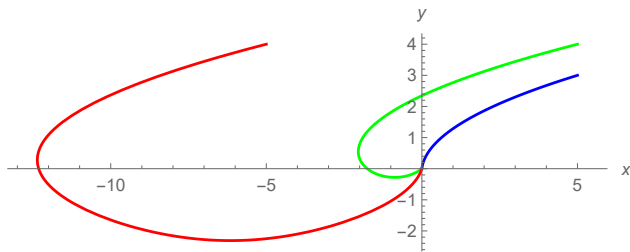
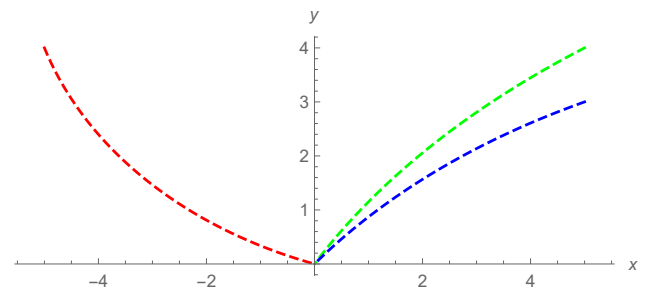
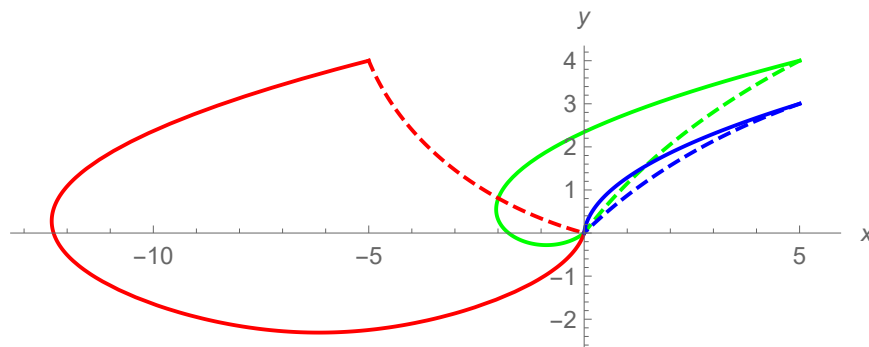
<sup>5</sup>Tato vlastnost plyne ze symetrie větrného pole - je také středově souměrné podle počátku.

(A)  $h = 1$  (nečárkované),  $h = 10$  (čárkované)(B)  $h = 0.1$ 

Start	[X Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
$\theta$	2	0.3344854	0.2010075	0.4798031
$\theta$	5	1.122496	0.5163739	1.205635
$\theta$	-5	1.122496	0.5163739	1.205635

(c) Doba letu v hodinách

Start	[X Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
$\theta$	2	5.042334	4.811555	4.741792
$\theta$	5	4.834308	4.94928	4.724114
$\theta$	-5	1.692715	1.807687	1.582521

(D) Startovní úhel  $\beta_{\text{ext}}(t_A)$  v radiánechOBRÁZEK 8. Osa  $y$ (A)  $h = 1$ (B)  $h = 10$ 

(c) Trajektorie, startů v kvadrantech

Start	[X,Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
5	4	0.598308	0.5561394	0.9459117
5	3	0.3033075	0.5157925	0.6976717
-5	4	1.039785	0.7548947	0.9813792

(D) Doba letu v hodinách

Start	[X,Y]	$h = 1$	$h = 10$	$h = 0.1$
5	4	4.902939	3.801725	4.727247
5	3	4.528105	3.583146	4.73243
-5	4	4.849607	5.481327	4.726865

(E) Startovní úhel  $\beta_{\text{ext}}(t_A)$  v radiánech

OBRÁZEK 9. Kvadranty