NAVIGACE VZDUCHOLODI

ONDREJ KUREŠ, MAREK MIKLOŠ, LADISLAV TRNKA

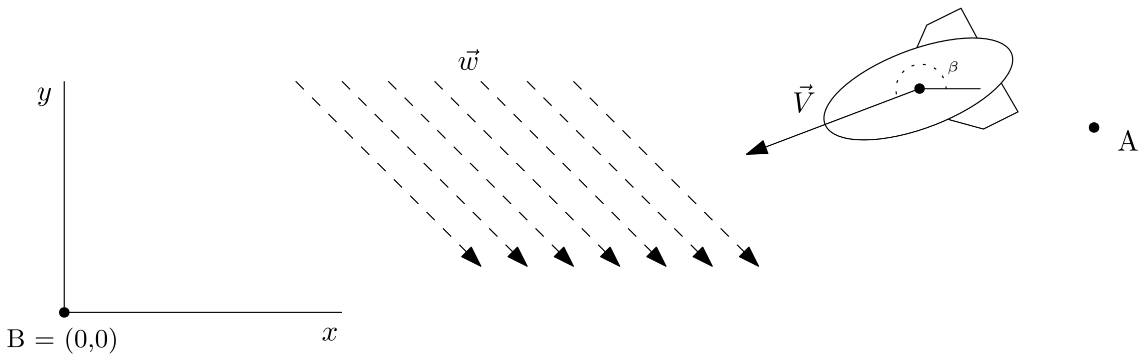
Abstrakt. Řešíme problém navržený (?)

Obsah

1. Úvod

Vzducholoď se pohybuje ve větrném poli $\boldsymbol{w}$ a má za cíl překonat vzdálenost z bodu A do bodu B. V tomto textu se budeme zabývat otázkou jak zvolit její trasu, aby dorazila do cíle v nejkratším možném čase. Točení kormidla vzducholodi budeme charakterizovat jejím směrem letu tedy funkcí $\beta(t)$. Můžeme se ptát, jak točit kormidlem tak, aby vzducholoď dorazila do cíle co nejdříve.

Trajektorii vzducholodi budeme popisovat v kartézských souřadnicích a to v rovině (x, y), zanedbáme popis výšky. Vzducholoď se v bezvětří pohybuje rychlostí $\boldsymbol{V}$. Pro zjednodušení výpočtů uvažujme konstantní rychlost $\boldsymbol{V}$, stacionární pole $\boldsymbol{w}$, cílový bod B jako počátek souřadnic (lze vždy zajistit vhodnou transformací). Dále zanedbáváme zpoždění reakce vzducholodě na stočení kormidla.



Obrázek 1. Nastínění uvažované situace.

Pro okamžitou rychlost vzducholodi platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= V \cos\beta(t) + u(x,y), \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= V \sin\beta(t) + v(x,y),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

kde $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^\top$ je hledaná trajektorie, $\beta \in \langle 0, 2\pi)$ je směr letu a $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^\top$ je dané pole větru. Dále známe:

$$\boldsymbol{x}(t_A) = A, \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{x}(t_B) = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \tag{1.2b}$$

kde t_A je čas startu vzducholodi a t_B je čas příletu[1].

[1] Při příletu vzducholoď nebude mít nulovou rychlost.

2. Variační počet

Náš zájem se proto soustřeďuje na minimalizaci funkcionálu:

$$I(\beta, t_B) =_{\text{def}} \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t = t_B - t_A, \tag{2.1}$$

při splnění soustavy rovnic (1.1), které kompaktněji přepišme jako:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \beta). \tag{2.2}$$

Chceme tedy minimalizovat cestovní čas a přípustné trajektorie musí splňovat (2.2). Při hledání extremály využijme koncept vázaných extrémů a Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$. Proto studujme funkcionál:

$$J(\beta, t_B) =_{\text{def}} \int_{t=t_A}^{t_B} \left(1 - \boldsymbol{\lambda} \bullet \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \beta)\right)\right) \mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

kde funkce $\boldsymbol{\lambda}$ bude upřesněna později. Nyní hledejme Gâteauxovu derivaci $J(\beta, t_B)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}J(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] &=_{\text{def}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(\beta_{\text{ext}} + \varepsilon\alpha, t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &=_{\text{def}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}+\varepsilon\tau} \left(1 - \boldsymbol{\lambda} \bullet \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\varepsilon}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\varepsilon, \beta)\right)\right) \mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

při variaci:

$$\beta = \beta_{\text{ext}} + \varepsilon\alpha, \tag{2.5a}$$

$$t_B = t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau, \tag{2.5b}$$

kde $\boldsymbol{x}_\epsilon$ je korespondující trajektorie k β a t_B. Přičemž stále platí:

$$\boldsymbol{x}_\epsilon(t_A) = \boldsymbol{x}_{\text{ext}}(t_A) = A, \tag{2.6a}$$

$$\boldsymbol{x}_\epsilon(t_{B,\text{ext}} + \varepsilon\tau) = \boldsymbol{x}_{\text{ext}}(t_{B,\text{ext}}) = B = \mathbf{0}. \tag{2.6b}$$

Nejdříve upravme (2.4) pomocí integrace per partes na člen $\boldsymbol{\lambda} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}$, některé členy budou dle předchozího nulové a dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}J(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left(1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \bullet \boldsymbol{x}_\varepsilon + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\varepsilon, \beta)\right) \mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{t=t_{B,\text{ext}}}^{t_{B,\text{ext}}+\varepsilon\tau} \left(1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \bullet \boldsymbol{x}_\varepsilon + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\varepsilon, \beta)\right) \mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left(1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \bullet \boldsymbol{x}_\varepsilon + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\varepsilon, \beta)\right) \mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} + [1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]|_{t=t_{B,\text{ext}}} \tau. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podle (**?**) použijeme geniální trik: $\boldsymbol{x}_\varepsilon \approx \boldsymbol{x}_{\text{ext}} + \epsilon \boldsymbol{y} + \cdots$, kde zanedbáme členy vyššího řádu a kde $\boldsymbol{y}$ je funkce času. Tím dále můžeme upravit první člen v poslední rovnosti (2.7):

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left(1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \bullet \boldsymbol{x}_\varepsilon + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\varepsilon, \beta)\right) \mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \left(\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}}^{\top} \boldsymbol{\lambda}\right] \bullet \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\lambda} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}} \alpha\right) \mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Nyní můžeme přistoupit k vybrání $\boldsymbol{\lambda}$ takové, aby bylo splněno:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}}^{\top} \boldsymbol{\lambda}. \tag{2.9}$$

Po dosazení dostáváme výsledný vztah pro Gâteuxovu derivaci:

$$\mathrm{D}J(\beta, t_B)[(\alpha, \tau)] = \int_{t=t_A}^{t_{B,\text{ext}}} \boldsymbol{\lambda} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta=\beta_{\text{ext}}} \alpha \, \mathrm{d}t + [1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]|_{t=t_{B,\text{ext}}} \tau = 0, \tag{2.10}$$

což musí platit pro libovolné α a τ. Tímto dostáváme:

$$\boldsymbol{\lambda} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0, \tag{2.11a}$$

$$[1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})]|_{t=t_{B,\text{ext}}} = 0. \tag{2.11b}$$

Pokusme se vypočítat časovou derivaci funkce $1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})$, kam dosadíme z rovnic (2.2), (2.11a) a (2.9):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})) = 0, \tag{2.12}$$

potom funkce $1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}})$ se musí rovnat konstantě po celý časový interval letu, ale z rovnice (2.11b) vyplývá, že je rovna nule pro $t \in (t_A, t_B)$. Získáváme systém lineárních algebraických rovnic pro $\boldsymbol{\lambda}$:

$$1 + \boldsymbol{\lambda} \bullet \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0, \tag{2.13a}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \bullet \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta}(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}, \beta_{\text{ext}}) = 0. \tag{2.13b}$$

Řešením této soustavy pro naší pravou stranu (1.1) můžeme získat explicitní vzorec pro $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{bmatrix}\lambda_x\\ \lambda_y\end{bmatrix} = \frac{1}{V + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\cos\beta_{\text{ext}} + v(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\sin\beta_{\text{ext}}}\begin{bmatrix}\cos\beta_{\text{ext}}\\ \sin\beta_{\text{ext}}\end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Odkud lze odvodit Zermelova navigační rovnice[2] s použitím rovnice (2.9) a užitím skalárního součinu obou stran rovnice s vektorem $\begin{bmatrix}-\sin\beta_{\text{ext}} & \cos\beta_{\text{ext}}\end{bmatrix}^\top$. Na otázku jak se vyvíjí optimální směr letu vzducholodě β_{ext}, nám právě odpovídá Zermelova navigační rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\sin^2\beta_{\text{ext}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\right)\sin\beta_{\text{ext}}\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{\partial u}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\cos^2\beta_{\text{ext}}. \tag{2.15}$$

Tímto jsme odvodili všechny evoluční rovnice našeho problému.

3. Řešení

Máme zadané rychlostní pole větru $\boldsymbol{w}$, známe počáteční bod A a koncový bod B letu:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$A = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$B = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Optimální trajektorii $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}$ a nejkratší možný čas letu $t_B - t_A$ hledáme řešením diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} + u(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \tag{3.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\text{ext}} + v(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}), \tag{3.4b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\sin^2\beta_{\text{ext}} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}}) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\right)\sin\beta_{\text{ext}}\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{\partial u}{\partial y}(x_{\text{ext}}, y_{\text{ext}})\cos^2\beta_{\text{ext}}, \tag{3.4c}$$

pro neznámé $\boldsymbol{x}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix}x_{\text{ext}} & y_{\text{ext}}\end{bmatrix}^\top$ a β_{ext} při splnění podmínek:

$$\boldsymbol{x}_{\text{ext}}(t_A) = A, \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{x}_{\text{ext}}(t_B; \beta_{\text{ext},0}) = \mathbf{0}, \tag{3.6}$$

kde $\beta_{\text{ext}}(t_A) = \beta_{\text{ext},0}$ je počáteční natočení vzducholodě. Neboli abychom mohli řešit soustavu diferenciálních rovnic (3.4), potřebujeme navíc kromě znalosti (1.2) ještě přidat další počáteční podmínku $\beta_{\text{ext},0}$, pro kterou platí pouze rovnost (3.6).

Jak si ukážeme v další sekci, pro vhodně zadané rychlostní pole větru lze napsat soustavu rovnic mezi $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}(t_A)$ a $\beta_{\text{ext},0}$.

4. Jednoduché veterné pole

Najjednoduchší prípad veterného poľa, by sme mohli uvažovať bezvetrie. V takom prípade bude pole charakterizované funkciami: $u(x,y) = 0$, $v(x,y) = 0$. Potom:

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{4.1}$$

z toho:

$$\beta_{\text{ext}} = \beta_{\text{ext},0}, \tag{4.2}$$

čo znamená, že vzducholoď bude natočená priamo na cieľ.

Uvažujme teraz prípad lineárnej závislosti veterného poľa na polohe. V tomto prípade bude pole charakterizované funkciami:

$$u = -\frac{V}{h}y, \tag{4.3}$$

$$v = 0. \tag{4.4}$$

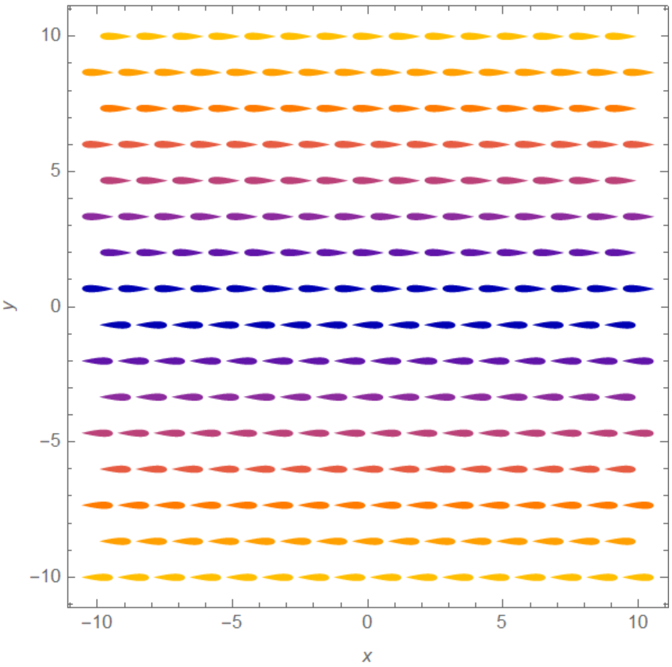
Pre tento špeciálny prípad veterného poľa sa systém diferenciálnych rovíc zjednoduší na:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\text{ext}} - \frac{V}{h}y, \tag{4.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\text{ext}}, \tag{4.5b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h}\cos^2\beta_{\text{ext}}. \tag{4.5c}$$

[2]Ernst Zermelo - přednáška v Praze 1931



Obrázek 2. Rychlostní pole větru.

Poslednú rovnicu vieme vyriešiť separáciou premenných:

$$\tan\beta_{\mathrm{ext}} - \tan\beta_{\mathrm{ext},B} = \frac{V}{h}(t - t_B), \tag{4.6}$$

kde sme použili značenie $\beta_{\mathrm{ext},B} =_{\mathrm{def}} \beta_{\mathrm{ext}}|_{t=t_{B,\mathrm{ext}}}$. Nakoľko je funkcia β_{ext} rastúca funkcia času, môžeme zmeniť premenné a prepísať rovnicu 4.5b ako $\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\mathrm{ext}}$, z čoho dostávame:

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}} = h\frac{\sin\beta_{\mathrm{ext}}}{\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}}. \tag{4.7}$$

Z toho jednoducho:

$$y_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext}}) = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext},B}}\right). \tag{4.8}$$

Potrebujeme $y_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext},B}) = 0$. Nakoniec môžeme uskutočniť rovnakú zmenu premenných v 4.5a, čo dáva:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}} = h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos^3\beta_{\mathrm{ext}}} + \frac{1}{\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}\cos\beta_{\mathrm{ext},B}}\right). \tag{4.9}$$

Riešenie v tvare:

$$x_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext}}) = \frac{1}{2}h(-\operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext},B} + \operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext},B} + 2\sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext}}\tan\beta_{\mathrm{ext}}), \tag{4.10}$$

potrebujeme aby platilo $x_{\mathrm{ext}}(\beta_{\mathrm{ext},end}) = 0$. Teraz môžeme použiť rovnice 4.10 a 4.8. Počiatočné podmienky musia vyhovovať 1.2a, teda dostávame systém rovníc:

$$\boldsymbol{x}(t_A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h(-\operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext},B} + \operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext},B} + 2\sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext}}\tan\beta_{\mathrm{ext}}) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext},B}}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Nakoľko poznáme $\boldsymbol{x}(t_A)$, dostávame teda z 4.11 sústavu dvoch nelineárnych algebraických rovníc pre dve neznáme $\beta_{\mathrm{ext},end}$ a β_{ext}. Akonáhle nájdeme tieto dve hodnoty, môžeme z rovnice 4.6 vyjadriť konečný čas.

Konečne môžeme konštatovať, že pre výpočet úlohy navigácie lode, potrebujeme pre dané V, h a $\boldsymbol{x}(t_A) = \begin{bmatrix} x(t_A) & y(t_A) \end{bmatrix}^\top$, vyriešiť systém nelineárnych algebraických rovníc:

$$\begin{bmatrix} x(t_A) \\ y(t_A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h(-\operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext},B} + \operatorname{arctanh}\sin\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext},B} + 2\sec\beta_{\mathrm{ext},B}\tan\beta_{\mathrm{ext}} - \sec\beta_{\mathrm{ext}}\tan\beta_{\mathrm{ext}}) \\ h\left(\frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext}}} - \frac{1}{\cos\beta_{\mathrm{ext},B}}\right) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

a dostaneme hodnoty β_{ext} a $\beta_{\mathrm{ext},B}$. Z rovnice

$$\tan\beta_{\mathrm{ext},A} - \tan\beta_{\mathrm{ext},B} = \frac{V}{h}(t_A - t_B), \tag{4.13}$$

nájdeme konečný čas t_B. Optimálna trajektória je daná ako riešenie systému diferenciálnych rovníc prvého stupňa:

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\cos\beta_{\mathrm{ext}} - \frac{V}{h}y_{\mathrm{ext}}, \tag{4.14a}$$
$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = V\sin\beta_{\mathrm{ext}}, \tag{4.14b}$$
$$\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{h}\cos^2\beta_{\mathrm{ext}}, \tag{4.14c}$$

ktoré sa riešia v časovom intervale $t \in (t_A, t_B)$, s ohľadom na počiatočné podmienky:

$$x_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_A} = x_A, \tag{4.15a}$$
$$y_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_A} = y_A, \tag{4.15b}$$
$$\beta_{\mathrm{ext}}\big|_{t=t_A} = \beta_{\mathrm{ext},A}. \tag{4.15c}$$

Problém 4.12 až 4.15 sa dá vyriešiť numerickými metódami.

5. Numerické řešení

Jak jsme už naznačili, naše jednoduché větrné pole se dá vyřešit numericky[3]. Rozhodli jsme se pracovat s následujícími hodnotami[4]:

```
V = 10;
h1 = 1;
h2 = 10;
h3 = 0.1;
x1 = "in. condition X";
x2 = "in. condition Y"
```

Listing 1. Hodnoty

Pro rychlost vzducholodě V jsme si brali jen jednu hodnotu. Při našich výpočtech se ukázalo, že různé hodnoty V nemají vliv na trajektorii, takže ani na startovní úhel $\beta_{ext,A}$. Ovlivněna je jen doba letu.

Nazveme x-ovou část vektoru (4.12) $X1$ a y-ovou část stejného vektoru $X2$. Za $x(t_A)$ dáme $x1$ a za $y(t_A)$ dáme $x2$. Získáme dvě rovnice: $X1 = x1$ a $X2 = x2$. V těchto rovnicích se nachází hodnota h, za kterou postupně dosazujeme hodnoty "$h1 - h3$". Pojďme vyřešit tuto soustavu nelineárních algebraických rovnic.

Pro numerické řešení použijeme metodu *FindRoot*.

```
res = FindRoot[{X1 == x1, X2 == x2}, {{B1, "0-2π"}, {B2, "0-2π"}}]
```

Listing 2. Metoda řešení

Metoda *FindRoot* byla jediná, která v našich výpočtech fungovala. Bohužel je v tomto případě ne až tak praktická, kvůli dlouhému hledání nejvhodnějších parametrů $B1$ a $B2$.

Řešení (4.12) můžeme pak použijeme k výpočtu času, za který se dostane vzducholoď z bodu A do bodu B.

```
β_ext,A = B1 /.res;
β_ext,B = B2 /.res;
time = -(h/V)(Tan[β_ext,A] - Tan[β_ext,B])
```

Listing 3. Výpočet času

Nakonec si vykreslíme trajektorie.

```
rce = {x'[t] == V*Cos[β[t]] - (V/"h1-h3")y[t];
y'[t] == V*Sin[β[t]];
β'[t] == (V/"h1-h3")(Cos[β[t]])^2};

sol = NDSolve[Join[rce, {x[0] == x1, y[0] == x2, β[0] == β_ext,A], {x, y, β},{t, 0, 3600}];

ParametricPlot[Table[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, time}, AxesLabel -> {x, y}, PlotRange -> All
  ]
```

Listing 4. Vykreslení trajektorie

5.1. Osa X.

Začneme s velmi pěkným případem - start z osy X.

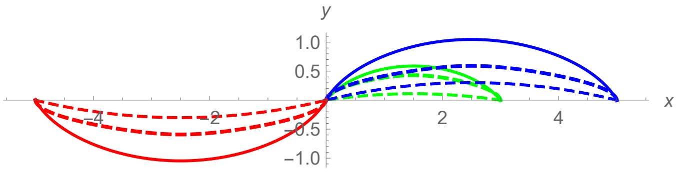
Startujeme tak, že vplujeme do větrného pole z bezvětří a pomalu/rychle se necháme unášet k našemu cíli. Tento případ je nejintuitivnější. Zhruba si dokážeme představit trajektorii, podél které se vzducholoď pohybuje.

Pro lepší představu se můžeme kouknout na obrázky (4), (5) a (6), kde vykreslujeme trajektorie pro různé hodnoty h. Pro porovnání těchto trajektorií se můžeme kouknout na obrázek (3).

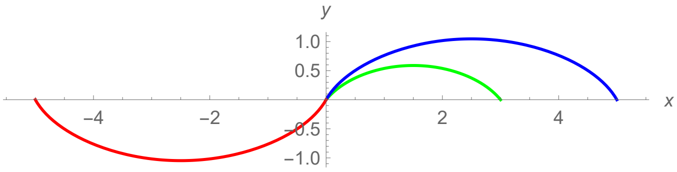
---

[3] Veškeré výpočty jsou provedeny v programu Wolfram Mathematica, verze 12.2.

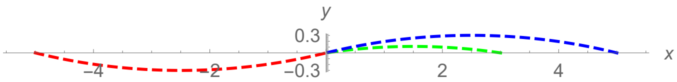
[4] Naše hodnoty mají následující jednotky: V a "$h1 - h3$" - $\mathrm{km\,h^{-1}}$, $x1$ a $x2$ - km.



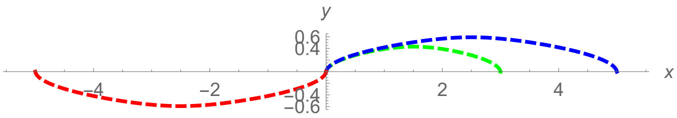
Obrázek 3. Trajektorie



Obrázek 4. Trajektorie pro h=1



Obrázek 5. Trajektorie pro h=10



Obrázek 6. Trajektorie pro h=0.1

5.2. **Osa Y.**

5.3. **Kvadranty.**

Start [X,Y]		h = 1	h = 10	h = 0.1
3	0	0.2469546	0.2988911	0.1042143
5	0	0.3572301	0.494992	0.1369385
-5	0	0.3572301	0.494992	0.1369385

Obrázek 7. Trajektorie pro h=0.1

Start [X,Y]		h = 1	h = 10	h = 0.1
3	0	2.251524	2.993245	1.760403
5	0	2.08118	2.898972	1.715822
-5	0	5.222773	6.040565	4.857415

Obrázek 8. Trajektorie pro h=0.1