Inverzné Kyvadlo

Marek Mikloš, Ondřej Kureš, Ladislav Trnka

Charles University, Czech Republic

16. dubna 2021

Inverzné Kyvadlo

Cart and pole apparatus, tiltmeter, Kapitza's pendulum.
Lagrangeov pohľad.

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2l \sin\theta \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) - mg\left(\xi - l\cos\theta\right)$$

Pohybová rovnice:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\Omega^2}{l}\cos\Omega t\right)\sin\theta = 0$$

Inverzné Kyvadlo

Mathieuho rovnica.
Perturbačná metóda určenia hraníc, α, β.

Linearizovaná rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\Omega^2}{l}\cos\Omega t\right)\theta = 0$$

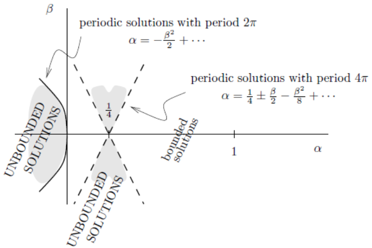
Přeznačení - parametry:

$$t^\star \stackrel{\text{def}}{=} \Omega t$$
$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$
$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{A}{l}$$

Mathieu rovnica:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta^\star}{\mathrm{d}t^{\star 2}} + (\alpha + \beta\cos t^\star)\,\theta^\star = 0$$

Inverzné Kyvadlo



- Ak sú hodnoty parametrov α a β z tmavej oblasti so stredom v bode $\alpha = \frac{1}{4}$, potom môže byť kyvadlo destabilizované osciláciou pivotu.
- Pre vhodne zvolené hodnoty parametrov α, β dosiahneme stabilizáciu kyvadla v hornej časti pri splnenej nutnej podmienke stability (pri zápornom α):

$$\frac{A}{l}\frac{\Omega}{\omega_0} \geq \sqrt{2}.$$