Aplikace spektrální metody

Dominika Hájková, Matyáš Fuksa, Ondřej Kureš

Stormtrooperz

2021

Spektrální metoda - Co to je?

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{1}{5}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x),$$

a musíme najít řešení u(x) na intervalu $(-1, 1)$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u\big|_{x=-1} &= \alpha, \\ u'\big|_{x=1} &= \beta. \end{aligned}$$

Spektrální metodu použijeme takto: Místo, abychom řešili rovnici pro všechna $x \in (-1, 1)$, budeme ji jen řešit pro určité interpolační body $\{x_j\}_{j=1}^{N+2}$. Tyto interpolační body budou Čebyševovy body.

Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

$$\left(\frac{1}{5}\mathbb{D}^2_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{D}_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{I}_{(N+2)\times(N+2)}\right)\vec{u}_{N+2} = \vec{f}_{N+2},$$

$$\vec{u}_{N+2} =_{def} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}) \\ u(x_{N+2}) \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}_{N+2} =_{def} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N+1}) \\ f(x_{N+2}) \end{bmatrix}$$

Trám na jiný způsob - Kód

```
f = @(x) 75*9.81*exp(-x.^2/(2*0.01)); alpha = 0; beta = 0; gama = 0 ;delta = 0; n = 18; E = 9.4*10^6; Izz = 3;l = 10;X = [-l/2,l/2];
L = E*Izz*diffmat([n n+4],4,X);
vT = diffrow(n+4,0,-l/2,X); wT = diffrow(n+4,0,l/2,X); uT = diffrow(n+4,1,-l/2,X); sT = diffrow(n+4,1,l/2,X);
A = [L; vT; wT; uT; sT];
rhs = [gridsample(f,n); alpha; beta; gama; delta];
u = A\rhs;
tiledlayout(2,1)
nexttile
plot(chebfun(-u,X),'.-');ylim([-1 1]);
nexttile
plot(chebfun(-u,X),'.-');ylim([-0.001 0.001])
```

Trám na jiný způsob - Obrázky

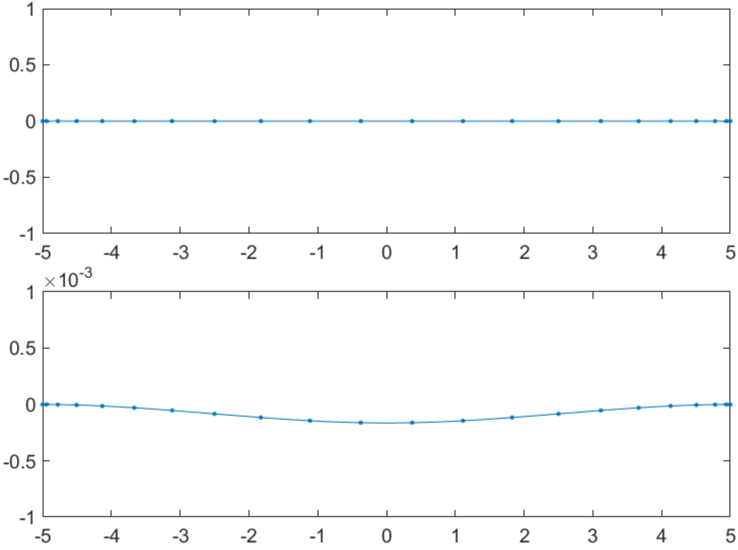

Figure: Musím doplnit

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x,y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

$$X(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda - \alpha}x\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{\lambda - \alpha}x\right) \tag{2a}$$

$$Y(y) = A_2 \sin\left(\sqrt{\alpha}y\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\alpha}y\right) \tag{2b}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{3}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{3}$$

a vlastní vektor

$$u(x,y)_{m,n} = A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{4}$$

kde m,n jsou přirozená čísla.

Porovnání

Všechny výsledky jsou pro obdelník s šířkou $a = 4$ a výškou $b = 2$

Vlastní čísla	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Analyticky	3.08425	4.9348	8.01905	10.4865	12.337
Matlab	3.0843	4.9348	8.0191	10.4865	12.337
Mathematica	3.08426	4.93482	8.01915	10.4869	12.3374

Kmitání membrán - Výsledky 1. část

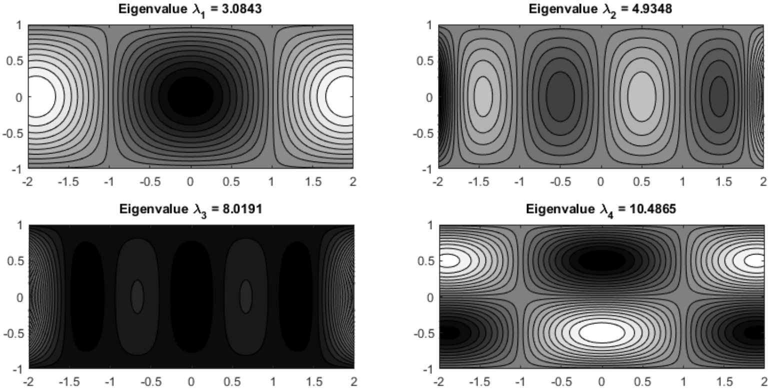

Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 2. část

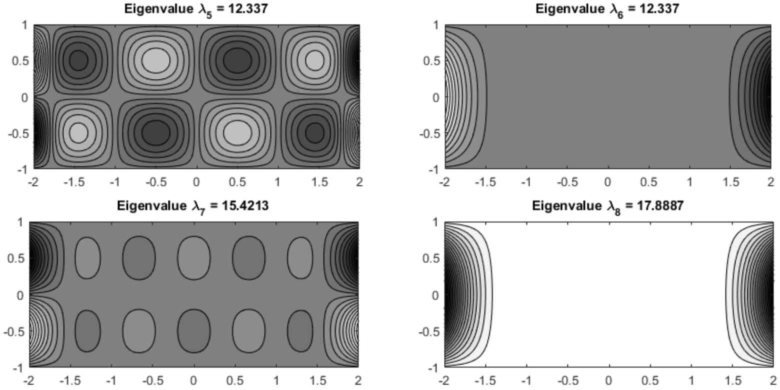

Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 3. část

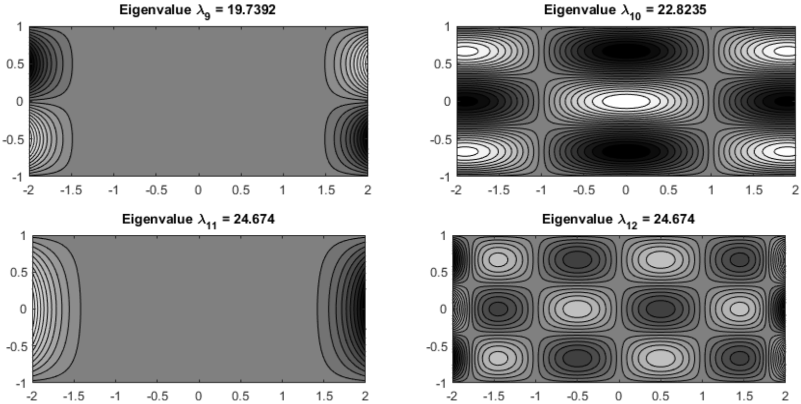

Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 4. část

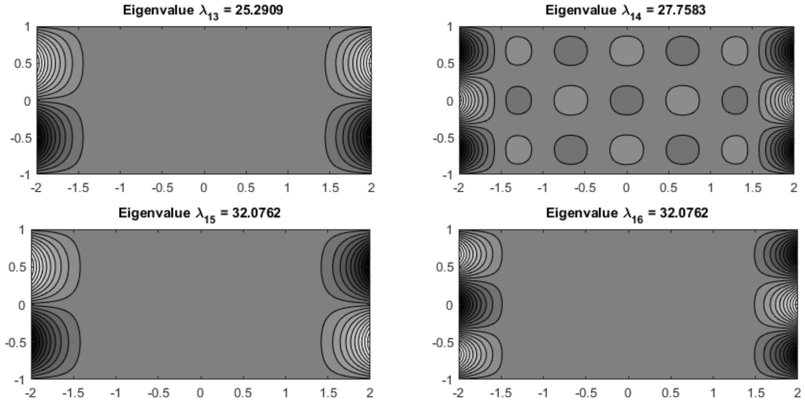

Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 5. část

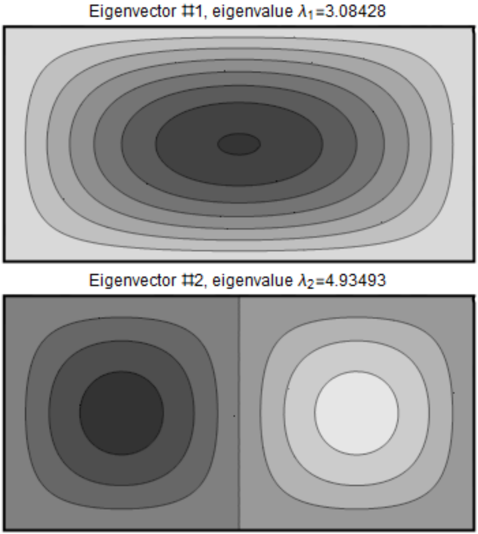

Figure: Získáno v Mathematice

Kmitání membrán - Výsledky 6. část

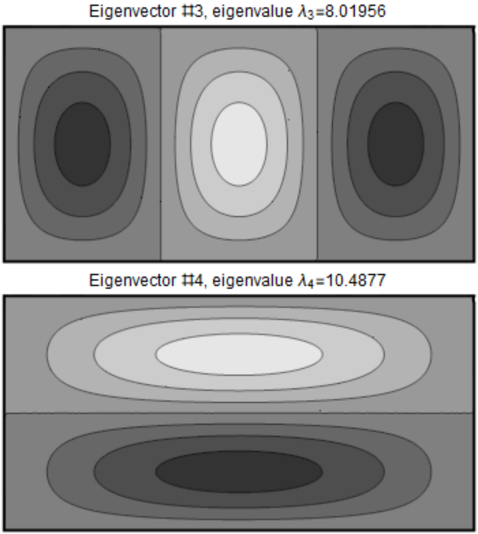

Figure: Získáno v Mathematice

Kmitání membrán - Výsledky 7. část

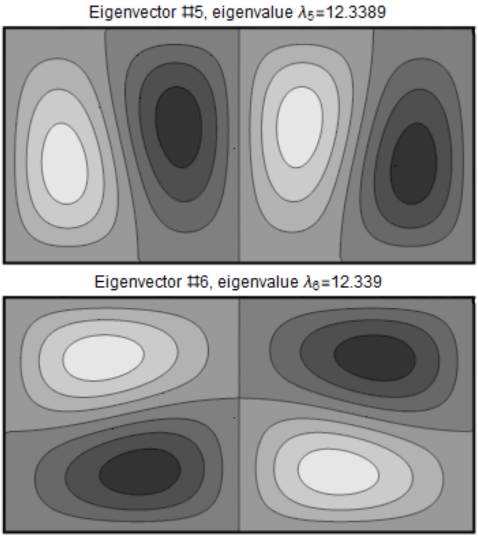

Figure: Získáno v Mathematice

Děkujeme za pozornost