Aplikace spektrální metody

Dominika Hájková, Matyáš Fuksa, Ondřej Kureš

Stormtrooperz

2021

Spektrální metoda - Co to je?

Popis spektrální metody byl převzat z práce Polynomial approximation and spectral methods (autoři: Vít Průša a Karel Tůma). Zde je popis stručně převyprávěn.

Spektrální metoda - Co to je?

Popis spektrální metody byl převzat z práce Polynomial approximation and spectral methods (autoři: Vít Průša a Karel Tůma). Zde je popis stručně převyprávěn.

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

Spektrální metoda - Co to je?

Popis spektrální metody byl převzat z práce Polynomial approximation and spectral methods (autoři: Vít Průša a Karel Tůma). Zde je popis stručně převyprávěn.

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{1}{5}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x),$$

Spektrální metoda - Co to je?

Popis spektrální metody byl převzat z práce Polynomial approximation and spectral methods (autoři: Vít Průša a Karel Tůma). Zde je popis stručně převyprávěn.

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{1}{5}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x),$$

a musíme najít řešení u(x) na intervalu $(-1, 1)$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u\big|_{x=-1} &= \alpha, \\ u'\big|_{x=1} &= \beta. \end{aligned}$$

Spektrální metoda - Co to je?

Popis spektrální metody byl převzat z práce Polynomial approximation and spectral methods (autoři: Vít Průša a Karel Tůma). Zde je popis stručně převyprávěn.

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{1}{5}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x),$$

a musíme najít řešení u(x) na intervalu $(-1, 1)$ s okrajovými podmínkami

$$\left. u \right|_{x=-1} = \alpha,$$
$$\left. u' \right|_{x=1} = \beta.$$

Spektrální metodu použijeme takto: Místo, abychom řešili rovnici pro všechna $x \in (-1, 1)$, budeme ji jen řešit pro určité interpolační body $\{x_j\}_{j=1}^{N+2}$. Tyto interpolační body budou Čebyševovy body.

Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

Diferenciální rovnici z minulé strany pak přepíšeme na diskrétní verzi

$$\left(\frac{1}{5}\mathbb{D}^2_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{D}_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{I}_{(N+2)\times(N+2)}\right)\vec{u}_{N+2} = \vec{f}_{N+2},$$

Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

Diferenciální rovnici z minulé strany pak přepíšeme na diskrétní verzi

$$\left(\frac{1}{5}\mathbb{D}^2_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{D}_{(N+2)\times(N+2)} + \mathbb{I}_{(N+2)\times(N+2)}\right)\vec{u}_{N+2} = \vec{f}_{N+2},$$

kde

$$\vec{u}_{N+2} =_{def} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}) \\ u(x_{N+2}) \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}_{N+2} =_{def} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N+1}) \\ f(x_{N+2}) \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{I}_{(N+2)\times(N+2)}$ je jednotková matice a $\mathbb{D}_{(N+2)\times(N+2)}$ je spektrální diferenční matice.

Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

Nově vzniklou diskrétní rovnici upravíme pomocí matice $\mathbb{P}^{N+2,-2}_{N\times(N+2)}$. Tím naši rovnici převzorkujeme na N Čebyševových interpolačních bodů.

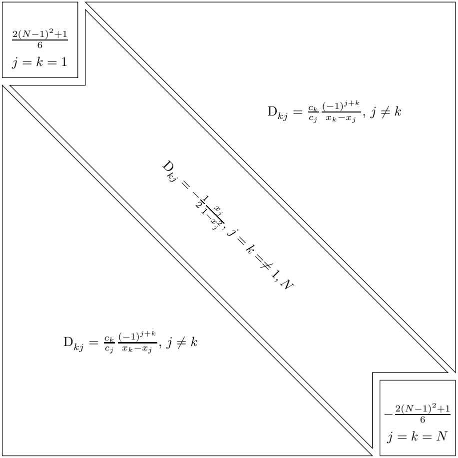
Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

Nově vzniklou diskrétní rovnici upravíme pomocí matice $\mathbb{P}^{N+2,-2}_{N\times(N+2)}$. Tím naši rovnici převzorkujeme na N Čebyševových interpolačních bodů. Pak přidáme dvě rovnice, které odpovídají okrajovým podmínkám: $u(x_N) = \alpha$ a $u(x_1) = \beta$.

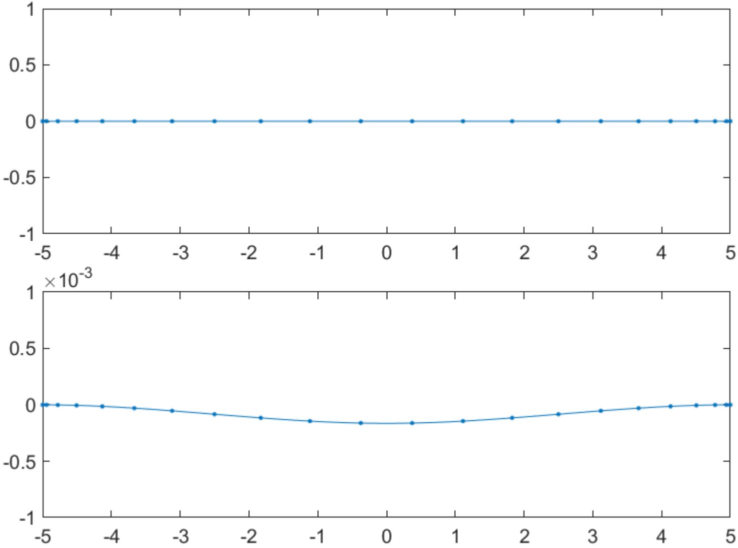
Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

Nově vzniklou diskrétní rovnici upravíme pomocí matice $\mathbb{P}^{N+2,-2}_{N\times(N+2)}$. Tím naši rovnici převzorkujeme na N Čebyševových interpolačních bodů. Pak přidáme dvě rovnice, které odpovídají okrajovým podmínkám: $u(x_N) = \alpha$ a $u(x_1) = \beta$. Takto jsme získali soustavu $N + 2$ rovnic s $N + 2$ neznámými, což je pro nás "snadno" řešitelný problém.

Hej, to je - struktura spektrální diferenční matice



Trám na jiný způsob - Obrázky



Průhyb trámu

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x,y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

$$X(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\lambda - \alpha}\, x\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{\lambda - \alpha}\, x\right) \tag{2a}$$

$$Y(y) = A_2 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, y\right) \tag{2b}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{3}$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{3}$$

a vlastní vektor

$$u(x,y)_{m,n} = A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{4}$$

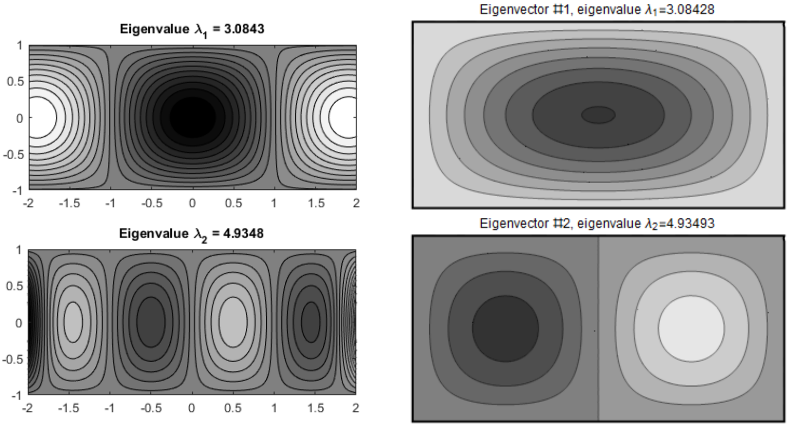
kde m,n jsou přirozená čísla.

Kmitání membrán - Porovnání

Všechny výsledky jsou pro obdelník s šířkou $a = 4$ a výškou $b = 2$

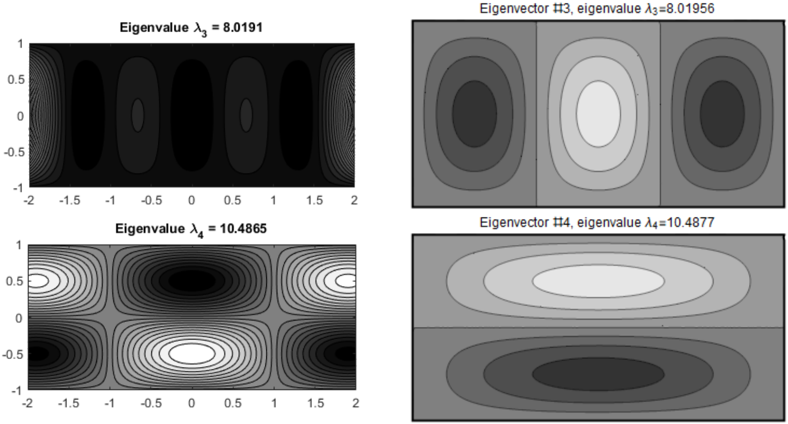
Vlastní čísla	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Analyticky	3.08425	4.9348	8.01905	10.4865	12.337
Matlab	3.08425	4.9348	8.01905	10.4865	12.337
Mathematica	3.08426	4.93482	8.01915	10.4869	12.3374

Kmitání membrán - Výsledky 1. část



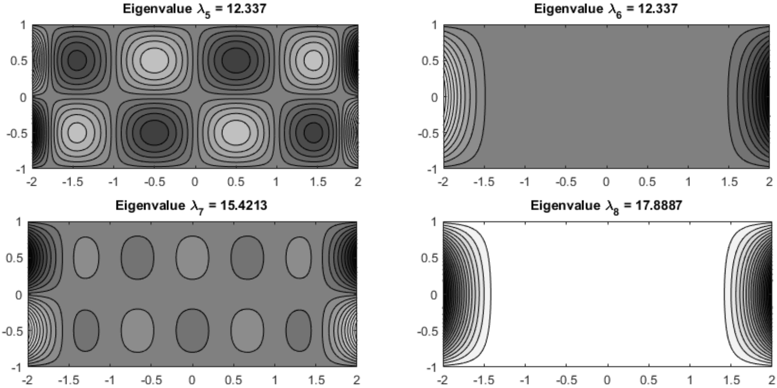
Nalevo - Matlab; Napravo - Mathematica

Kmitání membrán - Výsledky 2. část



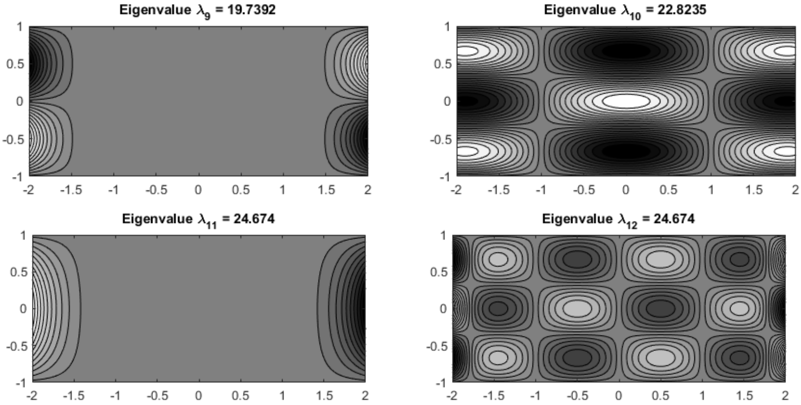
Nalevo - Matlab; Napravo - Mathematica

Kmitání membrán - Výsledky 3. část



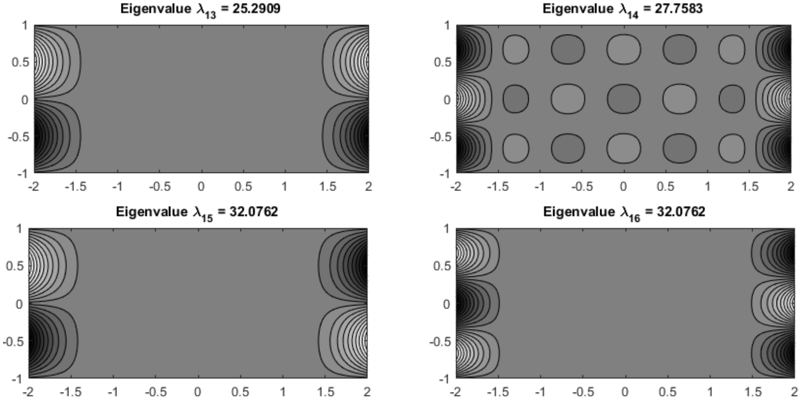
Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 4. část



Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 5. část



Získáno v Matlabu

Děkujeme za pozornost