Výpočet vlastních čísel na oblasti obdelníka

Začínám s rovnicí $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož vím, že pracuji na oblasti obdelníka, mohu něco říct o závislosti x a y a přepsat $u(x, y)$ do pro nás výhodnějšího tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$ a po aplikaci Laplace mám rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \tag{1}$$

Tento tvar je již pro výpočty vhodnější, přičemž ho nadále upravíme do tvaru:

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X}{X} = \frac{-\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y} \tag{2}$$

Jelikož levá strana je závislá na x a pravá na y, vyplývá nám z toho, že se obě strany rovnají stejné konstantě tj.:

$$\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda X}{X} = \frac{-\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}{Y} = \alpha \tag{3}$$

Z této rovnice již snadno odvodíme systém dvou rovnic:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + (\lambda - \alpha)X = 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \alpha Y = 0 \tag{4b}$$

Tyto rovnice snadno vyřešíme za pomocí Dirichletových okrajových podmínek. Pro případ obdelníku, jehož šířka je a a výška b dostáváme podmínky:

$$X(0) = X(a) = 0 \tag{5a}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \tag{5b}$$

Obecné řešení tedy je:

$$X(x) = A_1 \sin(\sqrt{\lambda - \alpha}x) + B_1 \cos(\sqrt{\lambda - \alpha}x) \tag{6a}$$

$$Y(y) = A_2 \sin(\sqrt{\alpha}y) + B_2 \cos(\sqrt{\alpha}y) \tag{6b}$$

Po použití podmínek $X(0) = Y(0) = 0$ hned vidíme, že $B_1 = B_2 = 0$. Pro podmínku $Y(b) = 0$ musí platit, že $\sqrt{\alpha}b = n\pi$, kde n je přirozené číslo, tedy

$\alpha = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$. Stejným způsobem vyjádříme λ za pomocí podmínky $X(a) = 0$ a po dosazení α pro m a n přirozená čísla dostaneme vlastní čísla:

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{7}$$

a vlastní vektory:

$$u(x,y)_{m,n} = A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{8}$$