

Aplikace spektrální metody

Dominika Hájková, Matyáš Fuksa, Ondřej Kureš

Stormtrooperz

2021

Spektrální metoda - Co to je?

Byla nám dána obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{1}{5} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x),$$

a musíme najít řešení $u(x)$ na intervalu $(-1, 1)$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u|_{x=-1} &= \alpha, \\ u'|_{x=1} &= \beta. \end{aligned}$$

Spektrální metodu použijeme takto: Místo, abychom řešili rovnici pro všechna $x \in (-1, 1)$, budeme ji jen řešit pro určité interpolační body $\{x_j\}_{j=1}^{N+2}$. Tyto interpolační body budou Čebyševovy body.

Spektrální metoda - Co to je? - pokračování

$$\left(\frac{1}{5} \mathbb{D}_{(N+2) \times (N+2)}^2 + \mathbb{D}_{(N+2) \times (N+2)} + \mathbb{I}_{(N+2) \times (N+2)} \right) \vec{u}_{N+2} = \vec{f}_{N+2},$$

$$\vec{u}_{N+2} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_3) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}) \\ u(x_{N+2}) \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_{N+2} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N+1}) \\ f(x_{N+2}) \end{bmatrix}$$

Hej, to je - struktura spektrální diferenční matice

Top-left corner (j = k = 1):

$$\frac{2(N-1)^2+1}{6}$$

Bottom-right corner (j = k = N):

$$-\frac{2(N-1)^2+1}{6}$$

Upper triangle (j ≠ k):

$$D_{kj} = \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{x_k - x_j}, j \neq k$$

Lower triangle (j ≠ k):

$$D_{kj} = \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{x_k - x_j}, j \neq k$$

Diagonal (j = k ≠ 1, N):

$$D_{kj} = -\frac{1}{2} \frac{c_k}{1 - x_j}, j = k \neq 1, N$$

Trám na jiný způsob - Obrázky

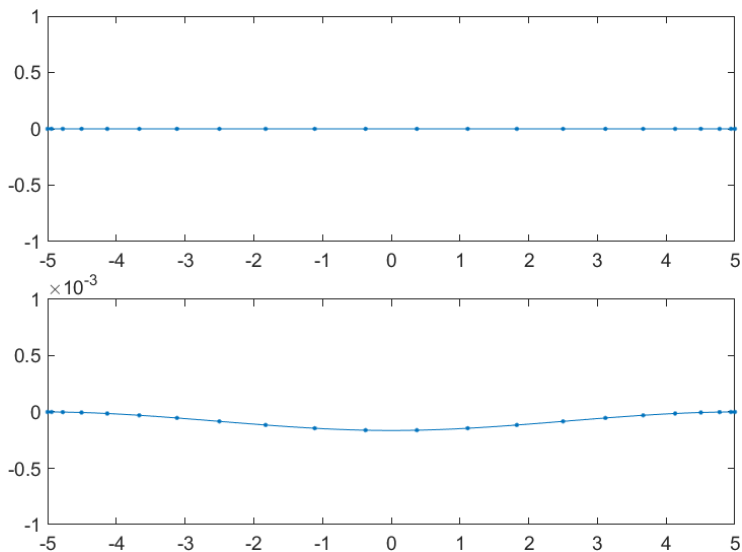


Figure: Musím doplnit

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \quad (1)$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \quad (1)$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

Kmitání membrán - Analytický rozbor

Máme rovnici $\Delta u = -\lambda u$. Jelikož pracujeme na oblasti obdelníka, můžeme $u(x, y)$ přepsat do nového tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Dostáváme novou rovnici:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda XY \quad (1)$$

Provedeme sérii úprav, které nás dovedou na systém dvou rovnic. Vyřešením soustavy dostaneme obecné řešení pro $X(x)$ a $Y(y)$.

$$X(x) = A_1 \sin(\sqrt{\lambda - \alpha} x) + B_1 \cos(\sqrt{\lambda - \alpha} x) \quad (2a)$$

$$Y(y) = A_2 \sin(\sqrt{\alpha} y) + B_2 \cos(\sqrt{\alpha} y) \quad (2b)$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (3)$$

Kmitání membrán - Analytický rozbor - pokračování

Použitím Dirichletových okrajových podmínek ($X(0) = X(a) = 0$ a $Y(0) = Y(b) = 0$, kde a je šířka a b je výška obdélníku), získáme vlastní číslo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (3)$$

a vlastní vektor

$$u(x, y)_{m,n} = A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (4)$$

kde m, n jsou přirozená čísla.

Kmitání membrán - Výsledky 1. část

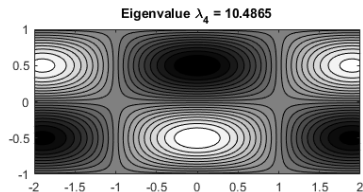
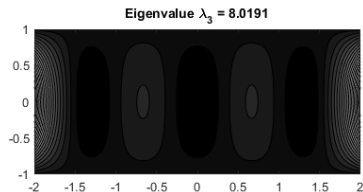
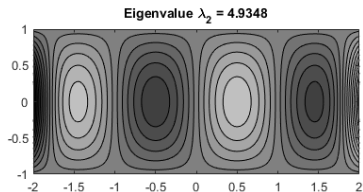
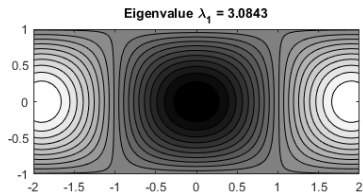


Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 2. část

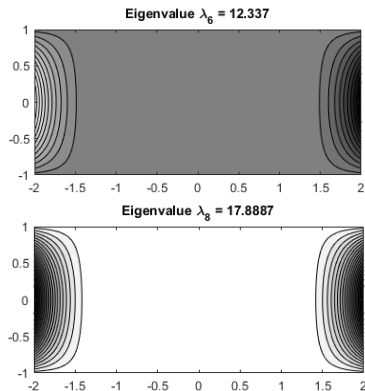
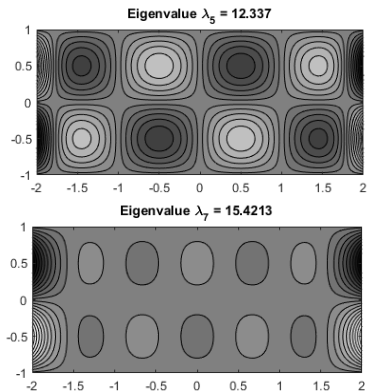


Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 3. část

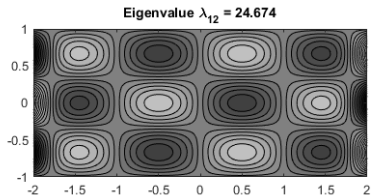
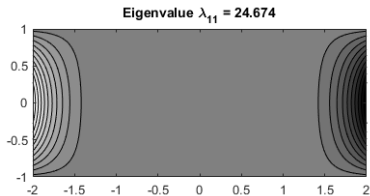
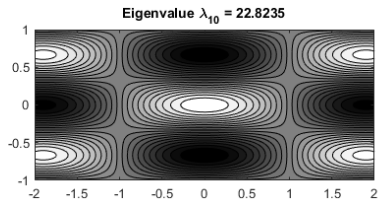
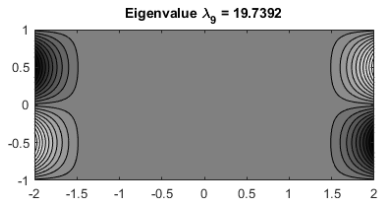


Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 4. část

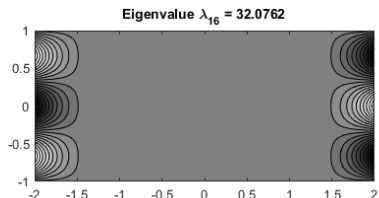
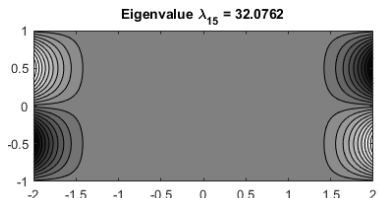
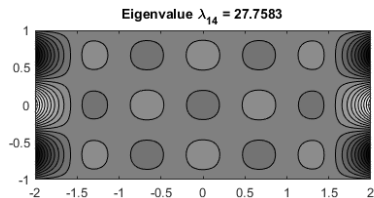
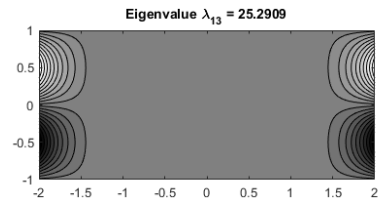
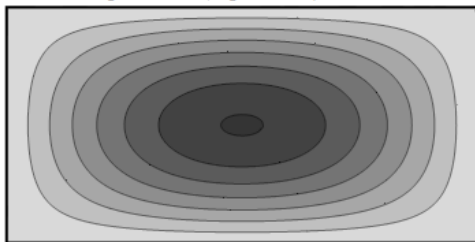


Figure: Získáno v Matlabu

Kmitání membrán - Výsledky 5. část

Eigenvector #1, eigenvalue $\lambda_1=3.08428$



Eigenvector #2, eigenvalue $\lambda_2=4.93493$

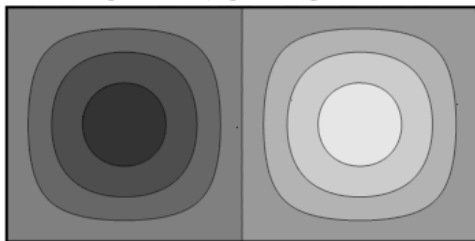
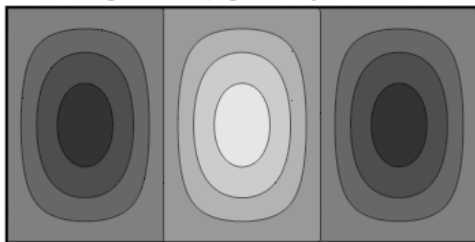


Figure: Získáno v Mathematice

Kmitání membrán - Výsledky 6. část

Eigenvector #3, eigenvalue $\lambda_3=8.01956$



Eigenvector #4, eigenvalue $\lambda_4=10.4877$

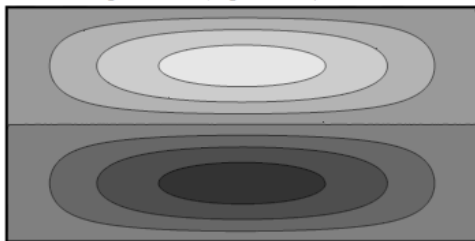
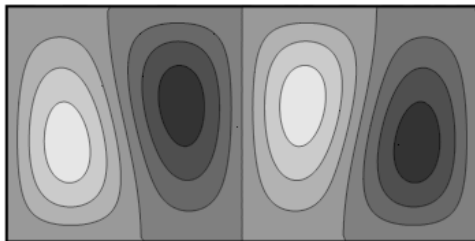


Figure: Získáno v Mathematice

Kmitání membrán - Výsledky 7. část

Eigenvector #5, eigenvalue $\lambda_5=12.3389$



Eigenvector #6, eigenvalue $\lambda_6=12.339$

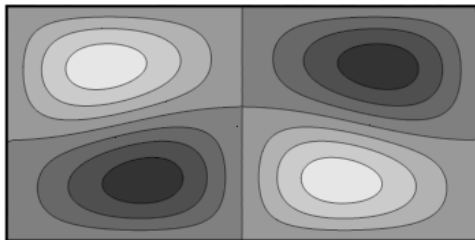


Figure: Získáno v Mathematice

Děkujeme za pozornost

