

# MATEMATICKÉ KYVADLO

ONDREJ KUREŠ, MAREK MIKLOŠ, LADISLAV TRNKA

ABSTRACT. TADY BUDE ABSTRAKT

## CONTENTS

1. Úvod	1	3. Numerické řešení	3
Pohybová rovnice	1	3.1. Zachování energie	3
2. Perioda oscilací	1	3.2. Metody	3
2.1. Eliptický integrál	1	3.3. Perioda kyvadla	6
2.2. Analytická aproximace	2		

## 1. ÚVOD

Matematické kyvadlo je nejjednodušším typem kyvadla. Máme hmotný bod o hmotnosti  $m$  zavěšený na provázku délky  $l$  zanedbatelné hmotnosti. Tření a odpor vzduchu nezapočítáváme. Tíhové pole považujeme za homogenní s tíhovým zrychlením  $g$ .

**Pohybová rovnice.** Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru  $l$  a jeho pohyb popisujeme aktuálním úhlem  $\varphi(t)$ , který měří výchylku z dolní rovnovážné polohy. Pro zrychlení platí  $a = l\varepsilon = l\dot{\omega} = l\ddot{\varphi}$  a pro vratnou sílu platí  $F = -mg \sin \varphi$ . Použijeme 2. Newtonův zákon:  $F = ma$ .

$$ma = ml\ddot{\varphi} = F = -mg \sin \varphi$$

Můžeme pokrátit  $m$  z naší rovnice a vydělíme celou rovnici  $l$ . Pak vše převedeme na jednu stranu. Dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Vidíme, že naše rovnice je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Pokud budeme brát v úvahu jen malé výchylky z rovnovážné polohy, můžeme rovnici linearizovat.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (1.2)$$

Využili jsme Taylorova rozvoje  $\sin \varphi$ :

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + O(\varphi^6).$$

Kde jsme vzali jen první člen, neboť nás zajímají jen malé výchylky. Když vezmeme počáteční podmínku  $\varphi(t_0 = 0) = \varphi_0$ , tak řešení rovnice (1.2) vypadá takto

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (1.3)$$

Jak můžeme vidět, rovnice (1.3) odpovídá rovnici harmonického oscilátoru s amplitudou  $\varphi_0$  a s úhlovou frekvencí malých harmonických kmitů  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Periodě matematického kyvadla při malých výchylkách pak odpovídá

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.4)$$

## 2. PERIODA OSCILACÍ

**2.1. Eliptický integrál.** Eliptický integrál nám poskytuje exaktní řešení nelinearizované rovnice (1.1). Když rovnici (1.1) vynásobíme  $\frac{d\varphi}{dt}$ , tak získáme:

$$\frac{d\varphi}{dt} \left( \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi \right) = 0.$$

Po integraci dostáváme první integrál pohybu pohybové rovnice (1.1).

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi = C \quad (2.1)$$

Protože chceme, aby kyvadlo mělo na počátku nulovou rychlost ( $\dot{\varphi} = 0$ , pro  $\varphi = \varphi_0$ , kde  $\varphi_0$  je počáteční úhel), můžeme dopočítat konstantu  $C$ , což nám dává  $C = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0$ . Dosadíme konstantu  $C$  a upravíme.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \quad (2.2)$$

Využijeme větu o derivaci inverzní funkce na (2.2) a vynásobíme ji  $d\varphi$ .

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (2.3)$$

Budeme integrovat od  $\varphi = 0$  do  $\varphi = \varphi_0$ . Tento interval odpovídá čtvrtině periody.

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (2.4)$$

Pomocí substituce  $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \theta$  ( $\theta = \frac{\varphi}{2}$ ) a dalších úprav, se nám podaří získat eliptický integrál, díky němuž jsme schopni vypočítat periodu  $T$  matematického kyvadla.

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.5)$$

kde  $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ . Uděláme Taylorův rozvoj  $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ , čímž si usnadňujeme práci s integrálem, ale musíme počítat s tím, že budeme získávat jeho aproximovanou hodnotu.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \approx 1 + \frac{1}{8} \varphi_0^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{384} \varphi_0^4 (9 \sin^4 \theta - 4 \sin^2 \theta) \quad (2.6)$$

Teď už jen (2.6) vložíme do (2.5) a dostaneme:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \frac{11}{3072} \varphi_0^4 \right). \quad (2.7)$$

**2.2. Analytická aproximace.** Už jsme zjistili první členy aproximace  $\varphi(t) = \epsilon \varphi_A(t) + \epsilon^3 \varphi_B(t) + \epsilon^5 \varphi_C(t) + \dots$

$$\varphi_A(t) = \varphi_{init} \cos(\omega t), \quad (2.8)$$

$$\varphi_B(t) = \frac{\varphi_{init}^3}{192} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)]. \quad (2.9)$$

Zamíříme k třetímu členu  $\varphi_C(t)$ . Budeme mít počáteční podmínky ( $t = 0$ )

$$\varphi_C = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{d\varphi_C}{dt} = 0. \quad (2.11)$$

Jak se hledali stejné mocniny  $\epsilon$  u předešlých, tak najdeme i zde. Tím získáme následující rovnici.

$$\frac{d\varphi_C}{dt} + \omega^2 \varphi_C = \beta \varphi_A - \frac{\alpha \varphi_A^3}{3!} - \frac{\omega^2 \varphi_A^5}{5!} + \alpha \varphi_B + \frac{1}{2} \omega^2 \varphi_A^2 \varphi_B. \quad (2.12)$$

Teď  $\varphi_A$  a  $\varphi_B$  dosadíme. Proměnnou  $\alpha$  už známe také ( $\alpha = -\frac{\omega^2 \varphi_{init}^2}{8}$ ). Teď už jen upravíme celou rovnici a dostaneme výslednou rovnost.

$$\frac{d\varphi_C}{dt} + \omega^2 \varphi_C = \left( \beta \varphi_{init} + \frac{5}{512} \omega^2 \varphi_{init}^5 \right) \cos(\omega t) + \frac{\omega^2 \varphi_{init}^5}{384} \cos(3\omega t) + \frac{\omega^2 \varphi_{init}^5}{7680} \cos(5\omega t) \quad (2.13)$$

Víme, že člen  $(\beta \varphi_{init} + \frac{5}{512} \omega^2 \varphi_{init}^5) \cos(\omega t)$  nám bude způsobovat problémy. Zbavíme se ho tím, že si položíme  $\beta = -\frac{5}{512} \omega^2 \varphi_{init}^4$ . Pak už jen diferenciální rovnici vyřešíme (počáteční podmínky máme) a dostaneme

$$\varphi_C(t) = \frac{\varphi_{init}^5}{184320} [61 \cos(\omega t) - 60 \cos(3\omega t) - \cos(5\omega t)]. \quad (2.14)$$

Celková aproximace teď vypadá takto

$$\varphi(t) \approx \varphi_{init} \cos(\omega t) + \frac{\varphi_{init}^3}{192} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + \frac{\varphi_{init}^5}{184320} [61 \cos(\omega t) - 60 \cos(3\omega t) - \cos(5\omega t)] + \dots \quad (2.15)$$

Známe teď i druhý člen u frekvence  $\omega$

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 - \frac{\omega^2 \varphi_{init}^2}{8} - \frac{5}{512} \omega^2 \varphi_{init}^4 + \dots, \quad (2.16)$$

přepíšeme tedy na  $\omega^2 \approx \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{\varphi_{init}^2}{8} + \frac{5\varphi_{init}^4}{512}}$ . Dosadíme do definice periody  $T$  a máme

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\varphi_{init}^2}{16} + \frac{5\varphi_{init}^4}{1024} + \dots \right). \quad (2.17)$$

### 3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

V předchozích kapitolách jsme dospěli k rovnici (1.1). Vzhledem k jednotě značení v této sekci ji přepíšeme jako:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin y = 0, \quad (3.1)$$

kde  $y(t)$  je výchylka (orientovaný úhel) kyvadla v čase  $t$ . Pokusme se nyní tuto rovnici řešit pomocí numerických metod. K tomu využijeme prostředí *Mathematica*.<sup>1</sup> Pro jednoduchost předpokládejme délku kyvadla  $l = 1$  m, hmotnost  $m = 1$  kg, tíhové zrychlení jako  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ , počáteční výchylku  $y(0) = y_0 = 1$  rad a čas  $1 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ , po který budeme sledovat pohyb matematického kyvadla.

```
1 g = 9.81;
2 l = 1;
3 poc = 1;
4 time = {t, 0, 10};
```

LISTING 1. Konstanty

**3.1. Zachování energie.** Hmotný bod na závěsu vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel  $y_0 = 1$  rad a pustíme bez udělení počáteční rychlosti  $y'(0) = 0$ . Dále zanedbávejme odpor prostředí apod. Kyvadlo se začne periodicky pohybovat s periodou  $T$ . Náš systém zachovává mechanickou energii:

$$E = \frac{1}{2} m [y'(t)]^2 - \frac{g}{l} m \cos(y(t)), \quad (3.2)$$

která na počátku pohybu byla rovna:

$$E = E_0 = -\frac{g}{l} m \cos(y_0). \quad (3.3)$$

Tedy v průběhu numerického řešení bychom očekávali splnění rovnice:

$$-\frac{g}{l} \cos(y_0) = \frac{1}{2} [y'(t)]^2 - \frac{g}{l} \cos(y(t)) \quad (3.4)$$

a to v každém čase  $t$ . Při hodnocení numerických metod je pro nás výhodné znázornit trajektorii  $(y(t), y'(t))^2$  řešení ve fázovém prostoru. Pokud fázovým portrétem bude uzavřená křivka, naše numerické řešení zachovává celkovou energii systému.

**3.2. Metody.** Na příkladech numerických řešení rovnice (3.1) si ukážeme úskalí používání numerických metod při konfrontaci se zachováním periodicity a při zachování energie apod.

**Automatická metoda zvolená softwarem:** Podívejme se na řešení s automatickým výběrem metody v příkazu `NDSolve`:

```
1 NDSolve[{y''[t] + g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time];
```

Na obrázku (1) vidíme periodicitu řešení. Z (2) a (3) plyne, že řešení poměrně zachovává energii s přesností  $10^{-5}$ .

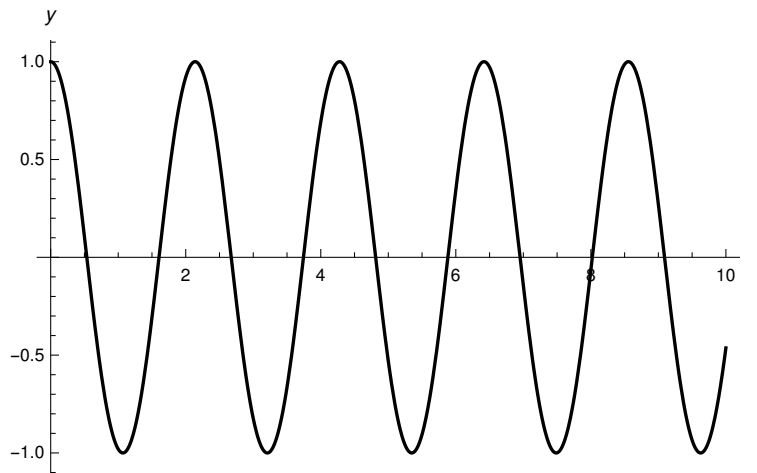


FIGURE 1. Časová závislost výchylky na čase

<sup>1</sup>všechny příložené kódy jsou napsané v Mathematica 12.02

<sup>2</sup>respektive trajektorii  $(q(t), p(t))$ , kde  $q$  je zobecněná souřadnice a  $p$  je kanonická hybnost, ale v našem případě  $q(t) = y(t)$  a  $p(t) = y'(t)$ , při uvažování  $m = 1$

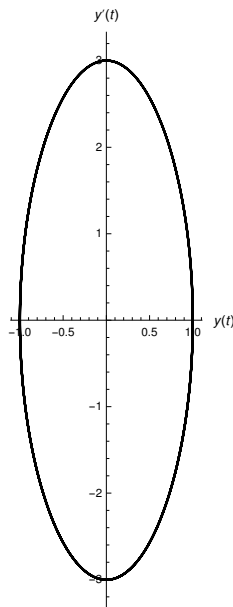


FIGURE 2. Fázový prostor

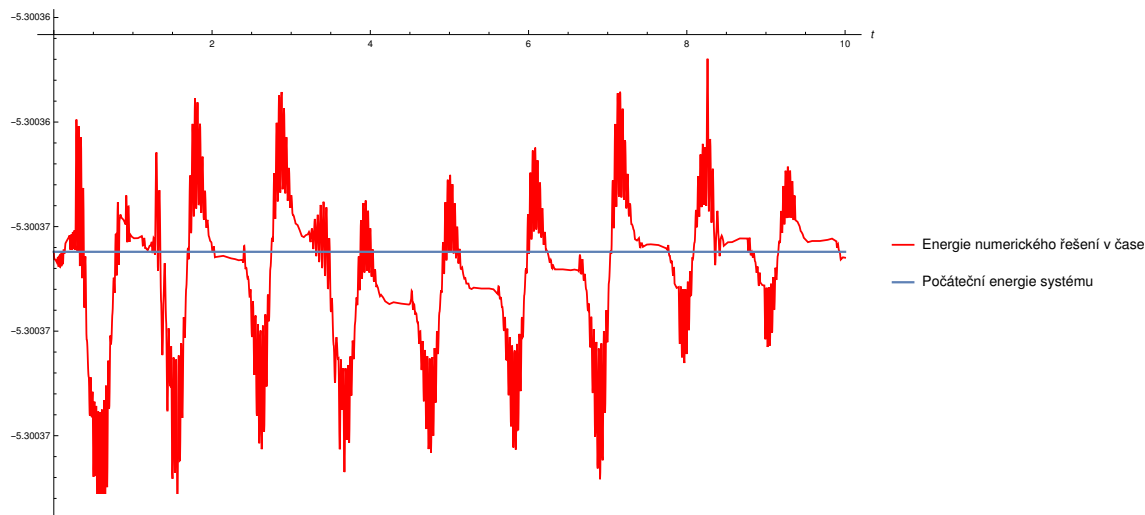


FIGURE 3. Zachování energie - rovnice (3.4)

**Explicitní Eulerova metoda:** Tato metoda je nejjednodušší a zároveň, jak si ukážeme, nejméně vhodná pro numerické řešení rovnice (3.1). Proto si ji pro ilustraci rozeberme trochu podrobněji. Mějme rovnoměrné (ekvidistantní) dělení  $\{t_n\}$  intervalu  $(0, 10)$ :

$$t_n = nh, n \in \mathbb{N}_0,$$

kde  $h$  je velikost kroku. Dále aproximujme  $y(t_n) \approx y_n$ . Pak explicitní Eulerova metoda (jednokroková) pro rovnici<sup>3</sup>  $y'(t) = f(t, y(t))$  se dá vyjádřit jako<sup>4</sup>:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Pro demonstraci získání "špatného" výsledku použijme:

```
1 NDSolve[{y'[t]+g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> "
  ExplicitEuler", StartingStepSize -> 0.1, MaxStepSize -> 0.1, MaxSteps -> 100]
```

LISTING 2. Eulerova metoda

Výsledné numerické řešení naprosto ztrácí periodicitu - obrázek (4) a nezachovává energii (5), (6) - systém energií v čase získává.

**Metody snažící se zachovat celkovou energii:** Nyní použijeme sofistikovanější metody založené na Runge-Kuttových metodách. Pro ilustraci napíšeme explicitní Runge-Kuttovu metodu 4. řádu (zachováme značení jako výše) pro

<sup>3</sup>předpokládáme existenci řešení

<sup>4</sup>v našem případě ODR 2. řádu bychom převedli na soustavu ODR 1. řádu

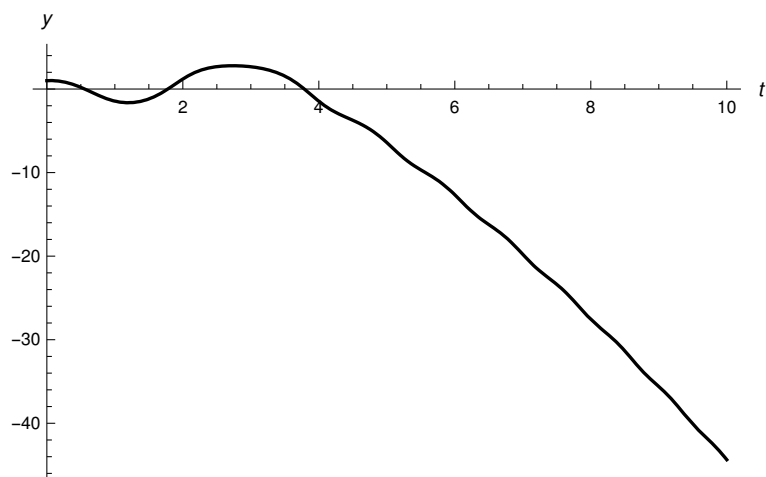


FIGURE 4. Eulerova metoda - časová závislost výchyly na čase

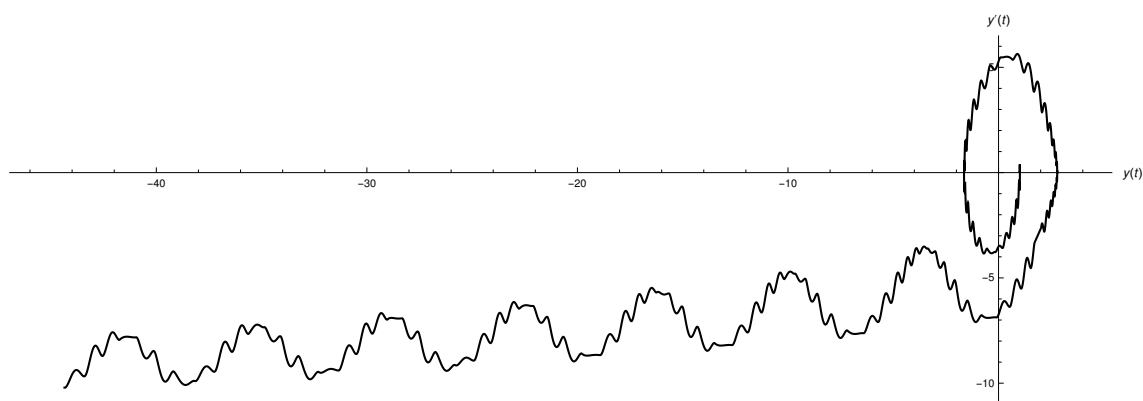


FIGURE 5. Eulerova metoda - fázový prostor

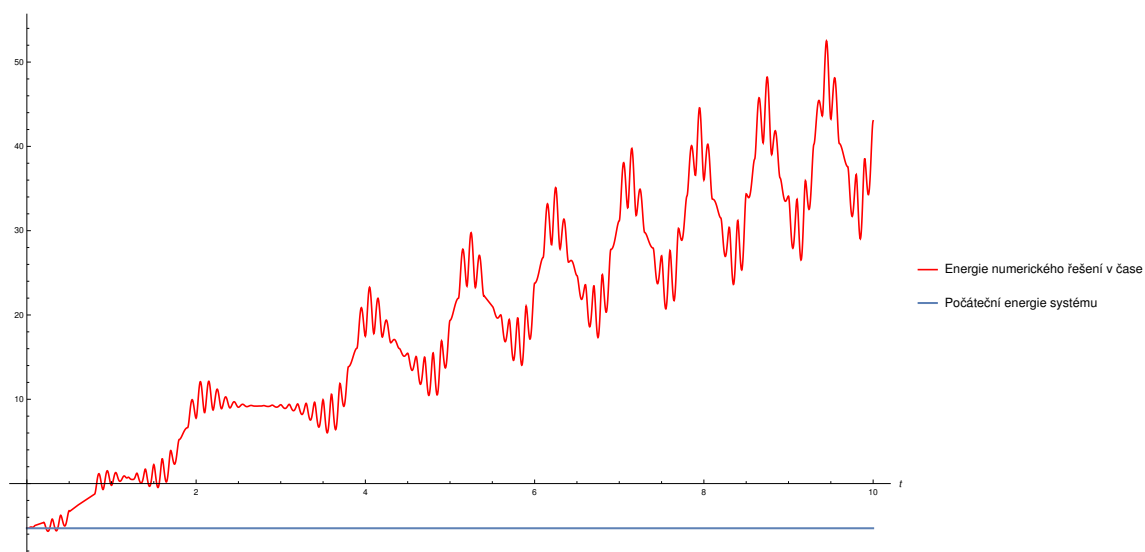


FIGURE 6. Eulerova metoda - energie

rovnici  $y'(t) = f(t, y(t))$ :

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_1}{2}\right), \\ K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_2}{2}\right), \\ K_4 &= f(t_n + h, y_n + hK_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{aligned}$$

Konkrétně použijeme metodu `SymplecticPartitionedRungeKutta`, která ovšem vyžaduje přejít do Hamiltonova formalismu:

```
1 H = p[t]^2/2 - g/l *Cos[q[t]];
2 eqs = {p'[t] == -D[H, q[t]], q'[t] == D[H, p[t]]};
3 ics = {p[0] == 0, q[0] == poc};
4 vars = {q[t], p[t]};
```

LISTING 3. Hamiltonův formalismus

Máme časově nezávislý hamiltonián - zachovává se v čase (integrál pohybu):

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{g}{l}m \cos(q). \quad (3.5)$$

Implementace metody:

```
1 NDSolve[{eqs, ics}, vars, time, Method -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "
  DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {q[t]}}];
```

Pro porovnání zkusme ještě jiný přístup pomocí `Projection`:

```
1 NDSolve[{y''[t] + g/l *Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> {"
  Projection", Method -> "ExplicitRungeKutta", "Invariants" -> -g/l *Cos[poc]}}];
```

V tabulce (7) je porovnání všech použitých metod (vyjma Eulerovy metody). Nejlépe z použitých metod vychází `SymplecticRungeKutta`, která zachovává energii s přesností přibližně  $10^{-6}$ . Automaticky vybraná metoda při příkazu `NDSolve` zachovává energii asi s přesností  $10^{-5}$ . Posledně zmíněná metoda `Projection` zachovává energii s přesností okolo  $10^{-3}$  tedy s menší přesností než první dvě metody.

Čas	NDSolve	SymplecticRungeKutta	Projection
0	-5.300365621	-5.300365621	-5.300365621
1	-5.300365503	-5.300365669	-5.300364618
2	-5.300365607	-5.300365639	-5.300365847
3	-5.300365352	-5.300365644	-5.300351305
4	-5.300365507	-5.300365646	-5.300348124
5	-5.300365437	-5.300365575	-5.300357624
6	-5.300365525	-5.300365688	-5.300343897
7	-5.300366032	-5.300365495	-5.300362859
8	-5.300366084	-5.300365652	-5.300399387
9	-5.300365929	-5.300365615	-5.300377653
10	-5.300365649	-5.300365559	-5.300365623

FIGURE 7. Porovnání metod podle energií v čase

**3.3. Perioda kyvadla.** Periodu matematického kyvadla  $T$  určíme jako čtyřnásobek času, za který hmotný bod z počáteční výchylky proběhne rovnovážnou polohu. K jeho stanovení využijeme metod ukázaných výše, přímou integraci eliptického integrálu a aproximaci odvozenou v prvních kapitolách:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{y_0^2}{16} + \frac{11y_0^4}{3072}\right). \quad (3.6)$$

Pro porovnání budeme periodu určovat při různých počátečních výchylkách  $y_0$  a dodejme ještě velikost periody pro lineari-zovanou rovnici:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.7)$$

Počáteční výchylka	NDSolve	Symplectic RungeKutta	Eulerova metoda	Aproximace periody	Přímou integrací	Lin. rovnice
0.001	2.00605	2.00607	2.06809	2.00607	2.00607	2.00607
0.301	2.01749	2.01749	2.08132	2.01749	2.01749	2.00607
0.601	2.05231	2.05231	2.12202	2.05229	2.05231	2.00607
0.901	2.11285	2.11285	2.19407	2.11258	2.11285	2.00607
1.201	2.20344	2.20344	2.30382	2.20186	2.20344	2.00607
1.501	2.33149	2.33149	2.45399	2.32501	2.33149	2.00607

FIGURE 8. Velikost periody  $T$  pro různé metody v závislosti na počáteční výchylce  $y_0$

Z obrázku (9) a z tabulky (8) je patrné, že Eulerova metoda se výrazně odlišuje od zbylých. Metody `NDSolve` a `SymplecticPartitionedRungeKutta` jsou velmi přesné, překvapivě aproximace periody (3.7) je také poměrně přesná, ale při vyšších počátečních výchylkách ztrácí na přesnosti. Určení periody z linearizované rovnice je možné jen pro malé počáteční výchylky řádově 0.001 rad, při vyšších výchylkách rychle ztrácí na přesnosti.

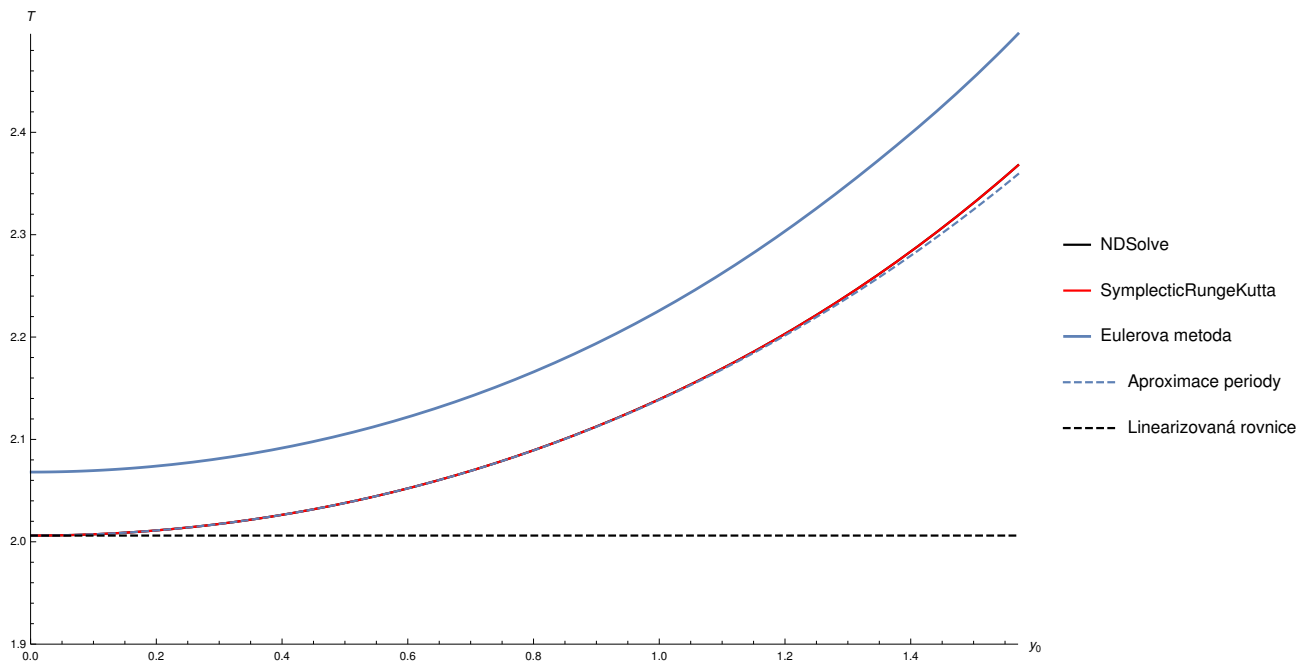


FIGURE 9. Velikost periody  $T$  pro různé metody v závislosti na počáteční výchylce  $y_0$