

MATEMATICKÉ KYVADLO

ONDREJ KUREŠ, MAREK MIKLOŠ, LADISLAV TRNKA

ABSTRACT. TADY BUDE ABSTRAKT

CONTENTS

1. Úvod	1	3.1. Zachování energie	2
Pohybová rovnice	1	3.2. Metody	2
2. Perioda oscilací	1	3.3. Perioda kyvadla	6
2.1. Eliptický integrál	1		
3. Numerické řešení	2		

1. ÚVOD

Matematické kyvadlo je nejjednodušším typem kyvadla. Máme hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na provázku délky l zanedbatelné hmotnosti. Tření a odpor vzduchu nezapočítáváme. Tíhové pole považujeme za homogenní s tíhovým zrychlením g .

Pohybová rovnice. Teď se podíváme na pohybovou rovnici. Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru l a jeho pohyb popisujeme aktuálním úhlem $\varphi(t)$, který měří výchylku z dolní rovnovážné polohy. Pro zrychlení platí $a = l\varepsilon = l\dot{\omega} = l\ddot{\varphi}$ a pro vratnou sílu platí $F = -mg \sin \varphi$. Teď použijeme 2. Newtonův zákon: $F = ma$.

$$ma = ml\ddot{\varphi} = F = -mg \sin \varphi$$

Můžeme pokrátit m z naší rovnice a vydělíme celou rovnici l . Pak vše převedeme na jednu stranu. Dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla.

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0} \quad (1.1)$$

Vidíme, že naše rovnice je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Pokud budeme brát v úvahu jen malé výchylky z rovnovážné polohy, můžeme rovnici linearizovat.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (1.2)$$

Využili jsme Taylorova rozvoje $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + O(\varphi^6).$$

Kde jsme vzali jen první člen, neboť nás zajímají jen malé výchylky.

2. PERIODA OSCILACÍ

2.1. Eliptický integrál. Eliptický integrál nám poskytuje exaktní řešení nelinearizované rovnice (1.1). Když rovnici (1.1) vynásobíme $\frac{d\varphi}{dt}$, tak získáme:

$$\frac{d\varphi}{dt} \left(\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi \right) = 0.$$

Po integraci dostáváme první integrál pohybu pohybové rovnice (1.1).

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi = C \quad (2.1)$$

Protože chceme, aby kyvadlo mělo na počátku nulovou rychlost ($\dot{\varphi} = 0$, pro $\varphi = \varphi_0$, kde φ_0 je počáteční úhel), můžeme dopočítat konstantu C , což nám dává $C = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0$. Dosadíme konstantu C a upravíme.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (2.2)$$

Využijeme větu o derivaci inverzní funkce na (2.2) a vynásobíme ji $d\varphi$.

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}} \quad (2.3)$$

Budeme integrovat od $\varphi = 0$ do $\varphi = \varphi_0$. Tento interval odpovídá čtvrtině periody.

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (2.4)$$

Pomocí substituce $\cos \varphi = 1 - 2\sin^2 \theta$ ($\theta = \frac{\varphi}{2}$) a dalších úprav, se nám podaří získat eliptický integrál, díky němuž jsme schopni vypočítat periodu T matematického kyvadla.

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.5)$$

kde $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$. Uděláme Taylorův rozvoj $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$, čímž si usnadňujeme práci s integrálem, ale musíme počítat s tím, že budeme získávat jeho aproximovanou hodnotu.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \approx 1 + \frac{1}{8} \varphi_0^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{384} \varphi_0^4 (9 \sin^4 \theta - 4 \sin^2 \theta) \quad (2.6)$$

Teď už jen (2.6) vložíme do (2.5) a dostaneme:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \frac{11}{3072} \varphi_0^4 \right). \quad (2.7)$$

3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

V předchozích kapitolách jsme dospěli k rovnici (1.1). Vzhledem k jednotě značení v této sekci ji přepíšeme jako:

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin y = 0}, \quad (3.1)$$

kde $y(t)$ je výchylka (orientovaný úhel) kyvadla v čase t . Pokusme se nyní tuto rovnici řešit pomocí numerických metod. K tomu využijeme prostředí *Mathematica*.¹ Pro jednoduchost předpokládejme délku kyvadla $l = 1$ m, hmotnost $m = 1$ kg, tíhové zrychlení jako $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, počáteční výchylku $y(0) = y_0 = 1$ rad a čas $1 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, po který budeme sledovat pohyb matematického kyvadla.

```
1 g = 9.81;
2 l = 1;
3 poc = 1;
4 time = {t, 0, 10};
```

LISTING 1. Konstanty

3.1. Zachování energie. Hmotný bod na závěsu vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel $y_0 = 1$ rad a pustíme bez udělení počáteční rychlosti $y'(0) = 0$. Dále zanedbávejme odpor prostředí apod. Kyvadlo se začne periodicky pohybovat s periodou T . Náš systém zachovává mechanickou energii:

$$E = \frac{1}{2} m [y'(t)]^2 - \frac{g}{l} m \cos(y(t)), \quad (3.2)$$

která na počátku pohybu byla rovna:

$$E = E_0 = -\frac{g}{l} m \cos(y_0). \quad (3.3)$$

Tedy v průběhu numerického řešení bychom očekávali splnění rovnice:

$$\boxed{-\frac{g}{l} \cos(y_0) = \frac{1}{2} [y'(t)]^2 - \frac{g}{l} \cos(y(t))} \quad (3.4)$$

a to v každém čase t . Při hodnocení numerických metod je pro nás výhodné znázornit trajektorii $(y(t), y'(t))^2$ řešení ve fázovém prostoru. Pokud fázovým portrétem bude uzavřená křivka, naše numerické řešení zachovává celkovou energii systému.

3.2. Metody. Na příkladech numerických řešení rovnice (3.1) si ukážeme úskalí používání numerických metod při konfrontaci se zachováním periodicity a při zachování energie apod.

Automatická metoda zvolená softwarem: Podívejme se na řešení s automatickým výběrem metody v příkazu `NDSolve`:

```
1 NDSolve[{y''[t] + g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time];
```

Na obrázku (1) vidíme periodicitu řešení. Z (2) a (3) plyne, že řešení poměrně zachovává energii s přesností 10^{-5} .

¹všechny příložené kódy jsou napsané v Mathematica 12.02

²respektive trajektorii $(q(t), p(t))$, kde q je zobecněná souřadnice a p je kanonická hybnost, ale v našem případě $q(t) = y(t)$ a $p(t) = y'(t)$, při uvážení $m = 1$

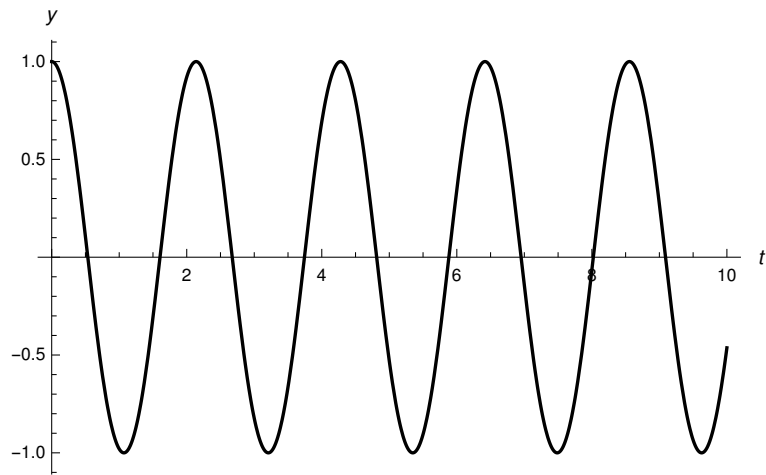


FIGURE 1. Časová závislost výchylky na čase

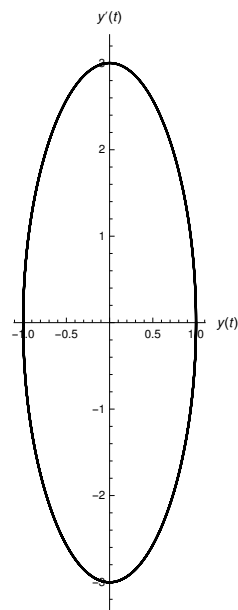


FIGURE 2. Fázový prostor

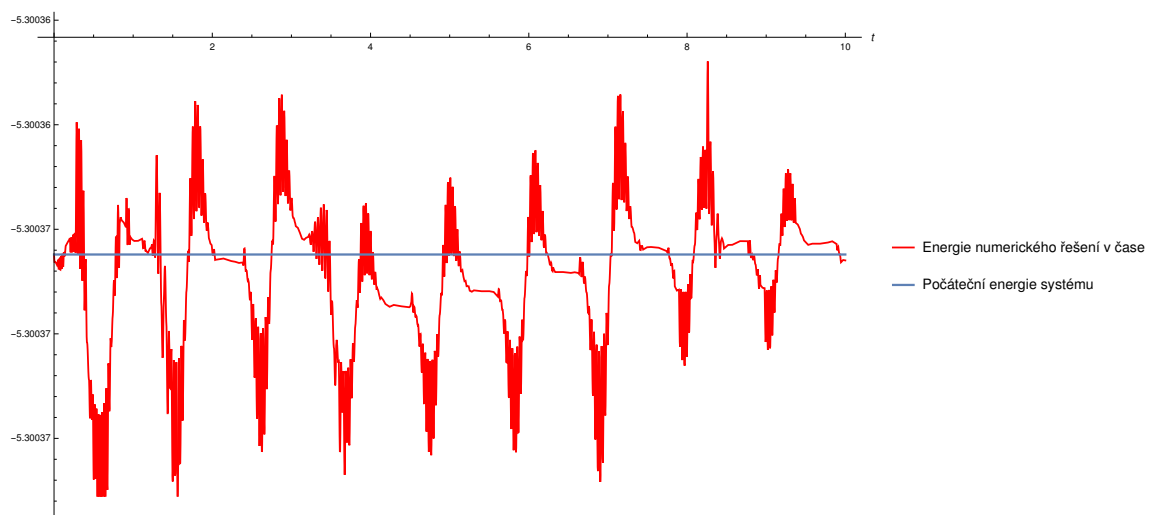


FIGURE 3. Zachování energie - rovnice (3.4)

Explicitní Eulerova metoda: Tato metoda je nejjednodušší a zároveň, jak si ukážeme, nejméně vhodná pro numerické řešení rovnice (3.1). Proto si ji pro ilustraci rozeberme trochu podrobněji. Mějme rovnoměrné (ekvidistantní) dělení $\{t_n\}$ intervalu $(0, 10)$:

$$t_n = nh, n \in \mathbb{N}_0,$$

kde h je velikost kroku. Dále aproximujeme $y(t_n) \approx y_n$. Pak explicitní Eulerova metoda (jdnokroková) pro rovnici³ $y'(t) = f(t, y(t))$ se dá vyjádřit jako⁴:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Pro demonstraci získání "špatného" výsledku použijme:

```
1 NDSolve[{y'[t]+g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> "
  ExplicitEuler", StartingStepSize -> 0.1, MaxStepSize -> 0.1, MaxSteps -> 100]
```

LISTING 2. Eulerova metoda

Výsledné numerické řešení naprosto ztrácí periodicitu - obrázek (4) a nezachovává energii (5), (6) - systém energii v čase získává.

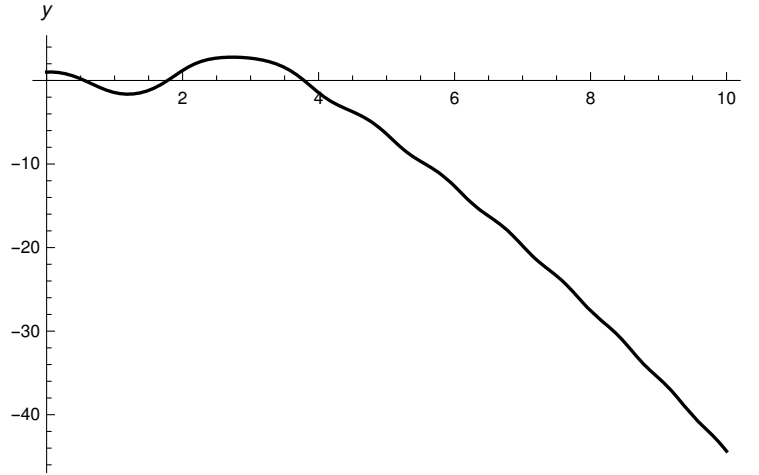


FIGURE 4. Eulerova metoda - časová závislost výchyly na čase

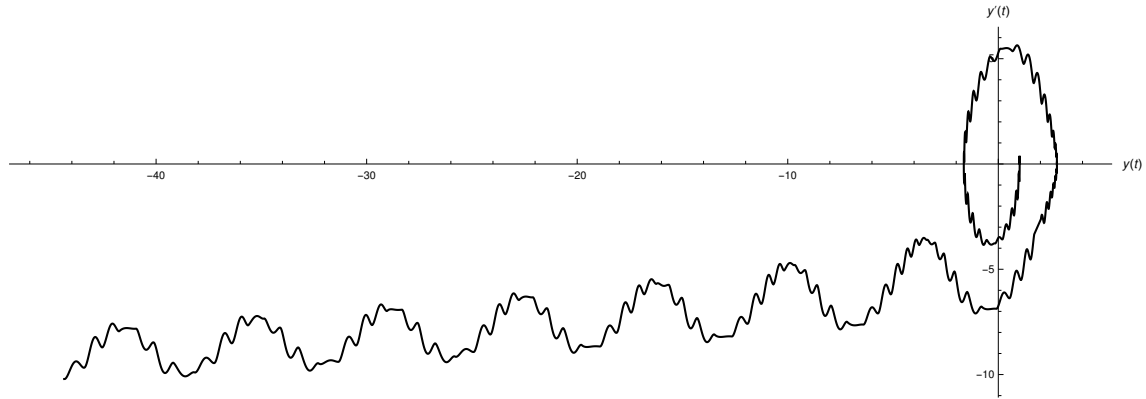


FIGURE 5. Eulerova metoda - fázový prostor

Metody snažící se zachovat celkovou energii: Nyní použijeme sofistikovanější metody založené na Runge-Kuttových metodách. Pro ilustraci napíšeme explicitní Runge-Kuttovu metodu 4. řádu (zachováme značení jako výše) pro rovnici $y'(t) = f(t, y(t))$:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_1}{2}\right), \\ K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_2}{2}\right), \\ K_4 &= f(t_n + h, y_n + hK_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{aligned}$$

Konkrétně použijeme metodu `SymplecticPartitionedRungeKutta`, která ovšem vyžaduje přejít do Hamiltonova formalismu:

³předpokládáme existenci řešení

⁴v našem případě ODR 2. řádu bychom převedli na soustavu ODR 1. řádu

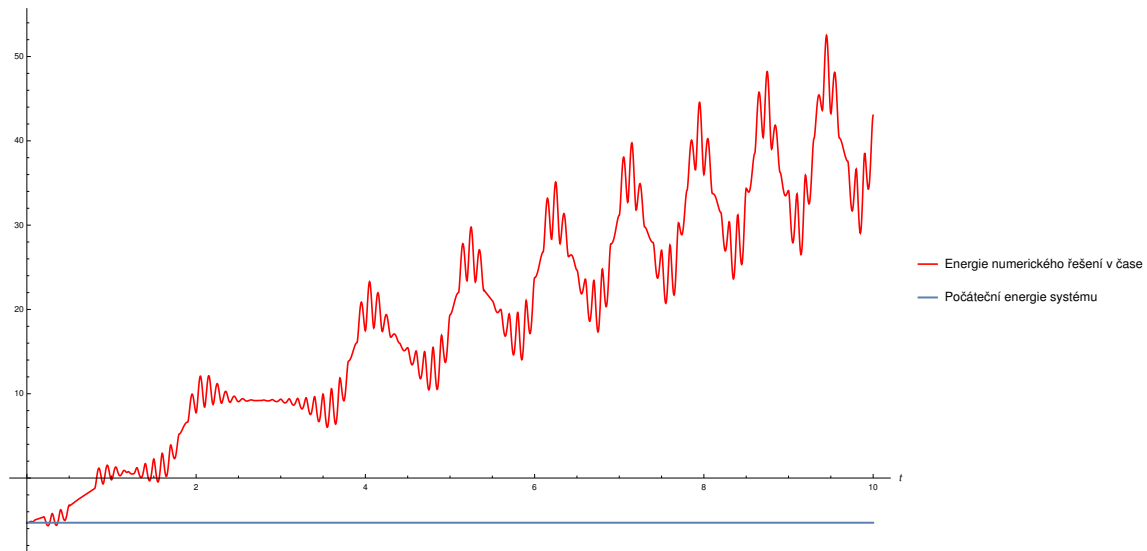


FIGURE 6. Eulerova metoda - energie

```
1 H = p[t]^2/2 - g/l *Cos[q[t]];
2 eqs = {p'[t] == -D[H, q[t]], q'[t] == D[H, p[t]]};
3 ics = {p[0] == 0, q[0] == poc};
4 vars = {q[t], p[t]};
```

LISTING 3. Hamiltonův formalismus

Máme časově nezávislý hamiltonián - zachovává se v čase (integrál pohybu):

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{g}{l}m \cos(q). \quad (3.5)$$

Implementace metody:

```
1 NDSolve[{eqs, ics}, vars, time, Method -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "
  DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {q[t]}}];
```

Pro porovnání zkusme ještě jiný přístup pomocí Projection:

```
1 NDSolve[{y''[t] + g/l *Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> {"
  Projection", Method -> "ExplicitRungeKutta", "Invariants" -> -g/l *Cos[poc]}];
```

V tabulce (7) je porovnání všech použitých metod (vyjma Eulerovy metody). Nejlépe z použitých metod vychází **SymplecticRungeKutta**, která zachovává energii s přesností 10^{-6} . Automaticky vybraná metoda při příkazu **NDSolve** zachovává energii s přesností 10^{-5} . Posledně zmíněná metoda **Projection** zachovává energii s přesností 10^{-3} tedy s menší přesností než první dvě metody.

Čas	NDSolve	SymplecticRungeKutta	Projection
0	-5.300365621	-5.300365621	-5.300365621
1	-5.300365503	-5.300365669	-5.300364618
2	-5.300365607	-5.300365639	-5.300365847
3	-5.300365352	-5.300365644	-5.300351305
4	-5.300365507	-5.300365646	-5.300348124
5	-5.300365437	-5.300365575	-5.300357624
6	-5.300365525	-5.300365688	-5.300343897
7	-5.300366032	-5.300365495	-5.300362859
8	-5.300366084	-5.300365652	-5.300399387
9	-5.300365929	-5.300365615	-5.300377653
10	-5.300365649	-5.300365559	-5.300365623

FIGURE 7. Porovnání metod podle energií v čase

3.3. Perioda kyvadla. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam erat volutpat. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce aliquam vestibulum ipsum. Integer malesuada. Quis autem vel eum iure reprehenderit qui in ea voluptate velit esse quam nihil molestiae consequatur, vel illum qui dolorem eum fugiat quo voluptas nulla pariatur? Mauris metus. Sed ut perspiciatis unde omnis iste natus error sit voluptatem accusantium doloremque laudantium, totam rem aperiam, eaque ipsa quae ab illo inventore veritatis et quasi architecto beatae vitae dicta sunt explicabo. Ut enim ad minima veniam, quis nostrum exercitationem ullam corporis suscipit laboriosam, nisi ut aliquid ex ea commodi consequatur? Nam sed tellus id magna elementum tincidunt. Nullam eget nisl. Nulla quis diam. Duis condimentum augue id magna semper rutrum.