

MATEMATICKÉ KYVADLO

ONDREJ KUREŠ, MAREK MIKLOŠ, LADISLAV TRNKA

ABSTRACT. TADY BUDE ABSTRAKT

CONTENTS

1. Úvod	1	3.2. Metody	2
2. Pohybová rovnice	1	3.3. Perioda kyvadla	5
3. Numerické řešení	1		
3.1. Zachování energie	2		

1. ÚVOD

Matematické kyvadlo je nejjednodušším typem kyvadla. Máme hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na provázku délky l zanedbatelné hmotnosti. Tření a odpor vzduchu nezapočítáváme. Tíhové pole považujeme za homogenní s tíhovým zrychlením g .

2. POHYBOVÁ ROVNICE

Teď se podíváme na pohybovou rovnici. Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru l a jeho pohyb popisujeme aktuálním úhlem $\varphi(t)$, který měří výchylku z dolní rovnovážné polohy. Pro zrychlení platí $a = l\varepsilon = l\dot{\omega} = l\ddot{\varphi}$ a pro vratnou sílu platí $F = -mg \sin \varphi$. Teď použijeme 2. Newtonův zákon: $F = ma$.

$$ma = ml\ddot{\varphi} = F = -mg \sin \varphi$$

Můžeme pokrátit m z naší rovnice a vydělíme celou rovnici l . Pak vše převedeme na jednu stranu. Dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (2.1)$$

Vidíme, že naše rovnice je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Pokud budeme brát v úvahu jen malé výchylky z rovnovážné polohy, můžeme rovnici linearizovat.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (2.2)$$

Využili jsme Taylorova rozvoje $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + O(\varphi^6)$$

Kde jsme vzali jen první člen, neboť nás zajímají jen malé výchylky.

3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

V předchozích kapitolách jsme dospěli k rovnici (2.1). Vzhledem k jednotě značení v této sekci ji přepíšeme jako:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin y = 0, \quad (3.1)$$

kde $y(t)$ je výchylka (orientovaný úhel) kyvadla v čase t . Pokusme se nyní tuto rovnici řešit pomocí numerických metod. K tomu využijeme prostředí *Mathematica*.¹ Pro jednoduchost předpokládejme délku kyvadla $l = 1$ m, hmotnost $m = 1$ kg, tíhové zrychlení jako $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, počáteční výchylku $y(0) = y_0 = 1$ rad a čas $1 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$, po který budeme sledovat pohyb matematického kyvadla.

```
1 g = 9.81;  
2 l = 1;  
3 poc = 1;  
4 time = {t, 0, 10};
```

LISTING 1. Konstanty

¹všechny přiložené kódy jsou napsané v Mathematica 12.02

3.1. Zachování energie. Hmotný bod na závěsu vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel $y_0 = 1$ rad a pustíme bez udělení počáteční rychlosti $y'(0) = 0$. Dále zanedbávejme odpor prostředí apod. Kyvadlo se začne periodicky pohybovat s periodou T . Náš systém zachovává mechanickou energii:

$$E = \frac{1}{2}m[y'(t)]^2 - \frac{g}{l}m \cos(y(t)), \quad (3.2)$$

která na počátku pohybu byla rovna:

$$E = E_0 = -\frac{g}{l}m \cos(y_0). \quad (3.3)$$

Tedy v průběhu numerického řešení bychom očekávali splnění rovnice:

$$\boxed{-\frac{g}{l} \cos(y_0) = \frac{1}{2}[y'(t)]^2 - \frac{g}{l} \cos(y(t))} \quad (3.4)$$

a to v každém čase t . Při hodnocení numerických metod je pro nás výhodné znázornit trajektorii $(y(t), y'(t))^2$ řešení ve fázovém prostoru. Pokud fázovým portrétem bude uzavřená křivka, naše numerické řešení zachovává celkovou energii systému.

3.2. Metody. Na příkladech numerických řešení rovnice (3.1) si ukážeme úskalí používání numerických metod při konfrontaci se zachováním periodicity a při zachování energie apod.

Automatická metoda zvolená softwarem: Podívejme se na řešení s automatickým výběrem metody v příkazu `NDSolve`:

```
1 NDSolve[{y''[t] + g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time];
```

Na obrázku (1) vidíme periodicitu řešení. Z (2) a (3) plyne, že řešení poměrně zachovává energii s přesností 10^{-5} .

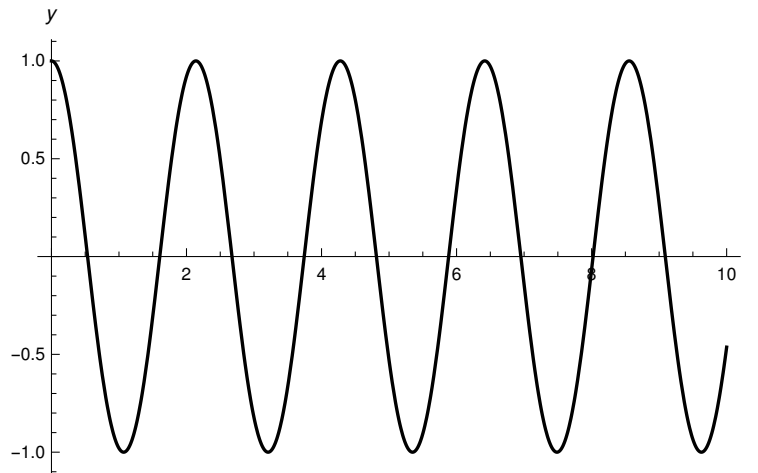


FIGURE 1. Časová závislost výchylky na čase

Explicitní Eulerova metoda: Tato metoda je nejjednodušší a zároveň, jak si ukážeme, nejméně vhodná pro numerické řešení rovnice (3.1). Proto si ji pro ilustraci rozeberme trochu podrobněji. Mějme rovnoměrné (ekvidistantní) dělení $\{t_n\}$ intervalu $(0, 10)$:

$$t_n = nh, n \in \mathbb{N}_0,$$

kde h je velikost kroku. Dále aproximujme $y(t_n) \approx y_n$. Pak explicitní Eulerova metoda (jednokroková) pro rovnici³ $y'(t) = f(t, y(t))$ se dá vyjádřit jako⁴:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Pro demonstraci získání "špatného" výsledku použijme:

```
1 NDSolve[{y''[t]+g/l*Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> "
  ExplicitEuler", StartingStepSize -> 0.1, MaxStepSize -> 0.1, MaxSteps -> 100]
```

LISTING 2. Eulerova metoda

Výsledné numerické řešení naprosto ztrácí periodicitu - obrázek (4) a nezachovává energii (5), (6) - systém energií v čase získává.

²respektive trajektorii $(q(t), p(t))$, kde q je zobecněná souřadnice a p je kanonická hybnost, ale v našem případě $q(t) = y(t)$ a $p(t) = y'(t)$, při uvažování $m = 1$

³předpokládáme existenci řešení

⁴v našem případě ODR 2. řádu bychom převedli na soustavu ODR 1. řádu

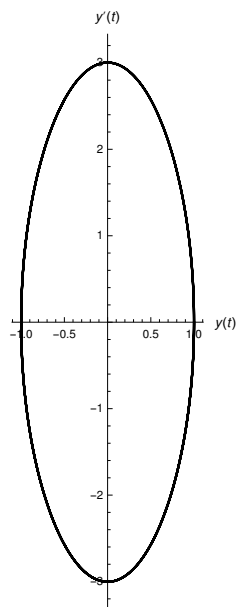


FIGURE 2. Fázový prostor

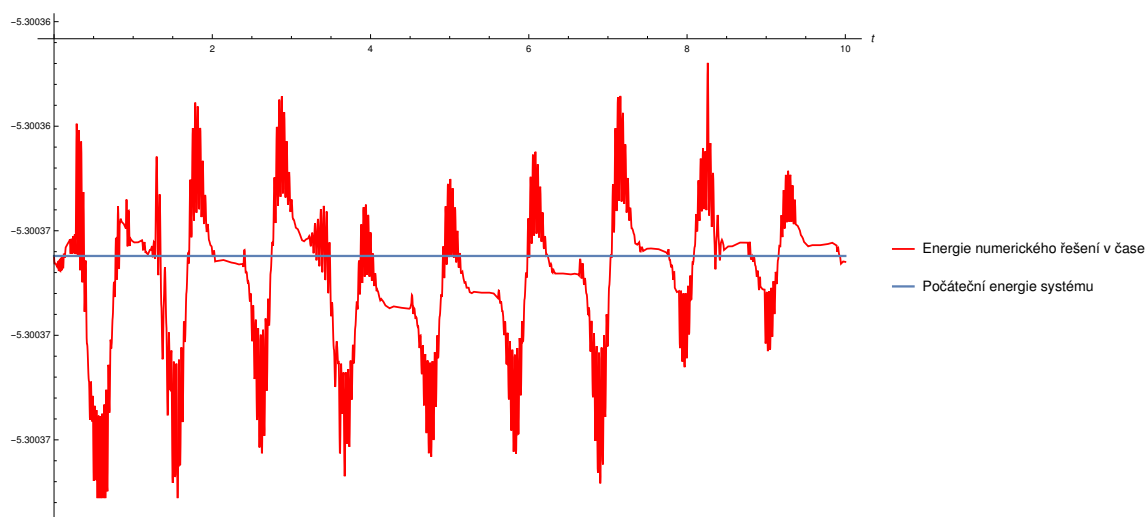


FIGURE 3. Zachování energie - rovnice (3.4)

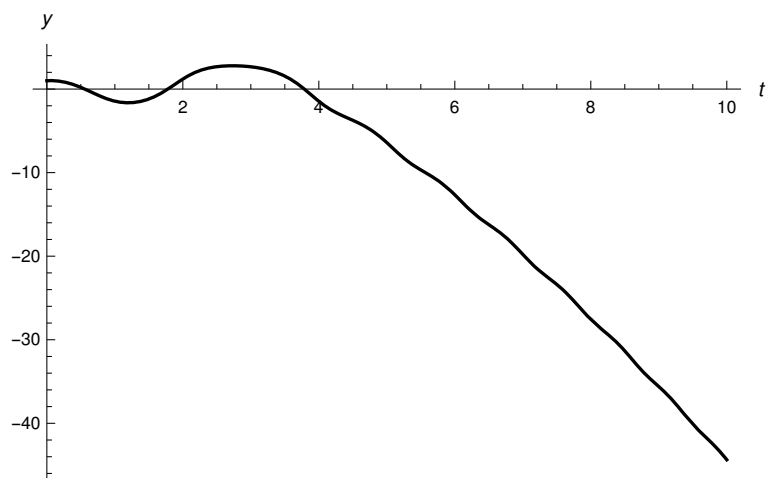


FIGURE 4. Eulerova metoda - časová závislost výchyly na čase

Metody snaží se zachovat celkovou energii: Nyní použijeme sofistikovanější metody založené na Runge-Kuttových metodách. Pro ilustraci napíšeme explicitní Runge-Kuttovu metodu 4. řádu (zachováme značení jako výše) pro

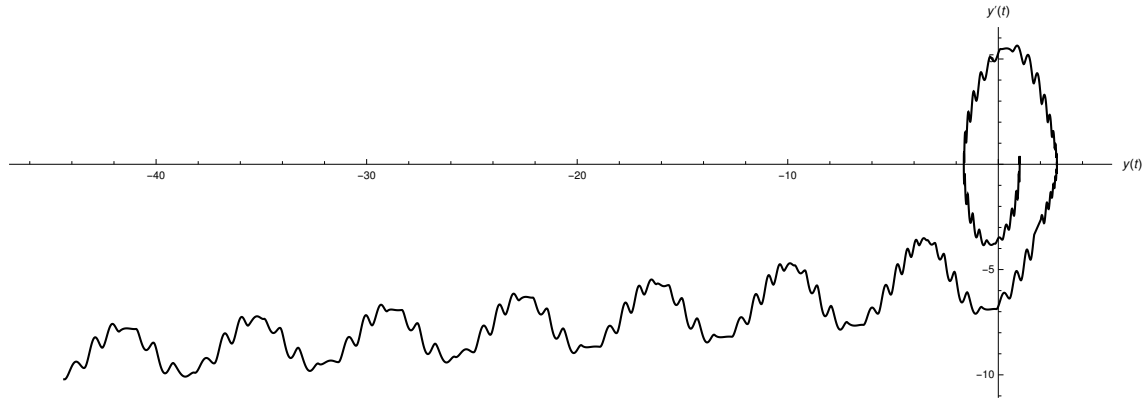


FIGURE 5. Eulerova metoda - fázový prostor

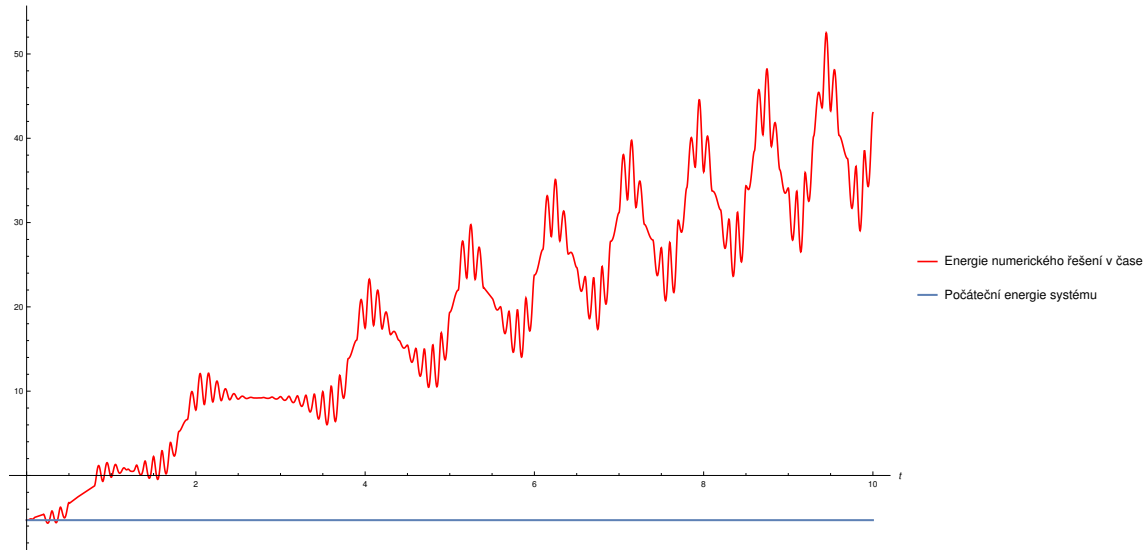


FIGURE 6. Eulerova metoda - energie

rovnici $y'(t) = f(t, y(t))$:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(t_n, y_n), \\
 K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{K_1}{2}\right), \\
 K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{K_2}{2}\right), \\
 K_4 &= f(t_n + h, y_n + h K_3), \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
 \end{aligned}$$

Konkrétně použijeme metodu `SymplecticPartitionedRungeKutta`, která ovšem vyžaduje přejít do Hamiltonova formalismu:

```

1 H = p[t]^2/2 - g/l *Cos[q[t]];
2 eqs = {p'[t] == -D[H, q[t]], q'[t] == D[H, p[t]]};
3 ics = {p[0] == 0, q[0] == poc};
4 vars = {q[t], p[t]};

```

LISTING 3. Hamiltonův formalismus

Máme časově nezávislý hamiltonián - zachovává se v čase (integrál pohybu):

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{g}{l} m \cos(q). \quad (3.5)$$

Implementace metody:

```

1 NDSolve[{eqs, ics}, vars, time, Method -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "
  DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {q[t]}}];

```

Pro porovnání zkusme ještě jiný přístup pomocí **Projection**:

```
1 NDSolve[{y'[t] + g/l *Sin[y[t]] == 0, y[0] == poc, y'[0] == 0}, y, time, Method -> {"  
    Projection", Method -> "ExplicitRungeKutta", "Invariants" -> -g/l *Cos[poc]}}];
```

V tabulce (7) je porovnání všech použitých metod (vyjma Eulerovy metody). Nejlépe z použitých metod vychází **SymplecticRungeKutta**, která zachovává energii s přesností přibližně 10^{-6} . Automaticky vybraná metoda při příkazu **NDSolve** zachovává energii asi s přesností 10^{-5} . Posledně zmíněná metoda **Projection** zachovává energii s přesností okolo 10^{-3} tedy s menší přesností než první dvě metody.

Čas	NDSolve	SymplecticRungeKutta	Projection
0	-5.300365621	-5.300365621	-5.300365621
1	-5.300365503	-5.300365669	-5.300364618
2	-5.300365607	-5.300365639	-5.300365847
3	-5.300365352	-5.300365644	-5.300351305
4	-5.300365507	-5.300365646	-5.300348124
5	-5.300365437	-5.300365575	-5.300357624
6	-5.300365525	-5.300365688	-5.300343897
7	-5.300366032	-5.300365495	-5.300362859
8	-5.300366084	-5.300365652	-5.300399387
9	-5.300365929	-5.300365615	-5.300377653
10	-5.300365649	-5.300365559	-5.300365623

FIGURE 7. Porovnání metod podle energií v čase

3.3. Perioda kyvadla. Periodu matematického kyvadla T určíme jako čtyřnásobek času, za který hmotný bod z počáteční výchylky proběhne rovnovážnou polohu. K jeho stanovení využijeme metod ukázaných výše, přímou integraci eliptického integrálu a aproximaci odvozenou v prvních kapitolách:

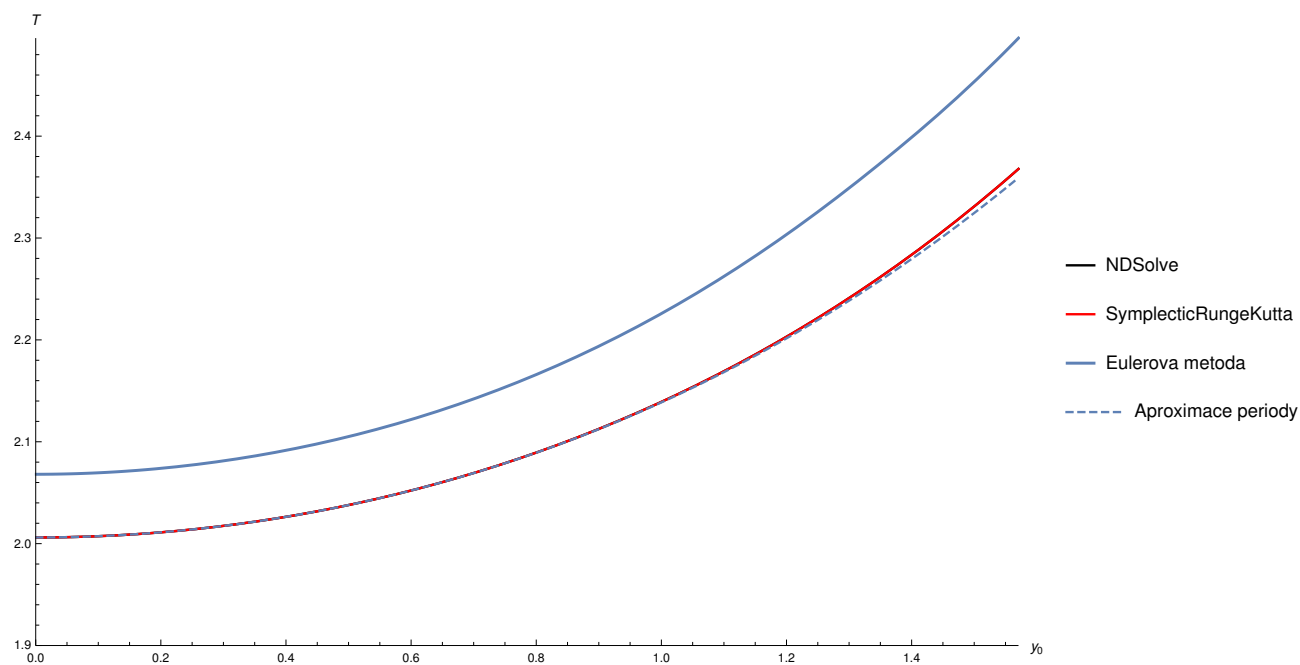
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{y_0^2}{16} + \frac{11y_0^4}{3072}\right). \quad (3.6)$$

Pro porovnání budeme periodu určovat při různých počátečních výchylkách y_0 .

Počáteční výchylka	NDSolve	Symplectic RungeKutta	Eulerova metoda	Aproximace periody	Přímou integrací
0.001	2.00605	2.00607	2.06809	2.00607	2.00607
0.301	2.01749	2.01749	2.08132	2.01749	2.01749
0.601	2.05231	2.05231	2.12202	2.05229	2.05231
0.901	2.11285	2.11285	2.19407	2.11258	2.11285
1.201	2.20344	2.20344	2.30382	2.20186	2.20344
1.501	2.33149	2.33149	2.45399	2.32501	2.33149

FIGURE 8. Velikost periody T pro různé metody v závislosti na počáteční výchylce y_0

Z obrázku (9) a z tabulky (8) je patrné, že Eulerova metoda se výrazně odlišuje od zbylých. Metody **NDSolve** a **SymplecticPartitionedRungeKutta** jsou velmi přesné, překvapivě aproximace periody (3.6) je také poměrně přesná, ale při vyšších počátečních výchylkách ztrácí na přesnosti.

FIGURE 9. Velikost peridy T pro různé metody v závislosti na počáteční výchylce y_0