Nejprve začneme s hledáním dalšího členu rozvoje pro periodu kmitů. Zatím jsme našli:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta_{init}^2}{16}\right)$$

Koukneme jak vypadá rozvoj $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ až do třetího člene:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+O\left(x^3\right)$$

Když za x dosadíme $k^2\sin^2(\phi)$ dostaneme (zanedbáváme zbytek):

$$1+\frac{1}{2}k^2\sin^2(\phi)+\frac{3}{8}k^4\sin^4(\phi) \tag{*}$$

Máme tu takovou malou důležitou rovnost:

$$k = \sin\frac{\theta_{init}}{2}$$

Pro naše k bychom mohli udělat rozvoj, ale jen k nebude stačit, neboť ve výrazu (*) máme vyšší mocniny k, takže uděláme rovoj pro vyšší mocniny k.

$$\begin{aligned} k^2 &= \sin^2\frac{\theta_{init}}{2} \approx \frac{\theta^2}{4}+O\left(\theta^3\right) \\ k^4 &= \sin^4\frac{\theta_{init}}{2} \approx \frac{\theta^4}{16}+O\left(\theta^5\right) \end{aligned}$$

Udělali jsme rozvoj do prvního členu, ty další nás nezajímají :D Teď to naházíme do jednoho kastrolu a zamícháme. Získáme toto:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \approx 1+\frac{1}{8}\theta^2\sin^2(\phi)+\frac{3}{128}\theta^4\sin^4(\phi)$$

Teď už zapíšeme periodu T s novým členem.

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{8}\theta^2\sin^2(\phi)+\frac{3}{128}\theta^4\sin^4(\phi)\right)d\phi =$$
$$= \frac{1}{512}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1024+64\theta^2+9\theta^4\right)$$