$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma ,$$

平面薄片的质量是它的面密度 $\mu(x,y)$ 在薄片所占闭区域 D 上的二重积分

$$m=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

一般地，如果 $f(x,y)\geqslant 0$，被积函数 $f(x,y)$ 可以解释为曲顶柱体的顶在点 (x,y) 处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积. 如果 $f(x,y)$ 是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的. 如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么，$f(x,y)$ 在 D 上的二重积分就等于 xOy 面上方的柱体体积减去 xOy 面下方的柱体体积所得之差.

二、二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以想到，二重积分与定积分有类似的性质，现叙述于下.

性质 1 设 α 与 β 为常数，则

$$\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 2 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和.

例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

性质 3 如果在 D 上，$f(x,y)=1$，σ 为 D 的面积，那么

$$\sigma=\iint_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma .$$

这性质的几何意义是很明显的，因为高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积.

性质 4 如果在 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant|f(x,y)|,$$

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint_D|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma .$$

性质 5 设 M 和 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma\leqslant\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma .$$

上述不等式是对于二重积分估值的不等式. 因为 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，所以由性质 4 有

$$\iint_D m\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D M\mathrm{d}\sigma ,$$

再应用性质 1 和性质 3，便得此估值不等式.

性质 6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma .$$

证 显然 $\sigma\neq 0$. 把性质 5 中不等式各除以 σ，有

$$m\leqslant\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M .$$

这就是说，确定的数值 $\dfrac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是介于函数 $f(x,y)$ 的最大值 M 与最小值 m 之间的. 根据在闭区域上连续函数的介值定理，在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得函数在该点的值与这个确定的数值相等，即

$$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta).$$

上式两端各乘 σ，就得所需要证明的公式.

习　题　10－1

1. 设有一平面薄板（不计其厚度）占有 xOy 面上的闭区域 D，薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q.

2. 设 $I_1=\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -2\leqslant y\leqslant 2\}$；又

$$I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma ,\text{其中 } D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}.$$

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

3. 利用二重积分定义证明：

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$（其中 σ 为 D 的面积）； (2) $\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$（其中 k 为常数）；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，

其中 $D=D_1\cup D_2$，D_1、D_2 为两个无公共内点的闭区域.

4. 试确定积分区域 D，使二重积分 $\iint\limits_D (1-2x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最大值.

5. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$；

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

6. 利用二重积分的性质估计下列积分的值：

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$；

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$；

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$；

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

第二节　二重积分的计算法

按照二重积分的定义来计算二重积分，对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的，但对一般的函数和区域来说，这不是一种切实可行的方法. 本节介绍一种计算二重积分的方法，这种方法是把二重积分化为两次单积分（即两次定积分）来计算.

一、利用直角坐标计算二重积分

下面用几何观点来讨论二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 的计算问题. 在讨论中我们假定 $f(x,y)\geqslant 0$.

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

来表示（图 10－4），其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

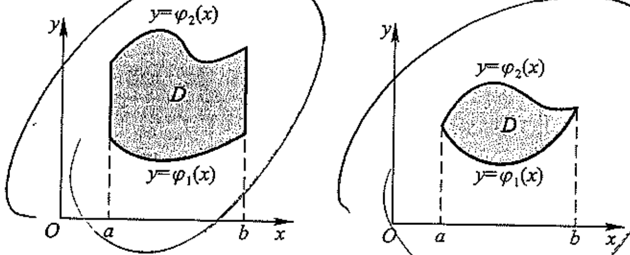

图 10－4

按照二重积分的几何意义，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体（图 10－5）的体积. 下面我们应用第六章中计算"平行截面面积为已知的立体的体积"的方法来计算这个曲顶柱体的体积.

先计算截面面积. 为此，在区间 $[a,b]$ 上任意取定一点 x_0，作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$. 这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底、曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形（图 10－5 中阴影部分），所以这截面的面积为

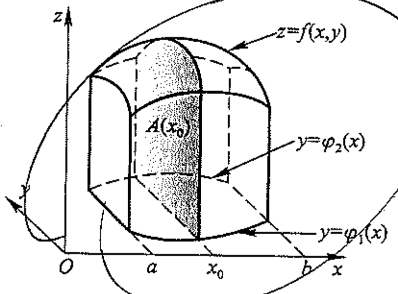

图 10－5

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.$$

一般地，过区间 $[a,b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

于是，应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法，得曲顶柱体体积为

上述二重积分直接化为二次积分计算比较麻烦. 现采用换元法. 令 $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, 则 $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$. 在这变换下, D 的边界 $x+y=c$, $x+y=d$, $y=ax$, $y=bx$ 依次与 $u=c$, $u=d$, $v=a$, $v=b$ 对应. 后者构成与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D'=\{(u,v)\mid c\leqslant u\leqslant d,a\leqslant v\leqslant b\},$$

如图 10-26(b) 所示. 又雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{(1+v)^2}\neq 0,\quad (u,v)\in D'.$$

从而所求面积为

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^b\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}\int_c^d u\mathrm{d}u$$
$$=\frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2(1+a)(1+b)}.$$

例 9 计算 $\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域.

解 作广义极坐标变换

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\theta,\end{cases}$$

其中 $a>0$, $b>0$, $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 在这变换下, 与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=ab\rho.$$

J 在 D' 内仅当 $\rho=0$ 处为零, 故换元公式仍成立, 从而有

$$\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\pi ab.$$

习 题 10-2

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D(3x+2y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint\limits_D(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$, $(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

3. 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, 积分区域 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

4. 化二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分 (分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2$ $(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域;

(3) 由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b$ $(b>a)$ 所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(5) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(6) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度

$\mu(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量.

8. 计算由四个平面 $x=0,y=0,x=1,y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

9. 求由平面 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

11. 画出积分区域,把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 表示为极坐标形式的二次积分,其中积分区域 D 是:

(1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}\ (a>0)$;

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$;

(3) $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$,其中 $0<a<b$;

(4) $\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$;　　(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$;　　(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

13. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$;　　(2) $\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$;　　(4) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dx$.

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$,$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$,$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,d\sigma$,其中 D 是由直线 $x=2$,$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma$,其中 D 是由直线 $y=x$,$y=x+a$,$y=a$,$y=3a\ (a>0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$,其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成,它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量(图 10-27).

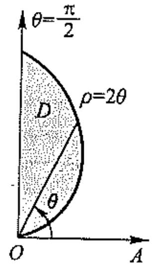

图 10-27

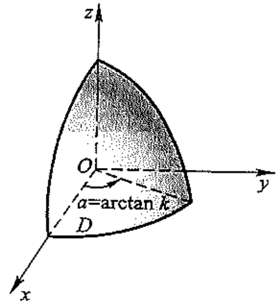

图 10-28

17. 求由平面 $y=0,y=kx\ (k>0),z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积(图 10-28).

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底,而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

*19. 作适当的变换,计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy$,其中 D 是平行四边形闭区域,它的四个顶点是 $(\pi,0)$,$(2\pi,\pi)$,$(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$;

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy$,其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$,直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dxdy$,其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$,其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

*20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积:

(1) D 是由曲线 $xy=4,xy=8,xy^3=5,xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y=x^3,y=4x^3,x=y^3,x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

*21. 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1,x=0,y=0$ 所围成,求证

$$\iint\limits_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy=\frac{1}{2}\sin 1.$$

*22. 选取适当的变换,证明下列等式:

(1) $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$,其中闭区域 $D = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$,其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$,且 $a^2+b^2 \neq 0$.

第三节 三 重 积 分

一、三重积分的概念

定积分及二重积分作为和的极限的概念,可以很自然地推广到三重积分.

定义 设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n,$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域,也表示它的体积. 在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$. 如果当各小闭区域直径中的最大值 $\lambda \to 0$ 时,这和的极限总存在,且与闭区域 Ω 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关,那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分,记作 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$,即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i, \tag{3-1}$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数,$\mathrm{d}v$ 叫做体积元素,Ω 叫做积分区域.

在直角坐标系中,如果用平行于坐标面的平面来划分 Ω,那么除了包含 Ω 的边界点的一些不规则小闭区域外,得到的小闭区域 Δv_i 为长方体. 设长方体小闭区域 Δv_i 的边长为 Δx_j、Δy_k 与 Δz_l,则 $\Delta v_i = \Delta x_j \Delta y_k \Delta z_l$. 因此在直角坐标系中,有时也把体积元素 $\mathrm{d}v$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,而把三重积分记作

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 叫做直角坐标系中的体积元素.

当函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续时,(3-1)式右端的和的极限必定存在,也就是函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分必定存在. 以后我们总假定函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上是连续的. 三重积分的性质与第一节中所叙述的二

重积分的性质类似,这里不再重复了.

如果 $f(x,y,z)$ 表示某物体在点 (x,y,z) 处的密度,Ω 是该物体所占有的空间闭区域,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,那么 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 是该物体的质量 m 的近似值,这个和当 $\lambda\to 0$ 时的极限就是该物体的质量 m,所以

$$m = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

二、三重积分的计算

计算三重积分的基本方法是将三重积分化为三次积分来计算. 下面按利用不同的坐标来分别讨论将三重积分化为三次积分的方法,且只限于叙述方法.

1. 利用直角坐标计算三重积分

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点. 把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上,得一平面闭区域 D_{xy}(图 10-29). 以 D_{xy} 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面. 这柱面与曲面 S 的交线从 S 中分出上、下两部分,它们的方程分别为

$$S_1: z = z_1(x,y),$$
$$S_2: z = z_2(x,y),$$

其中 $z_1(x,y)$ 与 $z_2(x,y)$ 都是 D_{xy} 上的连续函数,且 $z_1(x,y) \leqslant z_2(x,y)$. 过 D_{xy} 内任一点 (x,y) 作平行于 z 轴的直线,这直线通过曲面 S_1 穿入 Ω 内,然后通过曲面 S_2 穿出 Ω 外,穿入点与穿出点的竖坐标分别为 $z_1(x,y)$ 与 $z_2(x,y)$.

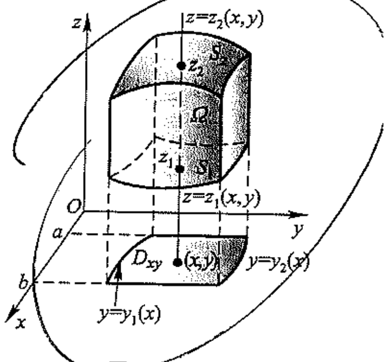

图 10-29

在这种情形下,积分区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\}.$$

先将 x、y 看做定值,将 $f(x,y,z)$ 只看做 z 的函数,在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ 上对 z 积分. 积分的结果是 x、y 的函数,记为 $F(x,y)$,即

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

然后计算 $F(x,y)$ 在闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

当积分区域 Ω 为球面 $r=a$ 所围成时,则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

特别地,当 $F(r,\varphi,\theta)=1$ 时,由上式即得球的体积

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\mathrm{d}r=2\pi\cdot2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

这是我们所熟知的结果.

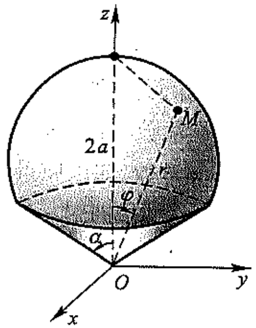

图 10-37

例 4 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体(图 10-37)的体积.

解 设球面通过原点 O,球心在 z 轴上,又内接锥面的顶点在原点 O,其轴与 z 轴重合,则球面方程为 $r=2a\cos\varphi$,锥面方程为 $\varphi=\alpha$. 因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式

$$0\leqslant r\leqslant2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

来表示,所以

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).\end{aligned}$$

习 题 10-3

1. 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分,其中积分区域 Ω 分别是

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0,z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy\ (c>0)$,$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

2. 设有一物体,占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant1\}$,在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$,计算该物体的质量.

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$,$f_2(y)$,$f_3(z)$

的乘积,即 $f(x,y,z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z)$,积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,l\leqslant z\leqslant m\}$,证明这个三重积分等于三个单积分的乘积,即

$$\iiint_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^bf_1(x)\mathrm{d}x\int_c^df_2(y)\mathrm{d}y\int_l^mf_3(z)\mathrm{d}z.$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

5. 计算 $\iiint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体.

6. 计算 $\iiint_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

7. 计算 $\iiint_{\Omega}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

8. 计算 $\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\ (R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

*10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v$,其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$,$x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega}xy\mathrm{d}v$,其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1,z=0,x=0,y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

*(2) $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

*(4) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A,z\geqslant0$ 所确定.

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

*(2) $x^2+y^2+z^2=2az\ (a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$ (含有 z 轴的部分);

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

*13. 求球体 $r\leqslant a$ 位于锥面 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

14. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

*15. 球心在原点、半径为 R 的球,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球的质量.

第四节　重积分的应用

由前面的讨论可知,曲顶柱体的体积、平面薄片的质量可用二重积分计算,空间物体的质量可用三重积分计算. 本节中我们将把定积分应用中的元素法推广到重积分的应用中,利用重积分的元素法来讨论重积分在几何、物理上的一些其他应用.

一、曲面的面积

设曲面 S 由方程

$$z=f(x,y)$$

给出,D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$. 要计算曲面 S 的面积 A.

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (这小闭区域的面积也记作 $d\sigma$). 在 $d\sigma$ 上取一点 $P(x,y)$,曲面 S 上对应地有一点 $M(x,y,f(x,y))$,点 M 在 xOy 面上的投影即点 P. 点 M 处曲面 S 的切平面设为 T (图 10-38). 以小闭区域 $d\sigma$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面,这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面,在切平面 T 上截下一小片平面. 由于 $d\sigma$ 的直径很小,切平面 T 上的那一小片平面的面积 dA 可以近似代替相应的那小片曲面的面积. 设点 M 处曲面 S 上的法线(指向朝上)与 z 轴所成的角为 γ,则

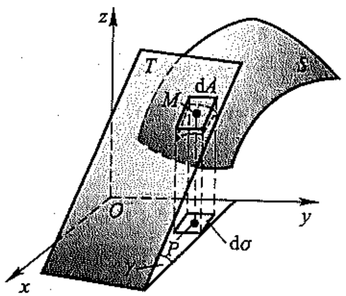

图 10-38

$$dA=\frac{d\sigma}{\cos\gamma}①.$$

因为

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}},$$

所以

$$dA=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma.$$

这就是曲面 S 的面积元素,以它为被积表达式在闭区域 D 上积分,得

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma.$$

上式也可写成

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

这就是计算曲面面积的公式.

设曲面的方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$,可分别把曲面投影到 yOz 面上(投影区域记作 D_{yz})或 zOx 面上(投影区域记作 D_{zx}),类似地可得

① 设两平面 Π_1、Π_2 的夹角为 θ (取锐角),Π_1 上的闭区域 D 在 Π_2 上的投影区域为 D_0,则 D 的面积 A 与 D_0 的面积 σ 之间有下列关系:

$$A=\frac{\sigma}{\cos\theta}.$$

事实上,先假定 D 是矩形闭区域,且其一边平行于平面 Π_1、Π_2 的交线 l,边长为 a,另一边长为 b (图 10-39),则 D_0 也是矩形闭区域,且边长分别为 a 及 $b\cos\theta$,从而

$$\sigma=ab\cos\theta=A\cos\theta,$$

即

$$A=\frac{\sigma}{\cos\theta}.$$

在一般情况,可把 D 分成上述类型的 m 个小矩形闭区域(不计含边界点的不规则部分),则小矩形闭区域的面积 A_k 及其投影区域的面积 σ_k 之间符合 $A_k=\dfrac{\sigma_k}{\cos\theta}\ (k=1,2,\cdots,m)$,从而 $\sum\limits_{k=1}^m A_k=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^m\sigma_k}{\cos\theta}$. 使各小闭区域的直径中的最大者趋于零,取极限便得 $A=\dfrac{\sigma}{\cos\theta}$.

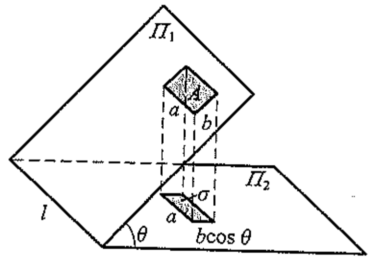

图 10-39

*例 6　求密度为 ρ 的均匀球对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解　取球心为坐标原点,z 轴与轴 l 重合,又设球的半径为 a,则球所占空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}.$$

所求转动惯量即球对于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z&=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}v\\&=\rho\iiint_\Omega (r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\rho\iiint_\Omega r^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r\\&=\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^\pi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}a^2M,\end{aligned}$$

其中 $M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 为球的质量.

四、引力

下面讨论空间一物体对于物体外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质量的质点的引力问题.

设物体占有空间有界闭区域 Ω,它在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$,并假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续. 在物体内任取一直径很小的闭区域 $\mathrm{d}v$(这闭区域的体积也记作 $\mathrm{d}v$),(x,y,z) 为这一小块中的一点. 把这一小块物体的质量 $\rho\mathrm{d}v$ 近似地看做集中在点 (x,y,z) 处. 于是按两质点间的引力公式,可得这一小块物体对位于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位质量的质点的引力近似地为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}&=(\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z)\\&=\left(G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v,G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v,G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v\right),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z$ 为引力元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的分量,$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,$G$ 为引力常数. 将 $\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z$ 在 Ω 上分别积分,即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=(F_x,F_y,F_z)\\&=\left(\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v,\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v,\right.\\&\qquad\left.\iiint_\Omega\frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v\right).\end{aligned}$$

如果考虑平面薄片对薄片外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质量的质点的引力,设平面薄片占有 xOy 平面上的有界闭区域 D,其面密度为 $\mu(x,y)$,那么只要将上式中的密度 $\rho(x,y,z)$ 换成面密度 $\mu(x,y)$,将 Ω 上的三重积分换成 D 上的二重积分,就可得到相应的计算公式.

例 7　设半径为 R 的质量均匀的球占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$. 求它对位于 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$ 处的单位质量的质点的引力.

解　设球的密度为 ρ_0,由球的对称性及质量分布的均匀性知 $F_x=F_y=0$,所求引力沿 z 轴的分量为

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint_\Omega G\rho_0\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v\\&=G\rho_0\int_{-R}^R(z-a)\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&=G\rho_0\int_{-R}^R(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\\&=2\pi G\rho_0\int_{-R}^R(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z\\&=2\pi G\rho_0\left[-2R+\frac{1}{a}\int_{-R}^R(z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]\\&=2\pi G\rho_0\left(-2R+2R-\frac{2R^3}{3a^2}\right)\\&=-G\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0\cdot\frac{1}{a^2}=-G\frac{M}{a^2},\end{aligned}$$

其中 $M=\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0$ 为球的质量. 上述结果表明:质量均匀的球对球外一质点的引力如同球的质量集中于球心时两质点间的引力.

习　题　10－4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.
2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}, x=x_0, y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$;

(3) D 是界于两个圆 $\rho=a\cos\theta, \rho=b\cos\theta\ (0<a<b)$ 之间的闭区域.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成,它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$,求该薄片的质心.

6. 设有一等腰直角三角形薄片,腰长为 a,各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方,求这薄片的质心.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2=x^2+y^2, z=1$;

*(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (A>a>0), z=0$;

(3) $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0$.

*8. 设球占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$,它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球的质心.

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下,求指定的转动惯量:

(1) $D=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$,求 I_y;

(2) D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成,求 I_x 和 I_y;

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x,y) \mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$,求 I_x 和 I_y.

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h,计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0, |x|=a, |y|=a$ 所围成,

(1) 求物体的体积;

(2) 求物体的质心;

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

12. 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

13. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0) \mid R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2, x\geqslant 0\}$,求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

14. 设均匀柱体密度为 ρ,占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant h\}$,求它对于位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

*第五节 含参变量的积分

设 $f(x,y)$ 是矩形(闭区域) $R=[a,b]\times[c,d]$ ① 上的连续函数. 在 $[a,b]$ 上任意取定 x 的一个值,于是 $f(x,y)$ 是变量 y 在 $[c,d]$ 上的一个一元连续函数,从而积分

$$\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在,这个积分的值依赖于取定的 x 值. 当 x 的值改变时,一般说来这个积分的值也跟着改变. 这个积分确定一个定义在 $[a,b]$ 上的 x 的函数,把它记作 $\varphi(x)$,即

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{5-1}$$

这里变量 x 在积分过程中是一个常量,通常称它为参变量,因此 (5-1) 式右端是一个含参变量 x 的积分,这积分确定 x 的一个函数 $\varphi(x)$,下面讨论关于 $\varphi(x)$ 的一些性质.

定理 1 **如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,那么由积分 (5-1) 确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.**

证 设 x 和 $x+\Delta x$ 是 $[a,b]$ 上的两点,则

$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_c^d [f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\,\mathrm{d}y. \tag{5-2}$$

由于 $f(x,y)$ 在闭区域 R 上连续,从而一致连续. 因此对于任意取定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对于 R 内的任意两点 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2),只要它们之间的距离小于 δ,即

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta,$$

就有

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\varepsilon.$$

因为点 $(x+\Delta x,y)$ 与 (x,y) 的距离等于 $|\Delta x|$,所以当 $|\Delta x|<\delta$ 时,就有

$$|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|<\varepsilon,$$

于是由 (5-2) 式有

$$\begin{aligned}&|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|\\ \leqslant &\int_c^d |f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}y<\varepsilon(d-c).\end{aligned}$$

① $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$,称为 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 的直积.

$$\varphi(1)-\varphi(0)$$

$$=-\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathrm{d}\alpha,$$

即

$$I=-I+\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln 2}{2}=-I+\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

从而

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

*习　题　10-5

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\,\mathrm{d}y$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\,\mathrm{d}y$;　(2) $\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}\mathrm{d}y$;

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y$;　　(4) $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$.

3. 设 $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$,其中 $f(y)$ 为可微分的函数,求 $F''(x)$.

4. 应用对参数的微分法,计算下列积分:

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$　$(|a|<1)$;

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$　$(a>0)$.

5. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$　$(0<a<b)$.

总 习 题 十

1. 填空:

(1) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值是__________;

(2) 设闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$,则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

2. 以下各题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$,$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$,则有(　　);

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$,$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$,则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　);

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x$,则 $F'(2)=$(　　).

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$　　(D) 0

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(1,0)$,$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint\limits_D(x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi\}$;

(3) $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

4. 交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

5. 证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

7. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant y, x \geqslant 0\}$ 上连续，且

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y)$.

8. 把积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分，其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1$，$z=0$ 所围成的闭区域.

9. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球：$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ $(R>0)$ 的公共部分；

(2) $\iiint\limits_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

*10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},\quad G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t) > \frac{2}{\pi}G(t)$.

11. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

12. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

13. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片（面密度为常数 μ）对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的质量均匀的半圆形薄片，占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant R^2, y \geqslant 0\}$，过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \leqslant 1, z \geqslant 0\right\}$ 的质心.

*16. 一球形行星的半径为 R，其质量为 M，其密度呈球对称分布，并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零，则行星中心的密度是多少？