例8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

以上运算的最后一步用到了二元函数 $\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在点(0,0)的连续性.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质:

性质1(有界性与最大值最小值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数,必定在 D 上有界,且能取得它的最大值和最小值.

性质1就是说,若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则必定存在常数 $M>0$,使得对一切 $P\in D$,有 $|f(P)|\leqslant M$;且存在 P_1、$P_2\in D$,使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},\quad f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

性质2(介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

* **性质3**(一致连续性定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

性质3就是说,若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于 D 上的任意两点 P_1、P_2,只要当 $|P_1P_2|<\delta$ 时,都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立.

习 题 9-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集?并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq0,y\neq0\}$; (2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant4\}$;

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$;

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

5. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$; (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; (4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$;

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$; (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$; (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

*7. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

*9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

*10. 设 $F(x,y)=f(x)$,$f(x)$ 在 x_0 处连续,证明:对任意 $y_0\in\mathbf{R}$,$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

第二节 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时,我们从研究函数的变化率引入了导数的概念.对于多元函数同样需要讨论它的变化率.但多元函数的自变量不止一个,因变量与自变量的关系要比一元函数复杂得多.在这一节里,我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率.以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例,如果只有自变量 x 变化,而自变量 y 固定(即看做常量),这时它就是 x 的一元函数,这函数对 x 的导数,就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对于 x 的偏导数,即有如下定义:

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等，即$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 这不是偶然的，事实上，有下述定理.

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 这定理的证明从略.

对于二元以上的函数，也可以类似地定义高阶偏导数，而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

例 7 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

例 8 证明函数 $u=\frac{1}{r}$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

因为函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫做拉普拉斯（Laplace）方程，它是数学物理方程中一种很重要的方程.

习　题　9－2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　(2) $s=\frac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\frac{x}{y}$；　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

5. 曲线$\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

6. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

$z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 连续，并且 $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ 都较小时，就有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y. \tag{3-8}$$

上式也可以写成

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y. \tag{3-9}$$

与一元函数的情形相类似，可以利用(3-8)式或(3-9)式对二元函数作近似计算和误差估计，举例于下.

例 4 有一圆柱体受压后发生形变，它的半径由 20 cm 增大到 20.05 cm，高度由 100 cm 减少到 99 cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为 r、h 和 V，则有

$$V=\pi r^2 h.$$

记 r、h 和 V 的增量依次为 Δr、Δh 和 ΔV. 应用公式(3-8)，有

$$\Delta V \approx dV = V_r\Delta r + V_h\Delta h = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2\Delta h.$$

把 $r=20$, $h=100$, $\Delta r=0.05$, $\Delta h=-1$ 代入，得

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05 + \pi\times 20^2\times(-1) = -200\pi(\text{cm}^3).$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了 $200\pi\ \text{cm}^3$.

例 5 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解 设函数 $f(x,y)=x^y$. 显然，要计算的值就是函数在 $x=1.04$, $y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0.04$, $\Delta y=0.02$. 由于

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x,$$

$$f(1,2)=1,\quad f_x(1,2)=2,\quad f_y(1,2)=0,$$

所以，应用公式(3-9)便有

$$(1.04)^{2.02} \approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

例 6 利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式是

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l=(100\pm 0.1)$ cm、$T=(2\pm 0.004)$ s. 问由于测定 l 与 T 的误差而引起 g 的绝对误差和相对误差各为多少①?

解 如果把测量 l 与 T 时所产生的误差当作 $|\Delta l|$ 与 $|\Delta T|$，那么利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 的全增量的绝对值 $|\Delta g|$. 由于 $|\Delta l|$、

① 按第二章第五节的说明，这里的绝对误差和相对误差各指相应的误差限.

$|\Delta T|$ 都很小，因此我们可以用 dg 来近似地代替 Δg. 这样就得到 g 的误差为

$$|\Delta g| \approx |dg| = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\cdot\delta_l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\cdot\delta_T = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\delta_l + \frac{2l}{T^3}\delta_T\right),$$

其中 δ_l 与 δ_T 分别为 l 与 T 的绝对误差. 把 $l=100$ cm, $T=2$ s, $\delta_l=0.1$ cm, $\delta_T=0.004$ s 代入上式，得 g 的绝对误差约为

$$\delta_g = 4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2}+\frac{2\times 100}{2^3}\times 0.004\right)=0.5\pi^2\approx 4.93(\text{cm/s}^2).$$

从而 g 的相对误差约为

$$\frac{\delta_g}{g}=\frac{0.5\pi^2}{\frac{4\pi^2\times 100}{2^2}}=0.5\%.$$

从上面的例子可以看到，对于一般的二元函数 $z=f(x,y)$，如果自变量 x、y 的绝对误差分别为 δ_x、δ_y，即

$$|\Delta x|\leqslant\delta_x,\quad |\Delta y|\leqslant\delta_y,$$

那么 z 的误差

$$|\Delta z|\approx|dz|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y;$$

从而得到 z 的绝对误差约为

$$\delta_z=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta_x+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta_y; \tag{3-10}$$

z 的相对误差约为

$$\frac{\delta_z}{|z|}=\left|\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}\right|\delta_x+\left|\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}\right|\delta_y. \tag{3-11}$$

习 题 9-3

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $u=x^{yz}$.

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

4. 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分;

(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是(　　).

(A) (2)⇒(3)⇒(1)　　(B) (3)⇒(2)⇒(1)

(C) (3)⇒(4)⇒(1)　　(D) (3)⇒(1)⇒(4)

*6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

*7. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值($\ln 2=0.693$).

*8. 已知边长为 $x=6$ m 与 $y=8$ m 的矩形,如果 x 边增加 5 cm 而 y 边减少 10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

*9. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm,内高为 20 cm,内半径为 4 cm. 求容器外壳体积的近似值.

*10. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为 (7 ± 0.1) cm 和 (24 ± 0.1) cm. 试求利用上述两值来计算斜边长度时的绝对误差.

*11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 (63 ± 0.1) m 和 (78 ± 0.1) m,这两边的夹角为 $60°\pm1°$. 试求三角形面积的近似值,并求其绝对误差和相对误差.

*12. 利用全微分证明:两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

第四节　多元复合函数的求导法则

本节要将一元函数微分学中复合函数的求导法则推广到多元复合函数的情形. 多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中也起着重要作用.

下面按照多元复合函数不同的复合情形,分三种情形讨论.

1. 一元函数与多元函数复合的情形

定理 1　如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数,那么复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导,且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{4-1}$$

证　设 t 获得增量 Δt,这时 $u=\varphi(t)$、$v=\psi(t)$ 的对应增量为 Δu、Δv,由此,函数 $z=f(u,v)$ 相应地获得增量 Δz. 按假定,函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 具有连续偏导数,这时函数的全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v,$$

这里,当 $\Delta u\to0,\Delta v\to0$ 时,$\varepsilon_1\to0,\varepsilon_2\to0$. ①

将上式两边各除以 Δt,得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

因为当 $\Delta t\to0$ 时,$\Delta u\to0,\Delta v\to0,\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{du}{dt},\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\to\dfrac{dv}{dt}$,所以

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

这就证明了复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导,且其导数可用公式(4-1)计算. 证毕.

用同样的方法,可把定理推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如,设 $z=f(u,v,w)$,$u=\varphi(t)$,$v=\psi(t)$,$w=\omega(t)$ 复合而得复合函数

$$z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)],$$

则在与定理相类似的条件下,这复合函数在点 t 可导,且其导数可用下列公式计算:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}. \tag{4-2}$$

在公式(4-1)及(4-2)中的导数 $\dfrac{dz}{dt}$ 称为全导数.

2. 多元函数与多元函数复合的情形

定理 2　如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数,那么复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4-3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4-4}$$

① 在偏导数连续的条件下,这一公式成立的证明参见本章第三节定理 2 的证明.

如果 u 和 v 又是中间变量，即 $u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$，且这两个函数也具有连续偏导数，那么复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式(4－3)及(4－4)给出. 把公式(4－3)及(4－4)中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由此可见，无论 u 和 v 是自变量还是中间变量，函数 $z=f(u,v)$ 的全微分形式是一样的. 这个性质叫做全微分形式不变性.

例 6 利用全微分形式不变性解本节的例 1.

解 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}(e^u\sin v)=e^u\sin v\mathrm{d}u+e^u\cos v\mathrm{d}v$,

因

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

代入后归并含 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}y$ 的项，得

$$\mathrm{d}z=(e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v)\mathrm{d}x+(e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v)\mathrm{d}y,$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

比较上式两边的 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数，就同时得到两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$，它们与例 1 的结果一样.

习 题 9－4

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$，$v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

5. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

6. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数（其中 f 具有一阶连续偏导数）：

(1) $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$； (2) $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

9. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

10. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

*12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z=f(xy,y)$； (2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$； (4) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

*13. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\qquad y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

例3 设 $xu-yv=0, yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 此题可直接利用公式(5-6)，但也可依照推导公式(5-6)的方法来求解. 下面我们用后一种方法来做.

将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u, \\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v. \end{cases}$$

在 $J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2\neq 0$ 的条件下，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}.$$

将所给方程的两边对 y 求导. 用同样方法在 $J=x^2+y^2\neq 0$ 的条件下可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

例4 设函数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内连续且有连续偏导数，又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

(1) 证明方程组

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v) \end{cases} \qquad (5-7)$$

在点 (x,y,u,v) 的某一邻域内唯一确定一组连续且具有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$.

(2) 求反函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 对 x,y 的偏导数.

解 (1) 将方程组(5-7)改写成下面的形式

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0. \end{cases}$$

则按假设

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

由隐函数存在定理3，即得所要证的结论.

(2) 将方程组(5-7)所确定的反函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 代入(5-7)，即得

$$\begin{cases} x\equiv x[u(x,y),v(x,y)], \\ y\equiv y[u(x,y),v(x,y)]. \end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} 1=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于 $J\neq 0$，故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

习 题 9-5

1. 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$，求$\frac{dy}{dx}$.

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{dy}{dx}$.

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

6. 设 $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

7. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

*8. 设 $e^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

*9. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

(1) 设 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$；

(2) 设 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dx}{dz},\dfrac{dy}{dz}$；

(3) 设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

(4) 设 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v,\\ y=e^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

11. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

可应用.

第六节　多元函数微分学的几何应用

本节先介绍一元向量值函数及其导数，再讨论多元函数微分学的几何应用.

一、一元向量值函数及其导数

由空间解析几何知道，空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\quad t\in[\alpha,\beta].\\ z=\omega(t),\end{cases}\tag{6-1}$$

方程(6-1)也可以写成向量形式. 若记

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{f}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\omega(t)\boldsymbol{k},$$

则方程(6-1)就成为向量方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t),\ t\in[\alpha,\beta].\tag{6-2}$$

方程(6-2)确定了一个映射 $\boldsymbol{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^3$. 由于这个映射将每一个 $t\in[\alpha,\beta]$，映成一个向量 $\boldsymbol{f}(t)\in\mathbf{R}^3$，故称这映射为一元向量值函数. 一般地，有如下定义.

定义 1　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为一元向量值函数，通常记为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t),t\in D,$$

其中数集 D 称为函数的定义域，t 称为自变量，$\boldsymbol{r}$ 称为因变量.

一元向量值函数是普通一元函数的推广. 现在，自变量 t 依然取实数值，但因变量 $\boldsymbol{r}$ 不取实数值，而取值为 n 维向量.

在本教材中，只讨论一元向量值函数，并对因变量的取值以 $n=3$ 的情形作为代表，即 $\boldsymbol{r}$ 的取值为 3 维向量. 为简单起见，以下将一元向量值函数简称为向量值函数，并把普通的实值函数称为数量函数.

在 $\mathbf{R}^3$ 中，若向量值函数 $\boldsymbol{f}(t),t\in D$ 的三个分量函数依次为 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),t\in D$，则向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 可表示为

$$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k},t\in D\tag{6-3}$$

或

$$\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)),t\in D.\tag{6-3'}$$

设(变)向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点取在坐标系的原点 O 处，终点在 M 处，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$（图 9-6）. 当 t 改变时，$\boldsymbol{r}$ 跟着改变，从而终点 M 也随之改变. 终点 M 的轨迹（记作曲线 Γ）称为向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ $(t\in D)$ 的终端曲线，曲线 Γ 也称为向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ $(t\in D)$ 的图形.

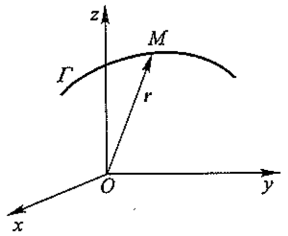

图 9-6

由于向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ $(t\in D)$ 与空间曲线 Γ 是一一对应的，因此

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)),t\in D\tag{6-4}$$

称为曲线 Γ 的向量方程.

根据 $\mathbf{R}^3$ 中的向量的线性运算及向量的模的概念，可以类似于定义数量函数的极限、连续、导数等概念的形式来定义向量值函数的相应概念，现简述如下：

定义 2　设向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在一个常向量 $\boldsymbol{r}_0$，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $\boldsymbol{f}(t)$ 都满足不等式

$$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon,$$

那么，常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 就叫做向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{r}_0\quad 或\quad \boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{r}_0,t\to t_0.$$

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

这里，把 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 分别简记为 f_x 和 f_y.

例 6 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14,$$
$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z),$$
$$\boldsymbol{n}|_{(1,2,3)}=(2,4,6).$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处此球面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

即

$$x+2y+3z-14=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},$$

即

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

由此可见，法线经过原点（即球心）.

例 7 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解

$$f(x,y)=x^2+y^2-1,$$
$$\boldsymbol{n}=(f_x,f_y,-1)=(2x,2y,-1),$$
$$\boldsymbol{n}|_{(2,1,4)}=(4,2,-1).$$

所以在点 $(2,1,4)$ 处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0.$$

即

$$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

习　题　9-6

1. 设 $f(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$, $g(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$, $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=\boldsymbol{u}$, $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=\boldsymbol{v}$,

证明

$$\lim_{t\to t_0}[f(t)\times g(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

2. 下列各题中，$\boldsymbol{r}=f(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=f(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},t_0=1$;

(2) $\boldsymbol{r}=f(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},t_0=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\boldsymbol{r}=f(t)=(2\ln(t+1))\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k},t_0=1$.

3. 求曲线 $\boldsymbol{r}=f(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

4. 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t_0=1$ 的点处的切线及法平面方程.

5. 求曲线 $y^2=2mx,z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

6. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

7. 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

8. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

9. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程.

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

12. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

13. 设 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数，证明：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

第七节　方向导数与梯度

方向导

一、方向导数

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率. 但许多物理现象告诉我们，只

即

$$2x+4y+z=14,$$

曲面在 P_0 处的法线方程是

$$x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=4+t\ \ (t \text{ 为任意常数}).$$

下面我们简单地介绍数量场与向量场的概念.

如果对于空间区域 G 内的任一点 M,都有一个确定的数量 $f(M)$,那么称在这空间区域 G 内确定了一个数量场(例如温度场、密度场等). 一个数量场可用一个数量函数 $f(M)$ 来确定. 如果与点 M 相对应的是一个向量 $\boldsymbol{F}(M)$,那么称在这空间区域 G 内确定了一个向量场(例如力场、速度场等). 一个向量场可用一个向量值函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 来确定,而

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中 $P(M),Q(M),R(M)$ 是点 M 的数量函数.

若向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 是某个数量函数 $f(M)$ 的梯度,则称 $f(M)$ 是向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 的一个势函数,并称向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 为势场. 由此可知,由数量函数 $f(M)$ 产生的梯度场 $\mathbf{grad}\, f(M)$ 是一个势场. 但需注意,任意一个向量场并不一定都是势场,因为它不一定是某个数量函数的梯度.

例 7 试求数量场 $\dfrac{m}{r}$ 所产生的梯度场,其中常数 $m>0$,$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为原点 O 与点 $M(x,y,z)$ 间的距离.

解 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{mx}{r^3},$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{my}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{r}\right)=-\frac{mz}{r^3}.$$

从而

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right).$$

如果用 $\boldsymbol{e}_r$ 表示与 $\overrightarrow{OM}$ 同方向的单位向量,那么

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k},$$

因此

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r.$$

上式右端在力学上可解释为,位于原点 O 而质量为 m 的质点对位于点 M 而质量为 1 的质点的引力. 这引力的大小与两质点的质量的乘积成正比、而与它们

的距离平方成反比,这引力的方向由点 M 指向原点. 因此数量场 $\dfrac{m}{r}$ 的势场即梯度场 $\mathbf{grad}\,\dfrac{m}{r}$ 称为引力场,而函数 $\dfrac{m}{r}$ 称为引力势.

习 题 9-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.
2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处,沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.
3. 求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.
4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.
5. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.
6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处,沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.
7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处,沿球面在该点的外法线方向的方向导数.
8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$,求
$$\mathbf{grad}\,f(0,0,0)\quad 及\quad \mathbf{grad}\,f(1,1,1).$$
9. 设函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续,证明:
(1) $\nabla(cu)=c\nabla u$ (其中 c 为常数);
(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$;
(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$;
(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.
10. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向,并求沿这个方向的方向导数.

第八节 多元函数的极值及其求法

多元函数

一、多元函数的极值及最大值与最小值

在实际问题中,往往会遇到多元函数的最大值与最小值问题. 与一元函数相

数极值的充分条件判断，可知点$(3a,3a,3a)$是函数 $u=xyz$ 在条件(8－12)下的极小值点. 因此，目标函数 $u=xyz$ 在条件(8－12)下在点$(3a,3a,3a)$处取得极小值 $27a^3$.

下面的问题涉及经济学中的一个最优价格的模型.

在生产和销售商品过程中，商品销售量、生产成本与销售价格是相互影响的. 厂家要选择合理的销售价格，才能获得最大利润. 这个价格称为最优价格. 下面的例题就是讨论怎样确定电视机的最优价格.

例 9 设某电视机厂生产一台电视机的成本为 C，每台电视机的销售价格为 p，销售量为 x. 假设该厂的生产处于平衡状态，即电视机的生产量等于销售量. 根据市场预测，销售量 x 与销售价格 p 之间有下面的关系：

$$x=Me^{-ap}\quad(M>0,a>0),\tag{8-14}$$

其中 M 为市场最大需求量，a 是价格系数. 同时，生产部门根据对生产环节的分析，对每台电视机的生产成本 C 有如下测算：

$$C=C_0-k\ln x\quad(k>0,x>1),\tag{8-15}$$

其中 C_0 是只生产一台电视机时的成本，k 是规模系数.

根据上述条件，应如何确定电视机的售价 p，才能使该厂获得最大利润？

解 设厂家获得的利润为 u，每台电视机售价为 p，每台生产成本为 C，销售量为 x，则

$$u=(p-C)x.$$

于是问题化为求利润函数 $u=(p-C)x$ 在附加条件(8－14)、(8－15)下的极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,p,C)=(p-C)x+\lambda(x-Me^{-ap})+\mu(C-C_0+k\ln x).$$

令

$$\begin{cases}L_x=(p-C)+\lambda+k\dfrac{\mu}{x}=0,\\ L_p=x+\lambda aMe^{-ap}=0,\\ L_C=-x+\mu=0.\end{cases}$$

将(8－14)代入(8－15)，得

$$C=C_0-k(\ln M-ap).\tag{8-16}$$

由(8－14)及 $L_p=0$ 知 $\lambda a=-1$，即

$$\lambda=-\frac{1}{a}.\tag{8-17}$$

由 $L_C=0$ 知 $x=\mu$，即

$$\frac{x}{\mu}=1.\tag{8-18}$$

将(8－16)、(8－17)和(8－18)代入 $L_x=0$，得

$$p-C_0+k(\ln M-ap)-\frac{1}{a}+k=0,$$

由此得

$$p^*=\frac{C_0-k\ln M+\dfrac{1}{a}-k}{1-ak}.$$

因为由问题本身可知最优价格必定存在，所以这个 p^* 就是电视机的最优价格. 只要确定了规模系数 k、价格系数 a，电视机的最优价格问题就解决了.

习 题 9－8

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

则下述四个选项中正确的是(　　).

(A) 点$(0,0)$不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断$(0,0)$是否为 $f(x,y)$ 的极值点

2. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

3. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

4. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

5. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

7. 要造一个体积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

8. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0,y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大？

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

12. 设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. 该圆板被加热,以致在点$(x,y)$的温度是$T=x^2+2y^2-x$. 求该圆板的最热点和最冷点.

13. 形状为椭球$4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$的空间探测器进入地球大气层,其表面开始受热,1小时后在探测器的点(x,y,z)处的温度$T=8x^2+4yz-16z+600$,求探测器表面最热的点.

勒公式.

*第九节 二元函数的泰勒公式

一、二元函数的泰勒公式

在上册第三章,我们已经知道:若函数$f(x)$在x_0的某邻域内具有直到$(n+1)$阶导数,则对该邻域内的任一x,有下面的n阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

成立. 利用一元函数的泰勒公式,我们可用n次多项式来近似表达函数$f(x)$,且误差是当$x\to x_0$时比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小. 对于多元函数来说,无论是为了理论的或实际计算的目的,也都有必要考虑用多个变量的多项式来近似表达一个给定的多元函数,并能具体地估算出误差的大小来. 今以二元函数为例,设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内连续且有$(n+1)$阶连续偏导数,(x_0+h,y_0+k)为此邻域内任一点,我们的问题就是要把函数$f(x_0+h,y_0+k)$近似地表达为$h=x-x_0,k=y-y_0$的n次多项式,而由此所产生的误差是当$\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$时比ρ^n高阶的无穷小. 为了解决这个问题,就要把一元函数的泰勒中值定理推广到多元函数的情形.

定理 设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内连续且有$(n+1)$阶连续偏导数,(x_0+h,y_0+k)为此邻域内任一点,则有

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)\\&=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

其中记号

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$表示$hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$,

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)$表示$h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0)$,

一般地,记号

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0,y_0)$表示$\sum\limits_{p=0}^{m}C_m^ph^pk^{m-p}\left.\frac{\partial^mf}{\partial x^p\partial y^{m-p}}\right|_{(x_0,y_0)}$.

证 为了利用一元函数的泰勒公式来进行证明,我们引入函数

$$\Phi(t)=f(x_0+ht,y_0+kt)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

显然$\Phi(0)=f(x_0,y_0)$,$\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$. 由$\Phi(t)$的定义及多元复合函数的求导法则,可得

$$\begin{aligned}\Phi'(t)&=hf_x(x_0+ht,y_0+kt)+kf_y(x_0+ht,y_0+kt)\\&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+ht,y_0+kt),\\\Phi''(t)&=h^2f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+k^2f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)\\&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0+ht,y_0+kt),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\\Phi^{(n+1)}(t)&=\sum_{p=0}^{n+1}C_{n+1}^ph^pk^{n+1-p}\left.\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{n+1-p}}\right|_{(x_0+ht,y_0+kt)}\\&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+ht,y_0+kt).\end{aligned}$$

利用一元函数的麦克劳林公式,得

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta),\quad(0<\theta<1).$$

将$\Phi(0)=f(x_0,y_0)$,$\Phi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$及上面求得的$\Phi(t)$直到n阶导数在$t=0$的值,以及$\Phi^{(n+1)}(t)$在$t=\theta$的值代入上式,即得

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)\\&=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)+R_n,\end{aligned}\tag{9-1}$$

其中

…记为 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}. 由(9-7)式可知，当 $(x_0+h, y_0+k) \in U_2(P_0)$ 时，f_{xx} 及 f_{yy} 都不等于零且两者同号. 于是(9-5)式可写成

$$\Delta f=\frac{1}{2f_{xx}}[(hf_{xx}+kf_{xy})^2+k^2(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)].$$

当 h、k 不同时为零且 $(x_0+h, y_0+k) \in U_2(P_0)$ 时，上式右端方括号内的值为正，所以 Δf 异于零且与 f_{xx} 同号. 又由 $f(x,y)$ 的二阶偏导数的连续性知 f_{xx} 与 A 同号，因此 Δf 与 A 同号. 所以，当 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值，当 $A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

(2) 设 $AC-B^2<0$，即

$$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2<0. \tag{9-8}$$

先假定 $f_{xx}(x_0,y_0)=f_{yy}(x_0,y_0)=0$，于是由(9-8)式可知这时 $f_{xy}(x_0,y_0)\neq 0$. 现在分别令 $k=h$ 及 $k=-h$，则由(9-5)式分别得

$$\Delta f=\frac{h^2}{2}[f_{xx}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_1 h)+2f_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_1 h)+ f_{yy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_1 h)]$$

及

$$\Delta f=\frac{h^2}{2}[f_{xx}(x_0+\theta_2 h, y_0-\theta_2 h)-2f_{xy}(x_0+\theta_2 h, y_0-\theta_2 h)+ f_{yy}(x_0+\theta_2 h, y_0-\theta_2 h)],$$

其中 $0<\theta_1, \theta_2<1$. 当 $h\to 0$ 时，以上两式中方括号内的式子分别趋于极限

$$2f_{xy}(x_0,y_0) \text{ 及 } -2f_{xy}(x_0,y_0),$$

从而当 h 充分接近零时，两式中方括号内的值有相反的符号，因此 Δf 可取不同符号的值，所以 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

再证 $f_{xx}(x_0,y_0)$ 和 $f_{yy}(x_0,y_0)$ 不同时为零的情形. 不妨假定 $f_{xx}(x_0,y_0)\neq 0$. 先取 $k=0$，于是由(9-5)式得

$$\Delta f=\frac{1}{2}h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0).$$

由此看出，当 h 充分接近零时，Δf 与 $f_{xx}(x_0,y_0)$ 同号.

但如果取

$$h=-f_{xy}(x_0,y_0)s, \quad k=f_{xx}(x_0,y_0)s, \tag{9-9}$$

其中 s 是异于零但充分接近零的数，则可发现，当 $|s|$ 充分小时，Δf 与 $f_{xx}(x_0,y_0)$ 异号. 事实上，在(9-5)式中将 h 及 k 用(9-9)式给定的值代入，得

$$\Delta f=\frac{1}{2}s^2\{[f_{xy}(x_0,y_0)]^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)- 2f_{xy}(x_0,y_0)f_{xx}(x_0,y_0)f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+ [f_{xx}(x_0,y_0)]^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\}. \tag{9-10}$$

上式右端花括号内的式子当 $s\to 0$ 时趋于极限

$$f_{xx}(x_0,y_0)\{f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2\}.$$

由不等式(9-8)，上式花括号内的值为负，因此当 s 充分接近零时，(9-10)式右端（从而 Δf）与 $f_{xx}(x_0,y_0)$ 异号.

以上已经证得：在点 (x_0,y_0) 的任意邻近，Δf 可取不同符号的值，因此 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 考察函数

$$f(x,y)=x^2+y^4 \quad \text{及} \quad g(x,y)=x^2+y^3.$$

容易验证，这两个函数都以(0,0)为驻点，且在点(0,0)处都满足 $AC-B^2=0$. 但 $f(x,y)$ 在点(0,0)处有极小值，而 $g(x,y)$ 在点(0,0)处却没有极值.

*习　题　9-9

1. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点(1,-2)的泰勒公式.
2. 求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在点(0,0)的三阶泰勒公式.
3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.
4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式，计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.
5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点(0,0)的 n 阶泰勒公式.

*第十节　最小二乘法

许多工程问题，常常需要根据两个变量的几组实验数值——实验数据，来找出这两个变量间的函数关系的近似表达式. 通常把这样得到的函数的近似表达式叫做经验公式. 经验公式建立以后，就可以把生产或实验中所积累的某些经验，提高到理论上加以分析. 下面通过举例介绍常用的一种建立经验公式的方法.

例 1　为了测定刀具的磨损速度，我们做这样的实验：经过一定时间（如每隔一小时），测量一次刀具的厚度，得到一组实验数据如下：

顺序编号 i	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 t_i/h	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i/mm	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

续表

	τ_i	τ_i^2	y_i	$\lg y_i$	$\tau_i \lg y_i$
	21	441	8.9	0.949 4	19.937 4
	24	576	6.5	0.812 9	19.509 6
$\sum$	108	1 836		10.298 8	122.012 7

将它们代入方程组(10 - 3)(其中取 $\sum\limits_{i=1}^{8}\lg y_i = 10.3$，$\sum\limits_{i=1}^{8}\tau_i \lg y_i = 122$)，得

$$\begin{cases}1\ 836a + 108b = 122,\\ 108a + 8b = 10.3.\end{cases}$$

解这方程组，得

$$\begin{cases}a = 0.434\ 3m = -0.045,\\ b = \lg k = 1.896\ 4,\end{cases}$$

所以

$$m = -0.103\ 6,\quad k = 78.78.$$

因此所求的经验公式为

$$y = 78.78\mathrm{e}^{-0.103\ 6\tau}.$$

*习　题　9－10

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p，其熔解温度(℃)为 θ，由实验测得 p 与 θ 的数据如下表：

$p/\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/℃$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta = ap + b$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a、b、c 应满足的三元一次方程组.

总习题九

1. 在"充分""必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的________条件. $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连

续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件；

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件. $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在的________条件；

(3) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件；

(4) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的________条件.

2. 下题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$，则有(　　).

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，并求 $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)$.

*4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $z=\ln(x+y^2)$；　(2) $z=x^y$.

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.01, \Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

*8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

9. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都是可微函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

10. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta,\ v=\zeta-\xi,\ w=\xi-\eta,$$

求 $\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta},\frac{\partial z}{\partial \zeta}$.

11. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^{y}$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12. 设 $x=e^{u}\cos v$，$y=e^{u}\sin v$，$z=uv$. 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

15. 设 $e_l=(\cos\theta,\sin\theta)$，求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点 $(1,1)$ 沿方向 l 的方向导数，并分别确定角 θ，使这导数有(1)最大值，(2)最小值，(3)等于 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

17. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点，并求此最小体积.

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\ q_2=10-0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C=35+40(q_1+q_2).$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大，最大总利润为多少？

20. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)\in D$，问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大，若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式；

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点. 也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

第十章　重　积　分

本章和下一章是多元函数积分学的内容. 在一元函数积分学中我们知道，定积分是某种确定形式的和的极限. 这种和的极限的概念推广到定义在区域、曲线及曲面上的多元函数的情形，便得到重积分、曲线积分及曲面积分的概念. 本章将介绍重积分（包括二重积分和三重积分）的概念、计算方法以及它们的一些应用.

第一节　二重积分的概念与性质

一、二重积分的概念

1. 曲顶柱体的体积

设有一立体，它的底是 xOy 面上的闭区域 D①，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$，这里 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续（图 10－1）. 这种立体叫做曲顶柱体. 现在我们来讨论如何定义并计算上述曲顶柱体的体积 V.

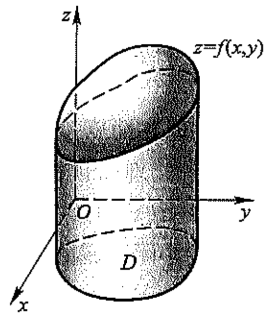

图 10－1

我们知道，平顶柱体的高是不变的，它的体积可以用公式

$$体积=高\times 底面积$$

来定义和计算. 关于曲顶柱体，当点 (x,y) 在区域 D 上变动时，高度 $f(x,y)$ 是个变量，因此它的体积不能直接用上式来定义和计算. 但如果回忆起第五章中求曲边梯形面积的问题，就不难想到，那里所采用的解决办法，原则上可以用来解决目前的问题.

首先，用一组曲线网把 D 分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n.$$

① 为简便起见，本章以后除特别说明者外，都假定平面闭区域和空间闭区域是有界的，且平面闭区域有有限面积，空间闭区域有有限体积.