因点 A 在第Ⅰ卦限,知 $\cos\gamma>0$,故

$$\cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|e_{\overrightarrow{OA}}=6\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)=(3,3\sqrt{2},3),$$

这就是点 A 的坐标.

3. 向量在轴上的投影

如果撇开 y 轴和 z 轴,单独考虑 x 轴与向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的关系,那么从图8-15可见,过点 M 作与 x 轴垂直的平面,此平面与 x 轴的交点即是点 P. 作出点 P,即得向量 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴上的分向量 $\overrightarrow{OP}$,进而由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,便得向量在 x 轴上的坐标 x,且 $x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha$.

一般地,设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(图 8-16). 任给向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' (点 M' 叫做点 M 在 u 轴上的投影),则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

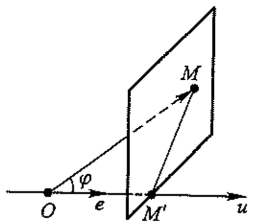

图 8-16

按此定义,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x、a_y、a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a},$$

或记作

$$a_x=(\boldsymbol{a})_x,\ a_y=(\boldsymbol{a})_y,\ a_z=(\boldsymbol{a})_z.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (即 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$),其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角;

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$ (即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$);

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ (即 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$).

例 9 设正方体的一条对角线为 OM,一条棱为 OA,且 $|OA|=a$,求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.①

① 向量 $\boldsymbol{r}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 的方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{r}$ 是指 $\boldsymbol{r}$ 在某条与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的轴上的投影.

解 如图 8-17 所示,记 $\angle MOA=\varphi$,有

$$\cos\varphi=\frac{|OA|}{|OM|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

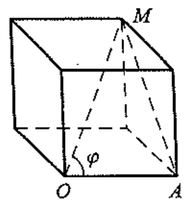

图 8-17

习 题 8-1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.
3. 把△ABC 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4,再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.
4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.
5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.
6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?
$$A(1,-2,3),\ B(2,3,-4),\ C(2,-3,-4),\ D(-2,-3,1).$$
7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:
$$A(3,4,0),\ B(0,4,3),\ C(3,0,0),\ D(0,-1,0).$$
8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.
9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.
10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?
11. 一边长为 a 的正方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.
12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.
13. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.
14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.
15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.
16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$; (2) $\cos\beta=1$; (3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?
17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.
18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4,-4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.
19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上

的投影及在 y 轴上的分向量.

第二节　数量积　向量积　*混合积

一、两向量的数量积

设一物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 8－18).

从这个问题看出，我们有时要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算，运算的结果是一个数，它等于 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积. 我们把它叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (图 8－19)，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

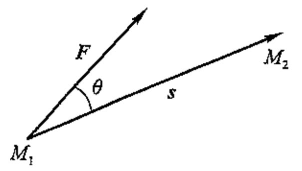

图 8－18

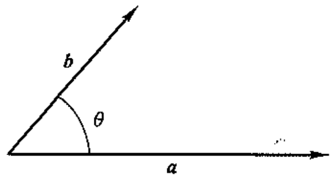

图 8－19

根据这个定义，上述问题中力所作的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 来表示这个投影，便有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

由数量积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那么 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，所以 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由于可以认为零向量与任何向量都垂直，因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积符合下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

证　根据定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),$$

而

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|，且\ \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证　当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

由投影性质 2，可知

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b},$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(3) 数量积还符合如下的结合律：

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\ \lambda\ 为数.$$

证　当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，按投影性质 3，可得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

由上述结合律，利用交换律，容易推得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})及(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

这是因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b});$$

不共面,则必能以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱构成平行六面体,从而 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\neq 0$. 于是有下述结论:

三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$,即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

例 7 已知不在一平面上的四点:$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、$D(x_4,y_4,z_4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知道,四面体的体积 V 等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]\right|.$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$
$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1),$$

所以

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix},$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

例 8 已知 $A(1,2,0)$、$B(2,3,1)$、$C(4,2,2)$、$M(x,y,z)$ 四点共面,求点 M 的坐标 x、y、z 所满足的关系式.

解 A、B、C、M 四点共面相当于 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 三向量共面,这里 $\overrightarrow{AM}=(x-1,y-2,z)$,$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(3,0,2)$. 按三向量共面的充分必要条件,可得

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$2x+y-3z-4=0.$$

这就是点 M 的坐标所满足的关系式.

习 题 8-2

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$; (3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处,有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着;在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处,有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 8-27). 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

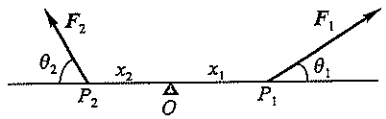

图 8-27

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$,问 λ 与 μ 有怎样的关系,能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,计算:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

10. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求 $\triangle OAB$ 的面积.

* 11. 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

第三节 平面及其方程

一、曲面方程与空间曲线方程的概念

因为平面与空间直线分别是曲面与空间曲线的特例,所以在讨论平面与空

两者中的锐角或直角,因此,$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式,平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\qquad(3-8)$$

来确定.

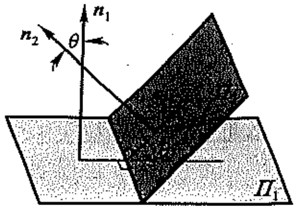

图 8-32

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

Π_1、Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

Π_1、Π_2 互相平行或重合相当于$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解 由公式(3-8)有

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

因此,所求夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 6 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$,求它的方程.

解 设所求平面的一个法线向量为

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C).$$

因$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$在所求平面上,它必与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,所以有

$$-A-2C=0.\qquad(3-9)$$

又因所求的平面垂直于已知平面 $x+y+z=0$,所以又有

$$A+B+C=0.\qquad(3-10)$$

由(3-9)、(3-10)得到

$$A=-2C,B=C.$$

由平面的点法式方程可知,所求平面方程为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

将 $A=-2C$ 及 $B=C$ 代入上式,并约去 C $(C\neq0)$,便得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

即

$$2x-y-z=0.$$

这就是所求的平面方程.

例 7 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点,求 P_0 到这平面的距离(图 8-33).

解 在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,并作一法线向量 $\boldsymbol{n}$,由图 8-33,并考虑到$\overrightarrow{P_1P_0}$与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ 也可能是钝角,得所求的距离

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

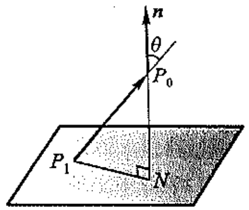

图 8-33

而

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C),\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1),$$

得

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

因为 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$,所以

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\qquad(3-11)$$

例如,求点(2,1,1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离,可利用公式(3-11),便得

$$d=\frac{|1\times2+1\times1-1\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt3}=\sqrt3.$$

习　题　8-3

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.
2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.
3. 求过 $M_1(1,1,-1)$、$M_2(-2,-2,2)$和 $M_3(1,-1,2)$三点的平面方程.
4. 指出下列各平面的特殊位置,并画出各平面:

(1) $x=0$;　　(2) $3y-1=0$;

(3) $2x-3y-6=0$;　　(4) $x-\sqrt3y=0$;

(5) $y+z=1$;　　(6) $x-2z=0$;

(7) $6x+5y-z=0$.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

6. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，试求这平面方程.

7. 求三平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$ 的交点.

8. 分别按下列条件求平面方程：

(1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$；

(2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$；

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

9. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

第四节　空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看做是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线(图 8－34). 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程，即应满足方程组

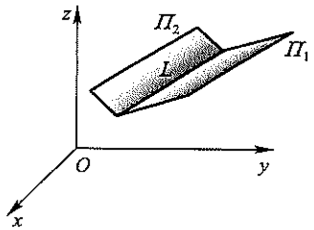

图 8－34

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}\qquad(4-1)$$

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上，所以它的坐标不满足方程组(4－1). 因此，直线 L 可以用方程组(4－1)来表示. 方程组(4－1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 L.

二、空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线，那么这个向量就叫做这条直线的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线，所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为已知时，直线 L 的位置就完全确定了. 下面我们来建立这直线的方程.

设点 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 平行(图 8－35). 所以两向量的对应坐标成比例，由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，从而有

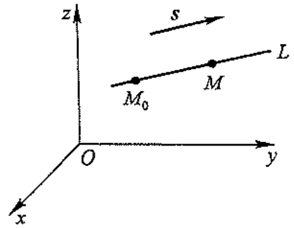

图 8－35

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.\text{①}\qquad(4-2)$$

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行，这两向量的对应坐标就不成比例. 因此方程组(4－2)就是直线 L 的方程，叫做直线的对称式方程或点向式方程.

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m、n 和 p 叫做这直线的一组方向数，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程. 如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

则

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}\qquad(4-3)$$

方程组(4－3)就是直线的参数方程.

例 1　用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\ 2x-y+3z+4=0.\end{cases}\qquad(4-4)$$

解　先找出这直线上的一点 (x_0,y_0,z_0). 例如，可以取 $x_0=1$，代入方程组(4－4)，得

$$\begin{cases}y+z=-2,\\ y-3z=6.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$y_0=0,\ z_0=-2,$$

① 当 m、n 和 p 中有一个为零，例如 $m=0$，而 n 与 $p\neq0$ 时，这方程组应理解为

$$\begin{cases}x-x_0=0,\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p};\end{cases}$$

当 m、n 和 p 中有两个为零，例如 $m=n=0$，而 $p\neq0$ 时，这方程组应理解为

$$\begin{cases}x-x_0=0,\\ y-y_0=0.\end{cases}$$

$$2y - 2z - 2 = 0,$$

即

$$y - z - 1 = 0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

习　题　8－4

1. 求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.
2. 求过两点$M_1(3,-2,1)$和$M_2(-1,0,2)$的直线方程.
3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

4. 求过点$(2,0,-3)$且与直线

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

5. 求直线$\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$的夹角的余弦.
6. 证明直线$\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行.
7. 求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行的直线方程.
8. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.
9. 求直线$\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角.
10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系：

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$和$4x-2y-2z=3$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$和$3x-2y+7z=8$；

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$和$x+y+z=3$.

11. 求过点$(1,2,1)$而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

12. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.
13. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.
14. 设M_0是直线L外一点，M是直线L上任意一点，且直线的方向向量为s，试证：点M_0到直线L的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

15. 求直线$\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.
16. 画出下列各平面所围成的立体的图形：

(1) $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=2$，$y=1$，$3x+4y+2z-12=0$；

(2) $x=0$，$z=0$，$x=1$，$y=2$，$z=\frac{y}{4}$.

第五节　曲面及其方程

一、曲面研究的基本问题

在空间解析几何中，关于曲面的研究有下列两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

(2) 已知坐标x、y和z间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

在第三节中关于建立一种最简单的曲面——平面方程的例子就属于基本问题(1)，以下是建立另一种特殊曲面——球面方程的例子.

例 1　建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面的方程.

解　设$M(x,y,z)$是球面上的任一点(图 8－37)，则

$$|M_0M| = R.$$

由于

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

所以

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \qquad (5-1)$$

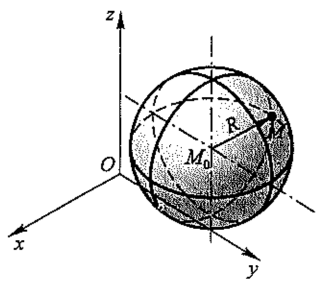

图 8－37

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在

把 xOz 面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转，所得曲面叫做旋转抛物面，如图 8－50 所示. 把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得椭圆抛物面(5).

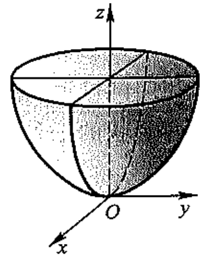

图 8－50

(6) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

双曲抛物面又称马鞍面，我们用截痕法来讨论它的形状.

用平面 $x=t$ 截此曲面，所得截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线开口朝下，其顶点坐标为

$$x=t,\quad y=0,\quad z=\frac{t^2}{a^2}.$$

当 t 变化时，l 的形状不变，位置只作平移，而 l 的顶点的轨迹 L 为平面 $y=0$ 上的抛物线

$$z=\frac{x^2}{a^2}.$$

因此，以 l 为母线，L 为准线，母线 l 的顶点在准线 L 上滑动，且母线作平行移动，这样得到的曲面便是双曲抛物面(6)，如图 8－51 所示.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x^2=ay,$$

依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面. 柱面的形状在第三目中已经讨论过，这里不再赘述.

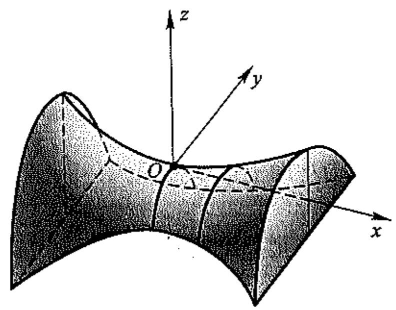

图 8－51

习　题　8－5

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$、$B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点，求球面的方程及球心的坐标和半径.

2. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程.
3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？
4. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？
5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.
6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.
7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.
8. 画出下列各方程所表示的曲面：

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$；　(4) $y^2-z=0$；

(5) $z=2-x^2$.

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　(4) $x^2-y^2=1$.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$；　(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

(3) $x^2-y^2-z^2=1$；　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

11. 画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$；　(2) $x^2-y^2-4z^2=4$；

(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

12. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) $z=0,\ z=3,\ x-y=0,\ x-\sqrt{3}y=0,\ x^2+y^2=1$ （在第一卦限内）；

(2) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2=R^2,\ y^2+z^2=R^2$ （在第一卦限内）.

第六节　空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

在第三节中，我们已经知道空间曲线可以看做两个曲面的交线. 设

$$F(x,y,z)=0\quad 和\quad G(x,y,z)=0$$

是两个曲面的方程，则方程组

我们就可得到包含曲线 C 在 yOz 面或 xOz 面上的投影的曲线方程：

$$\begin{cases}R(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}T(x,z)=0,\\y=0.\end{cases}$$

例 4 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{6-6}$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1, \tag{6-7}$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先求包含交线 C 而母线平行于 z 轴的柱面方程. 因此要由方程(6-6)、(6-7)消去 z，为此可先从(6-6)式减去(6-7)式并化简，得到

$$y+z=1.$$

再以 $z=1-y$ 代入方程(6-6)或(6-7)即得所求的柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

容易看出，这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程，于是两球面的交线在 xOy 面上的投影方程是

$$\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0,\\z=0.\end{cases}$$

在重积分和曲面积分的计算中，往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影，这时要利用投影柱面和投影曲线.

例 5 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成(图 8-57)，求它在 xOy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\z=\sqrt{3(x^2+y^2)}.\end{cases}$$

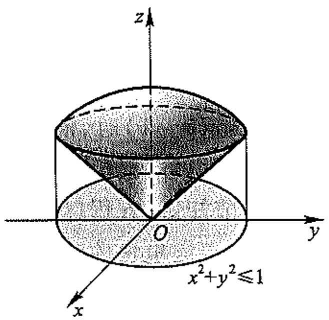

图 8-57

由上列方程组消去 z，得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，容易看出，这恰好是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=0.\end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

习 题 8-6

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\x-y=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\x^2+z^2=a^2.\end{cases}$

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases}y=5x+1,\\y=2x-3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\y=3.\end{cases}$

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0.\end{cases}$

6. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

7. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax$ $(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

总 习 题 八

1. 填空：

(1) 设在坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x,y,z)，则在 $[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系中，点 M 的坐标为__________，向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为__________；

(2) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为 0，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量是__________的；

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________；

(4) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$__________.

2. 下列两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4,\end{cases}$ 则 L 的参数方程为(　　);

(A) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=1+t,\\z=1+3t\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1+t,\\z=1+3t\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=1-t,\\z=1+3t\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1-t,\\z=1+3t\end{cases}$

(2) 下列结论中,错误的是(　　).

(A) $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

(B) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

(D) $y^2=5x$ 表示抛物柱面

3. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和点 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$,求从顶点 C 所引中线的长度.

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,三边中点依次为 D、E、F,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$,并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}.$$

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边,且其长度等于第三边长度的一半.

7. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$,求 z.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

9. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

10. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$,问 z 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小?并求出此最小值.

11. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

12. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$,$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$,向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$,求 $\boldsymbol{r}$.

13. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-3,-4)$,$\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$,证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面,并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

14. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等,求点 M 的轨迹的方程.

15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$;　　(2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$;　　(4) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$.

16. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$,并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线,求此平面的方程.

18. 求过点 $(-1,0,4)$,且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

19. 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$,试在 z 轴上求一点 C,使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

20. 求曲线 $\begin{cases}z=2-x^2-y^2,\\z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

21. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

22. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$,平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$,平面 $y=0$,$z=0$ 及 $x+y=1$;

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$,柱面 $y^2=x$,平面 $z=0$ 及 $x=1$.