第四章　不定积分

大纲考试内容	大纲考试要求		
	数一	数二	数三
原函数与不定积分的概念	理解	理解	理解
不定积分的基本性质和基本积分公式 换元积分法与分部积分法	掌握	掌握	掌握
有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分	会求	会求	

考试内容概要

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数

定义　设 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 内有定义. 若存在函数 $F(x)$，使其在该区间内任一点都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间内的**原函数**.

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）也为 $f(x)$ 在该区间内的原函数.

若 $F(x)$，$G(x)$ 都是 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)-G(x)=C$（C 为某个确定常数）.

2. 不定积分

定义　$f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\text{其中 } C \text{ 为任意常数}.$$

3. 不定积分的几何意义

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则从几何上看，$F(x)$ 表示平面上的一条曲线，称为

$f(x)$ 的积分曲线. 因此,不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 在几何上表示一簇积分曲线. 这簇积分曲线对应于横坐标 x 处的切线都相互平行.

4. 原函数存在定理

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续,则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数.

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点,则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

【例 1】 下列函数在给定区间上是否有原函数?

(1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(2) $g(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

(3) $h(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解

(1) 由于 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有原函数.

(2) 由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有跳跃间断点(第一类间断点),$g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上没有原函数.

事实上,若 $F(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数,则

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x < 0, \\ x + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性知 $C_1 = C_2 = C$,

$$F(x) = \begin{cases} -x + C, & x < 0, \\ x + C, & x \geqslant 0 \end{cases} = |x| + C,$$

但以上 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,则 $g(x)$ 没有原函数.

(3) 易验证 $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 是 $h(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的原函数,即 $F'(x) = h(x)$.

【注】 $h(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(第二类间断点),但 $h(x)$ 有原函数 $F(x)$.

5. 不定积分的性质

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$, $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$, $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$;

(3) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$；

(4) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）.

二、不定积分基本公式

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$；

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$；

(3) $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$；

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$；

(6) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

(7) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

(8) $\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

(9) $\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

(10) $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

(11) $\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

(12) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$；

(13) $\int\frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$；

(14) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(15) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(16) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

(17) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}=\ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}})+C$；

(18) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\ln|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}|+C$；

(19) $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

(20) $\int\csc x\mathrm{d}x=-\ln|\csc x+\cot x|+C$.

【例 2】 求下列不定积分

(1) $\int\frac{(x+1)^{3}}{x^{2}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{x^{4}-x^{2}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$；　(3) $\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.

解

(1) $$\int\frac{(x+1)^{3}}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{3}+3x^{2}+3x+1}{x^{2}}\mathrm{d}x=\int\left(x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^{2}+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

(2) $$\int\frac{x^{4}-x^{2}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^{4}-1)-(1+x^{2})+2}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\int\left(x^{2}-1-1+\frac{2}{1+x^{2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^{3}-2x+2\arctan x+C.$$

(3) $$\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\sin x)^{2}}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int(\sec^{2}x-2\sec x\cdot\tan x+\tan^{2}x)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x-2\sec x+\tan x-x+C$$
$$=2\tan x-2\sec x-x+C.$$

三、三种主要积分法

1. 第一换元积分法

定理　设$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，$u=\varphi(x)$ 存在连续导数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C$$

常见的凑微分形式

(1)$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$；

(2)$\int x^m f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{(m+1)a}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b)\quad(m\neq-1)$；

(3)$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$；

(4)$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

(5)$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

(6)$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

(7)$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$；

(8)$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$；

(9)$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$；

(10)$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

【例 3】　求下列不定积分

(1)$\int\sec^4 x\mathrm{d}x$；　　(2)$\int\frac{(\ln x+2)^2}{x}\mathrm{d}x$；

(3)$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；　　(4)$\int\frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

(1)$\int\sec^4 x\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}(\tan x)=\int(\tan^2 x+1)\mathrm{d}(\tan x)$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C.$$

(2)$\int\frac{(\ln x+2)^2}{x}\mathrm{d}x=\int(\ln x+2)^2\mathrm{d}(\ln x+2)=\frac{1}{3}(\ln x+2)^3+C.$

$$(3)\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})$$
$$=2\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

$$(4)\int\frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}}+\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$
$$=\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

【例 4】（1993，数三）$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=$ ________.

【$\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$】

【例 5】（1997，数二）计算积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$ ________.

【$\arcsin\frac{x-2}{2}+C$】

2. 第二换元积分法

定理　设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$. 又

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C,$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

常用的三种变量代换

(1) 被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$,令 $x=a\sin t$(或 $a\cos t$).

(2) 被积函数含有$\sqrt{a^2+x^2}$,令 $x=a\tan t$.

(3) 被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$,令 $x=a\sec t$.

【例 6】 求下列不定积分,其中 $a>0$.

(1)$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$; (2)$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3)$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$; (4)$\int\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解

(1) 令 $x=a\sin t$,

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(2) 令 $x=a\tan t$,

$$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\sec t\mathrm{d}t+\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|-\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

或 $$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\int\frac{a^2\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$$

(3) 令 $x = a\sec t$,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t = a\int \tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$= a\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t = a(\tan t - t)+C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

(4) 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$,则 $x=\ln(t^2-1)$,

$$\int \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t = 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = 2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$= 2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C.$$

3. 分部积分法

(1) 分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

(2) 分部积分法所适用的函数类

分部积分法比较适用于两类不同函数相乘. 如下列积分,这里 $p_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式.

$$\int p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x,\quad \int p_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x,\quad \int p_n(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x,\quad \int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x,\quad \int p_n(x)\ln x\mathrm{d}x,\quad \int p_n(x)\arctan x\mathrm{d}x,\quad \int p_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x.$$

(3) 分部积分法中 u,v 的选取

分部积分法在使用时的关键是 u,v 的选取,换句话说就是把谁凑到微分号里去.

① $\int p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$, $\int p_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$, $\int p_n(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x$,这三种积分都应把多项式以外的函数凑进微分号.

② $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$,这两种积分把指数函数或三角函数凑进微分号都可以,但把指数凑进去更简单,连续两次将指数函数凑进去分部积分还原便可求解.

③ $\int p_n(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int p_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$, $\int p_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$,这三种积分都应把多项式函数凑进微分号.

【例 7】 求下列不定积分

(1) $\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int x^2\sin x\mathrm{d}x$;　　(3) $\int x\ln x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

【例 8】(1990,数三)计算$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \frac{\ln x}{1-x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C.$$

【例 9】(1998,数二)$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ ________.

解

$$\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \ln \sin x \mathrm{d}(\cot x) = -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x \mathrm{d}x$$
$$= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= -\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C.$$

四、三类常见可积函数积分

有理函数积分 $\int R(x)\mathrm{d}x$

(1) 一般方法(部分分式法)

(2) 特殊方法(加项减项拆或凑微分降幂)

【例 10】(1999,数二)$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x =$ ________.

解

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8\int \frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+2^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

【例 11】(1987,数五)求不定积分$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

解

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{4+(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{4+(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\arctan \frac{x^2+1}{2} + C.$$

【例 12】 (2019,数二) 求不定积分$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解

令$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$,则

$$3x+6=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Dx+E)(x-1)^2$$

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int \frac{-2}{x-1}\mathrm{d}x+\int \frac{3}{(x-1)^2}\mathrm{d}x+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C.$$

三角有理式积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$

(1) 一般方法(万能代换) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(2) 特殊方法 (三角变形,换元,分部)

几种常用的换元法

① 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则令 $u=\cos x$,或凑 $\mathrm{d}\cos x$.

② 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$,则令 $u=\sin x$,或凑 $\mathrm{d}\sin x$.

③ 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$,则令 $u=\tan x$,或凑 $\mathrm{d}\tan x$.

【例 13】 (1996,数三) 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解

【方法 1】 原式 $=\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$

【方法 2】 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,则

$$原式=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

【例 14】 (1994,数一、二、三) 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}$.

解

$$原式=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$$

$$\xlongequal{\cos x=u}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{8}\left(\ln\frac{1-u}{1+u}+\frac{2}{1+u}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

【例 15】 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1+\sin x)}$.

【例 16】 计算$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(\sin x+\cos x)}$.

简单无理函数积分 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,将其化为有理函数积分进行计算.

【例 17】 计算$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 令$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$,则$x=\frac{1}{t^2-1}$,$\mathrm{d}x=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$,

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x=\int(t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

$$=-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\ln\left|2x+1-2x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right|+C.$$

【方法2】 分子有理化.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\&=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|-\int\frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\&=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+C.\end{aligned}$$

常考题型与典型例题

常考题型

求不定积分(换元、分部)

【例18】 计算积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$________.

解

【方法1】 令$\sqrt{1-x}=t$,则$x=1-t^2$,$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{-2t}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t=-2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=-2\arctan t+C\\&=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.\end{aligned}$$

【方法2】 原式$=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{2-x}=-2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2}$

$$=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.$$

【例 19】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ 则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

解

【方法 1】 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} e^x+C_1, & x\geqslant 0, \\ \sin x+C_2, & x<0. \end{cases}$ 由于原函数必连续,又

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+C_1)=1+C_1,\ \lim_{x\to 0^-}(\sin x+C_2)=C_2,$$

则 $1+C_1=C_2$. 令 $C_1=C$,则 $C_2=1+C$,

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} e^x+C, & x\geqslant 0, \\ \sin x+1+C, & x<0. \end{cases}$$

【方法 2】 由于 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\geqslant 0, \\ \cos x, & x<0 \end{cases}$ 是一个连续函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} \int_0^x e^t\mathrm{d}t, & x\geqslant 0 \\ \int_0^x \cos t\mathrm{d}t, & x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^x-1, & x\geqslant 0, \\ \sin x, & x<0. \end{cases}$$

【例 20】 (2016,数一、二)已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & x<1, \\ \ln x, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A) $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1. \end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1. \end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1, \\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1. \end{cases}$

解

【方法 1】 求 $F(x)$.

【方法 2】 验证 $F'(x)=f(x)$.

【D】

【例 21】 计算$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x(a>0)$.

解

【方法 1】 令 $x=a\sin t$.

【方法 2】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}(\sqrt{a^2-x^2})$.

【例 22】 (2006,数二)计算 $I=\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int \arcsin \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$.

在$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$中,令$\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}=t$,则 $\mathrm{d}x=\frac{-t\mathrm{d}t}{1-t^2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C.$$

$$\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}+C.$$

【方法 2】 令$\arcsin \mathrm{e}^x=t$,则 $x=\ln\sin t,\mathrm{d}x=\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x&=\int \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin t}\right)=-\frac{t}{\sin t}+\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=-\frac{t}{\sin t}-\ln|\csc t+\cot t|+C\\&=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\ln\left|\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}\right|+C\\&=-\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})+x+C.\end{aligned}$$

【例 23】 (2011,数三)求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}(\sqrt{x})\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}\\&=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

【例 24】（2009，数二、三）计算不定积分$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0)$.

解

设$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则$x=\frac{1}{t^2-1}$，

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\ln(1+t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

而

$$\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2(t+1)}+C.$$

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$$

【例 25】（1994，数五）已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x$.

解

由于$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，有

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

因此

$$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}f(x)$$

$$=x^3f(x)-3\int x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x^3f(x)-3\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^3f(x)-3\left(x^2\cdot\frac{\sin x}{x}-2\int\sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^3\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

【例 26】（2002，数三、四）设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解

【方法 1】 令 $u=\sin^2 x$，则有 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x&=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\\&=-\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)\\&=-2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x})\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int \sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

【方法 2】 令 $x=\sin^2 t$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x&=\int \frac{\sin t}{\cos t}\,\frac{t}{\sin t}2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\\&=2\int t\sin t\,\mathrm{d}t\\&=-2\int t\,\mathrm{d}(\cos t)\\&=-2t\cos t+2\sin t+C\\&=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$