习　题　1-1

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　(10) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2x$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　(4) $y=2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$；

(4) $y=\mathrm{e}^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$；

(5) $y=u^2$, $u=\mathrm{e}^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$；　(4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（图 1-20）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L $(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

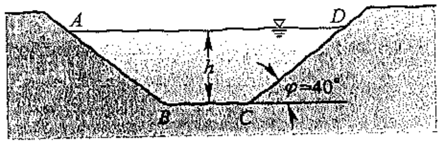


图 1-20

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t$ $(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

16. 求联系华氏温度（用 F 表示）和摄氏温度（用 C 表示）的转换公式，并求

（1）90 ℉的等价摄氏温度和-5 ℃的等价华氏温度；

（2）是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

17. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

年份	人口数/百万	年增长率/%
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

极限概念是在探求某些实际问题的精确解答过程中产生的. 例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作内接正二十四边形，其面积记为 A_3；如此下去，每次边数加倍，一般地，把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n（$n\in\mathbf{N}_+$）. 这样，就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大，只要 n 取定了，A_n 终究只是多边形的面积，而还不是圆的面积. 因此，设想 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列）$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 在圆面积问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做数列，简记为数列 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项（或通项）. 例如：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\quad 2^n,\quad \frac{1}{2^n},\quad (-1)^{n+1},\quad \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$（图1-21）.

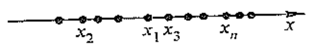


图 1-21

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n = f(n),\ n\in\mathbf{N}_+.$$

当自变量 n 依次取 1，2，3，⋯ 一切正整数时，对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$.

对于我们要讨论的问题来说，重要的是：当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n = f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值？如果能够的话，这个数值等于多少？

由定理 4 可知，如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列 $\{x_n\}$ 是发散的. 例如，例 4 中的数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于 1，而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 -1，因此数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 是发散的. 同时这个例子也说明，一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习 题 1-2

1. 下列各题中，哪些数列收敛，哪些数列发散？对收敛数列，通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$；　　(2) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$；

(3) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$；

(5) $\{n(-1)^n\}$；　　(6) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$；

(7) $\left\{n-\dfrac{1}{n}\right\}$；　　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件？

(2) 无界数列是否一定发散？

(3) 有界数列是否一定收敛？

3. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立；

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 x_n，使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立，其中 c 为某个正常数；

(4) 对于任意给定的 $m\in\mathbf{N}_+$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

*4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

*5. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

*6. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

*7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

*8. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，证明：$x_n\to a\ (n\to\infty)$.

第三节 函数的极限

一、函数极限的定义

因为数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为 n 的函数：$x_n=f(n)$，$n\in\mathbf{N}_+$，所以，数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，就是：当自变量 n 取正整数而无限增大（即 $n\to\infty$）时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a. 把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n\to\infty$ 等特殊性撇开，这样可以引出函数极限的一般概念：在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的，由于自变量的变化过程不同，函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数 $f(n)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，这里自变量的变化过程是 $n\to\infty$. 下面讲述自变量的变化过程为其他情形时函数 $f(x)$ 的极限，主要研究两种情形：

(1) 自变量 x 任意地接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0（记作 $x\to x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

(2) 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大（记作 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 的变化过程为 $x\to x_0$. 如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 当然，这里我们首先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域①内是有定义的.

在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，就是 $|f(x)-A|$ 能任意小. 如数列极限概念所述，$|f(x)-A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来表达，其中 ε 是任意给定的正数. 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的，所以对于任意给定的正数 ε，只要求充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数值

---

① 以 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$；在 $U(x_0)$ 中去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

直线 $y=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形的水平渐近线.

二、函数极限的性质

与收敛数列的性质相比较，可得函数极限的一些相应的性质. 它们都可以根据函数极限的定义，运用类似于证明收敛数列性质的方法加以证明. 由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式，下面仅以"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$"这种形式为代表给出关于函数极限性质的一些定理，并就其中的几个给出证明. 至于其他形式的极限的性质及其证明，只要相应地做一些修改即可得出.

定理 1（函数极限的唯一性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理 2（函数极限的局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以取 $\varepsilon=1$，则 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1,$$

记 $M=|A|+1$，则定理 2 就获得证明.

定理 3（函数极限的局部保号性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

证　就 $A>0$ 的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，所以，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，则 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

类似地可以证明 $A<0$ 的情形.

从定理 3 的证明中可知，在定理 3 的条件下，可得下面更强的结论：

定理 3′　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\ (A\neq0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

由定理 3，易得以下推论：

推论　如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那

么 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

***定理 4**（函数极限与数列极限的关系）　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0\ (n\in\mathbf{N}_+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，故对 $\delta>0$，$\exists\,N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$.

由假设，$x_n\neq x_0\ (n\in\mathbf{N}_+)$，故当 $n>N$ 时，$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

习　题　1-3

1. 对图 1-26 所示的函数 $f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

（1）$\lim\limits_{x\to-2}f(x)$；　（2）$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

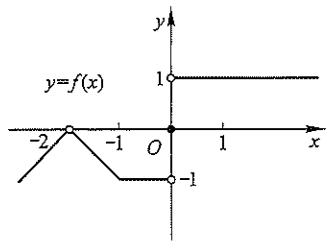


图 1-26

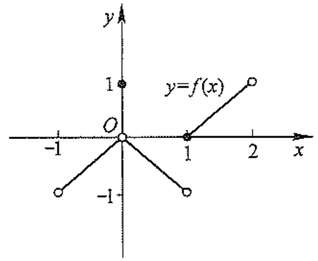


图 1-27

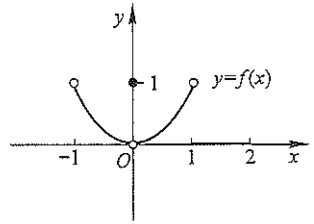
2. 对图 1-27 所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

（1）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在；　（2）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；　（4）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$；

（5）$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在；　（6）对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

3. 对图 1-28 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？



（1）$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$；　（2）$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；　（4）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$；

（5）$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$；　（6）$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$；

（7）$\lim f(x)=0$；　（8）$\lim f(x)=0$.

4. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

*5. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

*6. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

*7. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$. 问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

*8. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

*9. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

*10. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

*11. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

*12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

例 1　因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意　不要把无穷小与很小的数（例如百万分之一）混为一谈，因为无穷小是这样的函数，在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数 ε，例如取 ε 等于千万分之一，则百万分之一就不能小于这个给定的 ε. 但零是可以作为无穷

下面的定理说明无穷小与函数极限的关系.

定理 1　在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

证　先证必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且

$$f(x)=A+\alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

再证充分性. 设 $f(x)=A+\alpha$，其中 A 是常数，α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，于是

$$|f(x)-A|=|\alpha|.$$

因 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

类似地可证明当 $x\to\infty$ 时的情形.

二、无穷大

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于预先指定的任何很大的正数 M，那么就称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大. 精确地说，就是

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$），对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

按函数极限的定义来说，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说"函数的极限是无穷大"，并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

如果在无穷大的定义中，把$|f(x)|>M$换成$f(x)>M$（或$f(x)<-M$），就记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad \left(\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right).$$

必须注意，无穷大（∞）不是数，不可与很大的数（如 1 千万、1 亿等）混为一谈.

例 2　证明$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$（图 1-29）.

证　设$\forall M>0$. 要使

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

只要

$$|x-1|<\frac{1}{M}.$$

所以，取$\delta=\dfrac{1}{M}$，则只要x适合不等式$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$，就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

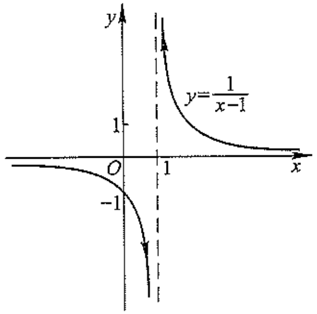


图 1-29

这就证明了$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

直线$x=1$是函数$y=\dfrac{1}{x-1}$的图形的铅直渐近线.

一般地说，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，那么直线$x=x_0$是函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系，即

定理 2　在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

证　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$. 根据无穷大的定义，对于$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当$x\to x_0$时的无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且$f(x)\neq0$.

$\forall M>0$. 根据无穷小的定义，对于$\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)\neq0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为当$x\to x_0$时的无穷大.

类似地可证当$x\to\infty$时的情形.

习　题　1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

*2. 根据定义证明：

（1）$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当$x\to3$时的无穷小；　（2）$y=x\sin\dfrac{1}{x}$为当$x\to0$时的无穷小.

*3. 根据定义证明：函数$y=\dfrac{1+2x}{x}$为当$x\to0$时的无穷大. 问x应满足什么条件，能使$|y|>10^4$？

4. 求下列极限并说明理由：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$， 使当$0<\|x-x_0\|<\delta$时， 即有$\|f(x)-A\|<\varepsilon$.			

续表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0^+$				
$x\to x_0^-$				
$x\to\infty$		$\forall M>0$， $\exists X>0$， 使当 $\lvert x\rvert>X$ 时， 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

*7. 证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x)=\frac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

规则.

第五节　极限运算法则

本节讨论极限的求法，主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，利用这些法则，可以求某些函数的极限. 以后我们还将介绍求极限的其他方法.

在下面的讨论中，记号"lim"下面没有标明自变量的变化过程，实际上，下面的定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的. 在论证时，我们只证明了 $x\to x_0$ 的情形，只要把 δ 改成 X，把 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 改成 $\lvert x\rvert>X$，就可得 $x\to\infty$ 情形的证明.

定理 1　两个无穷小的和是无穷小.

证　设 α 及 β 是当 $x\to x_0$ 时的两个无穷小，而

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

$\forall\varepsilon>0$. 因为 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_1$ 时，

$$\lvert\alpha\rvert<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 又因 β 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_2$ 时，不等式

$$\lvert\beta\rvert<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，

$$\lvert\alpha\rvert<\frac{\varepsilon}{2}\quad 及\quad \lvert\beta\rvert<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，从而 $\lvert\gamma\rvert=\lvert\alpha+\beta\rvert\leqslant\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 这就证明了 γ 也是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

用数学归纳法可证：有限个无穷小之和也是无穷小.

定理 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内是有界的，即 $\exists M>0$ 使 $\lvert u\rvert\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有

$$\lvert\alpha\rvert<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$$\lvert u\rvert\leqslant M\quad 及\quad \lvert\alpha\rvert<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$\lvert u\alpha\rvert=\lvert u\rvert\cdot\lvert\alpha\rvert<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 3　如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) 若又有 $B\neq0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{\ }=\frac{\lim f(x)}{\ }=\frac{A}{\ }$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & 当\ n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m,\\ \infty, & 当\ n<m.\end{cases}$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，分子及分母的极限都不存在，故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把 $\dfrac{\sin x}{x}$ 看作 $\sin x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 的乘积，由于 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小，而 $\sin x$ 是有界函数，则根据本节定理 2，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

定理 6（复合函数的极限运算法则）　设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证　按函数极限的定义，要证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$$

成立.

由于 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $0<|u-u_0|<\eta$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$ 成立.

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，对于上面得到的 $\eta>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|g(x)-u_0|<\eta$ 成立.

由假设，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，$g(x)\neq u_0$. 取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|g(x)-u_0|<\eta$ 及 $|g(x)-u_0|\neq 0$ 同时成立，即 $0<|g(x)-u_0|<\eta$ 成立，从而

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$$

成立. 证毕.

在定理 6 中，把 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而把 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，可得类似的定理.

定理 6 表示，如果函数 $g(x)$ 和 $f(u)$ 满足该定理的条件，那么作代换 $u=g(x)$ 可把求 $\lim f[g(x)]$ 化为求 $\lim f(u)$，这里 $u_0=\lim g(x)$

习　题　1-5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；　(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

4. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$，$n\in\mathbf{N}_+$；　(2) $b_n<c_n$，$n\in\mathbf{N}_+$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

5. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 不存在.

*6. 证明本节定理 3 中的(2).

极限存

第六节　极限存在准则　两个重要极限

因此，当 $m>N, n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|=|(x_n-a)-(x_m-a)|$$
$$\leqslant |x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以条件是必要的.

充分性这里不予证明.

这准则的几何意义表示，数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，在数轴上一切具有足够大号码的点 x_n 中，任意两点间的距离小于 ε.

柯西极限存在准则有时也叫做柯西审敛原理.

习　题　1-6

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \omega x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数，$n\in \mathbf{N}_+$）.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

*3. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 I′.

4. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

第七节　无穷小的比较

在第五节中我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍旧是无穷小. 但是，关于两个无穷小的商，却会出现不同的情况，例如，当 $x\to 0$ 时，$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度. 就上面几个例子来说，在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $3x\to 0$“快些”，反过来 $3x\to 0$ 比 $x^2\to 0$“慢些”，而 $\sin x\to 0$ 与 $3x\to 0$“快慢相仿”.

下面，我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时，来说明两个无穷小之间的比较. 应当注意，下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

定义

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么就说 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，那么就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $c=1$ 的情形.

下面举一些例子：

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，即 ✓

$$3x^2=o(x)\ (x\to 0).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$ 是比 $\frac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小. ✓

因为 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$，所以当 $x\to 3$ 时，x^2-9 与 $x-3$ 是同阶无穷小. ✓

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小. ✓

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 ✓

下面再举一个常用的等价无穷小的例子.

例 1　证明:当 $x\to0$ 时,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

证　因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=1①,$$

所以 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x\ (x\to0)$.

关于等价无穷小,有下面两个定理.

定理 1　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

证　必要性　设 $\alpha\sim\beta$,则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

因此 $\beta-\alpha=o(\alpha)$,即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性　设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

因此 $\alpha\sim\beta$.

例 2　因为当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,所以当 $x\to0$ 时有

$$\sin x=x+o(x),\quad \tan x=x+o(x),$$

$$\arcsin x=x+o(x),\quad 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

定理 2　设 $\alpha\sim\tilde\alpha,\beta\sim\tilde\beta$,且 $\lim\frac{\tilde\beta}{\tilde\alpha}$ 存在,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\tilde\beta}{\tilde\alpha}.$$

证　$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\tilde\beta}\cdot\frac{\tilde\beta}{\tilde\alpha}\cdot\frac{\tilde\alpha}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\tilde\beta}\cdot\lim\frac{\tilde\beta}{\tilde\alpha}\cdot\lim\frac{\tilde\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\tilde\beta}{\tilde\alpha}$.

定理 2 表明,求两个无穷小之比的极限时,分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此,如果用来代替的无穷小选得适当的话,就可以使计算简化.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解　当 $x\to0$ 时,$\tan 2x\sim2x,\sin 5x\sim5x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}$.

解　当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,无穷小 x^3+3x 与它本身显然是等价的,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x^2+3)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　当 $x\to0$ 时,$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$,$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

习　题　1-7

1. 当 $x\to0$ 时,$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比,哪一个是高阶无穷小?
2. 当 $x\to0$ 时,$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2x$ 相比,哪一个是高阶无穷小?
3. 当 $x\to1$ 时,无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$,(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶,是否等价?
4. 证明:当 $x\to0$ 时,有

(1) $\arctan x\sim x$;　　(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

① 极限 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{(1+x)^m}=1\ (m=n-1,n-2,\cdots,1)$ 用到了习题 1-6 中题 4(4) 的结果及第五节中定理 3

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$n,m$ 为正整数）；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

（1）$\alpha\sim\alpha$（自反性）；　　（2）若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$（对称性）；

（3）若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$（传递性）.

第八节　函数的连续性与间断点

性与间断点.

一、函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等都是连续地变化着的. 这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性. 例如就气温的变化来看，当时间变动很微小时，气温的变化也很微小，这种特点就是所谓连续性. 下面我们先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引出函数的连续性的定义.

设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2，终值与初值的差 u_2-u_1 就叫做变量 u 的增量，记作 Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

增量 Δu 可以是正的，也可以是负的. 在 Δu 为正的情形，变量 u 从 u_1 变到 $u_2=u_1+\Delta u$ 时是增大的；当 Δu 为负时，变量 u 是减小的.

应该注意到：记号 Δu 并不表示某个量 Δ 与变量 u 的乘积，而是一个整体不可分割的记号.

现在假定函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的. 当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值或因变量 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数值或因变量 $f(x)$ 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

习惯上也称 Δy 为函数的增量，函数增量的几何解释如图 1-33 所示.

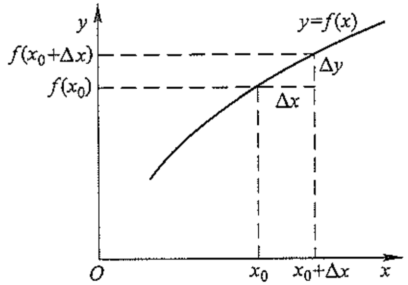


图 1-33

假如保持 x_0 不变而让自变量的增量 Δx 变动，一般说来，函数的增量 Δy 也要随着变动. 现在我们对连续性的概念可以

这样描述：如果当 Δx 趋于零时，函数的对应增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0 \tag{8-1}$$

或

$$\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的，即有下述定义：

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

为了应用方便起见，下面把函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义用不同的方式来叙述.

设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y,$$

可见 $\Delta y\to0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，因此（8-1）式与

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

相当. 所以，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义又可叙述如下：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{8-2}$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限的定义可知，上述定义也可用“$\varepsilon-\delta$”语言表达如下：

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

下面说明左连续及右连续的概念.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^-)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^+)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续

这里$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$，但$f(1)=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1).$$

因此，点$x=1$是函数$f(x)$的间断点(图1-37)．但如果改变函数$f(x)$在$x=1$处的定义：令$f(1)=1$，那么$f(x)$在$x=1$成为连续．所以$x=1$也称为该函数的可去间断点．

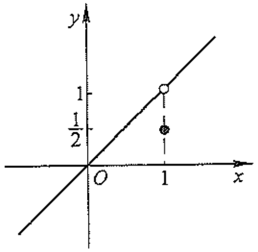


图 1-37

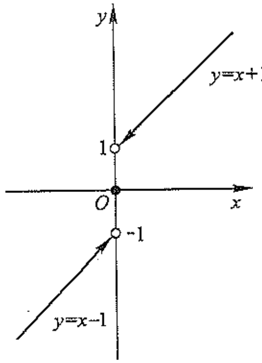


图 1-38

例5 函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$$

这里，当$x\to 0$时，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

左极限与右极限虽都存在，但不相等，故极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，所以点$x=0$是函数$f(x)$的间断点(图1-38)．因$y=f(x)$的图形在$x=0$处产生跳跃现象，我们称$x=0$为函数$f(x)$的跳跃间断点．

上面举了一些间断点的例子．通常把间断点分成两类：如果x_0是函数$f(x)$的间断点，但左极限$f(x_0^-)$及右极限$f(x_0^+)$都存在，那么x_0称为函数$f(x)$的第一类间断点．不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点．在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点．无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点．

习 题 1-8

1. 设$y=f(x)$的图形如图1-39所示，试指出$f(x)$的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点．

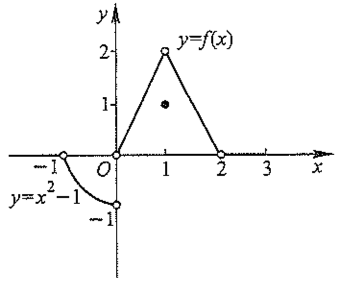


图 1-39

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

3. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类．如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

4. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ $(n\in\mathbf{N}_+)$的连续性，若有间断点，则判别其类型．

5. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例．

(1) 如果函数$f(x)$在a连续，那么$|f(x)|$也在a连续；

(2) 如果函数$|f(x)|$在a连续，那么$f(x)$也在a连续．

*6. 证明：若函数$f(x)$在点x_0连续且$f(x_0)\neq 0$，则存在x_0的某一邻域$U(x_0)$，当$x\in U(x_0)$时，$f(x)\neq 0$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明：

(1) $f(x)$在$x=0$连续；

(2) $f(x)$在非零的x处都不连续．

*8. 试举出具有以下性质的函数$f(x)$的例子：

$x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\dfrac{1}{n},\cdots$是$f(x)$的所有间断点，且它们都是无穷间断点．

三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

我们指出(但不详细讨论),指数函数 a^x $(a>0,a\neq1)$ 对于一切实数 x 都有定义,且在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调的和连续的,它的值域为 $(0,+\infty)$.

由指数函数的单调性和连续性,引用定理 2 可得:对数函数 $\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调且连续.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随 μ 的值而异,但无论 μ 为何值,在区间 $(0,+\infty)$ 内幂函数总是有定义的. 下面我们来证明,在 $(0,+\infty)$ 内幂函数是连续的. 事实上,设 $x>0$,则

$$y=x^\mu=a^{\mu\log_a x},$$

因此,幂函数 x^μ 可看作是由 $y=a^u$, $u=\mu\log_a x$ 复合而成的,由此,根据定理 4,它在 $(0,+\infty)$ 内连续. 如果对于 μ 取各种不同值加以分别讨论,可以证明(证明从略)幂函数在它的定义域内是连续的.

综合起来得到:**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.**

最后,根据第一节中关于初等函数的定义,由基本初等函数的连续性以及本节定理 1、定理 4 可得下列重要结论:**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.** 所谓定义区间,就是包含在定义域内的区间.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义,如果已知 $f(x)$ 在点 x_0 连续,那么求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限时,只要求 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值就行了. 因此,上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的一个方法,这就是:如果 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内的点,那么

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例如,点 $x_0=0$ 是初等函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义区间 $[-1,1]$ 上的点,所以 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1$;又如点 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ 是初等函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的一个定义区间 $(0,\pi)$ 内的点,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解 $\lim\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\quad}$.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解 令 $a^x-1=t$,则 $x=\log_a(1+t)$,当 $x\to0$ 时 $t\to0$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ $(\alpha\in\mathbf{R})$.

解 令 $(1+x)^\alpha-1=t$,则当 $x\to0$ 时,$t\to0$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)^\alpha}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\right]$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

由例 5、例 6、例 7 可得下列三个常用的等价无穷小关系式:

$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0),$$
$$e^x-1\sim x\quad(x\to0),$$
$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(x\to0).$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解 因为

$$(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot6}=e^{6\cdot\frac{x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}},$$

利用定理 3 及极限的运算法则,便有

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left[6\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]}=e^6.$$

一般地,对于形如 $u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0,u(x)\neq1)$ 的函数(通常称为幂指函数),如果

$$\lim u(x)=a>0,\ \lim v(x)=b,$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b.$$

注意:这里三个 lim 都表示在同一自变量变化过程中的极限.

习　题　1-9

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间,并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.
2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续,证明函数

在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义,且有间断点,则下列陈述中哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,试说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点;　　(2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点;　　(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a,才能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

第十节　闭区间上连续函数的性质

求函数的性质

第八节中已说明了函数在区间上连续的概念,如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,在右端点 b 左连续,在左端点 a 右连续,那么函数 $f(x)$ 就是在闭区间 $[a,b]$ 上连续的. 在闭区间上连续的函数有几个重要的性质,今以定理的形式叙述它们.

一、有界性与最大值最小值定理

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,如果有 $x_0\in I$,使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

例如,函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值 2 和最小值 0. 又例如,函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间 $(0,+\infty)$ 内,$\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都等于 1(注意:最大值和最小值可以相等!). 但函数 $f(x)=x$ 在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值. 下面的定理给出函数有界且最大值和最小值存在的充分条件.

定理 1(有界性与最大值最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

这就是说,如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那么存在常数 $M>0$,使得对任一 $x\in[a,b]$,满足 $|f(x)|\leqslant M$;且至少有一点 ξ_1,使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值;又至少有一点 ξ_2,使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值(图 1-40).

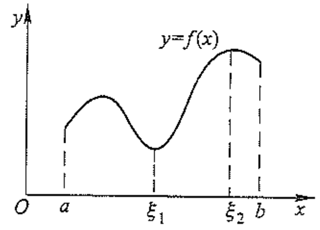


图 1-40

这里不予证明.

注意　如果函数在开区间内连续,或函数在闭区间上有间断点,那么函数在该区间上不一定有界,也不一定有最大值或最小值. 例如,函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是连续的,但它在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,且既无最大值又无最小值;又如,函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$,这函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上虽然有界,但是既无最大值又无最小值(图 1-41).

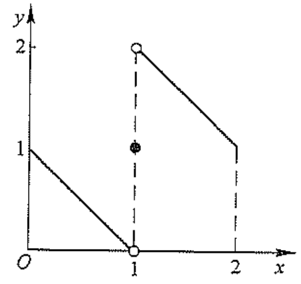


图 1-41

$$x_1=\frac{1}{n},\qquad x_2=\frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数，这样的 x_1、x_2 显然在 $(0,1]$ 上. 因

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)},$$

故只要 n 取得足够大，总能使 $|x_1-x_2|<\delta$. 但这时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon,$$

不符合一致连续的定义，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不是一致连续的.

上例说明，在半开区间上连续的函数不一定在该区间上一致连续. 但是，有下面的定理：

定理 4（一致连续性定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续.

这里不予证明.

习　题　1-10

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in\mathbf{N}$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$（$n\geqslant 3$），则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

*6. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

*7. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

*8. 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

总　习　题　一

（1）数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的________条件，数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的________条件；

（2）$f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的________条件；

（3）$f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的________条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的________条件；

（4）$f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________条件.

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$________.

3. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

（1）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）.

（A）$f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　（B）$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

（C）$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　　（D）$f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

（2）设

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）第二类间断点　　（D）连续点

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

（1）$f(e^x)$；　　（2）$f(\ln x)$；

（3）$f(\arctan x)$；　　（4）$f(\cos x)$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

6. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

（1）$y=|\sin x|$；　　（2）$y=\sin|x|$；　　（3）$y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮，自圆心处剪去圆心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立这圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

*8. 根据函数极限的定义证明 x^2-x-6 5

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2 & x\leqslant0,\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，应当怎样选择数 a？

11. 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型.

12. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

13. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

14. 如果存在直线 $L:y=kx+b$，使得当 $x\to\infty$（或 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离 $d(M,L)\to0$，那么称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k\neq0$ 时，称 L 为斜渐近线.

(1) 证明：直线 $L:y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \left(\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}\right)}}[f(x)-kx]；$$

(2) 求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

第二章　导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分.

本章中，我们主要讨论导数和微分的概念以及它们的计算方法. 至于导数的应用，将在第三章讨论.

第一节　导 数 概 念

一、引例

为了说明微分学的基本概念——导数，我们先讨论两个问题：速度问题和切线问题. 这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系.

1. 直线运动的速度

设某质点沿直线运动. 在直线上规定了原点、正方向和单位长度，使直线成为数轴. 此外，再取定一个时刻作为测量时间的零点. 设质点于时刻 t 在直线上的位置的坐标为 s（简称位置 s）. 这样，该质点的运动完全由某个函数

$$s=f(t)$$

所确定. 此函数对运动过程中所出现的 t 值有定义，称为位置函数. 在最简单的情形，该质点所经过的路程与所花的时间成正比. 就是说，无论取哪一段时间间隔，比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \tag{1-1}$$

总是相同的. 这个比值就称为该质点的速度，并说该质点做匀速运动. 如果运动不是匀速的，那么在运动的不同时间间隔内，比值(1-1)会有不同的值. 这样，把比值(1-1)笼统地称为该质点的速度就不合适了，而需要按不同时刻来考虑. 那么，这种非匀速运动的质点在某一时刻（设为 t_0）的速度应如何理解而又如何求得呢？

首先取从时刻 t_0 到 t 这样一个时间间隔，在这段时间内，质点从位置 $s_0=f(t_0)$ 移动到 $s=f(t)$. 这时由(1-1)式算得的比值

$$\frac{s-s_0}{\quad}=\frac{f(t)-f(t_0)}{\quad} \tag{1-2}$$