$$3x-y-4=0.$$

四、函数可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

王. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

中 α 为当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小. 上式两边同乘 Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

比可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$. 这就是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处是连续的. 所以，是函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，那么函数在该点必连续.

另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点可导. 举例说明如下：

例 10　函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在点 $x=0$ 处不可导. 是因为在点 $x=0$ 处有

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\frac{1}{h^{2/3}},$$

门，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}}=+\infty$，即导数为无穷大（注意，导数不存在）. 这事在图形中表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$（图 2-4）.

例 11　函数 $y=\sqrt{x^2}$（即 $y=|x|$）在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在例 7 中已经看这函数在 $x=0$ 处不可导. 曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在原点 O 没有切线（图 2-5）.

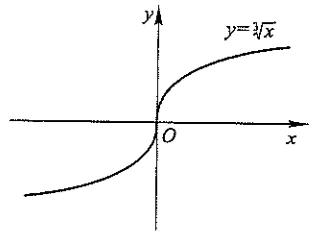

图 2-4

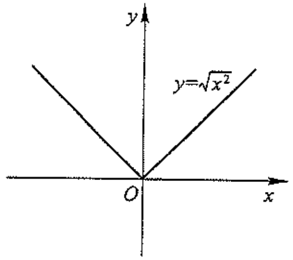

图 2-5

分条件.

习　题　2-1

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔 $[0,t]$ 上转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称 $\omega=\dfrac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度？

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度？

3. 设某工厂生产 x 件产品的成本为

$$C(x)=2000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

这函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试求

（1）当生产 100 件产品时的边际成本；

（2）生产第 101 件产品的成本，并与（1）中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

4. 设 $f(x)=10x^2$，试按定义求 $f'(-1)$.

5. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$.

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）.

（A）左、右导数都存在　　（B）左导数存在，右导数不存在

（C）左导数不存在，右导数存在　　（D）左、右导数都不存在

8. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分条件但非必要条件

（C）必要条件但非充分条件　　（D）既非充分条件又非必要条件

9. 求下列函数的导数：

（1）$y=x^4$；　（2）$y=\sqrt[3]{x^2}$；　（3）$y=x^{1.6}$；

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　（5）$y=\dfrac{1}{x^2}$；　（6）$y=x^3\sqrt[5]{x}$；

（7）$y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m，求这物体在 $t=2$ s 时的速度.

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：

$$x=\frac{2}{3}\pi,\qquad x=\pi.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

14. 求曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

15. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

（1）$y=|\sin x|$；

（2）$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

17. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

法则.

第二节　函数的求导法则

在本节中，将介绍求导数的几个基本法则以及前一节中未讨论过的几个基本初等函数的导数公式. 借助于这些法则和基本初等函数的导数公式，就能比较

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1　如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq 0)$.

证　（1）$[u(x)\pm v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$

于是法则（1）获得证明. 法则（1）可简单地表示为

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

（2）$[u(x)v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$ 是由于 $v'(x)$ 存在，故 $v(x)$ 在点 x 连续. 于是法则（2）获得证明. 法则（2）可简单地表示为

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$\ldots\ [u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]$$

由 $\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，可得

$$(\operatorname{arth} x)'=\frac{1}{1-x^2},x\in(-1,1).$$

习　题　2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$；　(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$；

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$；　(4) $y=\sin x\cdot\cos x$；

(5) $y=x^2\ln x$；　(6) $y=3e^x\cos x$；

(7) $y=\frac{\ln x}{x}$；　(8) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$；

(9) $y=x^2\ln x\cos x$；　(10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$，求 $\frac{d\rho}{d\theta}\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

4. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$；　(2) 该物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；　(2) $y=\cos(4-3x)$；

(3) $y=e^{-3x^2}$；　(4) $y=\ln(1+x^2)$；

(5) $y=\sin^2 x$；　(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

(7) $y=\tan x^2$；　(8) $y=\arctan(e^x)$；

(9) $y=(\arcsin x)^2$；　(10) $y=\ln\cos x$.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(1-2x)$；　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；　(4) $y=\arccos\frac{1}{x}$；

(5) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　(6) $y=\frac{\sin 2x}{x}$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；　(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$；　(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$；

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；　(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$；

(5) $y=\sin^n x\cos nx$；　(6) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$；

(7) $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$；　(8) $y=\ln\ln\ln x$；

(9) $y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$；　(10) $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

10. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^2)$；　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$；　(2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$；

(3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$；　(4) $y=\frac{\ln x}{x^n}$；

(5) $y=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$；　(6) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$；

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；　(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

(9) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；　(10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

*12. 求下列函数的导数：

(1) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$；　(2) $y=\operatorname{sh} x\cdot e^{\operatorname{ch} x}$；

(3) $y=\operatorname{th}(\ln x)$；　(4) $y=\operatorname{sh}^3 x+\operatorname{ch}^2 x$；

(5) $y=\operatorname{th}(1-x^2)$；　(6) $y=\operatorname{arsh}(x^2+1)$；

(7) $y=\operatorname{arch}(e^{2x})$；　(8) $y=\arctan(\operatorname{th} x)$；

(9) $y=\ln\operatorname{ch} x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$；　(10) $y=\operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in\mathbf{R}$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

第三节　高 阶 导 数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\quad 或\quad v=s',$$

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的变化率，即速度 v 对时间 t 的导数：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\quad 或\quad a=(s')'.$$

这种导数的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$ 或 $(s')'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\quad 或\quad s''(t).$$

所以，直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，……一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

要求函数的高阶导数公式，则需要在逐次求导过程中，善于寻求它的某种规律

例 1　$y=ax+b$，求 y''.

解　$y'=a$，$y''=0$.

例 2　$s=\sin\omega t$，求 s''.

解　$s'=\omega\cos\omega t$，$s''=-\omega^2\sin\omega t$.

例 3　证明：函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式

$$y^3y''+1=0.$$

证　将 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 求导，得

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{y^3}.$$

于是

$$y^3y''+1=0.$$

下面介绍几个初等函数的 n 阶导数.

例 4　求指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数.

解　$y'=\mathrm{e}^x$，　$y''=\mathrm{e}^x$，　$y'''=\mathrm{e}^x$，　$y^{(4)}=\mathrm{e}^x$.

一般地，可得

$$y^{(n)}=\mathrm{e}^x,$$

即

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$

例 5　求正弦函数与余弦函数的 n 阶导数.

解　$y=\sin x$，

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

习　题　2-3

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；　(2) $y=e^{2x-1}$；

(3) $y=x\cos x$；　(4) $y=e^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　(6) $y=\ln(1-x^2)$；

(7) $y=\tan x$；　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$；　(10) $y=\dfrac{e^x}{x}$；

(11) $y=xe^{x^2}$；　(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$，求 $f'''(2)$.

3. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $y=f(x^2)$；　(2) $y=\ln[f(x)]$.

4. 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出：

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$ （A,ω 是常数），求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时，当它离地心为 s km 时的速度与$\sqrt{s}$成反比. 试证陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$，试求质点运动的加速度.

8. 验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$ （λ,C_1,C_2是常数）满足关系式

$$y''-\lambda^2y=0.$$

9. 验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数：

(1) $y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$；　(2) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

*11. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式：

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ （$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是常数）；

(2) $y=\sin^2x$；　(3) $y=x\ln x$；　(4) $y=xe^x$.

*12. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ （$n\geqslant3$）.

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

一、隐函数的导数

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以，种不同方式表达. 前面我们遇到的函数，例如 $y=\sin x$，$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 等，这数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式当自变量取定义域内任一值时，由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式的函数叫做显函数. 有些函数的表达方式却不是这样，例如，方程

$$x+y^3-1=0$$

表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与应. 例如，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=-1$ 时，$y=\sqrt[3]{2}$，等等. 这样的函数称为隐函数.

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方 $(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至可能的. 但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来面通过具体例子来说明这种方法.

例 1 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 我们把方程两边分别对 x 求导数①，注意 $y=y(x)$. 方程左边对 x 求得

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx},$$

方程右边对 x 求导得

$$(0)'=0.$$

① 假设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个函数 $y=y(x)$，把 $y=y(x)$ 代入方程便得恒等式 $F[x,y(x)]\equiv0$ 此，这里说的方程两边对 x 求导，是指恒等式两边对 x 求导.

$$= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}(t \neq 2n\pi, n \in \mathbf{Z}).$$

三、相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

例 10 一气球从离开观察员 500 m 处离地面铅直上升，当气球高度为 500 m时，其速率为 140 m/min(分). 求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少?

解 设气球上升 t s(秒)后，其高度为 h，观察员视线的仰角为 α，则

$$\tan \alpha = \frac{h}{500},$$

其中 α 及 h 都与 t 存在可导的函数关系. 上式两边对 t 求导，得

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

由已知条件，存在 t_0，使 $h\big|_{t=t_0} = 500$ m，$\frac{dh}{dt}\Big|_{t=t_0} = 140$ m/min. 又 $\tan\alpha\big|_{t=t_0} = 1, \sec^2\alpha\big|_{t=t_0} = 2$. 代入上式得

$$2\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{1}{500} \cdot 140,$$

所以

$$\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{70}{500} = 0.14 \quad (\text{rad(弧度)/min}).$$

即此时观察员视线的仰角增加的速率是 0.14 rad/min.

习 题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2-2xy+9=0$; (2) $x^3+y^3-3axy=0$;

(3) $xy=e^{x+y}$; (4) $y=1-xe^y$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$; (2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$; (4) $y=1+xe^y$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$; (2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$; (4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta), \\ y=\theta\cos\theta. \end{cases}$

6. 已知 $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 2t, \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处; (2) $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^2}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}, \\ y=1-t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=2e^t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

*9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

10. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s 问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少?

11. 注水入深 8 m、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中，其速率为 4 m³/min. 当水深为 5 n

时，其表面上升的速率为多少？

12. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

第五节　函数的微分

一、微分的定义

先分析一个具体问题. 一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（图 2-10），问此薄片的面积改变了多少？

设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 与 x 存在函数关系：$A=x^2$. 薄片受温度变化的影响时面积的改变量可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 $A=x^2$ 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

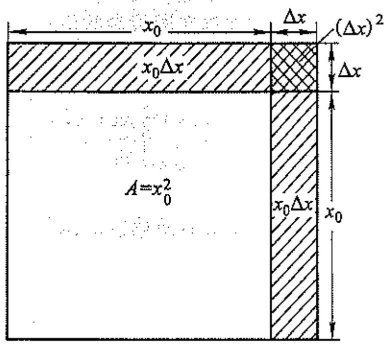

图 2-10

从上式可以看出，ΔA 分成两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积，当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$. 由此可见，如果边长改变很微小，即 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分来代替.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，那么增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，且 Δy 与它的差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以，当 $A\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们就可以用 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 来近似代替 Δy.

数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (5$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta$ 做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则按定义有（5-式成立.（5-1）式两边除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，由上式就得到

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

因此，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，那么 $f(x)$ 在点 x_0 也一定可导（即 $f'(x_0$ 在），且 $A=f'(x_0)$.

反之，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在，根据极限与无穷小的关系（第一章第四节定理 1），上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中 $\alpha\to 0$（当 $\Delta x\to 0$）. 由此又有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

因 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx，故上式相当于（5-1）式，所以 $f(x)$ 在 x_0 也是可微的.

由此可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x. \qquad (5-$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，于是由第一章第七节定理 1 可知时有

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05$ mm,所以

$$|\Delta D|\leqslant\delta_D=0.05,$$

而

$$|\Delta A|\approx|\mathrm{d}A|=\frac{\pi}{2}D\cdot|\Delta D|\leqslant\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D,$$

因此得出 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times60.03\times0.05\approx4.712(\mathrm{mm}^2);$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A}=\frac{\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.03}\approx0.17\%.$$

一般地,根据直接测量的 x 值按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时,如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x,即

$$|\Delta x|\leqslant\delta_x,$$

那么,当 $y'\neq0$ 时,y 的绝对误差

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'|\cdot|\Delta x|\leqslant|y'|\cdot\delta_x,$$

即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y=|y'|\cdot\delta_x; \tag{5-8}$$

y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|}=\left|\frac{y'}{y}\right|\cdot\delta_x. \tag{5-9}$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差.

习 题 2-5

1. 已知 $y=x^3-x$,计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1,0.1,0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-12,试在图 2-12(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$,并说明其正负.

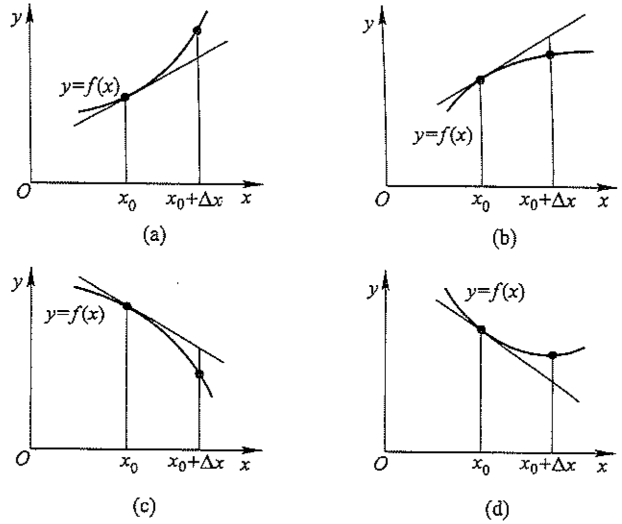

图 2-12

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$;　　(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2e^{2x}$;　　(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A、ω、φ 是常数).

4. 将适当的函数填人下列括号内,使等式成立:

(1) d(　) = $2\mathrm{d}x$;　　(2) d(　) = $3x\mathrm{d}x$;

(3) d(　) = $\cos t\mathrm{d}t$;　　(4) d(　) = $\sin\omega x\mathrm{d}x$ ($\omega\neq0$);

(5) d(　) = $\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(6) d(　) = $e^{-2x}\mathrm{d}x$;

(7) d(　) = $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(8) d(　) = $\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

5. 如图 2-13 所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为 s,跨度为 $2l$,电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下面公式计算

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时,电缆长的变化约为多少?

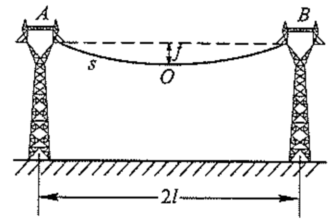

图 2-13

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$,半径 $R=100$ cm(图 2-14).如果 R 不变,α 减少 $30'$,问扇形面积大约改变了多少?又如果 α 不变,R 增加 1 cm,问扇形面积大约改变了多少?

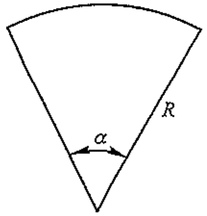

图 2-14

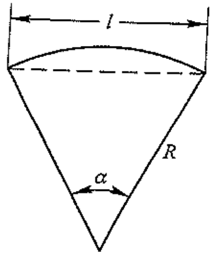

图 2-15

7. 计算下列三角函数值的近似值：

(1) $\cos 29°$； (2) $\tan 136°$.

8. 计算下列反三角函数值的近似值：

(1) $\arcsin 0.5002$； (2) $\arccos 0.4995$.

9. 当$|x|$较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x\approx x$（x是角的弧度值）；(2) $\ln(1+x)\approx x$；

(3) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$； (4) $e^x\approx 1+x$.

并计算 $\tan 45'$和 $\ln 1.002$ 的近似值.

10. 计算下列各根式的近似值：

(1) $\sqrt[3]{996}$； (2) $\sqrt[6]{65}$.

*11. 计算球体体积时，要求精确度在2%以内. 问这时测量直径D的相对误差不能超过多少？

*12. 某厂生产如图 2-15 所示的扇形板，半径$R=200$ mm，要求中心角α为55°. 产品检验时，一般用测量弦长l的办法来间接测量中心角α. 如果测量弦长l时的误差$\delta_l=0.1$ mm，问由此而引起的中心角测量误差δ_α是多少？

总 习 题 二

1. 在"充分""必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0连续的________条件. $f(x)$在点x_0连续是$f(x)$在点x_0可导的________条件.

(2) $f(x)$在点x_0的左导数$f'_-(x_0)$及右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等是$f(x)$在点x_0可导的________条件.

(3) $f(x)$在点x_0可导是$f(x)$在点x_0可微的________条件.

2. 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)\ (n\geqslant 2)$，则$f'(0)=$________.

3. 下述题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设$f(x)$在$x=a$的某个邻域内有定义，则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是

(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

4. 设有一根细棒，取棒的一端作为原点，棒上任意点的坐标为x，于是分布在区间$[0,x]$上细棒的质量m与x存在函数关系$m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点x_0处的线密度（对于均匀细棒来说，单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度）？

5. 根据导数的定义，求$f(x)=\frac{1}{x}$的导数.

6. 求下列函数$f(x)$的$f'_-(0)$及$f'_+(0)$，又$f'(0)$是否存在：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性与可导性.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(\sin x)$； (2) $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$； (4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$；

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

9. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$； (2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

*10. 求下列函数的n阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$； (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

11. 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\frac{dy}{dx}$及二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=\arctan t. \end{cases}$

13. 求曲线$\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t} \end{cases}$在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

14. 已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

15. 当正在高度 H 水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时,如图 2-16 所示从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形,其中 $y|_{x=-L}=H, y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

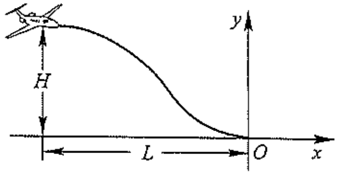

图 2-16

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶,乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午十二点整,乙船位于甲船之北 16 km处. 问下午一点整两船相离的速率为多少?

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

18. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm,为使周期 T 增大 0.05 s,摆长约需加长多少?

第三章　微分中值定理与导数的应用

上一章里,从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发,引进了导数概念,并讨论了导数的计算方法. 本章中,我们将应用导数来研究函数以及曲线的某些性态,并利用这些知识解决一些实际问题. 为此,先要介绍微分学的几个中值定理,它们是导数应用的理论基础.

第一节　微分中值定理

我们先讲罗尔(Rolle)定理,然后根据它推出拉格朗日(Lagrange)中值定理和柯西(Cauchy)中值定理.

一、罗尔定理

首先,我们观察图 3-1. 设曲线弧$\widehat{AB}$是函数 $y=f(x)\ (x\in[a,b])$的图形. 这是一条连续的曲线弧,除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线,且两个端点的纵坐标相等,即 $f(a)=f(b)$. 可以发现在曲线弧的最高点 C 处或最低点 D 处,曲线有水平的切线. 如果记点 C 的横坐标为 ξ,那么就有 $f'(\xi)=0$. 现在用分析语言把这个几何现象描述出来,就可得下面的罗尔定理. 为了应用方便,先介绍费马(Fermat)引理.

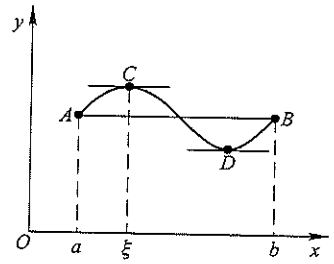

图 3-1

费马引理　设函数$f(x)$在点 x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义,并且在 x_0处可导,如果对任意的 $x\in U(x_0)$,有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{或} f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么$f'(x_0)=0$.

证　不妨设 $x\in U(x_0)$时,$f(x)\leqslant f(x_0)$(如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$,可以类似地证明). 于是,对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$,有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

从而当 $\Delta x>0$ 时,