习　题　3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

6. 证明恒等式:$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$,证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数,且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$,证明:在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ,使得 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$,$n>1$,证明:
$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

10. 设 $a>b>0$,证明:
$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$;

(2) 当 $x>1$ 时,$e^x>ex$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

*13. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内有一点 ξ,使
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b)\\ g(a) & g(b)\end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi)\\ g(a) & g'(\xi)\end{vmatrix}.$$

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$,且 $f(0)=1$,则 $f(x)=e^x$.

*15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数,且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$,试用柯西中值定理证明:
$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

第二节　洛必达法则

如果当 $x\to a$ (或 $x\to\infty$)时,两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷

大,那么极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式,并分别简记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 在第一章第六节中讨论过的极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 就是未定式的一个例子. 对于这类极限,即使它存在也不能用"商的极限等于极限的商"这一法则. 下面我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

我们着重讨论 $x\to a$ 时的未定式 $\dfrac{0}{0}$ 的情形,关于这情形有以下定理:

定理 1　设

(1) 当 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 在点 a 的某去心邻域内,$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大),

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说,当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$;当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大. 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

证　因为求 $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 当 $x\to a$ 时的极限与 $f(a)$ 及 $F(a)$ 无关,所以可以假定 $f(a)=F(a)=0$,于是由条件(1)、(2)知道,$f(x)$ 及 $F(x)$ 在点 a 的某一邻域内是连续的. 设 x 是这邻域内的一点,那么在以 x 及 a 为端点的区间上,柯西中值定理的条件均满足,因此有
$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间}).$$
令 $x\to a$,并对上式两端求极限,注意到 $x\to a$ 时 $\xi\to a$,再根据条件(3)便得要证明的结论.

如果 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 当 $x\to a$ 时仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型,且这时 $f'(x)$,$F'(x)$ 能满足定理中 $f(x)$,$F(x)$ 所要满足的条件,那么可以继续使用洛必达法则先确定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$,从而确定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$,即

0⁺时，上式右端是未定式$\frac{\infty}{\infty}$，应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-x^n}{n}\right)=0.$$

8 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

这是未定式$\infty-\infty$. 因为

$$\sec x-\tan x=\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

$\frac{\pi}{2}$时，上式右端是未定式$\frac{0}{0}$，应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

9 求$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

这是未定式0^0. 设$y=x^x$，取对数得

$$\ln y=x\ln x,$$

⁺时，上式右端是未定式$0\cdot\infty$. 应用例 7 的结果，得

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0.$$

$=e^{\ln y}$，而 $\lim y=\lim e^{\ln y}=e^{\lim\ln y}$ （当$x\to0^+$），所以

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}y=e^0=1.$$

必达法则是求未定式的一种有效方法，但最好能与其他求极限的方法结
例如能化简时应尽可能先化简，可以应用等价无穷小替代或重要极限
可能应用，这样可以使运算简捷.

10 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}$.

如果直接用洛必达法则，那么分母的导数（尤其是高阶导数）较繁. 如
个等价无穷小替代，那么运算就方便得多. 其运算如下：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sec^2x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

后，我们指出，本节定理给出的是求未定式的一种方法. 当定理条件满足
的极限当然存在（或为∞），但当定理条件不满足时，所求极限却不一定
这就是说，当$\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在时（等于无穷大的情况除外），$\lim\frac{f(x)}{F(x)}$仍

可能存在（见本节习题第 2、第 3 题）.

习　题　3-2

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x$；　　(12) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{1/x^2}$；

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$；　　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$；

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

2. 验证极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$存在，但不能用洛必达法则得出.

*4. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}$$

在点$x=0$处的连续性.

第三节　泰勒公式

对于一些较复杂的函数，为了便于研究，往往希望用一些简单的函数来近似表达. 由于用多项式表示的函数，只要对自变量进行有限次加、减、乘三种算术运算，便能求出它的函数值来，因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道，当$|x|$很小时，有如下的近似等式：

$$\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1).$$

$=1$，那么得近似公式

$$\sin x\approx x,$$

$$|R_2|=\left|-\frac{\cos\theta x}{3!}x^3\right|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\quad(0<\theta<1).$$

别取 2 和 3，那么可得 $\sin x$ 的 3 次和 5 次泰勒多项式

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3\quad 和\quad \sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5,$$

值依次不超过$\frac{1}{5!}|x|^5$和$\frac{1}{7!}|x|^7$. 以上三个泰勒多项式及正弦函数

图 3-3 中，以便于比较.

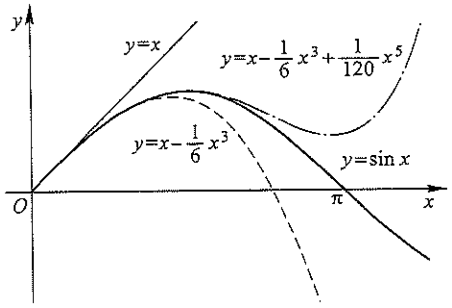


图 3-3

还可以得到

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m+1}(x),$$

$$=\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2}=(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}\quad(0<\theta<1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+R_n(x),$$

$$\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\quad(0<\theta<1);$$

$$+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{\cdots}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\cdots}x^{\cdots}\quad(0<\theta<1).$

由以上带有拉格朗日余项的麦克劳林公式，易得相应的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，读者可自行写出.

例 3　利用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

解　由于分式的分母 $\sin^3 x\sim x^3\ (x\to0)$，我们只需将分子中的 $\sin x$ 和$x\cos x$ 分别用带有佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式表示，即

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\quad x\cos x=x-\frac{x^3}{2!}+o(x^3).$$

于是

$$\sin x-x\cos x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{2!}-o(x^3)=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

对上式作运算时，把两个比 x^3 高阶的无穷小的代数和仍记作$o(x^3)$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

习　题　3-3

1. 按$(x-4)$的幂展开多项式$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$.
2. 应用麦克劳林公式，按 x 的幂展开函数$f(x)=(x^2-3x+1)^3$.
3. 求函数$f(x)=\sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.
4. 求函数$f(x)=\ln x$ 按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.
5. 求函数$f(x)=\frac{1}{x}$按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.
6. 求函数$f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.
7. 求函数$f(x)=xe^x$的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.
8. 验证当$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，按公式 $e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求$\sqrt{e}$的近似值，使误差小于 0.01.
9. 应用 3 阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$；　　(2) $\sin 18°$.

*10. 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$;　　　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

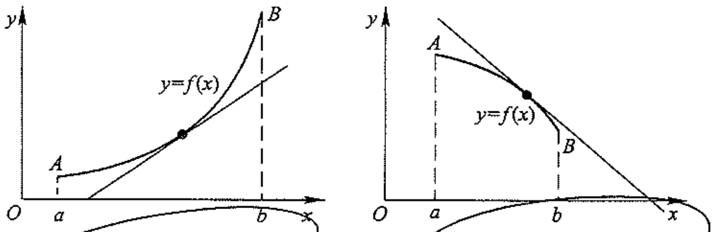
的凹凸性.

第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

第一章第一节中已经介绍了函数在区间上单调的概念. 下面利用导数来对函数的单调性进行研究.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(单调减少),那么它的图形是一条沿 x 轴正向上升(下降)的曲线. 这时,如图 3-4,曲线上各点处的切线斜率是非负的(是非正的),即 $y'=f'(x)\geqslant 0$ $(y'=f'(x)\leqslant 0)$. 由此可见,函数的单调性与导数的符号有着密切的联系.



(a) 函数图形上升时切线斜率非负　(b) 函数图形下降时切线斜率非正

图 3-4

反过来,能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

下面我们利用拉格朗日中值定理来进行讨论.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,在 $[a,b]$ 上任取两点 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$,应用拉格朗日中值定理,得到

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2).$$

由于在上式中,$x_2-x_1>0$,因此,如果在 (a,b) 内导数 $f'(x)$ 保持正号,即 $f'(x)>0$,那么也有 $f'(\xi)>0$. 于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

号,即 $f'(x)<0$,那么 $f'(\xi)<0$,于是 $f(x_2)-f(x_1)<0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,表明 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

此外,如果 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的某点 $x=c$ 处等于零,而在其余各点处均(负),那么 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 上都是单调增加(减少)的,因此间 $[a,b]$ 上仍是单调增加(减少)的. 显然,如果 $f'(x)$ 在 (a,b) 内等于零的有限多个,只要它在其余各点处保持定号,那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仍是单调的.

归纳以上讨论,即得

定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,那么 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(对于无穷区间,要其任一有限的子区间上满足定理的条件),那么结论也成立,参阅本节习题 8

例 1　判定函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解　因为所给函数在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,在 $(-\pi,\pi)$ 内

$$y'=1-\cos x\geqslant 0,$$

且等号仅在 $x=0$ 处成立,所以由定理 1 可知,函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上增加.

例 2　讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解　$y'=e^x-1$.

函数 $y=e^x-x-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 因为在 $(-\infty,0)$ 内 $y'<0$,所以 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少;因为在 $(0,+\infty)$ 内 $y'>0$,所以函数 $y=e^x-$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

例 3　讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解　这函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq 0$ 时,这函数的导数为

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

当 $x=0$ 时,函数的导数不存在. 在 $(-\infty,0)$ 内,$y'<0$,因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少. 在 $(0,+\infty)$ 内,$y'>0$,因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 函数的图形如图 3-5 所示.

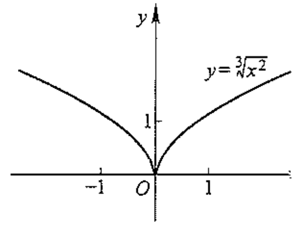


图 3-5

解方程 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{2}{3}$.

$x_1=0$ 及 $x_2=\frac{2}{3}$ 把函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个部分区间：$(-\infty,0]$、$\left[0,\frac{2}{3}\right]$、$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

在 $(-\infty,0)$ 内，$y''>0$，因此在区间 $(-\infty,0]$ 上这曲线是凹的. 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内，$y''<0$，因此在区间 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ 上这曲线是凸的. 在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 内，$y''>0$，因此在区间 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上这曲线是凹的.

当 $x=0$ 时，$y=1$，点 $(0,1)$ 是这曲线的一个拐点. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $y=\frac{11}{27}$，点 $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ 也是这曲线的拐点.

例 10　问曲线 $y=x^4$ 是否有拐点？

解　$y'=4x^3$，$y''=12x^2$.

显然，只有 $x=0$ 是方程 $y''=0$ 的根. 但当 $x\neq 0$ 时，无论 $x<0$ 或 $x>0$ 都有 $y''>0$，因此点 $(0,0)$ 不是这曲线的拐点. 曲线 $y=x^4$ 没有拐点，它在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

例 11　求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解　这函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，当 $x\neq 0$ 时，

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当 $x=0$ 时，y'，y'' 都不存在. 故二阶导数在 $(-\infty,+\infty)$ 内不连续且不具有零点. 但 $x=0$ 是 y'' 不存在的点，它把 $(-\infty,+\infty)$ 分成两个部分区间：$(-\infty,0]$、$[0,+\infty)$.

在 $(-\infty,0)$ 内，$y''>0$，这曲线在 $(-\infty,0]$ 上是凹的. 在 $(0,+\infty)$ 内，$y''<0$，这曲线在 $[0,+\infty)$ 上是凸的.

当 $x=0$ 时，$y=0$，点 $(0,0)$ 是这曲线的一个拐点.

习　题　3-4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.
2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性.
3. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$；　(2) $y=2x+\frac{8}{x}$　$(x>0)$；

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$；

(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$　$(a>0)$；

(7) $y=x^n e^{-x}$　$(n>0, x\geqslant 0)$；

(8) $y=x+|\sin 2x|$.

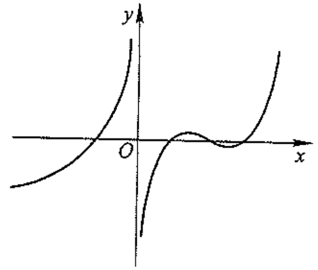
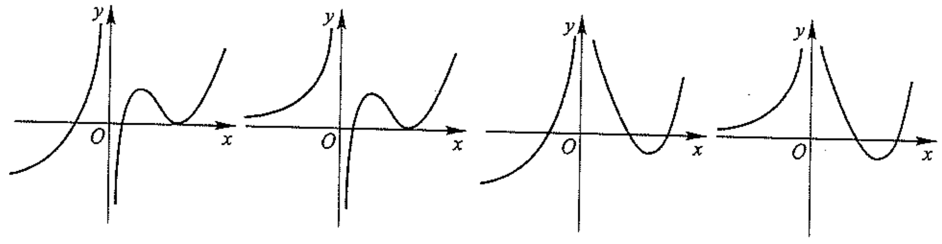


图 3-9

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图 3-9 所示，则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3-10 中所示的四个图形中的哪一个？



(a)　(b)　(c)　(d)

图 3-10

5. 证明下列不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5) 当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

6. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根？
7. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面的例子：

$$f(x)=x+\sin x.$$

8. 设 I 为任一无穷区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内可导. 试证明：如果 $f(x)$ 在 I 的任一有限的子区间上 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），且等号仅在有限多个点处成立，那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.
9. 判定下列曲线的凹凸性：

(1) $y=4x-x^2$;　　(2) $y=\operatorname{sh}x$;

(3) $y=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$;　　(4) $y=x\arctan x$.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$;　　(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;　　(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;　　(6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

11. 利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\quad(x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x>0,y>0,x\neq y)$.

*12. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

13. 问 a、b 为何值时,点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

14. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d,使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线,$(1,-10)$ 为拐点,且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

15. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值,使曲线的拐点处的法线通过原点.

*16. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数,如果 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,试问 $(x_0,f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

值最小值

第五节　函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

在上节例 4 中我们看到,点 $x=1$ 及 $x=2$ 是函数

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

的单调区间的分界点. 例如,在点 $x=1$ 的左侧邻近,函数 $f(x)$ 是单调增加的,在点 $x=1$ 的右侧邻近,函数 $f(x)$ 是单调减少的. 因此,存在点 $x=1$ 的一个去心邻域,对于这去心邻域内的任何点 x,$f(x)<f(1)$ 均成立. 类似地,关于点 $x=2$,也存在着一个去心邻域,对于这去心邻域内的任何点 x,$f(x)>f(2)$ 均成立(参看图 3-6). 具有这种性质的点如 $x=1$ 及 $x=2$,在应用上有着重要的意义,值得我们对此

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,如果对于去心
$\mathring{U}(x_0)$ 内的任一 x,有

$$f(x)<f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)>f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值,使函数取得极值的点称为
点. 例如,上节例 4 中的函数

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

有极大值 $f(1)=2$ 和极小值 $f(2)=1$,点 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点

函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一
大值,那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说,$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值;
$f(x)$ 的整个定义域来说,$f(x_0)$ 不见得是最大值. 关于极小值也类似.

在图 3-11 中,函数 $f(x)$ 有两个极大值:$f(x_2)$、$f(x_5)$,三个极小值:f
$f(x_4)$、$f(x_6)$,其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小. 就整个区间 $[a,b]$ 来
有一个极小值 $f(x_1)$ 同时也是最小值,而没有一个极大值是最大值.

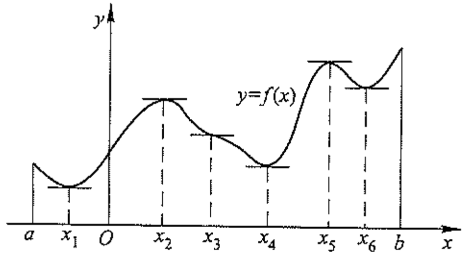


图 3-11

从图中还可看到,在函数取得极值处,曲线的切线是水平的. 但曲线上
平切线的地方,函数不一定取得极值. 例如图中 $x=x_3$ 处,曲线上有水平切
$f(x_3)$ 不是极值.

由本章第一节费马引理可知,如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,且 $f(x)$ 在 x
得极值,那么 $f'(x_0)=0$. 这就是可导函数取得极值的必要条件. 现将此结论
成如下定理:

定理 1(必要条件)　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,且在 x_0 处取得极值,则 f
$=0$.

定理 1 就是说:可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点. 但反过来,函
驻点却不一定是极值点. 例如,$f(x)=x^3$ 的导数 $f'(x)=3x^2$,$f'(0)=0$,因此
是这可导函数的驻点,但 $x=0$ 却不是这函数的极值点. 所以,函数的驻点只

$$W=\frac{1}{6}(d^2b-b^3).$$

,W 就与 b 存在函数关系,b 的变化范围是 $(0,d)$. 现在,问题化为:b 等于多

目标函数 $W=W(b)$ 取最大值? 为此,求 W 对 b 的导数

$$W'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2).$$

$'=0$,解得

$$b=\sqrt{\frac{1}{3}}d.$$

梁的最大抗弯截面模量一定存在,而且在 $(0,d)$ 内部取得;现在,$W'=0$ 在

)内只有一个根 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}d$,所以,当 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}d$ 时,W 的值最大. 这时,

$$h^2=d^2-b^2=d^2-\frac{1}{3}d^2=\frac{2}{3}d^2,$$

$$h=\sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

$$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1.$$

例 7 假设某工厂生产某产品 x 千件的成本是 $C(x)=x^3-6x^2+15x$,售出该 x 千件的收入是 $r(x)=9x$. 问是否存在一个能取得最大利润的生产水平? 存在的话,找出这个生产水平.

解 由题意知,售出 x 千件产品的利润是

$$p(x)=r(x)-C(x).$$

$p(x)$ 取得最大值,那么它一定在使得 $p'(x)=0$ 的生产水平处获得. 因此,令

$$p'(x)=r'(x)-C'(x)=0,$$

$$r'(x)=C'(x).$$

$$x^2-4x+2=0.$$

$x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$,即

$$x_1=2-\sqrt{2}\approx 0.586,\ x_2=2+\sqrt{2}\approx 3.414.$$

$$p''(x)=-6x+12,\ p''(x_1)>0,\ p''(x_2)<0.$$

故在 $x_2=3.414$ 处达到最大利润,而在 $x_1=0.586$ 处发生局部最大亏损.

在经济学中,称 $C'(x)$ 为边际成本,$r'(x)$ 为边际收入,$p'(x)$ 为边际利润. 上述结果表明:在给出最大利润的生产水平上,$r'(x)=C'(x)$,即边际收入等于边际成本. 上面的结果也可以从图 3-18 的成本曲线和收入曲线中看出.

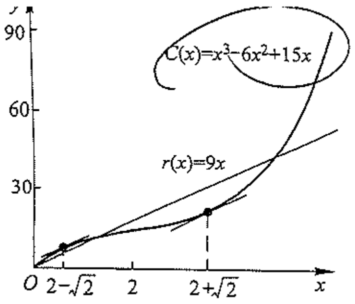


图 3-18

习 题 3-5

1. 求下列函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$; (2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$; (4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; (6) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x\cos x$; (8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$; (10) $y=x+\tan x$.

2. 试证明:如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$,那么这函数没有极值.

3. 试问 a 为何值时,函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,证明:

(1) 当 n 为奇数时,$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时,$f(x)$ 在 x_0 处取得极值,且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值,当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论,讨论函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极值.

6. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2$,$-1\leqslant x\leqslant 4$; (2) $y=x^4-8x^2+2$,$-1\leqslant x\leqslant 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$,$-5\leqslant x\leqslant 1$.

7. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7$ $(1\leqslant x\leqslant 4)$ 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

8. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}$ $(x<0)$ 在何处取得最小值?

9. 问函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ $(x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值?

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋,现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

11. 要造一圆柱形油罐,体积为 V,问底半径 r 和高 h 各等于多少时,才能使表面积最小?这时底直径与高的比是多少?

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3-19). 截面的面积为 5 m². 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小,从而使建造时所用的材料最省?

13. 设有质量为 5 kg 的物体,置于水平面上,受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用而开始移动(图 3-20). 设摩擦系数 $\mu=0.25$,问力 $\boldsymbol{F}$ 与水平线的交角 α 为多少时,才可使力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为最小.

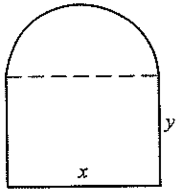


图 3-19

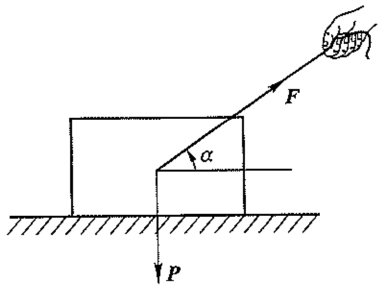


图 3-20

14. 有一杠杆,支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3-21). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m,求最省力的杆长?

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗(图 3-22). 问留下的扇形的圆心角 φ 取多大时,做成的漏斗的容积最大?

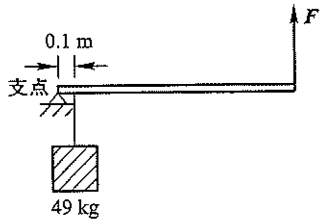


图 3-21

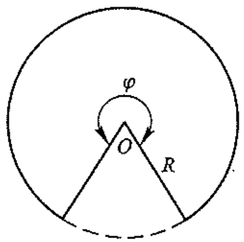


图 3-22

16. 某吊车的车身高为 1.5 m,吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽 2 m 高的屋架(如图 3-23(a)),水平地吊到 6 m 高的柱子上去(如图 3-23(b)),问能否吊得上去?

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4 000 元时,公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元. 如果每一个背包的售出价为 x 元,售出的背包数由

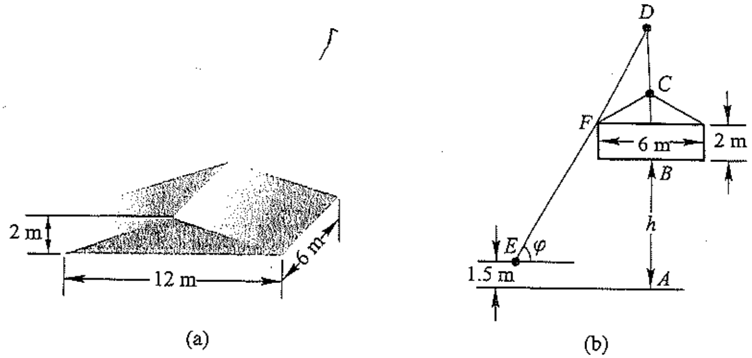


图 3-23

$$n=\frac{a}{x-40}+b(80-x)$$

给出,其中 a,b 为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

第六节 函数图形的描绘

借助于一阶导数的符号,可以确定函数图形在哪个区间上上升,在哪个区间上下降;借助于二阶导数的符号,可以确定函数图形在哪个区间上为凹,在哪个区间上为凸,在什么地方有拐点. 知道了函数图形的升降、凹凸以及拐点后,也就可以掌握函数的性态,并把函数的图形画得比较准确.

现在,随着现代计算机技术的发展,借助于计算机和许多数学软件,可以方便地画出各种函数的图形. 但是,如何识别机器作图中的误差,如何掌握图形上的关键点,如何选择作图的范围等,从而进行人工干预,仍然需要我们有运用微分学的方法描绘函数图形的基本知识.

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下:

第一步 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等),并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第二步 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点,并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点,用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号,并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第五步 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值,定出

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,所以图形有一条水平渐近线 $y=0$.

(5) 算出 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. 从而得到函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

形上的两点 $M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$. 又由 $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^2}$ 得 $M_3\left(2,\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^2}\right)$.

合(3)、(4)的讨论,画出函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图形. 最后,利用图形对称性,便可得到函数在 $(-\infty,0]$ 上的图形(图 3-25).

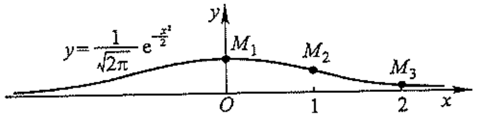


图 3-25

例 3 描绘函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3),(-3,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{36(3-x)}{(x+3)^3},\ f''(x)=\frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

(2) $f'(x)$ 的零点为 $x=3$; $f''(x)$ 的零点为 $x=6$; $x=-3$ 是函数的间断点. 点 $=-3$、$x=3$ 和 $x=6$ 把定义域划分成四个部分区间:

$$(-\infty,-3),(-3,3],[3,6],[6,+\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降、凹凸和拐点等如下表:

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	−	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	↘	↗		↘	拐点	↘

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\infty$,所以图形有一条水平渐近线 $y=1$ 和一条铅直渐近线 $x=-3$.

(5) 算出 $x=3,6$ 处的函数值:

$$f(3)=4,\ f(6)=\frac{11}{3},$$

从而得到图形上的两个点

$$M_1(3,4),\ M_2\left(6,\frac{11}{3}\right).$$

又由于

$$f(0)=1, f(-1)=-8, f(-9)=-8, f(-15)=-\frac{11}{4},$$

得图形上的四个点

$$M_3(0,1),\ M_4(-1,-8),\ M_5(-9,-8),\ M_6\left(-15,-\frac{11}{4}\right).$$

结合(3)、(4)中得到的结果,画出函数 $y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形如图 3-26 所示.

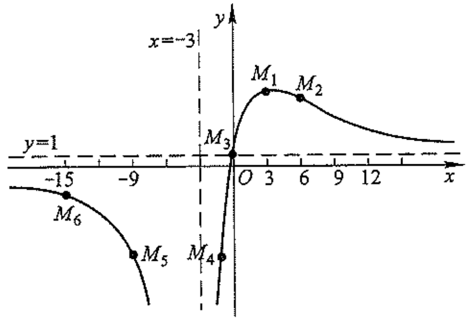


图 3-26

习 题 3-6

描绘下列函数的图形:

1. $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;
2. $y=\frac{x}{1+x^2}$;
3. $y=e^{-(x-1)^2}$;
4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;
5. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

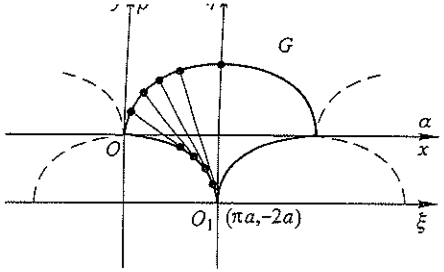


图 3-36

习 题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.
2. 求曲线 $y=\ln\sec x$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.
3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.
4. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 相应的点处的曲率.
5. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

*6. 证明曲线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ 在点 (x,y) 处的曲率半径为 $\dfrac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10\,000}$（y 轴铅直向上，单位为 m）做俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200$ m/s. 飞行员体重 $G=70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

8. 汽车连同载重共 5 t，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6 km/h，桥的跨度为 10 m，拱的矢高为 0.25 m（图 3-37）. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

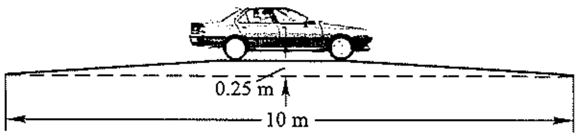


图 3-37

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

第八节　方程的近似解

在科学技术问题中，经常会遇到求解高次代数方程或其他类型的方程的题. 要求得这类方程的实根的精确值，往往比较困难，因此就需要寻求方程的似解.

求方程的近似解，可分两步来做.

第一步是确定根的大致范围. 具体地说，就是确定一个区间 $[a,b]$，使所的根是位于这个区间内的唯一实根. 这一步工作称为根的隔离，区间 $[a,b]$ 称所求实根的隔离区间. 由于方程 $f(x)=0$ 的实根在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 轴交点的横坐标，因此为了确定根的隔离区间，可以先较精确地画出 $y=f(x$ 图形，然后从图上定出它与 x 轴交点的大概位置. 由于作图和读数的误差，这做法得不出根的高精确度的近似值，但一般已可以确定出根的隔离区间.

第二步是以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值，逐步改善根的近值的精确度，直至求得满足精确度要求的近似解. 完成这一步工作有多种方这里我们介绍三种常用的方法——二分法、切线法和割线法，按照这些方法出简单的程序，就可以在计算机上求出方程足够精确的近似解.

一、二分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有一个实根 ξ，于是 $[a,b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

取 $[a,b]$ 的中点 $\xi_1=\dfrac{a+b}{2}$，计算 $f(\xi_1)$.

如果 $f(\xi_1)=0$，那么 $\xi=\xi_1$；

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号，那么取 $a_1=\xi_1, b_1=b$，由 $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$，即知 a $<b_1$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$；

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号，那么取 $a_1=a, b_1=\xi_1$，也有 $a_1<\xi<b_1$ 及 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}($ $a)$；

总之，当 $\xi\neq\xi_1$ 时，可求得 $a_1<\xi<b_1$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

以 $[a_1,b_1]$ 作为新的隔离区间，重复上述做法，当 $\xi\neq\xi_2=\dfrac{1}{2}(a_1+b_1)$ 时，可

它比 x_0 更接近方程的根 ξ.

再在点 $(x_1,f(x_1))$ 处作切线，可得根的近似值 x_2. 如此继续，一般地，在点 $(x_n,f(x_n))$ 处作切线，得根的近似值

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{8-1}$$

如果 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号，那么切线作在端点 $(a,f(a))$ 处（如图 3-38 情形(b)及(c)），可记 $x_0=a$，仍按公式(8-1)计算切线与 x 轴交点的横坐标.

例 2 用切线法求方程 $x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 的实根的近似值，使误差不超过 10^{-3}.

解 令 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$. 由例 1 知 $[0,1]$ 是根的一个隔离区间. $f(0)<0, f(1)>0$.

在 $[0,1]$ 上，

$$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0,\ f''(x)=6x+2.2>0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的图形属于图 3-38 中情形(a). 按 $f''(x)$ 与 $f(1)$ 同号，所以令 $x_0=1$.

连续应用公式(8-1)，得

$$x_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}\approx 0.738,$$

$$x_2=0.738-\frac{f(0.738)}{f'(0.738)}\approx 0.674,$$

$$x_3=0.674-\frac{f(0.674)}{f'(0.674)}\approx 0.671,$$

$$x_4=0.671-\frac{f(0.671)}{f'(0.671)}\approx 0.671.$$

至此，计算不能再继续. 注意到 $f(x_i)\ (i=0,1,\cdots)$ 与 $f''(x)$ 同号，知 $f(0.671)>0$，经计算可知 $f(0.670)<0$，于是有

$$0.670<\xi<0.671.$$

以 0.670 或 0.671 作为根的近似值，其误差都小于 10^{-3}.

三、割线法

利用切线法需要计算函数的导数，当 $f(x)$ 比较复杂时，计算 $f'(x)$ 可能有困难. 这时，可考虑用

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

来近似代替(8-1)式中的 $f'(x_n)$，这时的迭代公式成为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n), \tag{8-2}$$

其中，x_0、x_1 为初始值. 迭代公式(8-2)的几何意义是用过点 $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ 和点 $(x_n,f(x_n))$ 的割线来近似代替点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线，将这条割线与 x 轴交点的横坐标作为新的近似值（见图3-40）. 因此，这个方法叫做割线法或弦截法.

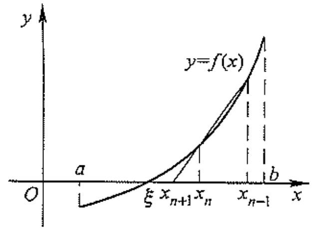


图 3-40

以下用割线法对例 2 中的方程求近似解.

取 $x_0=1, x_1=0.8$. 连续用迭代公式(8-2)，得

$$x_2=x_1-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)\approx 0.699,$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)\approx 0.672,$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)}\cdot f(x_3)\approx 0.671,$$

$$x_5=x_4-\frac{x_4-x_3}{f(x_4)-f(x_3)}\cdot f(x_4)\approx 0.671.$$

至此，计算不能再继续. 因 x_4 与 x_5 小数前三位数字相同，故以 0.671 作为根的近似值其误差小于 10^{-3}.

习 题 3-8

1. 试证明方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根，并用二分法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.
2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.
3. 用割线法求方程 $x^3+3x-1=0$ 的近似根，使误差不超过 0.01.
4. 求方程 $x\lg x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

总 习 题 三

1. 填空：

设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为__________.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$几个数的大小顺序为(　　)；

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(2) 设$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(　　).

(A) $f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值　　(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

3. 列举一个函数$f(x)$满足：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除某一点外处处可导，但在(a,b)内不存在点ξ，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

5. 证明多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$上不可能有两个零点.

6. 设$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

在$(0,1)$内至少有一个零点.

*7. 设$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0,a)$，使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

*8. 设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

9. 设$f(x)$、$g(x)$都是可导函数，且$|f'(x)|<g'(x)$，证明：当$x>a$时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$　(其中$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$).

11. 求下列函数在指定点x_0处具有指定阶数及余项的泰勒公式：

(1) $f(x)=x^3\ln x$，$x_0=1$，$n=4$，拉格朗日余项；

(2) $f(x)=\arctan x$，$x_0=0$，$n=3$，佩亚诺余项；

(3) $f(x)=e^{\sin x}$，$x_0=0$，$n=3$，佩亚诺余项；

(4) $f(x)=\ln\cos x$，$x_0=0$，$n=6$，佩亚诺余项.

12. 证明下列不等式：

(1) 当$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$；

(2) 当$x>0$时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$；

(3) 当$e<a<b<e^2$时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

13. 设$a>1$，$f(x)=a^x-ax$在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$x(a)$. 问a为何值时，$x(a)$最小？并求出最小值.

14. 求椭圆$x^2-xy+y^2=3$上纵坐标最大和最小的点.

15. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

16. 曲线弧$y=\sin x$　$(0<x<\pi)$上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

17. 证明方程$x^3-5x-2=0$只有一个正根，并求此正根的近似值，精确到10^{-3}.

*18. 设$f''(x_0)$存在，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

19. 设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)\geqslant0$. 证明对于(a,b)内任意两点x_1、x_2及$0\leqslant t\leqslant1$，有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

20. 试确定常数a和b，使$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$为当$x\to0$时关于x的5阶无穷小.