$$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}dx = \int\left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)dx$$
$$=2\int x^2dx-\int 1dx+4\int\frac{1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3-x+4\arctan x+C.$$

习　题　4-1

1. 利用求导运算验证下列等式：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$;

(2) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(3) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx=\arctan x+\frac{1}{x+1}+C$;

(4) $\int \sec x dx=\ln|\tan x+\sec x|+C$;

(5) $\int x\cos x dx=x\sin x+\cos x+C$;

(6) $\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{x^2}$;　　(2) $\int x\sqrt{x}\,dx$;

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$;　　(4) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$;

(5) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;　　(6) $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx$;

(7) $\int 5x^3dx$;　　(8) $\int(x^2-3x+2)dx$;

(9) $\int\frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ (g 是常数)；　　(10) $\int(x^2+1)^2dx$;

(11) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)dx$;　　(12) $\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

(13) $\int\left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$;　　(14) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

(15) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;　　(16) $\int 3^xe^xdx$;

(17) $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}dx$;　　(18) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$;

(19) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$;　　(20) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

(21) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;　　(22) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\sin^2x}dx$;

(23) $\int\cot^2x dx$;　　(24) $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)d\theta$;

(25) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$;　　(26) $\int\frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}dx$.

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程，例如方程$\frac{dy}{dx}=f(x)$，其中$\frac{dy}{dx}$为未知函数的导数，$f(x)$为已知函数. 如果将函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程，使微分方程成为恒等式，那么函数 $y=\varphi(x)$ 就称为该微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=(x-2)^2$,　$y|_{x=2}=0$;

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$,　$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1$, $x|_{t=1}=1$.

4. 汽车以 20 m/s 的速度在直道上行驶，刹车后匀减速行驶了 50 m 停住，求刹车加速度. 可执行下列步骤：

(1) 求微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}=-k$ 满足条件$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20$ 及 $s|_{t=0}=0$ 的解；

(2) 求使$\frac{ds}{dt}=0$ 的 t 值及相应的 s 值；

(3) 求使 $s=50$ 的 k 值.

5. 一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

6. 一物体由静止开始运动，经 t s 后的速度是 $3t^2$ m/s，问

(1) 在 3 s 后物体离开出发点的距离是多少？

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间？

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$, $\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

第二节　换元积分法

利用基本积分表与积分的性质，所能计算的不定积分是非常有限的. 因此，有必要进一步来研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法，称为换元积分法，简称换元法. 换元法通常分成两类，下面先讲第一类换元法.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9}}=\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+C.$$

例 26 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}},$$

利用公式㉒,便得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

在例 22 中,我们用变换 $x=a\tan t$ 消去被积函数中的根式 $\sqrt{x^2+a^2}$,这个变换还能消去被积函数分母中的 (x^2+a^2) 的高次幂. 请看下例.

例 27 求 $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 分母是二次质因式的平方,把二次质因式配方成 $(x-1)^2+1$,令 $x-1=\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$x^2-2x+2=\sec^2 t,\ \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{(\tan t+1)^3}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t\\
&=\int(\sin^3 t\cos^{-1}t+3\sin^2 t+3\sin t\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t\\
&=\int(\sin^2 t\cos^{-1}t+3\cos t)\sin t\mathrm{d}t+\int(3\sin^2 t+\cos^2 t)\mathrm{d}t\\
&=\int[(1-\cos^2 t)\cos^{-1}t+3\cos t][-\mathrm{d}(\cos t)]+\int(2-\cos 2t)\mathrm{d}t\\
&=-\int(\cos^{-1}t+2\cos t)\mathrm{d}(\cos t)+2t-\frac{1}{2}\sin 2t\\
&=-\ln\cos t-\cos^2 t+2t-\sin t\cos t+C,
\end{aligned}$$

按 $\tan t=x-1$ 作辅助三角形(图 4-5),便有

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}},\sin t=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}},$$

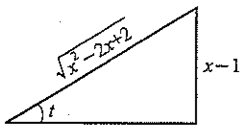

图 4-5

于是

$$\begin{aligned}
&\int\frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+2\arctan(x-1)-\frac{x}{x^2-2x+2}+C.
\end{aligned}$$

习 题 4-2

1. 在下列各式等号右端的横线处填入适当的系数,使等式成立(例如:$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x+7)$):

(1) $\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(ax)$;　　(2) $\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(7x-3)$;

(3) $x\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(x^2)$;　　(4) $x\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(5x^2)$;

(5) $x\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(1-x^2)$;　　(6) $x^3\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(3x^4-2)$;

(7) $e^{2x}\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(e^{2x})$;　　(8) $e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin\frac{3}{2}x\mathrm{d}x=$ ___ $\mathrm{d}\left(\cos\frac{3}{2}x\right)$;　　(10) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$ ___ $\mathrm{d}(5\ln|x|)$;

(11) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$ ___ $\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$;　　(12) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=$ ___ $\mathrm{d}(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$ ___ $\mathrm{d}(1-\arcsin x)$;　　(14) $\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$ ___ $\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分(其中 a,b,ω,φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t}\mathrm{d}t$;　　(2) $\int(3-2x)^3\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$;　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-3x}}$;

(5) $\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x$;　　(6) $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;

(7) $\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int x\cos(x^2)\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int\frac{3x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$;

(11) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$;

(13) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$;　　(14) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x$;　　(16) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$;

(17) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;　　(18) $\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;　(20) $\int \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;

(21) $\int \dfrac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;　(22) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$;

(23) $\int \dfrac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$;　(24) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$

(25) $\int \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$;　(26) $\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x$;

(27) $\int \cos x\cos\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;　(28) $\int \sin 5x\sin 7x\mathrm{d}x$;

(29) $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x$;　(30) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(31) $\int \dfrac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$;　(32) $\int \dfrac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$;

(33) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2-1}$;　(34) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$;

(35) $\int \dfrac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$;　(36) $\int \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$;

(37) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;　(38) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(39) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$;　(40) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$;

(41) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;　(42) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(43) $\int \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$;　(44) $\int \dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

第三节　分部积分法

前面我们在复合函数求导法则的基础上,得到了换元积分法.现在我们利用两个函数乘积的求导法则,来推得另一个求积分的基本方法——分部积分法.

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数,则两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项,得

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对这个等式两边求不定积分,得

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x. \tag{3-1}$$

公式(3-1)称为分部积分公式.如果求 $\int uv'\mathrm{d}x$ 有困难,而求 $\int u'v\mathrm{d}x$ 比较容易时,分部积分公式就可以发挥作用了.

为简便起见,也可把公式(3-1)写成下面的形式:

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u \tag{3-2}$$

现在通过例子说明如何运用这个重要公式.

例 1　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　这个积分用换元积分法不易求得结果,现在试用分部积分法来求它.但是怎样选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 呢?如果设 $u=x$, $\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $v=\sin x$,代入分部积分公式(3-2),得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x,$$

而 $\int v\mathrm{d}u=\int \sin x\mathrm{d}x$ 容易积出,所以

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

求这个积分时,如果设 $u=\cos x$, $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$,则

$$\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x,\quad v=\frac{x^2}{2}.$$

于是

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cos x+\int \frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x.$$

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

由此可见,如果 u 和 $\mathrm{d}v$ 选取不当,就求不出结果,所以应用分部积分法时,恰当选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 是一个关键.选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 一般要考虑下面两点:

(1) v 要容易求得;

(2) $\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积出.

例 2　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　设 $u=x$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $v=\mathrm{e}^x$.于是

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=\mathrm{e}^x(x-1)+C.$$

运用分部积分公式(3-2)的形式,例 1、例 2 的求解过程也可表述为

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\sin x)=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x$$

解 $\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\,d(\tan x)$

$$= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x| - \int \sec^3 x\,dx.$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int \sec^3 x\,dx$，把它移到等号左端去，等式两端再同时除以 2，便得

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|) + C.$$

在积分的过程中往往要兼用换元法与分部积分法，如例 5，下面再来举一个例子.

例 9 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$. 于是

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt.$$

利用例 2 的结果，并用 $t=\sqrt{x}$ 代回，便得所求积分：

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2e^t(t-1)+C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

习 题 4-3

求下列不定积分：

1. $\int x\sin x\,dx$.
2. $\int \ln x\,dx$.
3. $\int \arcsin x\,dx$.
4. $\int xe^{-x}\,dx$.
5. $\int x^2\ln x\,dx$.
6. $\int e^{-x}\cos x\,dx$.
7. $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}\,dx$.
8. $\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$.
9. $\int x^2\arctan x\,dx$.
10. $\int x\tan^2 x\,dx$.

11. $\int x^2\cos x\,dx$.
12. $\int te^{-2t}\,dt$.
13. $\int \ln^2 x\,dx$.
14. $\int x\sin x\cos x\,dx$.
15. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.
16. $\int x\ln(x-1)\,dx$.
17. $\int (x^2-1)\sin 2x\,dx$.
18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$.
19. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.
20. $\int \cos\ln x\,dx$.
21. $\int (\arcsin x)^2\,dx$.
22. $\int e^x\sin^2 x\,dx$.
23. $\int x\ln^2 x\,dx$.
24. $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$.

第四节 有理函数的积分

有

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法和分部积分法，下面简要地介绍有理函数的积分及可化为有理函数的积分.

一、有理函数的积分

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数，又称有理分式. 我们总假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式 $Q(x)$ 的次数时，称这有理函数为真分式，否则称为假分式.

利用多项式的除法，总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式，例如第一节例 15 中的被积函数

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1} = 2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}.$$

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为两个多项式的乘积

$$Q(x)=Q_1(x)Q_2(x),$$

且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式，那么它可分拆成两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

上述步骤称为把真分式化成部分分式之和. 如果 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能再分解成两个没有公因式的多项式的乘积，那么就可再分拆成更简单的部分分式. 最后，

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x = \int (u^2-1)u\cdot\frac{-2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u = -2\int\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

$$= -2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u = -2u-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$= -2u+2\ln(u+1)-\ln|u^2-1|+C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)+\ln|x|+C.$$

以上四个例子表明，如果被积函数中含有简单根式$\sqrt[n]{ax+b}$或$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以令这个简单根式为 u. 由于这样的变换具有反函数，且反函数是 u 的有理函数，因此原积分即可化为有理函数的积分.

习　题　4-4

求下列不定积分：

1. $\int \frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$.
2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$.
5. $\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$.
7. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
8. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$.
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$.
10. $\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x$.
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.
12. $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.
13. $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$.
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$.
15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$.
16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.
18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.
19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
20. $\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$.
21. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$.
22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.
23. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.
24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

第五节　积分表的使用

通过前面的讨论可以看出，积分的计算要比导数的计算来得灵活、复杂. 为了实用的方便，往往把常用的积分公式汇集成表，这种表叫做积分表. 积分表是按照被积函数的类型来排列的. 求积分时，可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后，在表内查得所需的结果.

本书末附录Ⅳ有一个简单的积分表，以供查阅.

我们先举几个可以直接从积分表中查得结果的积分例子.

例 1　求 $\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x$.

解　被积函数含有 $ax+b$，在积分表（一）中查得公式 7

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right)+C.$$

现在 $a=3, b=4$，于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(\ln|3x+4|+\frac{4}{3x+4}\right)+C.$$

例 2　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$.

解　被积函数含有三角函数，在积分表（十一）中查得关于积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ 的公式，但是公式有两个，要看 $a^2>b^2$ 或 $a^2<b^2$ 而决定采用哪一个.

现在 $a=5, b=-4, a^2>b^2$，所以用公式 105

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$$

$$= \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C\quad (a^2>b^2).$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$$

$$= \frac{2}{5+(-4)}\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

下面再举一个需要先进行变量代换，然后再查表求积分的例子.

例 3 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解 这个积分不能在表中直接查到，需要先进行变量代换.

令 $2x=u$，那么 $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{u^2+3^2}$，$x=\frac{u}{2}$，$dx=\frac{1}{2}du$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}}=\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$，在积分表（六）中查到公式 37

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C.$$

现在 $a=3$，x 相当于 u，于是

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C.$$

再把 $u=2x$ 代入，最后得到

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C.$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|}+C.$$

最后，举一个用递推公式求积分的例子.

例 4 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 在积分表（十一）中查到公式 95

$$\int \sin^n x dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx.$$

利用这个公式可以使被积函数中正弦的幂次减少两次，只要重复使用这个公式，可以使正弦的幂次继续减少，直到求出最后结果为止，这种公式叫做递推公式.

现在 $n=4$，于是

$$\int \sin^4 x dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int \sin^2 x dx.$$

对积分 $\int \sin^2 x dx$ 用公式 93

$$\int \sin^2 x dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C.$$

一般说来，查积分表可以节省计算积分的时间，但是，只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表，而且对一些比较简单的积分，应用基本积分方法来计算比查表更快些，例如，对 $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$，用变换 $u=\sin x$ 很快就可得到结果. 所以，求积分时究竟是直接计算，还是查表，或是两者结合使用，应该作具体分析，不能一概而论.

在本章结束之前，我们还要指出：对初等函数来说，在其定义区间上，它的原函数一定存在，但原函数不一定都是初等函数，如

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

等等，它们的原函数就都不是初等函数.

习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$.
2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$.
4. $\int \sqrt{2x^2+9}\,dx$.
5. $\int \sqrt{3x^2-2}\,dx$.
6. $\int e^{2x}\cos x dx$.
7. $\int x\arcsin\frac{x}{2}dx$.
8. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
10. $\int e^{-2x}\sin 3x dx$.
11. $\int \sin 3x\sin 5x dx$.
12. $\int \ln^3 x dx$.
13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx$.
14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.
15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.
16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.
17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2}dx$.
18. $\int \cos^6 x dx$.

19. $\int x^2\sqrt{x^2-2}\,dx$.

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x}dx$.

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-1}}$.

22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$.

24. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2}dx$.

总 习 题 四

1. 填空：

(1) $\int x^3e^x dx=$________________.

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=$________________.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

(1) 已知 $f'(x)=\frac{1}{x(1+2\ln x)}$，且 $f(1)=1$，则 $f(x)$ 等于(　　)；

(A) $\ln(1+2\ln x)+1$　　(B) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$

(C) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+\frac{1}{2}$　　(D) $2\ln(1+2\ln x)+1$

(2) 在下列等式中，正确的结果是(　　).

(A) $\int f'(x)dx=f(x)$　　(B) $\int df(x)=f(x)$

(C) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　(D) $d\int f(x)=f(x)$

3. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3f'(x)dx$.

4. 求下列不定积分(其中 a,b 为常数)：

(1) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$；

(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx$；

(3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx\ (a>0)$；

(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$；

(5) $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx$；

(6) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$；

(7) $\int \tan^4 x\,dx$；

(8) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$；

(9) $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}$；

(10) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx\ (a>0)$；

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$；

(12) $\int x\cos^2 x\,dx$；

(13) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$；

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$；

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$；

(16) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$；

(17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$；

(19) $\int \ln(1+x^2)dx$；

(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；

(21) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$；

(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$；

(23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$；

(24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$；

(25) $\int \frac{dx}{16-x^4}$；

(26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(28) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$；

(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；

(30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$；

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$；

(32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$；

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；

(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$；

(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$；

(36) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx$；

(38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$；

(39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$；

(40) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.