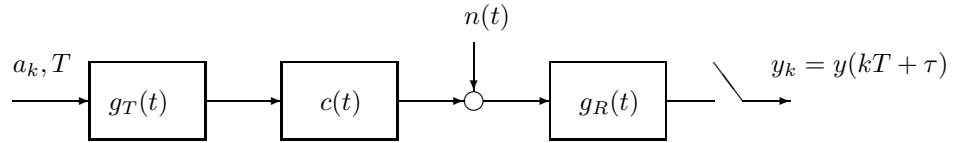


1 Εκτίμηση και Ισοστάθμιση Τηλεπικοινωνιακών καναλιών

Σε αυτό το εδάφιο, θα αναφερθούμε σε βασικές μεθόδους εκτίμησης και ισοστάθμισης τηλεπικοινωνιακών καναλιών. Στο πρώτο μέρος, θα επικεντρωθούμε σε εκτίμηση καναλιού και γραμμική ισοστάθμιση ελαχίστων τετραγώνων, ενώ στο δεύτερο θα αναπτύξουμε τον αλγόριθμο Viterbi, ο οποίος είναι ένας αποδοτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό της ακολουθίας εισόδου.¹

Επισημαίνουμε ότι το αντικείμενο της εκτίμησης και ισοστάθμισης τηλεπικοινωνιακών καναλιών είναι ευρύτατο. Συνεπώς, οι παρούσες σημειώσεις καλύπτουν, αναγκαστικά, ένα σχετικά μικρό αλλά σημαντικό μέρος της περιοχής.

2 Ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου



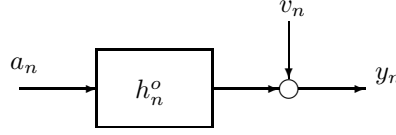
Σχήμα 1: Σύνθετο κανάλι συνεχούς χρόνου.

Θεωρούμε το σύστημα βασικής ζώνης του Σχήματος 1 αποτελούμενο από το φίλτρο μορφοποίησης στον πομπό $g_T(t)$, το κανάλι $c(t)$ και το φίλτρο μορφοποίησης στο δέκτη $g_R(t)$. Είσοδος στο κανάλι είναι το $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT)$. Στην έξοδο του καναλιού προστίθεται λευκός θόρυβος $n(t)$ με φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(F) = N_0$.

Η σύνθετη κρουστική απόκριση δίνεται από τη συνέλιξη

$$h^o(t) = g_T(t) * c(t) * g_R(t), \quad (1)$$

¹Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος Viterbi είναι βέλτιστος ως προς την πιθανότητα σφάλματος ακολουθίας. Η απόδειξη είναι εκτός των πλαισίων του μαθήματος.



Σχήμα 2: Ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου.

όπου $c(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του καναλιού. Στο παρόν εδάφιο, γενικά, υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι μη-ιδανικό. Η περίπτωση του ιδανικού καναλιού έχει εξεταστεί λεπτομερώς σε προηγούμενο εδάφιο.

Η συνιστώσα θορύβου στην έξοδο του φίλτρου λήψης είναι $v(t) = n(t) * g_R(t)$ με φασματική πυκνότητα ισχύος $S_v(F) = N_0 |G_R(F)|^2$. Η έξοδος του φίλτρου $g_R(t)$ είναι

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h^o(t - mT) + v(t). \quad (2)$$

Όπως αναπτύξαμε λεπτομερώς σε προηγούμενο εδάφιο, εκτιμούμε με κάποιο “καλό” τρόπο μία καθυστέρηση τ και δειγματοληπούμε τις χρονικές στιγμές $kT + \tau$. Τότε, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} y(kT + \tau) &= y(t) \Big|_{t=kT+\tau} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h^o(t - mT) \Big|_{t=kT+\tau} + v(t) \Big|_{t=kT+\tau} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h^o((k - m)T + \tau) + v(kT + \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Ορίζοντας $y_k = y(kT + \tau)$, $h_k^o = h^o(kT + \tau)$ και $v_k = v(kT + \tau)$, λαμβάνουμε

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h_{k-m}^o + v_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m^o a_{k-m} + v_k. \quad (4)$$

Το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση $\{h_k^o\}$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 2 και καλείται **ισοδύναμο διακριτό κανάλι** (discrete equivalent channel) ή **ισοδύναμο κανάλι διακριτού χρόνου** (discrete-time equivalent channel).

Στη συντριπτική πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών, η κρουστική απόκριση μπορεί να θεωρηθεί (ή μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά από) μία πεπερασμένη ακολουθία που, γενικά, συμβολίζεται ως $\{h_m^o\}_{m=M_1}^{M_2}$, για $M_1 \leq M_2$. Όπως έχουμε δει, το σύστημα αυτό μπορεί πάντα να μετατραπεί σε αιτιατό αν ολισθήσουμε κατάλληλα την κρουστική απόκριση και την

έξοδο. Στη συνέχεια, θα κάνουμε αυτή την υπόθεση, δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι το κανάλι είναι αιτιατό και η κρουστική απόκριση παίρνει τις μη μηδενικές τιμές $h_0^o, h_1^o, \dots, h_M^o$. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση εισόδου–εξόδου του καναλιού δίνεται από τη συνέλιξη

$$y_k = \sum_{m=0}^M h_m^o a_{k-m} + v_k. \quad (5)$$

Συνήθως, η κρουστική απόκριση του καναλιού $\{h_m^o\}_{m=0}^M$ είναι άγνωστη στο δέκτη.

Αν $M > 0$, τότε στο παραπάνω σύστημα είναι προφανής η παρουσία διασυμβολικής παρεμβολής (intersymbol interference, ISI). Θυμηθείτε ότι αν το κανάλι ήταν ιδανικό, τότε θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη διασυμβολική παρεμβολή χρησιμοποιώντας κατάλληλα επιλεγμένα φίλτρα στον πομπό και στο δέκτη και κάνοντας έξυπνη επιλογή για το τ ! Σε αυτή την περίπτωση, θα είχαμε $M = 0$. Όμως, στην περίπτωση που το κανάλι δεν είναι ιδανικό, δεν μπορούμε να αποφύγουμε τη διασυμβολική παρεμβολή στην έξοδο του καναλιού. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τρόπους εκτίμησης του καναλιού και αναίρεσης της επίδρασής του στα σύμβολα πληροφορίας $\{a_k\}$.

Υποθέτουμε ότι η επικοινωνία πομπού–δέκτη διεξάγεται με πακέτα δεδομένων μήκους N . Κάθε πακέτο αποστέλλεται με την εξής μορφή

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n_1-1} & \underbrace{a_{n_1} \cdots a_{n_2}}_{\text{δείγματα εκπαίδευσης}} & a_{n_2+1} & \cdots & a_N \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Τα σύμβολα a_{n_1}, \dots, a_{n_2} καλούνται “δείγματα εκπαίδευσης” (training symbols) είναι γνωστά στο δέκτη, συνεπώς, δεν μεταφέρουν πληροφορία, και χρησιμοποιούνται για συγχρονισμό και εκτίμηση/ισοστάθμιση καναλιού. Πριν από το πρώτο και μετά το τελευταίο σύμβολο πληροφορίας δεν στέλνουμε τίποτα (ισοδύναμα, στέλνουμε “μηδενικά”).

Υποθέτοντας ιδανικό συγχρονισμό², κάθε λαμβανόμενο πακέτο είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n_1-1} & \underbrace{y_{n_1} \cdots y_{n_2}} & y_{n_2+1} & \cdots & y_N & \cdots & y_{N+M} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

²Ο συγχρονισμός πομπού–δέκτη μάς έχει ήδη απασχολήσει και θα μάς απασχολήσει και στη συνέχεια του μαθήματος.

3 Εκτίμηση καναλιού με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Σε αυτή την παράγραφο, θα χρησιμοποιήσουμε τα δείγματα εκπαίδευσης και θα περιγράψουμε τη μέθοδο **ελαχίστων τετραγώνων** (least-squares) για την εκτίμηση του καναλιού. Έστω $n_2 - n_1 > M$. Οι έξοδοι του καναλιού y_n που εξαρτώνται **μόνο** από τα (γνωστά στο δέκτη) σύμβολα εκπαίδευσης a_{n_1}, \dots, a_{n_2} μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} y_{n_1+M} &= h_0^o a_{n_1+M} + h_1^o a_{n_1+M-1} + \dots h_M^o a_{n_1} + v_{n_1+M} \\ &\vdots \\ y_{n_2} &= h_0^o a_{n_2} + h_1^o a_{n_2-1} + \dots h_M^o a_{n_2-M} + v_{n_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Σε μορφή πινάκων-διανυσμάτων, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} y_{n_1+M} \\ \vdots \\ y_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n_1+M} & a_{n_1+M-1} & \dots & a_{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_2} & a_{n_2-1} & \dots & a_{n_2-M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0^o \\ \vdots \\ h_M^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{n_1+M} \\ \vdots \\ v_{n_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ή, με προφανείς ορισμούς,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{h}^o + \mathbf{v} \quad (10)$$

όπου \mathbf{y} και \mathbf{A} είναι γνωστά και \mathbf{h}^o και \mathbf{v} άγνωστα.

Αναζητώντας το \mathbf{h}^o , θα υπολογίσουμε το \mathbf{h}_{LS} το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους

$$C(\mathbf{h}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h}\|_2^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h}) \quad (11)$$

όπου $\mathbf{h} \triangleq [h_0 \dots h_M]^T$. Δηλαδή, αναζητούμε την ποσότητα

$$\mathbf{h}_{\text{LS}} = \arg \min_{\mathbf{h}} C(\mathbf{h}). \quad (12)$$

Η $C(\mathbf{h})$ είναι τετραγωνική συνάρτηση των στοιχείων του \mathbf{h} , δηλαδή, είναι γραμμικός συνδυασμός γινομένων της μορφής $h_i h_j$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν ο πίνακας \mathbf{A} είναι πλήρους βαθμού στηλών (αυτό συμβαίνει όταν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες), τότε το

παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει μοναδική λύση, \mathbf{h}_{LS} , η οποία δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial C(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση, θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη βαθμωτή συνάρτηση του διανύσματος \mathbf{h} , $C(\mathbf{h})$. Αυτό θα γίνει στο επόμενο εδάφιο, με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor.

3.1 Ανάπτυγμα Taylor για βαθμωτές συναρτήσεις διανυσμάτων

Αν $f(\mathbf{x})$ είναι διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση του M -διάστατου πραγματικού διανύσματος \mathbf{x} , δηλαδή

$$f : \mathcal{R}^M \rightarrow \mathcal{R}$$

τότε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης γύρω από το σημείο $\mathbf{x} = [x_1 \ \cdots \ x_M]^T$ είναι

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'^T(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2). \quad (14)$$

Η ποσότητα $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_M} \end{bmatrix} \quad (15)$$

και καλείται παράγωγος³ (derivative) της $f(\cdot)$ στο σημείο \mathbf{x} και $\Delta \mathbf{x} = [\Delta x_1 \ \cdots \ \Delta x_M]^T$. Στον όρο $O(\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2)$ αντιστοιχίζουμε όλους τους όρους που περιέχουν γινόμενα δύο τουλάχιστον όρων από τους Δx_i , $i = 1, \dots, M$ (π.χ., $(\Delta x_i)^2$, $\Delta x_i \Delta x_j$).

Η σχέση (14) είναι μία συμπαγής έκφραση για το πιο οικείο ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης⁴

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Delta x_i + O(\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2).$$

³Πολλές φορές σαν παράγωγος ορίζεται το διάνυσμα γραμμή με στοιχεία τις μερικές παραγώγους, ενώ το διάνυσμα στήλη καλείται βαθμίδα (gradient). Για τις ανάγκες μας, αυτός ο ορισμός της παραγώγου είναι ικανοποιητικός.

⁴Αν δεν θυμάστε τις σχετικές έννοιες να ανατρέξετε στα βιβλία Απειροστικού Λογισμού.

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{R}^M$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{M \times M}.$$

Στην πραγματικότητα, θα εκφράσουμε την $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ στη μορφή (14) και θα “αναγνωρίσουμε” την παράγωγο. Προφανώς, μπορείτε να υπολογίσετε αναλυτικά το διάνυσμα των μερικών παραγώγων παίρνοντας το ίδιο αποτέλεσμα.

1. Έστω f η γραμμική συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \sum_{m=1}^M a_m x_m.$$

Τότε

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{x}$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

2. Έστω f η τετραγωνική συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M A_{i,j} x_i x_j.$$

Τότε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})^T \mathbf{A} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \\ &= f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \Delta \mathbf{x} + O(\|\Delta \mathbf{x}\|_2^2) \end{aligned}$$

όπου στο σημείο (a) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι κάθε βαθμωτό μέγεθος είναι ίσο με το ανάστροφό του (συγκεκριμένα, $\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{x}$). Συνεπώς,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{x}.$$

3.2 Λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων

Μετά τον υπολογισμό των παραπάνω απλών παραγώγων, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $C(\mathbf{h})$ ως εξής

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial \mathbf{h}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{h}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{h}) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{h}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{h}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{h}) = -2 \mathbf{A}^T \mathbf{y} + 2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{h},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη συμμετρία του πίνακα $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ και το ότι $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.

Τελικά, λύνοντας την εξίσωση $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0}$, λαμβάνουμε τη λύση ελαχίστων τετραγώνων

$$\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ελάχιστο κόστος είναι

$$C(\mathbf{h}_{\text{LS}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εκτίμηση του καναλιού \mathbf{h}_{LS} μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναίρεση της διασυμβολικής παρεμβολής (π.χ., από τον αλγόριθμο Viterbi ή από κάποιον άλλο ισοσταθμιστή).

4 Γραμμική ισοστάθμιση

4.1 Γραμμική ισοστάθμιση μηδενικής ISI

Ο ισοσταθμιστής μηδενικής ISI⁵ προσπαθεί να αναιρέσει την παραμόρφωση που εισάγει το κανάλι έτσι ώστε το συνολικό σύστημα (διακριτό κανάλι – ισοσταθμιστής) να είναι ισοδύναμο με μία καθυστέρηση, δηλαδή

$$h_n * f_n = \delta_{n-\Delta}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε πολλές και σημαντικές περιπτώσεις η ισότητα δεν μπορεί να επιτευχθεί με έναν υλοποιήσιμο ισοσταθμιστή και συνεπώς αρκούμαστε σε προσεγγιστική

⁵Ο διεθνής όρος είναι zero forcing equalizer διότι ο ισοσταθμιστής προσπαθεί να μηδενίσει την ISI – να “εξαναγκάσει την ISI να είναι μηδέν.”

ισότητα. Η παραπάνω συνέλιξη μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο πίνακας επί διάνυσμα ως εξής (για $K > M$)

$$\begin{bmatrix} h_0 & & & & & \\ h_1 & h_0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ h_M & h_{M-1} & \cdots & h_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & h_M & \cdots & h_1 & h_0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & h_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_M \\ \vdots \\ g_K \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{M+K} \end{bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}.$$

Επιλέγουμε το διάνυσμα \mathbf{f} το οποίο ελαχιστοποιεί την ποσότητα

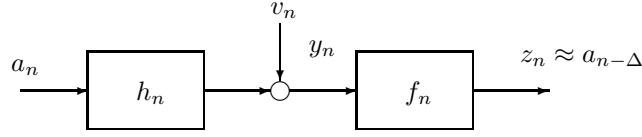
$$\|\mathbf{e}_\Delta - \mathbf{g}\|_2^2 = \|\mathbf{e}_\Delta - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_2^2,$$

με \mathbf{e}_Δ το διάνυσμα με 1 στη θέση Δ και παντού αλλού 0. Η λύση είναι

$$\mathbf{f}_{\text{LS}}^{\text{ZF}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e}_\Delta.$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς υποθέσαμε ότι το κανάλι είναι γνωστό στον δέκτη. Όπως γνωρίζουμε, συνήθως, δεν είναι γνωστό. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την εκτίμηση του καναλιού \mathbf{h}_{LS} και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση στις παραπάνω εξισώσεις σαν να ήταν το πραγματικό κανάλι. Αυτή η τακτική εφαρμόζεται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες.

Σημείωση: Οι πίνακες \mathbf{A} , \mathbf{Y} και \mathbf{H} είναι πίνακες Toeplitz, δηλαδή, στη διαγώνιο έχουν το ίδιο στοιχείο και το ίδιο συμβαίνει για κάθε υπερδιαγώνιο και υποδιαγώνιο. Μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα αν γνωρίζουμε την πρώτη στήλη και την πρώτη γραμμή τους. Κατασκευάζονται στο Matlab με την εντολή `toeplitz`.



Σχήμα 3: Γραμμική ισοστάθμιση.

Σημείωση: Όταν οι ποσότητες είναι μιγαδικές, τότε ο τελεστής $(\cdot)^T$ αντικαθίσταται από τον τελεστή $(\cdot)^H$.

4.2 Γραμμική ισοστάθμιση ελαχίστων τετραγώνων

Στην περίπτωση της γραμμικής ισοστάθμισης, ο ισοσταθμιστής είναι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) f_0, \dots, f_K . Η έξοδός του περιγράφεται από τη συνέλιξη

$$z_n = \sum_{k=0}^K f_k y_{n-k}$$

και θέλουμε να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα μία καθυστερημένη, κατά Δ χρονικές μονάδες, εκδοχή της εισόδου, όπως στο Σχήμα 3. Συνήθως, ένας γραμμικός ισοσταθμιστής ακολουθείται από σύμβολο-προς-σύμβολο ανίχνευση.

Για το σχεδιασμό του βέλτιστου ισοσταθμιστή, όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, θα υποθέσουμε ότι στο δέκτη γνωρίζουμε τα σύμβολα a_n που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές $n = n_1, \dots, n_2$. Οι έξοδοι του ισοσταθμιστή που αντιστοιχούν στα γνωστά σύμβολα a_{n_1}, \dots, a_{n_2} γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} z_{n_1+\Delta} &= f_0 y_{n_1+\Delta} + \dots + f_K y_{n_1+\Delta-K} \\ &\vdots \\ z_{n_2+\Delta} &= f_0 y_{n_2+\Delta} + \dots + f_K y_{n_2+\Delta-K} \end{aligned}$$

ή, με πιο συμπαγή συμβολισμό,

$$\begin{bmatrix} z_{n_1+\Delta} \\ \vdots \\ z_{n_2+\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n_1+\Delta} & \cdots & y_{n_1+\Delta-K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n_2+\Delta} & \cdots & y_{n_2+\Delta-K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix}$$

ή, με προφανείς ορισμούς,

$$\mathbf{z} = \mathbf{Y}\mathbf{f}.$$

Ορίζουμε $\mathbf{a} \triangleq [a_{n_1} \cdots a_{n_2}]^T$. Αναζητούμε το διάνυσμα \mathbf{f} που ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{z}\|_2^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{Y}\mathbf{f}\|_2^2.$$

Η λύση είναι

$$\mathbf{f}_{\text{LS}} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{a}.$$

Όταν τα δεδομένα a_n δεν είναι κωδικοποιημένα, τότε μία εκτίμηση για το $a_{n-\Delta}$ μπορεί να γίνει με χρήση του z_n . Για παράδειγμα, αν $a_n \in 2\text{-PAM}$, τότε

$$\hat{a}_{n-\Delta} = \text{sign}(z_n) = \begin{cases} +1, & \text{αν } z_n > 0 \\ -1, & \text{αν } z_n < 0 \end{cases}.$$

4.3 Γραμμικοί ισοσταθμιστές στο πεδίο της συχνότητας

Και στις δύο περιπτώσεις γραμμικών ισοσταθμιστών, η κρουστική απόκριση επιλέγεται έτσι ώστε

$$h_n * f_n \approx \delta_{n-\Delta}. \quad (16)$$

Φυσικά, η προσέγγιση στις δύο περιπτώσεις γίνεται με διαφορετικούς τρόπους. Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι και στις δύο περιπτώσεις

$$H(f)F(f) \approx e^{-j2\pi\Delta f} \quad (17)$$

που οδηγεί στο

$$|H(f)| |F(f)| \approx 1, \quad (18)$$

ή

$$|F(f)| \approx \frac{1}{|H(f)|}. \quad (19)$$

Από τις (17) και (18) συνεπάγεται ότι με τη βοήθεια των γραμμικών ισοσταθμιστών το συνολικό σύστημα διακριτού χρόνου (διακριτό ισοδύναμο κανάλι-ισοσταθμιστής) προσεγγίζει

ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με χρουστική απόκριση $\delta_{n-\Delta}$ ή, ισοδύναμα, με απόκριση συχνοτήτων με μέτρο ίσο με 1.

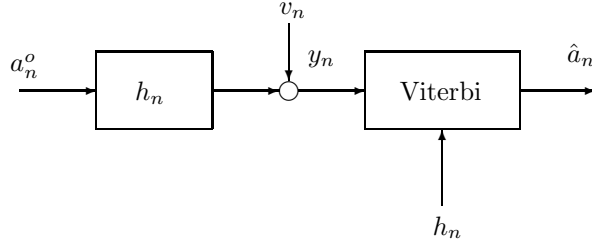
Η έξοδος του ισοσταθμιστή που οφείλεται στον προσθετικό θόρυβο στην έξοδο του φίλτρου λήψης είναι

$$w_n = f_n * v_n \quad (20)$$

με φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_w(f) = |F(f)|^2 S_v(f) \approx \frac{1}{|H(f)|^2} S_v(f). \quad (21)$$

Αν υποθέσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία v_n είναι λευκός θόρυβος (αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν το φίλτρο στο δέκτη είναι square-root raised cosine), τότε η w_n , γενικά, δεν είναι λευκή στοχαστική διαδικασία. Οι γραμμικοί ισοσταθμιστές “χρωματίζουν” το θόρυβο ενισχύοντάς τον στις περιοχές συχνοτήτων όπου το κανάλι έχει φασματικά κενά (spectral nulls), δηλαδή, $|H(f)| \approx 0$. Σαν συνέπεια, η σύμβολο-προς-σύμβολο ανίχνευση δεν είναι βέλτιστη (λόγω έγχρωμου θορύβου). Συνεπώς, οι γραμμικοί ισοσταθμιστές, οι οποίοι συνήθως ακολουθούνται από σύμβολο-προς-σύμβολο ανίχνευση, δεν είναι αποδοτικοί σε αυτές τις περιπτώσεις. Μη-γραμμικές διατάξεις, όπως ο αλγόριθμος Viterbi, συμπεριφέρονται πολύ καλύτερα, έχουν όμως αρκετά μεγαλύτερη πολυπλοκότητα.



Σχήμα 4: Ισοστάθμιση Viterbi.

5 Αλγόριθμος Viterbi

Σε αυτό το εδάφιο, θα μελετήσουμε έναν εξαιρετικά χρήσιμο και διάσημο αλγόριθμο, τον αλγόριθμο ισοστάθμισης του Viterbi⁶. Η σχέση εισόδου–εξόδου του καναλιού περιγράφεται από τη συνέλιξη

$$y_n = \sum_{k=0}^M h_k a_{n-k}^o + v_n$$

όπου τα a_n^o δηλώνουν την πραγματική (άγνωστη στο δέκτη) ακολουθία συμβόλων εισόδου. Τα σύμβολα a_n^o ανήκουν σε έναν αστερισμό, έστω A-PAM. Υποθέτουμε ότι στο δέκτη γνωρίζουμε (και, άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε) την χρονική απόκριση του καναλιού (στην πράξη, διαθέτουμε μία εκτίμηση του καναλιού).

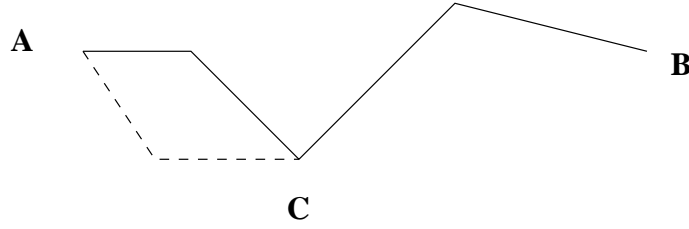
Αναζητούμε την ακολουθία $\{a_1^*, \dots, a_N^*\}$ η οποία είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\min_{\substack{\{a_1, \dots, a_N\} \\ a_i \in \text{A-PAM}}} \sum_{n=1}^{N+M} \left(y_n - \sum_{k=0}^M h_k a_{n-k} \right)^2. \quad (22)$$

Όταν τα σύμβολα εισόδου είναι ισοπίθανα και ο θόρυβος λευκός Gaussian, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\{a_1^*, \dots, a_N^*\}$ είναι η ακολουθία με την ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος (η απόδειξη είναι εκτός των πλαισίων του μαθήματος).

Αφού κάθε a_n μπορεί να πάρει A τιμές, το πλήθος των διαφορετικών ακολουθιών μήκους N είναι A^N . Συνεπώς, η εύρεση της βέλτιστης ακολουθίας μέσω εξαντλητικής αναζήτησης

⁶Ο Andrew Viterbi είναι από τους πρωτεργάτες των ψηφιακών τηλεπικοινωνιών. Ο αλγόριθμος προτάθηκε το 1967 για αποκωδικοποίηση συνελικτικών κωδίκων. Η πρώτη εφαρμογή του αλγόριθμου Viterbi στο πρόβλημα της ισοστάθμισης καναλιού έγινε το 1972 από τον David Forney.



Σχήμα 5: Αρχή βελτιστότητας.

είναι πρακτικά αδύνατη, λόγω τεράστιας υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Θα επιλύσουμε αποδοτικά το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης εκμεταλλευόμενοι

1. μία έξυπνη αναπαράσταση των δυνατών καταστάσεων του καναλιού
2. την αρχή βελτιστότητας (optimality principle) του Bellman από το δυναμικό προγραμματισμό.

Προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού μπορούν να θεωρηθούν σαν προβλήματα εύρεσης του μονοπατιού ελάχιστης απόστασης (ελάχιστου κόστους) μεταξύ δύο κόμβων ενός γράφου με αποστάσεις (κόστη).

5.1 Αρχή βελτιστότητας

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε βρει το βέλτιστο μονοπάτι από το **A** στο **B** (σχεδιασμένο με συνεχή γραμμή στο Σχήμα 5) και αν αυτό περνάει από το **C**, τότε το **AC** (με συνεχή γραμμή) είναι το βέλτιστο μονοπάτι από το **A** στο **C**. Διότι αν δεν ήταν βέλτιστο, θα μπορούσαμε να πάρουμε το βέλτιστο (σχεδιασμένο με διακεκομμένη γραμμή), να το ενώσουμε με το **CB** και να πάρουμε ένα μονοπάτι από το **A** στο **C** με μικρότερο κόστος από το αρχικό. Αυτό είναι άτοπο, διότι το αρχικό μονοπάτι είναι βέλτιστο.

5.2 Trellis αναπαράσταση

Έστω ότι το κανάλι έχει τρεις συντελεστές h_0 , h_1 και h_2 και ο αστερισμός εισόδου είναι 2-PAM (γενικά, το κανάλι έχει $M + 1$ συντελεστές h_0, \dots, h_M και ο αστερισμός είναι A-PAM). Για τον υπολογισμό της εξόδου τη χρονική στιγμή n_0 , το κανάλι χρησιμοποιεί το

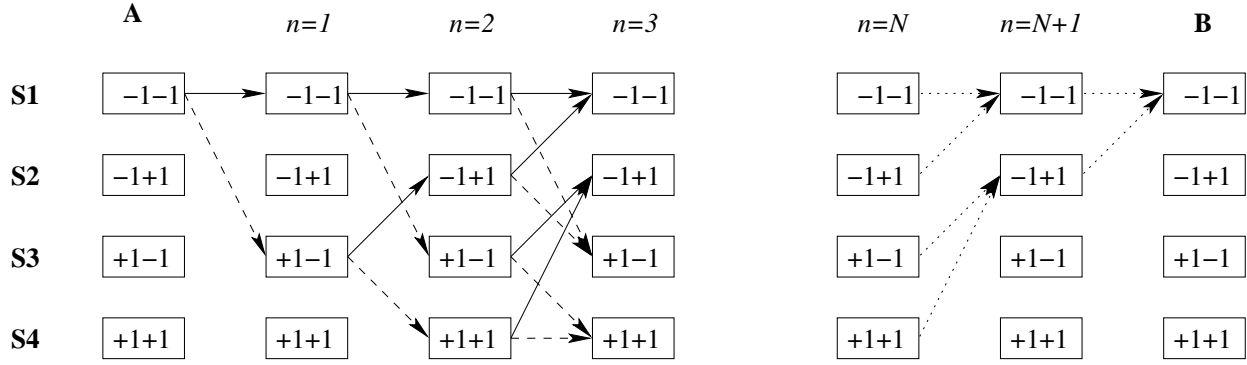
τρέχον δείγμα εισόδου a_{n_0} καθώς και τα 2 προηγούμενα δείγματα a_{n_0-1}, a_{n_0-2} . Συνεπώς, κάθε χρονική στιγμή, το κανάλι διαθέτει στη μνήμη του τα δείγματα εισόδου των δύο (γενικά, M) προηγούμενων χρονικών στιγμών. Τα δείγματα που διαθέτει στη μνήμη του το κανάλι καθορίζουν, κάθε χρονική στιγμή, την **κατάσταση** (state) του καναλιού. Στην περίπτωση μας, κάθε κατάσταση \mathbf{S} αποτελείται από δύο στοιχεία s_1 και s_2 τα οποία τη χρονική στιγμή n_0 είναι

$$s_1 = a_{n_0-1}, \quad s_2 = a_{n_0-2}.$$

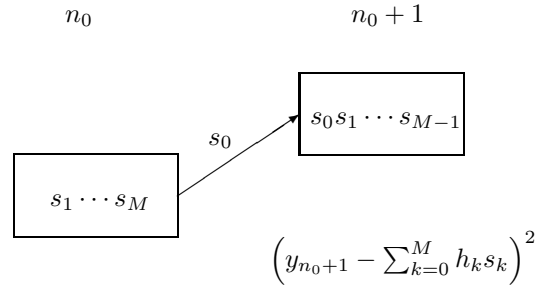
Το πλήθος των διαφορετικών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το κανάλι είναι 2^2 (γενικά, 2^M).

Το κανάλι παράγει την έξοδο της χρονικής στιγμής n_0 και αλλάζει κατάσταση. Η καινούργια κατάσταση υπολογίζεται, γενικά, ως εξής: Αν το τρέχον σύμβολο ήταν το s_0 και η κατάσταση ήταν η $\mathbf{S} = s_1 s_2 \cdots s_M$, τότε η καινούργια κατάσταση θα είναι η $\mathbf{S}' = s_0 s_1 \cdots s_{M-1}$.

Στο Σχήμα 6, σχεδιάζουμε την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα πιθανά δείγματα εισόδου και στις καταστάσεις του καναλιού, για τις χρονικές στιγμές $n = 1$ μέχρι $n = N + 2$. Με συνεχή γραμμή σχεδιάζονται οι ακμές που αντιστοιχούν σε σύμβολο εισόδου -1 ενώ με διακεκομμένη αυτές που αντιστοιχούν σε $+1$. Οι ακμές των δύο τελευταίων χρονικών στιγμών διαφέρουν από τις υπόλοιπες διότι δεν υπάρχει δείγμα εισόδου τις στιγμές αυτές. Ο γράφος που προκύπτει καλείται trellis. Στο σχήμα, έχουμε κάνει την (αυθαίρετη) σύμβαση ότι αρχίζουμε από την κατάσταση $\mathbf{S}_1 = -1 - 1$, παρόλο που αρχικά το κανάλι δεν έχει τίποτα στη μνήμη του (πριν τη χρονική στιγμή $n = 1$ δεν υπήρχε είσοδος στο κανάλι). Κάτι αντίστοιχο γίνεται και στο τέλος του trellis. Οι συμβάσεις αυτές δεν οδηγούν σε σφάλματα, αρκεί ο υπολογισμός του τοπικού κόστους να γίνεται χρησιμοποιώντας την πραγματική και όχι τη συμβατική κατάσταση του καναλιού. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει από οποιαδήποτε κατάσταση της πρώτης στήλης του trellis και να είχαμε καταλήξει σε οποιαδήποτε κατάσταση της τελευταίας στήλης, αρκεί να είχαμε υπολογίσει τα τοπικά κόστη σωστά. Από τη χρονική στιγμή $n = 2$ μέχρι και τη στιγμή $n = N$ η κατάσταση του καναλιού συμφωνεί με τα περιεχόμενα της μνήμης του καναλιού.



Σχήμα 6: Trellis αναπαράσταση για $M = 2$ και 2-PAM.



Σχήμα 7: Τοπικό κόστος Viterbi.

Καθεμία από τις 2^N δυνατές ακολουθίες εισόδου καθορίζει ένα μονοπάτι στο trellis και αντίστροφα.

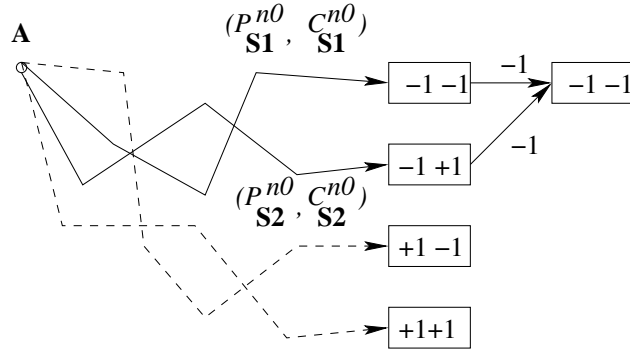
Παρατηρούμε ότι

1. σε κάθε κατάσταση καταλήγουν 2 (γενικά, A) ακμές,
2. από κάθε κατάσταση εξέρχονται 2 (γενικά, A) ακμές.

Η ελαχιστοποίηση της (22) μπορεί να μεταφραστεί σε εύρεση του μονοπατιού ελάχιστου κόστους από την αρχή **A** έως το τέλος **B** του trellis, ορίζοντας τα βάρη (κόστη) των ακμών του trellis ως εξής:

Υποθέτοντας ότι τη χρονική στιγμή n_0 το κανάλι είναι στην κατάσταση $\mathbf{S} = s_1 \cdots s_M$ και το νέο σύμβολο εισόδου είναι s_0 , τότε η έξοδος του καναλιού θα είναι

$$\sum_{k=0}^M h_k s_k$$



Σχήμα 8: Αναδρομή Viterbi.

και το τοπικό κόστος θα είναι η απόσταση αυτής της εξόδου από την πραγματική έξοδο του καναλιού y_{n_0+1} (με την απόσταση να αντιστοιχεί στο τετράγωνο της διαφοράς)

$$\left(y_{n_0+1} - \sum_{k=0}^M h_k s_k \right)^2.$$

Σημειώστε ότι επειδή το s_0 δηλώνει το τρέχον δείγμα εισόδου και τα $s_1 \dots s_M$ τα M πιο πρόσφατα δείγματα, το τοπικό κόστος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\left(y_{n_0+1} - \sum_{k=0}^M h_k a_{n_0+1-k} \right)^2.$$

5.3 Αναδρομικός υπολογισμός βέλτιστων μονοπατιών

Όλα τα μονοπάτια από το **A** στο **B**, σε κάθε χρονική στιγμή, περνούν από τις A^M δυνατές καταστάσεις, \mathbf{S}_i , $i = 1 \dots, A^M$. Αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε αποδοτικά το βέλτιστο μονοπάτι από το **A** σε κάθε κατάσταση τη χρονική στιγμή n_0 , τότε, εξαιτίας της αρχής της βελτιστότητας, θα είχαμε τα A^M υποψήφια αρχικά τμήματα (μέχρι τη χρονική στιγμή n_0) του βέλτιστου μονοπατιού. Αυτός ο υπολογισμός μπορεί να γίνει αναδρομικά ως εξής:

Έστω ότι τη χρονική στιγμή n_0 γνωρίζουμε (άρα, θα πρέπει να έχουμε αποθηκεύσει), για κάθε δυνατή κατάσταση \mathbf{S}_i , $i = 1 \dots, A^M$, το βέλτιστο μονοπάτι από το **A** στην κατάσταση αυτή, $P_{\mathbf{S}_i}^{n_0}$, καθώς και το κόστος του, $C_{\mathbf{S}_i}^{n_0}$. Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο μονοπάτι για την κατάσταση \mathbf{S}_j , $j = 1, \dots, A^M$, τη χρονική στιγμή $n_0 + 1$, συγκρίνοντας το

άθροισμα

$$C_{\mathbf{S}_i}^{m_0} + \text{τοπικό κόστος}_{ij}^{n_0+1}$$

για όλες τις καταστάσεις \mathbf{S}_i , της χρονικής στιγμής n_0 , για τις οποίες υπάρχει δυνατότητα μετάβασης στην \mathbf{S}_j , τη χρονική στιγμή $n_0 + 1$. Ως τοπικό κόστος $\text{τοπικό κόστος}_{ij}^{n_0+1}$ ορίζεται το βάρος της ακμής που συνδέει τις δύο καταστάσεις.

Το βέλτιστο μονοπάτι καθορίζεται από το ελάχιστο από τα παραπάνω αθροίσματα ως εξής. Αν η μετάβαση στην \mathbf{S}_j γίνεται μέσω του συμβόλου s_* και το παραπάνω άθροισμα ελαχιστοποιείται για $i = i_*$, τότε

$$\mathcal{P}_{\mathbf{S}_j^{n_0+1}} = \mathcal{P}_{\mathbf{S}_{i_*}^{n_0}} \cup \{s_*\}$$

και

$$C_{\mathbf{S}_j^{n_0+1}} = C_{\mathbf{S}_{i_*}^{n_0}} + \text{τοπικό κόστος}_{i_*j}^{n_0+1}.$$

Δουλεύοντας αντίστοιχα και για τις άλλες καταστάσεις της χρονικής στιγμής $n_0 + 1$, υπολογίζουμε τα επαυξημένα βέλτιστα μονοπάτια και τα κόστη τους και μπορούμε να συνεχίσουμε στην αναδρομή για τη χρονική στιγμή $n_0 + 2$.

Στο τέλος, επιλέγουμε τα N πρώτα σύμβολα του μονοπατιού ελαχίστου κόστους από το \mathbf{A} στο \mathbf{B} , και αυτή είναι η εκτίμησή μας για την ακολουθία εισόδου.

5.4 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Κάθε χρονική στιγμή $n_0 + 1$, για καθεμία από τις A^M δυνατές καταστάσεις \mathbf{S}_j , θα πρέπει να υπολογίζονται τα A κόστη μετάβασης από την αρχή του trellis \mathbf{A} στη συγκεκριμένη κατάσταση. Τα κόστη αυτά υπολογίζονται ως εξής:

$$C_{\mathbf{S}_i}^{m_0} + \text{τοπικό κόστος}_{ij}^{n_0+1}$$

όπου \mathbf{S}_i είναι κατάσταση τη χρονική στιγμή n_0 από την οποία υπάρχει δυνατότητα μετάβασης στην \mathbf{S}_j τη χρονική στιγμή $n_0 + 1$, $C_{\mathbf{S}_i}^{m_0}$ είναι το βέλτιστο κόστος μετάβασης από το \mathbf{A} στην κατάσταση \mathbf{S}_i τη χρονική στιγμή n_0 και τοπικό κόστος $\text{τοπικό κόστος}_{ij}^{n_0+1}$ είναι το βάρος της ακμής που συνδέει την \mathbf{S}_i με την \mathbf{S}_j . Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται με πολυπλοκότητα $O(M)$,

και επειδή γίνονται για καθεμία από τις A^M καταστάσεις, η πολυπλοκότητα κάθε βήματος της αναδρομής είναι $O(MA^{M+1})$. Θεωρώντας όλες τις χρονικές στιγμές, λαμβάνουμε ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Viterbi είναι $O(NA^{M+1})$.