1 Συγχρονισμός σε μη ιδανικά κανάλια

Οι σημειώσεις ευρίσκονται σε στάδιο επεξεργασίας...

Έστω το σύνθετο αναλογικό κανάλι (analog composite channel)

$$h(t) = \mathtt{SRRC}_T(t) * c(t) * \mathtt{SRRC}_T(t), \tag{1}$$

όπου $c(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του φυσικού καναλιού (physical channel). Έστω η ακολουθία εισόδου A_n, για $n = 0, \dots, N-1$, με περίοδο συμβόλου T.

Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου στον δέκτη δίδεται από τη σχέση

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, h(t - kT) + w(t). \tag{2}$$

Υποθέτουμε ότι το διακριτό ισοδύναμο κανάλι έχει M μη μηδενικούς συντελεστές (αυτή η πληροφορία θεωρείται διαθέσιμη στον μηχανικό, και προκύπτει από μελέτες των ασύρματων καναλιών στο περιβάλλον λειτουργίας του συστήματος).

Τότε, η σχέση εισόδου-εξόδου του ισοδύναμου διακριτού καναλιού, με είσοδο $\{A_n\}$ και κρουστική απόκριση $\{h_m^\tau = h(\tau + mT)\}_{m=0}^{M-1}$, δίδεται από τη σχέση

$$y_k = \sum_{m=0}^{M-1} h_m^\tau A_{k-m} + w_k, \tag{3}$$

όπου η ποσότητα w_k συμβολίζει τον προσθετικό λευκό θόρυβο.

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα (να το αποδείξετε) ότι η ισχύς του χρήσιμου σήματος στην έξοδο του ισοδύναμου διακριτού καναλιού ισούται με

$$\mathcal{E}_A^\tau = \sigma_A^2 \sum_{m=0}^{M-1} |h_m^\tau|^2, \tag{4}$$

ενώ η ισχύς του θορύβου είναι ανεξάρτητη του τ και ισούται με σ_W^2.

Φαίνεται λογικό να επιλέξουμε το τ με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσουμε το SNR στην έξοδο του ισοδύναμου διακριτού καναλιού, δηλαδή, να θέσουμε

$$\tau^* = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}} \sum_{m=0}^{M-1} |h_m^\tau|^2. \tag{5}$$

Στη συνέχεια, περιγράφουμε μία μέθοδο υπολογισμού του τ^*.

Έστω ότι λαμβάνουμε δείγματα με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{T}{\text{over}}$, και έστω ότι τα σύμβολα A_k, για $k = 0, \dots, N_{\text{tr}} - 1$, είναι σύμβολα εκπαίδευσης.

Για $d = 0, \dots, d_{\max}$, υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\begin{aligned}
\texttt{corr}_d := \texttt{corr}(dT_s) &= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} A_n^*\, y(dT_s + nT) \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} A_n^* \sum_{k=0}^{N-1} A_k\, h(dT_s + nT - kT) \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} A_n^* \sum_{k=0}^{N-1} A_k\, h(dT_s + (n-k)T) \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} A_n^* \sum_{k=0}^{N-1} A_k\, h_{n-k}^d \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_n^* A_k\, h_{n-k}^d,
\end{aligned} \tag{6}$$

όπου στο σημείο (a) ορίσαμε $h_n^d := h(dT_s + nT)$. Αν τα σύμβολα A_n είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_A^2, τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\texttt{corr}_d] &= \mathcal{E}\left[\sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_n^* A_k\, h_{n-k}^d\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}\left[A_n^* A_k\right]\, h_{n-k}^d \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\text{tr}}-1} \sigma_A^2\, h_0^d \\
&= N_{\text{tr}} \sigma_A^2 h_0^d \\
&= N_{\text{tr}} \sigma_A^2 h(dT_s).
\end{aligned} \tag{7}$$

Αρα, μία εκτίμηση για το δειγματοληπτημένο κανάλι, με περίοδο δειγματοληψίας T_s, λαμβάνεται ως εξής

$$\texttt{corr}_d \approx N_{\text{tr}} \sigma_A^2 h(dT_s) \Longrightarrow h(dT_s) \approx \frac{\texttt{corr}_d}{N_{\text{tr}} \sigma_A^2}. \tag{8}$$

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με τη μεγιστοποίηση του `SNR` στην έξοδο του διακριτού ισοδύναμου καναλιού, μία εκτίμηση για το διακριτό ισοδύναμο κανάλι μήκους M λαμβάνεται υπολογίζοντας την ενέργεια υπακολουθιών, μήκους M, της ακολουθίας $\{\mathtt{corr_d}\}_{\mathtt{d=0}}^{\mathtt{d_{max}}}$, με το πρώτο στοιχείο της d-οστής υπακολουθίας να είναι το $\mathtt{corr}_d$, και τα διαδοχικά στοιχεία της να απέχουν κατά over θέσεις, δηλαδή,

$$\mathtt{E}_d = \sum_{m=0}^{M-1} |\mathtt{corr}_{d+m*\mathrm{over}}|^2, \tag{9}$$

και υπολογίζοντας

$$d^* = \operatorname*{argmax}_d \mathtt{E}_d. \tag{10}$$

Τότε, το αντίστοιχο διακριτό ισοδύναμο κανάλι δίδεται από την ακολουθία

$$\{h_d^*, h_{d^*+\mathrm{over}}, \ldots, h_{d^*+(M-1)\mathrm{over}}\}. \tag{11}$$

2 Κανάλι με (μικρό) CFO

Αν στο σύστημα υπάρχει "μικρό" carrier frequency offset, με τιμή ΔF, τότε η έξοδος δίδεται από τη σχέση (αγνοούμε τον προσθετικό θόρυβο)

$$y(t) = e^{j(2\pi\Delta F t+\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, h(t-kT). \tag{12}$$

Αν επαναλάβουμε την διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\texttt{corr}_d := \texttt{corr}(dT_s) &= \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} A_n^* \, y(dT_s+nT) \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} A_n^* \, e^{j(2\pi\Delta F(dT_s+nT)+\phi)} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, h(dT_s+nT-kT) \\
&= e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} A_n^* e^{j2\pi\Delta F nT} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \, h(dT_s+(n-k)T) \\
&= e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} e^{j2\pi\Delta F nT} \sum_{k=0}^{N-1} A_n^* A_k \, h_{n-k}^d,
\end{aligned} \tag{13}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\texttt{corr}_d] &= e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} e^{j2\pi\Delta F nT} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}[A_n^* A_k] \, h_{n-k}^d \\
&= e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} e^{j2\pi\Delta F nT} \sigma_A^2 h_0^d \\
&= e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} e^{j2\pi\Delta F nT} \sigma_A^2 h_0^d \\
&= c^d \, h_0^d \\
&= c^d \, h(dT_s),
\end{aligned} \tag{14}$$

για

$$c^d := e^{j(2\pi\Delta F dT_s+\phi)} \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{tr}}-1} e^{j2\pi\Delta F nT} \sigma_A^2. \tag{15}$$

Άρα,

$$h(dT_s) \approx \frac{\texttt{corr}_d}{c^d}. \tag{16}$$

Παρατηρούμε ότι $|c^d| = c$, για κάθε d. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$|h(dT_s)| \approx \frac{|\texttt{corr}_d|}{c}, \tag{17}$$

και συγχρονισμός μπορεί να επιτευχθεί όπως στην περίπτωση χωρίς CFO.

Ο από-κοινού υπολογισμός του ισοδύναμου διακριτού καναλιού **και** του CFO θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

3 Υπολογισμός καναλιού και CFO

Σε αυτό το εδάφιο, απαιτείται η γνώση του υλικού το οποίο σχετίζεται με την εκτίμηση καναλιού ελαχίστων τετραγώνων, μέσω συμβόλων εκπαίδευσης.

Το πρόβλημα ταυτόχρονης εκτίμησης του καναλιού και του CFO μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων της μορφής

$$F(\omega, \mathbf{h}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\mathbf{h}\|_2^2, \tag{18}$$

όπου $\omega := 2\pi\Delta f$ και

$$\mathbf{\Gamma}(\omega) := \mathrm{diag}\left(1, e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \ldots, e^{j(K-1)\omega}\right), \tag{19}$$

με K ίσο με τη διάσταση του διανύσματος $\mathbf{y}$.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, δουλεύουμε ως εξής. Για κάθε τιμή του ω, το πρόβλημα (18) είναι ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων με πίνακα συντελεστών

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}. \tag{20}$$

Συνεπώς, η βέλτιστη λύση για το $\mathbf{h}$ ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{LS}}(\omega) &= \left(\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{A}^H\mathbf{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{21}$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή στη συνάρτηση κόστους (18), τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &F(\omega, \mathbf{h}(\omega)) = \|\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\mathbf{h}(\omega)\|_2^2 \\ &\quad = \left(\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\mathbf{h}(\omega)\right)^H\left(\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\mathbf{h}(\omega)\right) \\ &\quad = \left(\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}\right)^H\left(\mathbf{y} - \mathbf{\Gamma}(\omega)\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Αν ορίσουμε

$$\mathbf{P} := \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H, \tag{23}$$

τότε

$$
\begin{aligned}
F(\omega, \mathbf{h}(\omega)) &= \left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}\right)^H \left(\mathbf{y} - \boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}\right) \\
&= \mathbf{y}^H\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y} + \mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y} \\
&= c - 2\mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y} + \mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y} \\
&\overset{!!}{=} c - \mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

όπου ορίσαμε $c := \mathbf{y}^H\mathbf{y}$, και χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\mathbf{P}^H = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega) = \mathbf{I}.$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (18),

1. κατασκευάζουμε ένα πλέγμα ισαπεχόντων τιμών στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ (ή $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ αν παραμετροποιήσουμε ως προς $\Delta f = \frac{\omega}{2\pi}$), και υπολογίζουμε το ω, έστω ω^*, το οποίο μεγιστοποιεί τη συνάρτηση

$$w(\omega) = \mathbf{y}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega)\mathbf{P}\boldsymbol{\Gamma}(\omega)^H\mathbf{y}. \tag{25}$$

   Κατόπιν, υπολογίζουμε το βέλτιστο $\mathbf{h}$, ως

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(\omega^*) = \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\boldsymbol{\Gamma}(\omega^*)^H\mathbf{y}. \tag{26}$$